

۱۹۹۸ ۲ توجه کنید که اگر $x > \frac{3}{2}$ ، آن‌گاه عبارت $2x - 3$ مثبت است و در

نتیجه نامعادله مورد نظر به صورت زیر است:

$$((m^2 - 1)x^2 - 4mx + 4)(x - 3\sqrt{x} + 2) > 0$$

از طرف دیگر،

$$A = x - 3\sqrt{x} + 2 = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)$$

بنابراین علامت عبارت A با شرط $x > \frac{3}{2}$ به صورت زیر است:

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	۴	$+\infty$
A		+	-	+

چون علامت A روی بازه (۲, ۴) منفی است و این بازه مجموعه جواب‌های نامعادله است، پس علامت عبارت $B = (m^2 - 1)x^2 - 4mx + 4$ در این بازه باید منفی باشد تا حاصل ضرب AB مثبت شود. همچنین علامت A روی بازه $(\frac{3}{2}, 2)$ منفی است و این بازه جواب نامعادله نیست. پس علامت B روی این بازه باید مثبت باشد. بنابراین $x = 2$ باید ریشه B باشد. پس

$$(m^2 - 1)4 - 8m + 4 = 0 \Rightarrow m^2 - 2m = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 0 \end{cases}$$

اگر $m = 2$ ، آن‌گاه

$$B = (3x^2 - 8x + 4) = (3x - 2)(x - 2)$$

در این صورت علامت B روی بازه (۲, ۴) مثبت است که قابل قبول نیست.

اگر $m = 0$ ، آن‌گاه

$$B = -x^2 + 4 = -(x - 2)(x + 2)$$

در این صورت علامت B روی بازه (۲, ۴) منفی است و قابل قبول است.

۱۹۹۹ ۲ توجه کنید که

$$\tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2(\frac{1}{4})}{1 - (\frac{1}{4})^2} = \frac{8}{15}$$

$$\sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2(\frac{1}{4})}{1 + (\frac{1}{4})^2} = \frac{8}{17}$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - (\frac{1}{4})^2}{1 + (\frac{1}{4})^2} = \frac{15}{17}$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{\tan \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\frac{8}{15} - \frac{8}{17}}{\frac{8}{17} - \frac{15}{17}} = -\frac{16}{105}$$

۲۰۰۰ ۴ معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha)(1 + \cos 8\alpha) = \frac{1}{8}$$

$$(2 \cos^2 \alpha)(2 \cos^2 2\alpha)(2 \cos^2 4\alpha) = \frac{1}{8}$$

$$(\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha)^2 = \frac{1}{64}$$

$$\left(\frac{\sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha}{\sin \alpha}\right)^2 = \frac{1}{64}$$

$$\left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha\right)^2 = \frac{1}{64} \sin^2 \alpha$$

۱۹۹۵ ۴ اگر فرض کنیم $t = x^2 \geq 0$ ، معادله مورد نظر به صورت

$$t^2 - 7t - 5 = 0 \text{ درمی‌آید. جواب‌های این معادله به صورت زیر هستند:}$$

$$t = \frac{7 + \sqrt{69}}{2}, \quad t = \frac{7 - \sqrt{69}}{2} < 0 \text{ (غ.ق.)}$$

چون جواب‌های معادله بالا باید نامنفی باشند، پس فقط جواب $t = \frac{7 + \sqrt{69}}{2}$

قبول است. پس جواب‌های معادله اصلی به صورت زیر هستند:

$$x_1 = \sqrt{\frac{7 + \sqrt{69}}{2}}, \quad x_2 = -\sqrt{\frac{7 + \sqrt{69}}{2}}$$

پس حاصل ضرب و مجموع جواب‌های معادله مورد نظر برابر است با

$$P = x_1 x_2 = -\left(\sqrt{\frac{7 + \sqrt{69}}{2}}\right)^2 = -\frac{7 + \sqrt{69}}{2}$$

$$S = x_1 + x_2 = \sqrt{\frac{7 + \sqrt{69}}{2}} - \sqrt{\frac{7 + \sqrt{69}}{2}} = 0$$

بنابراین مقدار عبارت خواسته شده برابر است با

$$2P^2 - 3SP + 2S = 2P^2 - 0 + 0 = 2\left(-\frac{7 + \sqrt{69}}{2}\right)^2 = 2\left(\frac{49 + 69 + 14\sqrt{69}}{4}\right) = 59 + 7\sqrt{69}$$

۱۹۹۶ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \log 5 & \log 2 \\ \log 2 & \log 5 \end{vmatrix} &= (\log 5)^2 - (\log 2)^2 \\ &= (\log 5 + \log 2)(\log 5 - \log 2) \\ &= \log 10 \times \log \frac{5}{2} = 1 \times \log \frac{5}{2} = \log 10 \frac{5}{2} \end{aligned}$$

بنابراین معادله مورد نظر به صورت زیر درمی‌آید:

$$\log_{10} \frac{5}{2} \times \log_{\frac{5}{2}} (3x - 2) = 1$$

$$\log_{10} (3x - 2) = 1 \Rightarrow 3x - 2 = 10 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$$

۱۹۹۷ ۴ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که

$$\log_{21} 1323 = \log_{21} 9 \times 147 = \log_{21} 9 + \log_{21} 147 = 2 \log_{21} 3 + \log_{21} 147$$

بنابراین عبارت مورد نظر به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned} &(\log_{21} 3)^2 + \log_{21} 147 (2 \log_{21} 3 + \log_{21} 147) \\ &= (\log_{21} 3)^2 + 2 \log_{21} 3 \log_{21} 147 + (\log_{21} 147)^2 \\ &= (\log_{21} 3 + \log_{21} 147)^2 = (\log_{21} (3 \times 147))^2 = (\log_{21} 441)^2 \\ &= (\log_{21} 21^2)^2 = (2 \log_{21} 21)^2 = (2 \times 1)^2 = 4 \end{aligned}$$

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$\log_{21} 3 = \log_{21} \frac{21}{7} = \log_{21} 21 - \log_{21} 7 = 1 - \log_{21} 7$$

$$\log_{21} 147 = \log_{21} (21 \times 7) = \log_{21} 21 + \log_{21} 7 = 1 + \log_{21} 7$$

$$\log_{21} 1323 = \log_{21} (21^2 \times 3) = 2 \log_{21} 21 + \log_{21} 3 = 2 + \log_{21} 3$$

