۱۹۹۵ گزینهٔ ۴ اگر فرض کنیم $t=x^2\geq 0$، معادلهٔ مورد نظر به‌صورت $t^2-7t-5=0$ درمی‌آید. جواب‌های این معادله به‌صورت زیر هستند:

$$t=\frac{7+\sqrt{69}}{2},\quad t=\frac{7-\sqrt{69}}{2}<0\ (\text{غ.ق.ق})$$

چون جواب‌های معادلهٔ بالا باید نامنفی باشند، پس فقط جواب $t=\frac{7+\sqrt{69}}{2}$ قابل قبول است. پس جواب‌های معادلهٔ اصلی به‌صورت زیر هستند:

$$x_1=\sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}},\quad x_2=-\sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}}$$

پس حاصل‌ضرب و مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر است با

$$P=x_1x_2=-\left(\sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}}\right)^2=-\frac{7+\sqrt{69}}{2}$$

$$S=x_1+x_2=\sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}}-\sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}}=0$$

بنابراین مقدار عبارت خواسته شده برابر است با

$$2P^2-3SP+2S=2P^2-0+0=2\left(-\frac{7+\sqrt{69}}{2}\right)^2$$

$$=2\left(\frac{49+69+14\sqrt{69}}{4}\right)=59+7\sqrt{69}$$

۱۹۹۶ گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{vmatrix}\log 5 & \log 2\\ \log 2 & \log 5\end{vmatrix}=(\log 5)^2-(\log 2)^2$$

$$=(\log 5+\log 2)(\log 5-\log 2)$$

$$=\log 10\times\log\frac{5}{2}=1\times\log\frac{5}{2}=\log_{10}\frac{5}{2}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\log_{10}\frac{5}{2}\times\log_{\frac{5}{2}}(3x-2)=1$$

$$\log_{10}(3x-2)=1\Rightarrow 3x-2=10\Rightarrow 3x=12\Rightarrow x=4$$

۱۹۹۷ گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$\log_{21}1323=\log_{21}9\times 147=\log_{21}9+\log_{21}147=2\log_{21}3+\log_{21}147$$

بنابراین عبارت مورد نظر به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$(\log_{21}3)^2+\log_{21}147(2\log_{21}3+\log_{21}147)$$

$$=(\log_{21}3)^2+2\log_{21}3\log_{21}147+(\log_{21}147)^2$$

$$=(\log_{21}3+\log_{21}147)^2=(\log_{21}(3\times 147))^2=(\log_{21}441)^2$$

$$=(\log_{21}21^2)^2=(2\log_{21}21)^2=(2\times 1)^2=4$$

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$\log_{21}3=\log_{21}\frac{21}{7}=\log_{21}21-\log_{21}7=1-\log_{21}7$$

$$\log_{21}147=\log_{21}(21\times 7)=\log_{21}21+\log_{21}7=1+\log_{21}7$$

$$\log_{21}1323=\log_{21}(21^2\times 3)=2\log_{21}21+\log_{21}3=2+\log_{21}3$$

پس عبارت مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$(1-\log_{21}7)^2+(1+\log_{21}7)(2+\log_{21}3)$$

$$=1+(\log_{21}7)^2-2\log_{21}7+2+\log_{21}3$$

$$+2\log_{21}7+\log_{21}7\log_{21}3$$

$$=3+\log_{21}3+(\log_{21}7)(\log_{21}7+\log_{21}3)$$

$$=3+\log_{21}3+\log_{21}7\log_{21}21$$

$$=3+\log_{21}3+\log_{21}7=3+\log_{21}21=3+1=4$$

۱۹۹۸ گزینهٔ ۲ توجه کنید که اگر $x>\frac{3}{2}$، آن‌گاه عبارت $2x-3$ مثبت است و در نتیجه نامعادلهٔ مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$((m^2-1)x^2-4mx+4)(x-3\sqrt{x}+2)>0$$