پس عبارت مورد نظر به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} &(1 - \log_{21} 7)^2 + (1 + \log_{21} 7)(2 + \log_{21} 3) \\ &= 1 + (\log_{21} 7)^2 - 2 \log_{21} 7 + 2 + \log_{21} 3 \\ &\quad + 2 \log_{21} 7 + \log_{21} 7 \log_{21} 3 \\ &= 3 + \log_{21} 3 + (\log_{21} 7)(\log_{21} 7 + \log_{21} 3) \\ &= 3 + \log_{21} 3 + \log_{21} 7 \log_{21} 21 \\ &= 3 + \log_{21} 3 + \log_{21} 7 = 3 + \log_{21} 21 = 3 + 1 = 4 \end{aligned}$$

$$k=1 \Rightarrow \begin{cases} a_p = 2^1 = 2 \\ a_f = -2 \times 1 + 4 = 2 \\ a_o = \left[\frac{3 \times 1 + 2}{1+2} \right] + a = 1 + a \end{cases}$$

$$k=2 \Rightarrow \begin{cases} a_p = 2^2 = 4 \\ a_f = -2 \times 2 + 4 = 0 \\ a_o = \left[\frac{3 \times 2 + 2}{2+2} \right] + a = 2 + a \end{cases}$$

$$k=3 \Rightarrow a_p = 2^3 = 8$$

مجموع ده جمله اول دنباله برابر ۱۹ است. پس
 $1+4+1+a+2+2+1+a+4+0+2+a+8=19$

$$3a+25=19 \Rightarrow a=-2$$

بنابراین اگر $n=3k+2$. آن‌گاه

$$a_n = \left[\frac{n}{k+2} \right] + a = \left[\frac{3k+2}{k+2} \right] - 2 = \left[3 - \frac{4}{k+2} \right] - 2 = 1 + \left[\frac{-4}{k+2} \right]$$

$$a_p = -1, a_o = -1, a_\lambda = a_{11} = a_{14} = a_{17} = a_{20} = a_{23} = a_{26} = a_{29} = 0$$

بنابراین مجموع جملات بالا برابر ۲- است.

۴ ۲۰۰۴ اگر فرض کنیم $t = \sqrt{9 \cos^2 x - 1}$. آن‌گاه ضابطه تابع f به صورت

$$y = 2^t - 2^{-t}$$

$$0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 9 \cos^2 x \leq 9 \Rightarrow -1 \leq \cos^2 x - 1 \leq 8$$

$$-1 \leq \sqrt{9 \cos^2 x - 1} \leq 2 \Rightarrow -1 \leq t \leq 2$$

بنابراین باید برد تابع با ضابطه $f(t) = 2^t - 2^{-t}$ و دامنه $[-1, 2]$ را به دست بیاوریم. توجه

کنید که تابع $y = 2^t$ اکیداً صعودی است. پس تابع $y = 2^{-t}$ اکیداً نزولی است و تابع

$y = -2^{-t}$ اکیداً صعودی است. پس تابع $y = 2^t - 2^{-t}$ نیز اکیداً صعودی است. بنابراین

$$-1 \leq t \leq 2 \Rightarrow f(-1) \leq f(t) \leq f(2)$$

$$-\frac{3}{4} \leq f(t) \leq \frac{15}{4} \Rightarrow R_f = \left[-\frac{3}{4}, \frac{15}{4} \right]$$

بنابراین $a = -\frac{3}{4}$ و $b = \frac{15}{4}$ و در نتیجه $b - a = \frac{21}{4}$.

۱ ۲۰۰۵ راه حل اول دامنه تابع f مجموعه جواب‌های نامعادله

$\frac{1}{6+\sqrt{|x|}} > 0$ است. اگر فرض کنیم $\sqrt{|x|} = t \geq 0$. آن‌گاه نامعادله به صورت

زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{6+t-t^2} > 0 \Rightarrow 6+t-t^2 > 0 \Rightarrow t^2 - t - 6 < 0 \Rightarrow (t-3) \underbrace{(t+2)}_{\text{مثبت}} < 0$$

$$t-3 < 0 \Rightarrow 0 \leq t < 3$$

بنابراین باید نامعادله $0 \leq \sqrt{|x|} < 3$ را حل کنیم. نابرابری $0 \leq \sqrt{|x|}$ به ازای هر مقدار

x برقرار است. پس باید نامعادله $\sqrt{|x|} < 3$ را حل کنیم.

$$\sqrt{|x|} < 3 \Rightarrow |x| < 9 \Rightarrow -9 < x < 9$$

راه حل دوم واضح است که $x = -4$ در دامنه تابع قرار دارد.

$$f(-4) = \log_2 \left(\frac{1}{6+\sqrt{4-4}} \right) = \log_2 \frac{1}{4}$$

عدد -4 فقط در بازه $(-9, 9)$ قرار دارد و عضو بازه‌های دیگر گزینه‌ها نیست. پس

گزینه (۱) درست است.

$$\left(\frac{1}{2} \sin 4\alpha \cos 4\alpha \right)^2 = \frac{1}{64} \sin^2 \alpha \Rightarrow \left(\frac{1}{8} \sin 8\alpha \right)^2 = \frac{1}{64} \sin^2 \alpha$$

$$\sin^2 8\alpha = \sin^2 \alpha \Rightarrow \frac{1 - \cos 16\alpha}{2} = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos 16\alpha = \cos 2\alpha$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} 16\alpha = 2k\pi + 2\alpha \\ 16\alpha = 2k\pi - 2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{k\pi}{7} \\ \alpha = \frac{k\pi}{9} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

بنابراین بزرگ‌ترین جواب معادله که در بازه $[0, \pi]$ قرار دارد، برابر $\frac{8\pi}{9}$ است.

۳ ۲۰۰۱ فرض کنید $P(x) = ax^2 + bx + c$. در این صورت

$P'(x) = 2ax + b$. اگر $P(x)$ را بر $P'(x)$ تقسیم کنیم و خارج قسمت برابر

$\frac{1}{3}x + 1$ و باقی‌مانده برابر -2 باشد، آن‌گاه تساوی زیر همواره برقرار است:

$$P(x) = P'(x) \left(\frac{1}{3}x + 1 \right) - 2$$

$$ax^2 + bx + c = (2ax + b) \left(\frac{1}{3}x + 1 \right) - 2$$

این تساوی را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + \left(\frac{2a}{3} + b \right)x + b - 2$$

برای این که تساوی بالا به‌ازای هر مقدار x برقرار باشد، باید

$$\begin{cases} 2a + \frac{b}{3} = b \Rightarrow b = 4a \\ c = b - 2 \Rightarrow c = 4a - 2 \end{cases}$$

بنابراین چندجمله‌ای $P(x)$ برابر $ax^2 + 4ax + 4a - 2$ است که مجموع ضرایب آن

$$a + 4a + 4a - 2 = 9a - 2$$

برابر است با

واضح است که کمترین مقدار این مجموع وقتی a عددی طبیعی است، برابر 7 است که

به‌ازای $a=1$ به دست می‌آید.

۱ ۲۰۰۲ ابتدا توجه کنید که

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + 1 \Rightarrow a_{100} = \frac{1}{a_{99}} + 1 \Rightarrow \frac{k}{m} = \frac{1}{a_{99}} + 1$$

$$\frac{1}{a_{99}} = \frac{k-m}{m} \Rightarrow a_{99} = \frac{m}{k-m}$$

بنابراین

$$a_{99} = \frac{1}{a_{98}} + 1 \Rightarrow \frac{m}{k-m} = \frac{1}{a_{98}} + 1 \Rightarrow \frac{1}{a_{98}} = \frac{m}{k-m} - 1 = \frac{2m-k}{k-m}$$

$$a_{98} = \frac{k-m}{2m-k}$$

ده جمله اول دنباله را پیدا می‌کنیم.