از طرف دیگر،

$$A=x-3\sqrt{x}+2=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)$$

بنابراین علامت عبارت A با شرط $x>\frac{3}{2}$ به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$		4		$+\infty$
A			$-$	0	$+$	

چون علامت A روی بازهٔ $(2,4)$ منفی است و این بازه مجموعهٔ جواب‌های نامعادله است، پس علامت عبارت $B=(m^2-1)x^2-4mx+4$ در این بازه باید منفی باشد تا حاصل‌ضرب AB مثبت شود. همچنین علامت A روی بازهٔ $(\frac{3}{2},2)$ منفی است و این بازه جواب نامعادله نیست. پس علامت B روی این بازه باید مثبت باشد. بنابراین $x=2$ باید ریشهٔ B باشد. پس

$$(m^2-1)4-8m+4=0\Rightarrow m^2-2m=0\Rightarrow\begin{cases}m=2\\ m=0\end{cases}$$

اگر $m=2$، آن‌گاه

$$B=(3x^2-8x+4)=(3x-2)(x-2)$$

در این صورت علامت B روی بازهٔ $(2,4)$ مثبت است که قابل قبول نیست.

اگر $m=0$، آن‌گاه

$$B=-x^2+4=-(x-2)(x+2)$$

در این صورت علامت B روی بازهٔ $(2,4)$ منفی است و قابل قبول است.

۱۹۹۹ گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2(\frac{1}{4})}{1-(\frac{1}{4})^2}=\frac{8}{15}$$

$$\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2(\frac{1}{4})}{1+(\frac{1}{4})^2}=\frac{8}{17}$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-(\frac{1}{4})^2}{1+(\frac{1}{4})^2}=\frac{15}{17}$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{\tan\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\frac{8}{15}-\frac{8}{17}}{\frac{8}{17}-\frac{15}{17}}=-\frac{16}{105}$$

۲۰۰۰ گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$(1+\cos 2\alpha)(1+\cos 4\alpha)(1+\cos 8\alpha)=\frac{1}{8}$$

$$(2\cos^2\alpha)(2\cos^2 2\alpha)(2\cos^2 4\alpha)=\frac{1}{8}$$

$$(\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha)^2=\frac{1}{64}$$

$$\left(\frac{\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha}{\sin\alpha}\right)^2=\frac{1}{64}$$

$$\left(\frac{1}{2}\sin 2\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\right)^2=\frac{1}{64}\sin^2\alpha$$

$$(\frac{1}{4}\sin 4\alpha \cos 4\alpha)^2=\frac{1}{64}\sin^2\alpha\Rightarrow(\frac{1}{8}\sin 8\alpha)^2=\frac{1}{64}\sin^2\alpha$$

$$\sin^2 8\alpha=\sin^2\alpha\Rightarrow\frac{1-\cos 16\alpha}{2}=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos 16\alpha=\cos 2\alpha$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases}16\alpha=2k\pi+2\alpha\\16\alpha=2k\pi-2\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{k\pi}{7}\\\alpha=\frac{k\pi}{9}\end{cases}\qquad k\in\mathbb{Z}$$

بنابراین بزرگ‌ترین جواب معادله که در بازهٔ $[0,\pi]$ قرار دارد، برابر $\frac{8\pi}{9}$ است.

۲۰۰۱ (۳) فرض کنید $P(x)=ax^2+bx+c$. در این صورت $P'(x)=2ax+b$. اگر $P(x)$ را بر $P'(x)$ تقسیم کنیم و خارج قسمت برابر $\frac{1}{2}x+1$ و باقی‌مانده برابر -2 باشد، آن‌گاه تساوی زیر همواره برقرار است:

$$P(x)=P'(x)(\frac{1}{2}x+1)-2$$

$$ax^2+bx+c=(2ax+b)(\frac{1}{2}x+1)-2$$

این تساوی را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$ax^2+bx+c=ax^2+(2a+\frac{b}{2})x+b-2$$

برای این که تساوی بالا به‌ازای هر مقدار x برقرار باشد، باید

$$\begin{cases}2a+\frac{b}{2}=b\Rightarrow b=4a\\c=b-2\Rightarrow c=4a-2\end{cases}$$

بنابراین چندجمله‌ای $P(x)$ برابر $ax^2+4ax+4a-2$ است که مجموع ضرایب آن برابر است با $a+4a+4a-2=9a-2$

واضح است که کمترین مقدار این مجموع وقتی a عددی طبیعی است، برابر ۷ است که به‌ازای $a=1$ به‌دست می‌آید.

۲۰۰۲ (۱) ابتدا توجه کنید که

$$a_{n+1}=\frac{1}{a_n}+1\Rightarrow a_{100}=\frac{1}{a_{99}}+1\Rightarrow\frac{k}{m}=\frac{1}{a_{99}}+1$$

$$\frac{1}{a_{99}}=\frac{k-m}{m}\Rightarrow a_{99}=\frac{m}{k-m}$$

بنابراین

$$a_{99}=\frac{1}{a_{98}}+1\Rightarrow\frac{m}{k-m}=\frac{1}{a_{98}}+1\Rightarrow\frac{1}{a_{98}}=\frac{m}{k-m}-1=\frac{2m-k}{k-m}$$

$$a_{98}=\frac{k-m}{2m-k}$$

۲۰۰۳ (۱) ده جملهٔ اول دنباله را پیدا می‌کنیم.

$$a_n=\begin{cases}2^k & n=3k\\-2k+4 & n=3k+1\\ [\frac{n}{k+2}]+a & n=3k+2\end{cases}$$

$$k=0\Rightarrow\begin{cases}a_0=2^0=1\\a_1=-2\times0+4=4\\a_2=[\frac{3\times0+2}{0+2}]+a=1+a\end{cases}$$

$$k=1\Rightarrow\begin{cases}a_3=2^1=2\\a_4=-2\times1+4=2\\a_5=[\frac{3\times1+2}{1+2}]+a=1+a\end{cases}$$

$$k=2\Rightarrow\begin{cases}a_6=2^2=4\\a_7=-2\times2+4=0\\a_8=[\frac{3\times2+2}{2+2}]+a=2+a\end{cases}$$

$$k=3\Rightarrow a_9=2^3=8$$

مجموع ده جملهٔ اول دنباله برابر ۱۹ است. پس

$$1+4+1+a+2+2+1+a+4+0+2+a+8=19$$

$$3a+25=19\Rightarrow a=-2$$

بنابراین اگر $n=3k+2$، آن‌گاه

$$a_n=[\frac{n}{k+2}]+a=[\frac{3k+2}{k+2}]-2=[3-\frac{4}{k+2}]-2=1+[\frac{-4}{k+2}]$$

$$a_2=-1,\ a_5=-1,\ a_8=a_{11}=a_{14}=a_{17}=a_{20}=a_{23}=a_{26}=a_{29}=0$$

بنابراین مجموع جملات بالا برابر -2 است.

۲۰۰۴ (۴) اگر فرض کنیم $t=\sqrt[3]{9\cos^2x-1}$، آن‌گاه ضابطهٔ تابع f به‌صورت $y=2^t-2^{-t}$ در می‌آید. از طرف دیگر،

$$0\le\cos^2x\le1\Rightarrow0\le9\cos^2x\le9\Rightarrow-1\le9\cos^2x-1\le8$$

$$-1\le\sqrt[3]{9\cos^2x-1}\le2\Rightarrow-1\le t\le2$$

بنابراین باید برد تابع با ضابطهٔ $f(t)=2^t-2^{-t}$ و دامنهٔ $[-1,2]$ را به‌دست بیاوریم. توجه کنید که تابع $y=2^t$ اکیداً صعودی است. پس تابع $y=2^{-t}$ اکیداً نزولی است و تابع $y=-2^{-t}$ اکیداً صعودی است. پس تابع $y=2^t-2^{-t}$ نیز اکیداً صعودی است. بنابراین

$$-1\le t\le2\Rightarrow f(-1)\le f(t)\le f(2)$$

$$-\frac{3}{2}\le f(t)\le\frac{15}{4}\Rightarrow R_f=[-\frac{3}{2},\frac{15}{4}]$$