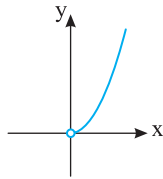
$$a_n = \begin{cases} 2^k & n = 3k \\ -2k + 4 & n = 3k + 1 \\ \left[\frac{n}{k+2} \right] + a & n = 3k + 2 \end{cases}$$

$$k=0 \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 2^0 = 1 \\ a_1 = -2 \times 0 + 4 = 4 \\ a_2 = \left[\frac{3 \times 0 + 2}{0+2} \right] + a = 1 + a \end{cases}$$

۲۰۰۸ ابتدا توجه کنید که ضابطه تابع f به صورت زیر است:

$$f(x) = 9^{\log_3 x} = (3^2)^{\log_3 x} = (3^{\log_3 x})^2 = x^2$$

از طرف دیگر، دامنه تابع f بازه $(0, +\infty)$ است. پس نمودار تابع f به صورت زیر است:



۲۰۰۹ توجه کنید که اگر $x \rightarrow 0^+$ ، آن گاه $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow 1$ و

$\sqrt{2x} \rightarrow 0^+$ ، بنابراین می‌توانیم از هم‌ارزی‌های زیر استفاده کنیم:

$$\alpha \rightarrow 0: \quad \tan \alpha \sim \alpha, \quad 1 - \cos \alpha \sim \frac{1}{2}\alpha^2$$

در این صورت حد مورد نظر به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1)^2}{(\frac{1}{\sqrt{2x}})^n} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \sqrt{1-x^2})^2}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{x^n} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \sqrt{1-x^2})^2}{x^n} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - (1-x^2))^2}{x^n} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(1 + \sqrt{1-x^2})^2} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} \times \frac{1}{(1+1)^2} \times \frac{1}{1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{4x^{n-2}} \end{aligned}$$

اکنون توجه کنید که اگر $n > 4$ ، آن گاه حد بالا نامتناهی است و نمی‌تواند برابر a باشد.

اگر $n = 4$ ، آن گاه حد بالا برابر $\frac{1}{4}$ است و در نتیجه $a = \frac{1}{4}$ و $a + n = \frac{17}{4}$ ، اگر

$n < 4$ ، آن گاه حد بالا برابر صفر است و در نتیجه $a = 0$ و $a + n < 4$ ، پس $a + n$

می‌تواند تمام مقادیر مجموعه $(-\infty, 4) \cup \{\frac{17}{4}\}$ را داشته باشد.

۲۰۱۰ توجه کنید که توابع $y = \frac{3}{x^2}$ و $y = \frac{-2}{x^2}$ روی بازه $(-\infty, 0)$

به ترتیب اکیداً صعودی و اکیداً نزولی هستند. پس اگر $x \rightarrow (-\frac{1}{2})^-$ ، آن گاه

$$\frac{3}{x^2} \rightarrow 12^-, \quad \frac{-2}{x^2} \rightarrow (-8)^+$$

بنابراین در یک همسایگی چپ $x = -\frac{1}{2}$ ، توابع $y = [\frac{3}{x^2}]$ و $y = [\frac{-2}{x^2}]$ به ترتیب با

تابع‌های $y = 11$ و $y = -8$ برابرند. پس

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^-} \frac{10x - 5 + [\frac{3}{x^2}]}{16x - [\frac{-2}{x^2}]} = \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^-} \frac{10x - 5 + 11}{16x - (-8)} = \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^-} \frac{10x + 6}{16x + 8} = -\infty$$

۲۰۱۱ راه‌حل اول چون تابع f در دو نقطه ناپیوسته است، پس مخرج $f(x)$

دو ریشه دارد. چون تابع f دو مجانب موازی با محورهای مختصات دارد، پس یا هر دو

مجانب آن قائم هستند و مجانب افقی ندارد یا یک مجانب قائم و یک مجانب افقی دارد.

اگر $a = 0$ ، آن گاه $f(x) = \frac{-bx^2 + 2}{-bx + 2}$ که در این صورت مخرج $f(x)$ فقط یک ریشه

دارد و قابل قبول نیست (واضح است که $b \neq 0$). اگر $a \neq 0$ ، آن گاه

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^r}{ax^r} = 1$$

۲۰۰۶ اگر نمودار تابع $y = \sqrt{4-x}$ را k واحد در راستای قائم انتقال دهیم،

نمودار تابع $y = \sqrt{4-x} + k$ به دست می‌آید و اگر نمودار به دست آمده را $k-2$ واحد

در راستای افقی انتقال دهیم، نمودار تابع زیر به دست می‌آید:

$$y = \sqrt{4 - (x - (k-2))} + k = \sqrt{k+2-x} + k = f(x)$$

چون نمودار تابع f نمودار تابع وارونش را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند، پس اگر

طول نقطه تقاطع a باشد، آن گاه

$$f(a) = 1 \Rightarrow \sqrt{k+2-a} + k = 1$$

$$\sqrt{k+2-a} = 1-k \xrightarrow{1-k \geq 0} a = k+2 - (1-k)^2$$

$$f^{-1}(a) = 1 \Rightarrow f(1) = a \Rightarrow \sqrt{k+2-1} + k = a \xrightarrow{k \geq -1} a = \sqrt{k+1} + k$$

توجه کنید که تساوی‌های فوق فقط برای $-1 \leq k \leq 1$ می‌توانند برقرار باشند.

$$k+2 - (1-k)^2 = \sqrt{k+1} + k \Rightarrow 1+2k - k^2 = \sqrt{k+1}$$

با شرط $1+2k - k^2 \geq 0$ ، یعنی $1-\sqrt{2} \leq k \leq 1+\sqrt{2}$ ، طرفین را به توان دو می‌رسانیم

و معادله را ساده می‌کنیم:

$$k^4 - 4k^3 + 2k^2 + 2k = 0 \Rightarrow k(k^3 - 4k^2 + 2k + 2) = 0$$

$$\begin{cases} k = 0 \\ k = 3 \\ k = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

چون $-1 \leq k \leq 1$ و $1-\sqrt{2} \leq k \leq 1+\sqrt{2}$ ، پس $k = 0$ فقط

قابل قبول است. بنابراین $f(x) = \sqrt{2-x}$ و طول نقطه برخورد نمودار تابع

$y = f(x) - 1$ با محور طول‌ها به صورت زیر است:

$$y = 0 \Rightarrow f(x) - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{2-x} = 1 \Rightarrow x = 1$$

۲۰۰۷ ابتدا توابع $f \circ g$ و $f \circ f$ را معین می‌کنیم.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1-x^2) = \begin{cases} -1 & 1-x^2 < -1 \\ 1-x^2 & -1 \leq 1-x^2 \leq 1 \\ 1 & 1-x^2 > 1 \end{cases}$$

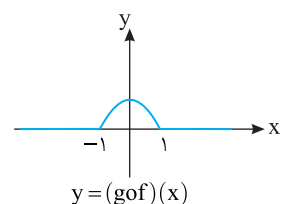
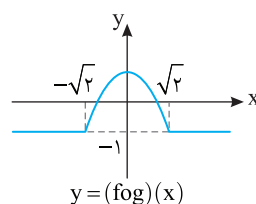
$$= \begin{cases} -1 & x^2 > 2 \\ 1-x^2 & 0 \leq x^2 \leq 2 \\ 1 & x^2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} -1 & x > \sqrt{2} \text{ یا } x < -\sqrt{2} \\ 1-x^2 & -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \\ 1 & x < -1 \text{ یا } x > 1 \end{cases}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 1 - f^2(x) = \begin{cases} 1 - (-1)^2 & x < -1 \\ 1 - x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 - 1^2 & x > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & x < -1 \text{ یا } x > 1 \\ 1 - x^2 & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع‌های $f \circ g$ و $f \circ f$ به صورت زیر است و هرکدام از آن‌ها در دو نقطه

مشقت‌پذیر نیستند.



توجه کنید که $D_f = [0, +\infty) - \{1\}$ و

$$f(x) = 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(2x)(x^2 - 1)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3x}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}$$

بنابراین $f'(x)$ روی $[0, +\infty) - \{1\}$ مثبت است. از طرف دیگر،

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 - (+\infty) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 - (-\infty) = +\infty$$

بنابراین تابع f روی دامنه‌اش صعودی نیست ولی روی بازه‌های $[0, 1)$ و $(1, +\infty)$ صعودی است.

مشق تابع f را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^3 - 8}, \quad D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(x^3 - 8) - x^{\frac{1}{2}}(3x^2)}{(x^3 - 8)^2} = \frac{x^{\frac{1}{2}}(x^3 - 3x^2 - 4)}{(x^3 - 8)^2}$$

x	$-\infty$	0	2	$\sqrt[3]{32}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	-	+

بنابراین $f'(x)$ روی بازه‌های $[0, 2)$ و $(\sqrt[3]{32}, +\infty)$ و هر زیرمجموعه آن‌ها اکیداً نزولی است. بیشترین مقدار طول این بازه‌ها مربوط به بازه $[0, 2)$ است که برابر ۲ است.

ابتدا اکسترم‌های نسبی تابع f را معین می‌کنیم:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x+1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = -2 - 3 + 12 + 1 = 8 \\ x = 2 \Rightarrow y = 16 - 12 - 24 + 1 = -19 \end{cases}$$

پس نقاط $A(-1, 8)$ و $B(2, -19)$ نقاط اکسترم نسبی تابع f هستند و شیب

$$\frac{-19 - 8}{2 - (-1)} = -9 \quad \text{پاره‌خط } AB \text{ برابر است با}$$

شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول a برابر $f'(a)$ است. پس می‌خواهیم بدانیم به‌ازای چند مقدار a تساوی $f'(a) = -9$ برقرار است.

$$f'(a) = 6(a+1)(a-2) = -9 \Rightarrow 2a^2 - 2a - 4 = -3 \Rightarrow 2a^2 - 2a - 1 = 0$$

از معادله بالا دو جواب برای a به‌دست می‌آید. پس دو نقطه روی نمودار تابع f وجود دارد که خط مماس بر نمودار تابع f در آن نقاط موازی پاره‌خط AB است.

ابتدا توجه کنید که

$$\log_a c + \log_b c = 1 \Rightarrow \frac{1}{\log_c a} + \frac{1}{\log_c b} = 1$$

$$\log_c b + \log_c a = \log_c a \times \log_c b \Rightarrow \log_c(ab) = \log_c a \times \log_c b$$

معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\log_7(4^x + 15) = x + 3 \Rightarrow 4^x + 15 = 7^{x+3}$$

$$(2^x)^2 - 8 \times 2^x + 15 = 0 \Rightarrow (2^x - 5)(2^x - 3) = 0$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} 2^x - 5 = 0 \Rightarrow 2^x = 5 \Rightarrow x = \log_2 5 \\ 2^x - 3 = 0 \Rightarrow 2^x = 3 \Rightarrow x = \log_2 3 \end{cases}$$

پس مجموع جواب‌های معادله برابر است با

$$\log_2 5 + \log_2 3 = \log_2 5 \times 3 = \log_2 15$$

یعنی خط $y=1$ مجانب افقی تابع است. پس این تابع فقط یک مجانب قائم دارد، یعنی یکی از ریشه‌های معرج $f(x)$ ریشه صورت آن نیز هست. اگر این ریشه $x=n$ باشد، آن‌گاه

$$\begin{cases} an^2 - bn^2 + 2 = 0 \\ an^2 - bn + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow bn^2 - bn = 0 \Rightarrow bn(n-1) = 0$$

چون $b \neq 0$ و $n \neq 0$ ، پس $n=1$. در نتیجه

$$a - b + 2 = 0 \Rightarrow b = a + 2$$

اکنون توجه کنید که معرج $f(x)$ علاوه بر $x=1$ یک ریشه مضاعف دارد. پس

$$ax^2 - bx + 2 = ax^2 - (a+2)x + 2 = 0 \Rightarrow ax(x-1) - 2(x-1) = 0$$

$$(x-1)(a(x+1) - 2) = 0 \Rightarrow (x-1)(ax^2 + ax - 2) = 0$$

پس معادله $ax^2 + ax - 2 = 0$ ریشه مضاعف دارد، یعنی

$$\Delta = a^2 + 8a = 0 \xrightarrow{a \neq 0} a = -8, b = -6$$

راه‌حل دوم مقادیر a و b را از گزینه‌ها در ضابطه f قرار دهید و درست بودن شرایط مسئله را بررسی کنید.

ابتدا توجه کنید که حد معرج کسر $\frac{f(x)}{x}$ در $x=0$ برابر صفر است و اگر حد صورت آن در این نقطه برابر صفر نباشد، حد این کسر نامتناهی می‌شود، پس

حد صورت کسر، یعنی $f(x)$ هم باید در $x=0$ برابر صفر باشد. پس

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos^2 2x + ax^2 + b) = 1 + 0 + b = 0 \Rightarrow b = -1$$

از طرف دیگر،

$$f(x) = \cos^2 2x + ax^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = -2 \sin 2x \cos 2x + 2ax$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{-2 \sin 2x \cos 2x}{x} + \frac{2ax}{x} \right) = -2 \times 2 \times 1 + 2a = -4 + 2a = 0 \Rightarrow a = 2$$

بنابراین $a+b=6$.