بنابراین $a=-\frac{3}{2}$ و $b=\frac{15}{4}$ و در نتیجه $b-a=\frac{21}{4}$.

۲۰۰۵ (۱) **راه‌حل اول** دامنهٔ تابع f مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{1}{6+\sqrt{|x|}-|x|}>0$ است. اگر فرض کنیم $\sqrt{|x|}=t\ge0$، آن‌گاه نامعادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{6+t-t^2}>0\Rightarrow6+t-t^2>0\Rightarrow t^2-t-6<0\Rightarrow(t-3)\underbrace{(t+2)}_{\text{مثبت}}<0$$

$$t-3<0\Rightarrow0\le t<3$$

بنابراین باید نامعادلهٔ $0\le\sqrt{|x|}<3$ را حل کنیم. نابرابری $0\le\sqrt{|x|}$ به‌ازای هر مقدار x برقرار است. پس باید نامعادلهٔ $\sqrt{|x|}<3$ را حل کنیم.

$$\sqrt{|x|}<3\Rightarrow|x|<9\Rightarrow-9<x<9$$

راه‌حل دوم واضح است که $x=-4$ در دامنهٔ تابع قرار دارد.

$$f(-4)=\log_6(\frac{1}{6+\sqrt{4}-4})=\log_6\frac{1}{4}$$

عدد -4 فقط در بازهٔ $(-9,9)$ قرار دارد و عضو بازه‌های دیگر گزینه‌ها نیست. پس گزینهٔ (۱) درست است.

۲۰۰۶ ۳ اگر نمودار تابع $y=\sqrt{۴-x}$ را k واحد در راستای قائم انتقال دهیم، نمودار تابع $y=\sqrt{۴-x}+k$ به‌دست می‌آید و اگر نمودار به‌دست آمده را $k-۲$ واحد در راستای افقی انتقال دهیم، نمودار تابع زیر به‌دست می‌آید:

$$y=\sqrt{۴-(x-(k-۲))}+k=\sqrt{k+۲-x}+k=f(x)$$

چون نمودار تابع f نمودار تابع وارونش را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند، پس اگر طول نقطهٔ تقاطع a باشد، آن‌گاه

$$f(a)=۱\Rightarrow\sqrt{k+۲-a}+k=۱$$

$$\sqrt{k+۲-a}=۱-k\xrightarrow{۱-k\geq ۰}a=k+۲-(۱-k)^۲$$

$$f^{-۱}(a)=۱\Rightarrow f(۱)=a\Rightarrow\sqrt{k+۲-۱}+k=a\xrightarrow{k\geq -۱}a=\sqrt{k+۱}+k$$

توجه کنید که تساوی‌های فوق فقط برای $-۱\leq k\leq ۱$ می‌توانند برقرار باشند.

$$k+۲-(۱-k)^۲=\sqrt{k+۱}+k\Rightarrow ۱+۲k-k^۲=\sqrt{k+۱}$$

با شرط $۱+۲k-k^۲\geq ۰$، یعنی $۱-\sqrt{۲}\leq k\leq ۱+\sqrt{۲}$، طرفین را به توان دو می‌رسانیم و معادله را ساده می‌کنیم:

$$k^۴-۴k^۳+۲k^۲+۳k=۰\Rightarrow k(k^۳-۴k^۲+۲k+۳)=۰$$

$$k(k-۳)(k^۲-k-۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}k=۰\\k=۳\\k=\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲}\end{cases}$$