توجه کنید که تابع $f(x) = |\sin 2x| + 1$ در نقطه $x=0$ مشتق‌پذیر نیست:

$$x > 0 \Rightarrow f(x) = \sin 2x + 1 \Rightarrow f'(x) = 2 \cos 2x \Rightarrow f'_+(0) = 2$$

$$x < 0 \Rightarrow f(x) = -\sin 2x + 1 \Rightarrow f'(x) = -2 \cos 2x \Rightarrow f'_-(0) = -2$$

بنابراین شیب نیم‌مماس‌های راست و چپ که در $x=0$ بر نمودار تابع f رسم می‌شوند، به‌ترتیب برابر ۲ و -۲ است. معادله این نیم‌مماس‌ها به‌صورت زیر است:

$$y - f(0) = f'_+(0)(x - 0) \Rightarrow y - 1 = 2x \Rightarrow y = 2x + 1$$

$$y - f(0) = f'_-(0)(x - 0) \Rightarrow y - 1 = -2x \Rightarrow y = -2x + 1$$

نقاط تلاقی امتداد این نیم‌مماس‌ها و نیم‌ساز ناحیه دوم و ناحیه چهارم را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow 2x + 1 = -x \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} y = -2x + 1 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow -2x + 1 = -x \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = -1$$

پس باید فاصله نقاط $A(1, -1)$ و $B(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ را پیدا کنیم:

$$AB = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(-1 - \frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{2 \times \frac{16}{9}} = \frac{4}{3} \sqrt{2}$$

و جدول تعیین علامت AB به صورت زیر است:

x	$-\infty$	۰	۱	$\frac{3}{2}$	۴	$+\infty$
AB	+	-	+	+	-	+

و مجموعه جواب‌های نامعادله $AB \geq 0$ بازه $(1, 4)$ است.

اگر $m = \frac{3}{2}$ ، آن گاه

$$B = \frac{4}{9}x^2 - \frac{28}{3}x + 4 = \frac{4}{9}(5x-3)(2x-3)$$

و جدول تعیین علامت AB به صورت زیر است:

x	$-\infty$	۰	$\frac{3}{5}$	۱	$\frac{3}{2}$	۴	$+\infty$
AB	+	-	+	-	-	+	+

در این صورت مجموعه جواب‌های نامعادله $AB \geq 0$ یک بازه نیست.

حالت سوم: $x = 4$ ریشه B است.

$$16(m^2 - 1) - 16m + 4 = 0 \Rightarrow 4m^2 - 4m - 3 = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}, m = \frac{3}{2}$$

اگر $m = -\frac{1}{2}$ ، آن گاه

$$B = -\frac{3}{4}x^2 + 2x + 4 = (x-4)(-\frac{3}{4}x-1)$$

و جدول تعیین علامت AB به صورت زیر است:

x	$-\infty$	۰	۱	$\frac{3}{2}$	۴	$+\infty$
AB	+	-	+	-	-	+

و مجموعه جواب‌های نامعادله $AB \geq 0$ بازه $(1, \frac{3}{2})$ است.

اگر $m = \frac{3}{2}$ ، آن گاه

$$B = \frac{5}{4}x^2 - 6x + 4 = (x-4)(\frac{5}{4}x-1)$$

و جدول تعیین علامت AB به صورت زیر است:

x	$-\infty$	۰	$\frac{4}{5}$	۱	$\frac{3}{2}$	۴	$+\infty$
AB	+	-	+	-	+	+	+

در این صورت مجموعه جواب‌های نامعادله $AB \geq 0$ یک بازه نیست.

اکنون توجه کنید که اگر $m = 1$ یا $m = -1$ ، آن گاه چندجمله‌ای B از درجه اول است.

این دو حالت را هم باید بررسی کنیم.

اگر $m = 1$ ، آن گاه $B = -4x + 4$ و جدول تعیین علامت AB به صورت زیر است:

x	$-\infty$	۰	۱	$\frac{3}{2}$	۴	$+\infty$
AB	+	-	-	+	-	+

و مجموعه جواب‌های نامعادله $AB \geq 0$ بازه $(\frac{3}{2}, 4)$ است.

اگر $m = -1$ ، آن گاه $B = 4x + 4$ و جدول تعیین علامت AB به صورت زیر است:

x	$-\infty$	۰	۱	$\frac{3}{2}$	۴	$+\infty$
AB	+	-	+	-	+	+

در این صورت مجموعه جواب‌های نامعادله $AB \geq 0$ یک بازه نیست.

بنابراین به ازای $m = 1$ و $m = -\frac{1}{2}$ ، $m = \frac{1}{3}$ ، مجموعه جواب‌های نامعادله $AB \geq 0$ یک بازه است.

ابتدا توجه کنید برای اینکه عبارت‌های رادیکالی موجود در معادله

تعریف شده باشند، باید شرایط زیر وجود داشته باشد:

$$-x^2 + 6x - 8 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 \leq 0 \Rightarrow (x-2)(x-4) \leq 0$$

x	$-\infty$	۲	۴	$+\infty$
$(x-2)(x-4)$	+	-	+	+

$$2 \leq x \leq 4 \quad (I)$$

$$-x^2 + 4x^2 + 25x - 100 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 4x^2 - 25x + 100 \leq 0$$

$$(x^2 - 25x) - (4x^2 - 100) \leq 0 \Rightarrow x(x^2 - 25) - 4(x^2 - 25) \leq 0$$

$$(x^2 - 25)(x-4) \leq 0 \Rightarrow (x-5)(x+5)(x-4) \leq 0$$

x	$-\infty$	-5	4	5	$+\infty$
$(x-5)(x+5)(x-4)$	-	+	-	+	+

$$x \leq -5 \text{ یا } 4 \leq x \leq 5 \quad (II)$$

از (I) و (II) نتیجه می‌شود فقط به ازای $x = 4$ عبارت‌های رادیکالی موجود در

معادله تعریف شده هستند. اکنون کافی است مشخص کنیم $x = 4$ جواب معادله هست یا نه.

$$\sqrt{x + \sqrt{-x^2 + 4x^2 + 25x - 100}} + \sqrt{x^2 + \sqrt{-x^2 + 6x - 8}} = x + 2$$

$$\sqrt{4 + 0} + \sqrt{16 + 0} = 4 + 2 \Rightarrow 2 + 4 = 4 + 2$$

پس $x = 4$ تنها جواب معادله است.

ابتدا توجه کنید که

$$x - 3\sqrt{x+2} = (\sqrt{x-1})(\sqrt{x-2})$$

بنابراین علامت عبارت $A = \frac{2x-3}{x-3\sqrt{x+2}}$ مطابق جدول زیر است:

x	$-\infty$	۰	۱	$\frac{3}{2}$	۴	$+\infty$
A	+	-	+	-	+	+

اکنون فرض کنید $B = (m^2 - 1)x^2 - 4mx + 4$ ، می‌خواهیم مجموعه جواب‌های

نامعادله $AB \geq 0$ یک بازه باشد. اگر B چندجمله‌ای درجه دوم باشد و ریشه نداشته

باشد یا ریشه مضاعف داشته باشد، آن گاه با توجه به علامت A مجموعه جواب‌های

نامعادله $AB \geq 0$ نمی‌تواند یک بازه باشد. پس B دو ریشه دارد و این ریشه‌ها باید از

اعداد $1, \frac{3}{2}, 4$ باشند. بنابراین سه حالت را بررسی می‌کنیم:

حالت اول: $x = 1$ ریشه B است.

$$m^2 - 1 - 4m + 4 = 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 3 = 0 \Rightarrow m = 3, m = 1 \quad (\text{غ.ق.ب.})$$

$$B = 8x^2 - 12x + 4 = 4(x-1)(2x-1)$$

در این صورت جدول تعیین علامت AB به صورت زیر است:

x	$-\infty$	۰	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{3}{2}$	۴	$+\infty$
AB	+	-	+	+	-	+	+

واضح است که مجموعه جواب‌های نامعادله $AB \geq 0$ یک بازه نیست.