چون $-۱\leq k\leq ۱$ و $۱-\sqrt{۲}\leq k\leq ۱+\sqrt{۲}$، پس $۱-\sqrt{۲}\leq k\leq ۱$، پس فقط $k=۰$ قابل قبول است. بنابراین $f(x)=\sqrt{۲-x}$ و طول نقطهٔ برخورد نمودار تابع $y=f(x)-۱$ با محور طول‌ها به‌صورت زیر است:

$$y=۰\Rightarrow f(x)-۱=۰\Rightarrow\sqrt{۲-x}=۱\Rightarrow x=۱$$

۲۰۰۷ ۳ ابتدا توابع fog و gof را معین می‌کنیم.

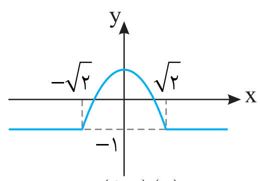
$$(fog)(x)=f(g(x))=f(۱-x^۲)=\begin{cases}-۱ & ۱-x^۲<-۱\\ ۱-x^۲ & -۱\leq ۱-x^۲\leq ۱\\ ۱ & ۱-x^۲>۱\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-۱ & x^۲>۲\\ ۱-x^۲ & ۰\leq x^۲\leq ۲\\ ۱ & x^۲<۰\end{cases}=\begin{cases}-۱ & x>\sqrt{۲}\ \text{یا}\ x<-\sqrt{۲}\\ ۱-x^۲ & -\sqrt{۲}\leq x\leq\sqrt{۲}\end{cases}$$

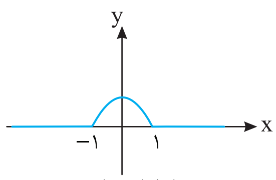
$$(gof)(x)=g(f(x))=۱-f^۲(x)=\begin{cases}۱-(-۱)^۲ & x<-۱\\ ۱-x^۲ & -۱\leq x\leq ۱\\ ۱-۱^۲ & x>۱\end{cases}$$

$$=\begin{cases}۰ & x<-۱\ \text{یا}\ x>۱\\ ۱-x^۲ & -۱\leq x\leq ۱\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع‌های fog و gof به‌صورت زیر است و هرکدام از آن‌ها در دو نقطه مشتق‌پذیر نیستند.



$y=(fog)(x)$

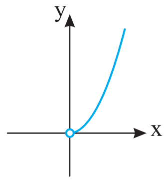


$y=(gof)(x)$

۲۰۰۸ ۲ ابتدا توجه کنید که ضابطهٔ تابع f به‌صورت زیر است:

$$f(x)=۹^{\log_۳ x}=(۳^۲)^{\log_۳ x}=(۳^{\log_۳ x})^۲=x^۲$$

از طرف دیگر، دامنهٔ تابع f بازهٔ $(۰,+\infty)$ است. پس نمودار تابع f به‌صورت زیر است:



۲۰۰۹ ۲ توجه کنید که اگر $x\to ۰^+$، آن‌گاه $\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}-۱\to ۰^+$ و $\sqrt{۲x}\to ۰^+$. بنابراین می‌توانیم از هم‌ارزی‌های زیر استفاده کنیم:

$$\alpha\to ۰:\quad \tan\alpha\sim\alpha,\quad ۱-\cos\alpha\sim\frac{۱}{۲}\alpha^۲$$

در این صورت حد مورد نظر به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{(\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}-۱)^۲}{(\frac{۱}{۲}(\sqrt{۲x})^۲)^n}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{(\frac{۱-\sqrt{۱-x^۲}}{\sqrt{۱-x^۲}})^۲}{x^n}$$

$$=\lim_{x\to ۰^+}\frac{(۱-\sqrt{۱-x^۲})^۲}{x^n}\times\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{۱-x^۲}$$

$$=\lim_{x\to ۰^+}\frac{(۱-(۱-x^۲))^۲}{x^n}\times\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{(۱+\sqrt{۱-x^۲})^۲}\times\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{۱-x^۲}$$

$$=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{x^{n-۴}}\times\frac{۱}{(۱+۱)^۲}\times\frac{۱}{۱}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{۴x^{n-۴}}$$