حالت دوم: $x = \frac{3}{2}$ ریشه B است.

$$(m^2 - 1)\frac{9}{4} - 4(\frac{3}{2})m + 4 = 0 \Rightarrow 9m^2 - 9 - 24m + 16 = 0$$

$$9m^2 - 24m + 7 = 0 \Rightarrow (3m-1)(3m-7) = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{3}, m = \frac{7}{3}$$

اگر $m = \frac{1}{3}$ ، آن گاه

$$B = -\frac{8}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 4 = (2x-3)(-\frac{4}{9}x - \frac{4}{3})$$

بنابر قضیه تقسیم، تساوی زیر به‌ازای هر مقدار x برقرار است:

$$P(x) = (x^2 + 2x)Q(x) + 3x + 1$$

از طرفین این تساوی مشتق می‌گیریم.

$$P'(x) = (2x + 2)Q(x) + (x^2 + 2x)Q'(x) + 3$$

در تساوی بالا قرار می‌دهیم $x = -2$ و نتیجه می‌شود

$$P'(-2) = (-4 + 2)Q(-2) + (4 - 4)Q'(-2) + 3$$

$$P'(-2) = -2Q(-2) + 3 = -2 \times 3 + 3 = -3$$

پس باقی‌مانده تقسیم $P'(x)$ بر $x + 2$ برابر -3 است.

ابتدا چند جمله از دنباله را مشخص می‌کنیم.

$$a_1 = -1, \quad a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$$

$$a_2 = 2 - \frac{1}{a_1} = 2 + 1 = 3 \Rightarrow a_2 = \frac{2 \times 2 - 1}{2 \times 2 - 3}$$

$$a_3 = 2 - \frac{1}{a_2} = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \Rightarrow a_3 = \frac{2 \times 3 - 1}{2 \times 3 - 3}$$

$$a_4 = 2 - \frac{1}{a_3} = 2 - \frac{3}{5} = \frac{7}{5} \Rightarrow a_4 = \frac{2 \times 4 - 1}{2 \times 4 - 3}$$

$$a_5 = 2 - \frac{1}{a_4} = 2 - \frac{5}{7} = \frac{9}{7} \Rightarrow a_5 = \frac{2 \times 5 - 1}{2 \times 5 - 3}$$

بنابراین می‌توان حدس زد که

$$a_{99} = \frac{2 \times 99 - 1}{2 \times 99 - 3} = \frac{197}{195}, \quad a_{100} = \frac{2 \times 100 - 1}{2 \times 100 - 3} = \frac{199}{197}$$

در نتیجه حاصل ضرب صد جمله اول دنباله برابر است با

$$a_1 a_2 \cdots a_{100} = (-1) \left(\frac{3}{1}\right) \left(\frac{5}{3}\right) \left(\frac{7}{5}\right) \left(\frac{9}{7}\right) \cdots \left(\frac{197}{195}\right) \left(\frac{199}{197}\right) = -199$$

ده جمله اول دنباله را پیدا می‌کنیم.

$$a_n = \begin{cases} 2^k & n = 3k \\ -2k + 4 & n = 3k + 1 \\ \left[\frac{n}{k+2}\right] + a & n = 3k + 2 \end{cases}$$

$$k=0 \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 2^0 = 1 \\ a_1 = -2 \times 0 + 4 = 4 \\ a_2 = \left[\frac{2 \times 0 + 2}{0+2}\right] + a = 1 + a \end{cases}$$

$$k=1 \Rightarrow \begin{cases} a_3 = 2^1 = 2 \\ a_4 = -2 \times 1 + 4 = 2 \\ a_5 = \left[\frac{3 \times 1 + 2}{1+2}\right] + a = 1 + a \end{cases}$$

$$k=2 \Rightarrow \begin{cases} a_6 = 2^2 = 4 \\ a_7 = -2 \times 2 + 4 = 0 \\ a_8 = \left[\frac{3 \times 2 + 2}{2+2}\right] + a = 2 + a \end{cases}$$

$$k=3 \Rightarrow a_9 = 2^3 = 8$$

مجموع ده جمله اول دنباله برابر ۱۹ است. پس

$$1 + 4 + 1 + a + 2 + 2 + 1 + a + 4 + 0 + 2 + a + 8 = 19$$

$$3a + 25 = 19 \Rightarrow a = -2$$

بنابراین باید میانگین a_{28} و a_{29} را پیدا کنیم.

$$a_{28} = -2 \times 9 + 4 = -14, \quad a_{29} = \left[\frac{29}{9+2}\right] - 2 = 2 - 2 = 0$$

پس میانگین جملات بیست و نهم و سی‌ام (a_{28}) و سی‌ام (a_{29}) برابر است با $-\frac{14+0}{2} = -7$

راه‌حل اول مخرج مشترک می‌گیریم و ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} &= \frac{\sin^2 \theta + 1 - \cos^2 \theta}{(1 - \cos \theta) \sin \theta} = \frac{2 \sin^2 \theta}{(1 - \cos \theta) \sin \theta} \\ &= \frac{2 \sin \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{2 \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2}} = 2 \cot \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

راه‌حل دوم ابتدا هریک از کسرها را ساده می‌کنیم. سپس حاصل را ساده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} &= \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} + \frac{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} \\ &= \cot \frac{\theta}{2} + \cot \frac{\theta}{2} = 2 \cot \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

راه‌حل سوم حاصل عبارت را به‌ازای $\theta = \frac{\pi}{3}$ حساب می‌کنیم:

$$\frac{\sin \frac{\pi}{3}}{1 - \cos \frac{\pi}{3}} + \frac{1 + \cos \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1 + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3} + \frac{3}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

اکنون مقدار گزینه‌ها را به‌ازای $\theta = \frac{\pi}{3}$ حساب می‌کنیم:

$$\cos \frac{\theta}{2} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{گزینه (۱)}$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{گزینه (۲)}$$

$$2 \cot \frac{\theta}{2} = 2 \cot \frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3} \quad \text{گزینه (۳)}$$

$$2 \tan \frac{\theta}{2} = 2 \tan \frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{گزینه (۴)}$$

معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(1 + \cos \alpha)(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha) = \frac{1}{\lambda}$$

$$(2 \cos^2 \frac{\alpha}{2})(2 \cos^2 \alpha)(2 \cos^2 2\alpha) = \frac{1}{\lambda}$$

$$(\lambda \cos \frac{\alpha}{2} \cos \alpha \cos 2\alpha)^2 = 1$$

واضح است که $\alpha = 2k\pi$ جواب معادله نیست، پس $\sin \frac{\alpha}{2} \neq 0$ و معادله را می‌توان

به‌صورت زیر نوشت:

$$\left(\frac{\lambda \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \alpha \cos 2\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}\right)^2 = 1 \Rightarrow (\lambda \sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha)^2 = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$(2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha)^2 = \sin^2 \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{1 - \cos 4\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \Rightarrow \cos 4\alpha = \cos \alpha$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} \lambda \alpha = 2k\pi + \alpha \\ \lambda \alpha = 2k\pi - \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2k\pi}{\lambda} \\ \alpha = \frac{2k\pi}{\lambda} \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

تعداد جواب‌های واقع در بازه $[0, 2\pi]$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید. (توجه کنید که

$$\alpha \neq 2k\pi$$

$$0 < \frac{2k\pi}{\lambda} < 2\pi \Rightarrow 0 < k < \lambda \Rightarrow k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$0 < \frac{2k\pi}{\lambda} < 2\pi \Rightarrow 0 < k < \lambda \Rightarrow k \in \{1, 2, \dots, \lambda\}$$

پس معادله ۱۴ جواب در بازه $[0, 2\pi]$ دارد.

۲۰۲۶ توجه کنید که

$$\begin{aligned} 0 \leq \sin^2 x \leq 1 &\Rightarrow 0 \leq \sqrt{5} \sin^2 x \leq \sqrt{5} \Rightarrow -1 \leq \sqrt{5} \sin^2 x - 1 \leq 4 \\ 0 \leq \sqrt{5} \sin^2 x - 1 &\leq 2 \Rightarrow -2 \leq -\sqrt{5} \sin^2 x - 1 \leq 0 \\ \sqrt{-2} \leq \sqrt{-\sqrt{5} \sin^2 x - 1} &\leq \sqrt{0} \Rightarrow \frac{1}{4} \leq f(x) \leq 1 \end{aligned}$$

بنابراین $R_f = [\frac{1}{4}, 1]$ در نتیجه $a = \frac{1}{4}, b = 1 \Rightarrow a + b = \frac{5}{4}$

۲۰۲۷ توجه کنید که

$$\log_{\frac{1}{2}} t = \log_{2^{-1}} t^{-1} = \log_2 t$$

بنابراین اگر فرض کنیم $t = 12 + \sqrt{x} - [x]$ آن گاه

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} t - 1 = \log_2 t - 1$$

چون $R_f = \{\log_2 3, \log_2 5\}$ پس

$$\begin{cases} \log_2 t - 1 = \log_2 3 \Rightarrow \log_2 t = 1 + \log_2 3 = \log_2 6 \Rightarrow t = 6 \\ \log_2 t - 1 = \log_2 5 \Rightarrow \log_2 t = 1 + \log_2 5 = \log_2 10 \Rightarrow t = 10 \end{cases}$$

بنابراین با فرض $u = \sqrt{x} \geq 0$ داریم

$$\begin{cases} 12 + u - u^2 = 6 \Rightarrow u^2 - u - 6 = 0 \Rightarrow u = 3, u = -2 \text{ (غ.ق.)} \\ 12 + u - u^2 = 10 \Rightarrow u^2 - u - 2 = 0 \Rightarrow u = 2, u = -1 \text{ (غ.ق.)} \end{cases}$$

بنابراین

$$\sqrt{[x]} = 2 \Rightarrow [x] = 4 \Rightarrow 4 \leq x < 5$$

$$\sqrt{[x]} = 3 \Rightarrow [x] = 9 \Rightarrow 9 \leq x < 10$$

بنابراین حداکثر عددهای صحیح ۴ و ۹ در دامنه تابع f قرار دارند.

۲۰۲۸ تابع f اکیداً صعودی است و اگر نمودار آن را k واحد به بالا یا پایین

منتقل کنیم، باز هم تابعی اکیداً صعودی حاصل می‌شود که نمودار وارونش را روی خط $y = x$ قطع می‌کند. پس نقطه تقاطع نمودار تابع $y = f(x) + k$ و وارونش نقطه $(1, 1)$ است، پس

$$f(1) + k = 1 \Rightarrow \sqrt{1+3} + k = 1 \Rightarrow k = -1$$

اکنون اگر نمودار حاصل را نسبت به محور x قرینه کنیم، نمودار تابع $y = -(f(x) - 1)$ به دست می‌آید و اگر این نمودار را ۴ واحد در جهت افقی به سمت چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y = -f(x+4) + 1$ به دست می‌آید. پس ضابطه تابع مورد نظر به صورت زیر است:

$$y = -\sqrt{\sqrt{x+4}+3} + 1$$

واضح است که نمودار این تابع از نقطه $(0, 1-\sqrt{5})$ عبور می‌کند.

۲۰۲۹ ابتدا توابع f و g را معین می‌کنیم.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1-x^2) = \begin{cases} -1 & 1-x^2 < -1 \\ 1-x^2 & -1 \leq 1-x^2 \leq 1 \\ 1 & 1-x^2 > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -1 & x^2 > 2 \\ 1-x^2 & 0 \leq x^2 \leq 2 \\ 1 & x^2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} -1 & x > \sqrt{2} \text{ یا } x < -\sqrt{2} \\ 1-x^2 & -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 1 - f^2(x) = \begin{cases} 1 - (-1)^2 & x < -1 \\ 1 - x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 - 1^2 & x > 1 \end{cases}$$

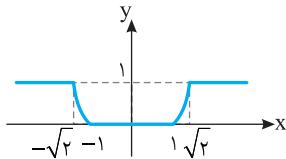
$$= \begin{cases} 0 & x < -1 \text{ یا } x > 1 \\ 1 - x^2 & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

بنابراین تابع $h = g \circ f - f \circ g$ به صورت زیر است:

$$h(x) = \begin{cases} 0 - (-1) & x < -\sqrt{2} \\ 0 - (1-x^2) & -\sqrt{2} \leq x < -1 \\ 1-x^2 - (1-x^2) & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 - (1-x^2) & 1 < x \leq \sqrt{2} \\ 0 - (-1) & x \geq \sqrt{2} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 1 & x < -\sqrt{2} \text{ یا } x \geq \sqrt{2} \\ x^2 - 1 & -\sqrt{2} \leq x < -1 \text{ یا } 1 < x \leq \sqrt{2} \\ 0 & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

پس نمودار تابع h به صورت زیر است و ماکزیم مقدار آن برابر ۱ است.



۲۰۳۰ ابتدا توجه کنید که اگر $x \rightarrow 0^+$ ، آن گاه $[x] = 0$ ، پس

$$\tan[x] = \tan 0 = 0$$

از طرف دیگر، $\sqrt{3x} \rightarrow 0^+$ و $\sqrt{1-x^2} \rightarrow 0^-$ و می‌توان از هم‌ارزی‌های

$$\sin \alpha \sim \alpha \text{ و } 1 - \cos \alpha \sim \frac{1}{2} \alpha^2 \text{ استفاده کرد. پس}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\sqrt{1-x^2}-1) - 2 \tan[x]}{x^n (1 - \cos \sqrt{3x})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^n (\frac{1}{2}(3x))}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-x^2-1}{\frac{3}{2} x^{n+1}} \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}+1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{3x^{n-2}}$$

اکنون توجه کنید که اگر $n > 2$ ، آن گاه حد بالا موجود نیست. اگر $n = 2$ ، آن گاه حد بالا برابر $-\frac{1}{3}$ است. پس $a = -\frac{1}{3}$ و در نتیجه $a^n = \frac{1}{9}$ اگر $0 < n < 2$ ، آن گاه حد

مورد نظر برابر صفر است و در نتیجه $a^n = 0$. بنابراین مقدار a^n می‌تواند برابر $\frac{1}{9}$ یا

صفر باشد که فقط $\frac{1}{9}$ در گزینه‌ها وجود دارد.