اکنون توجه کنید که اگر $n>۴$، آن‌گاه حد بالا نامتناهی است و نمی‌تواند برابر a باشد. اگر $n=۴$، آن‌گاه حد بالا برابر $\frac{۱}{۴}$ است و در نتیجه $a=\frac{۱}{۴}$ و $a+n=\frac{۱۷}{۴}$. اگر $n<۴$، آن‌گاه حد بالا برابر صفر است و در نتیجه $a=۰$ و $a+n<۴$. پس $a+n$ می‌تواند تمام مقادیر مجموعهٔ $(-\infty,۴)\cup\{\frac{۱۷}{۴}\}$ را داشته باشد.

۲۰۱۰ ۱ توجه کنید که توابع $y=\frac{۳}{x^۲}$ و $y=\frac{-۲}{x^۲}$ روی بازهٔ $(-\infty,۰)$ به‌ترتیب اکیداً صعودی و اکیداً نزولی هستند. پس اگر $x\to(-\frac{۱}{۲})^-$، آن‌گاه

$$\frac{۳}{x^۲}\to ۱۲^-,\quad \frac{-۲}{x^۲}\to(-۸)^+$$

بنابراین در یک همسایگی چپ $x=-\frac{۱}{۲}$، توابع $y=[\frac{۳}{x^۲}]$ و $y=[\frac{-۲}{x^۲}]$ به‌ترتیب با تابع‌های $y=۱۱$ و $y=-۸$ برابرند. پس

$$\lim_{x\to(-\frac{۱}{۲})^-}\frac{۱۰x-۵+[\frac{۳}{x^۲}]}{۱۶x-[-\frac{۲}{x^۲}]}=\lim_{x\to(-\frac{۱}{۲})^-}\frac{۱۰x-۵+۱۱}{۱۶x-(-۸)}=\lim_{x\to(-\frac{۱}{۲})^-}\frac{۱۰x+۶}{۱۶x+۸}=-\infty$$

۲۰۱۱ ۴ **راه‌حل اول** چون تابع f در دو نقطه ناپیوسته است، پس مخرج $f(x)$ دو ریشه دارد. چون تابع f دو مجانب موازی با محورهای مختصات دارد، پس یا هر دو مجانب آن قائم هستند و مجانب افقی ندارد یا یک مجانب قائم و یک مجانب افقی دارد.

اگر $a=۰$، آن‌گاه $f(x)=\frac{-bx^۲+۲}{-bx+۲}$ که در این صورت مخرج $f(x)$ فقط یک ریشه دارد و قابل قبول نیست (واضح است که $b\neq ۰$). اگر $a\neq ۰$، آن‌گاه

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^۳}{ax^۳}=۱$$

یعنی خط $y=1$ مجانب افقی تابع است. پس این تابع فقط یک مجانب قائم دارد، یعنی یکی از ریشه‌های مخرج $f(x)$ ریشهٔ صورت آن نیز هست. اگر این ریشه $x=n$ باشد، آن‌گاه

$$\begin{cases} an^3-bn^2+2=0 \\ an^3-bn+2=0 \end{cases} \Rightarrow bn^2-bn=0 \Rightarrow bn(n-1)=0$$

چون $b\neq 0$ و $n\neq 0$، پس $n=1$، در نتیجه

$$a-b+2=0 \Rightarrow b=a+2$$

اکنون توجه کنید که مخرج $f(x)$ علاوه بر $x=1$ یک ریشهٔ مضاعف دارد. پس

$$ax^3-bx+2=ax^3-(a+2)x+2=0 \Rightarrow ax(x^2-1)-2(x-1)=0$$

$$(x-1)(a(x^2+x)-2)=0 \Rightarrow (x-1)(ax^2+ax-2)=0$$

پس معادلهٔ $ax^2+ax-2=0$ ریشهٔ مضاعف دارد، یعنی

$$\Delta=a^2+8a=0 \xrightarrow{a\neq 0} a=-8\ ,\ b=-6$$

راه‌حل دوم مقادیر a و b را از گزینه‌ها در ضابطهٔ f قرار دهید و درستی بودن شرایط مسئله را بررسی کنید.