۲۰۳۱ توجه کنید که اگر $x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+$ ، آن گاه $(-x)^{-2} \rightarrow 12^+$ و $\frac{3}{x^2} \rightarrow 12^+$

بنابراین $[-\frac{2}{x^2}] = -9$ و $[\frac{3}{x^2}] = 12$. پس حد مورد نظر به صورت زیر است:

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} \frac{16x - (-9)}{24x + 12} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

۲۰۳۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \frac{x^3 - 5x + 4}{(x-a)(4x^2 - 4x + 1)} = \frac{(x-1)(x^2 + x - 4)}{(x-a)(2x-1)^2}$$

واضح است که $y = \frac{1}{4}$ مجانب افقی و $x = \frac{1}{2}$ مجانب قائم نمودار تابع f است. پس این

تابع نباید مجانب قائم دیگری داشته باشد. سه حالت ممکن است:

حالت اول: $x = a$ همان $x = \frac{1}{2}$ باشد، یعنی $a = \frac{1}{2}$

حالت دوم: $x = a$ همان $x = 1$ باشد، یعنی $a = 1$

حالت سوم: $x = a$ ریشه معادله $x^2 + x - 4 = 0$ باشد که در این حالت مجموع مقادیر ممکن برای a برابر -1 است. پس مجموع تمام مقادیر ممکن a برابر است با

$$\frac{1}{2} + 1 - 1 = \frac{1}{2}$$

۳ ۲۰۳۳ ابتدا مشتق تابع f را پیدا می‌کنیم.

$$f(x) = \sin^n(x^2) \Rightarrow f'(x) = 2nx \cos(x^2) \sin^{n-1}(x^2)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)f'(x)}{(1-\cos x)^m} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^n(x^2) 2nx \cos(x^2) \sin^{n-1}(x^2)}{(1-\cos x)^m} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2nx \sin^{2n-1}(x^2) \cos(x^2)}{(1-\cos x)^m} = 2n\sqrt{2} \end{aligned}$$

اکنون از هم‌ارزی‌های $1-\cos \alpha \sim \frac{1}{2}\alpha^2$ و $\sin \alpha \sim \alpha$ استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2nx(x^2)^{2n-1} \cos(x^2)}{\left(\frac{1}{2}x^2\right)^m} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{n \times 2^{m+1} x^{4n-1}}{x^{2m}} = 2^{m+1} n \sqrt{2}$$

بنابراین

$$\begin{cases} 2m = 4n - 1 \Rightarrow m = 2n - \frac{1}{2} \\ n \times 2^{m+1} = 2^{m+1} \sqrt{2} \Rightarrow n \times 2^{2n - \frac{1}{2} + 1} = 2^{2n - \frac{1}{2} + 1} \sqrt{2} \Rightarrow n = 2 \Rightarrow m = \frac{7}{2} \end{cases}$$

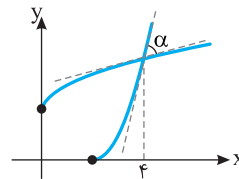
پس $2m + n = 9$.

۴ ۲۰۳۴ تابع $f(x) = \sqrt{x+2}$ اکیداً صعودی است و محل تقاطع نمودار آن با

نمودار وارونش روی خط $y=x$ است. پس کافی است معادله $f(x) = x$ را حل کنیم.

$$\sqrt{x+2} = x \Rightarrow \sqrt{x} = x-2 \Rightarrow x = x^2 - 4x + 4$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4, x = 1 \text{ (غ.ق.)}$$



اکنون شیب خطوط مماس بر نمودار تابع‌های f و f^{-1} را در نقطه $x=4$ پیدا می‌کنیم.

$$f(x) = \sqrt{x+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{4}$$

$$f^{-1}(x) = (x-2)^2 \Rightarrow (f^{-1})'(x) = 2(x-2) \Rightarrow (f^{-1})'(4) = 4$$

$$\tan \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| \text{ از تساوی } m_1 \text{ و } m_2 \text{ با شیب‌های } m_1 \text{ و } m_2 \text{ از تساوی}$$

به‌دست می‌آید. پس

$$\tan \alpha = \left| \frac{4 - \frac{1}{4}}{1 + 4 \cdot \frac{1}{4}} \right| = \frac{15}{8}, \quad \sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{15}{8}}{1 + \left(\frac{15}{8}\right)^2} = \frac{240}{289}$$

۱ ۲۰۳۵ مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم.

$$f(x) = 3\sqrt[3]{x} + |x| = \begin{cases} 3\sqrt[3]{x} + x & x \geq 0 \\ 3\sqrt[3]{x} - x & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1 & x > 0 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1 & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1 = 0 \text{ (غ.ق.)} \\ \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	+

بنابراین تابع f روی بازه $[-1, +\infty)$ صعودی است.

۳ ۲۰۳۶ مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم.

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 2} \Rightarrow f'(x) &= \frac{2x^2(x^2 - 2) - 2x(x^2 - 3)}{(x^2 - 2)^2} \\ &= \frac{2x^4 - 4x^2 + 6x}{(x^2 - 2)^2} = \frac{2x(x^3 - 2x + 3)}{(x^2 - 2)^2} \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-2	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$+\infty$
$f'(x)$			-	+	+	+	-	-	+	+	

بنابراین تابع f روی بازه‌های $(-\infty, -\sqrt{3})$ ، $(-\sqrt{3}, -\sqrt{2})$ ، $(-\sqrt{2}, -1)$ ، $(-1, 0)$ ، $(0, 1)$ ، $(1, \sqrt{2})$ ، $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ و $(\sqrt{3}, +\infty)$ اکیداً

نزولی است و در نقاط $-\sqrt{3}$ ، -1 ، 0 ، 1 ، $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ (بجای بار) جهت صعودی و نزولی نمودار تابع f تغییر می‌کند.

۱ ۲۰۳۷ مشتق اول و مشتق دوم تابع را تعیین علامت می‌کنیم و نقاط مینیمم

نسبی و عطف تابع را معین می‌کنیم.

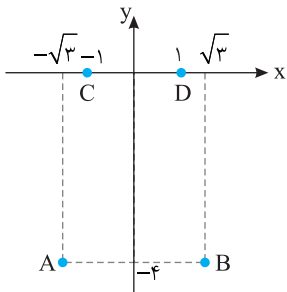
$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 5 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x \Rightarrow f''(x) = 6x - 12$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{3}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	+	-	-	+
$f''(x)$		+	+	-	-	+	+

min عطف max عطف min



پس نقاط $A(-\sqrt{3}, -4)$ و

$B(\sqrt{3}, -4)$ مینیمم نسبی تابع f

هستند و نقاط $C(-1, 0)$ و $D(1, 0)$

نقاط عطف این تابع هستند. شیب

پاره‌خط‌های AB و CD برابر صفر

است. بنابراین زاویه بین آن‌ها برابر صفر

است.