۲۰۱۲ (۲) ابتدا توجه کنید که حد مخرج کسر $\frac{f(x)}{x}$ در $x=0$ برابر صفر است و اگر حد صورت آن در این نقطه برابر صفر نباشد، حد این کسر نامتناهی می‌شود، پس حد صورت کسر، یعنی $f(x)$ هم باید در $x=0$ برابر صفر باشد. پس

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(\cos^3 2x+ax^2+b)=1+0+b=0 \Rightarrow b=-1$$

از طرف دیگر،

$$f(x)=\cos^3 2x+ax^2-1 \Rightarrow f'(x)=-6\sin 2x\cos^2 2x+2ax$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{-6\sin 2x\cos^2 2x}{x}+\frac{2ax}{x}\right)$$

$$=-6\times 2\times 1^2+2a=-12+2a=2 \Rightarrow a=7$$

بنابراین $a+b=6$.

۲۰۱۳ (۳) توجه کنید که تابع $f(x)=|\sin 2x|+1$ در نقطهٔ $x=0$ مشتق‌پذیر نیست:

$$x>0 \Rightarrow f(x)=\sin 2x+1 \Rightarrow f'(x)=2\cos 2x \Rightarrow f'_+(0)=2$$

$$x<0 \Rightarrow f(x)=-\sin 2x+1 \Rightarrow f'(x)=-2\cos 2x \Rightarrow f'_-(0)=-2$$

بنابراین شیب نیم‌مماس‌های راست و چپ که در $x=0$ بر نمودار تابع f رسم می‌شوند، به‌ترتیب برابر ۲ و ۲- است. معادلهٔ این نیم‌مماس‌ها به‌صورت زیر است:

نیم‌مماس راست: $y-f(0)=f'_+(0)(x-0) \Rightarrow y-1=2x \Rightarrow y=2x+1$

نیم‌مماس چپ: $y-f(0)=f'_-(0)(x-0) \Rightarrow y-1=-2x \Rightarrow y=-2x+1$

نقاط تلاقی امتداد این نیم‌مماس‌ها و نیمساز ناحیهٔ دوم و ناحیهٔ چهارم را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} y=2x+1 \\ y=-x \end{cases} \Rightarrow 2x+1=-x \Rightarrow x=-\frac{1}{3} \Rightarrow y=\frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} y=-2x+1 \\ y=-x \end{cases} \Rightarrow -2x+1=-x \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=-1$$

پس باید فاصلهٔ نقاط $A(1,-1)$ و $B(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ را پیدا کنیم:

$$AB=\sqrt{(1+\frac{1}{3})^2+(-1-\frac{1}{3})^2}=\sqrt{2\times\frac{16}{9}}=\frac{4}{3}\sqrt{2}$$

۲۰۱۴ (۱) توجه کنید که $D_f=[0,+\infty)-\{1\}$ و

$$f(x)=2x^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{3}}$$

$$f'(x)=2(\frac{1}{2})x^{-\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}(-\frac{1}{3})(2x)(x^2-1)^{-\frac{4}{3}}=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$$

بنابراین $f'(x)$ روی $(0,+\infty)-\{1\}$ مثبت است. از طرف دیگر،

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=2-(+\infty)=-\infty\ ,\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=2-(-\infty)=+\infty$$

بنابراین تابع f روی دامنه‌اش صعودی نیست ولی روی بازه‌های $[0,1)$ و $(1,+\infty)$ صعودی است.

۲۰۱۵ (۱) مشتق تابع f را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^4}{x^3-8}\ ,\ D_f=\mathbb{R}-\{2\}$$

$$f'(x)=\frac{4x^3(x^3-8)-3x^2(x^4)}{(x^3-8)^2}=\frac{x^3(x^3-32)}{(x^3-8)^2}$$

x	$-\infty$		0		2		$\sqrt[3]{32}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

بنابراین $f'(x)$ روی بازه‌های $[0,2)$ و $(2,\sqrt[3]{32}]$ و هر زیرمجموعهٔ آن‌ها اکیداً نزولی است. بیشترین مقدار طول این بازه‌ها مربوط به بازهٔ $[0,2)$ است که برابر ۲ است.

۲۰۱۶ (۳) ابتدا اکسترمم‌های نسبی تابع f را معین می‌کنیم:

$$f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$$

$$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x^2-x-2)=6(x+1)(x-2)$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \Rightarrow y=-2-3+12+1=8 \\ x=2 \Rightarrow y=16-12-24+1=-19 \end{cases}$$

پس نقاط $A(-1,8)$ و $B(2,-19)$ نقاط اکسترمم نسبی تابع f هستند و شیب پاره‌خط AB برابر است با $\frac{-19-8}{2-(-1)}=-9$

شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول a برابر $f'(a)$ است. پس می‌خواهیم بدانیم به‌ازای چند مقدار a تساوی $f'(a)=-9$ برقرار است.

$$f'(a)=6(a+1)(a-2)=-9 \Rightarrow 2a^2-2a-4=-3 \Rightarrow 2a^2-2a-1=0$$

از معادلهٔ بالا دو جواب برای a به‌دست می‌آید. پس دو نقطه روی نمودار تابع f وجود دارد که خط مماس بر نمودار تابع f در آن نقاط موازی پاره‌خط AB است.

۲۰۱۷ (۱) ابتدا توجه کنید که

$$\log_a c+\log_b c=1 \Rightarrow \frac{1}{\log_c a}+\frac{1}{\log_c b}=1$$

$$\log_c b+\log_c a=\log_c a\times\log_c b \Rightarrow \log_c(ab)=\log_c a\times\log_c b$$

۲۰۱۸ (۳) معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\log_2(4^x+15)=x+3 \Rightarrow 4^x+15=2^{x+3}$$

$$(2^x)^2-8\times 2^x+15=0 \Rightarrow (2^x-5)(2^x-3)=0$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} 2^x-5=0 \Rightarrow 2^x=5 \Rightarrow x=\log_2 5 \\ 2^x-3=0 \Rightarrow 2^x=3 \Rightarrow x=\log_2 3 \end{cases}$$

پس مجموع جواب‌های معادله برابر است با

$$\log_2 5+\log_2 3=\log_2 5\times 3=\log_2 15$$

۲۰۱۹ (۳) ابتدا توجه کنید برای اینکه عبارت‌های رادیکالی موجود در معادله تعریف شده باشند، باید شرایط زیر وجود داشته باشد:

$$-x^{۲}+۶x-۸\geq ۰\Rightarrow x^{۲}-۶x+۸\leq ۰\Rightarrow (x-۲)(x-۴)\leq ۰$$

x	$-\infty$		۲		۴		$+\infty$
$(x-۲)(x-۴)$		+	۰	−	۰	+	

$۲\leq x\leq ۴ \quad (I)$

$$-x^{۳}+۴x^{۲}+۲۵x-۱۰۰\geq ۰\Rightarrow x^{۳}-۴x^{۲}-۲۵x+۱۰۰\leq ۰$$

$$(x^{۳}-۲۵x)-(۴x^{۲}-۱۰۰)\leq ۰\Rightarrow x(x^{۲}-۲۵)-۴(x^{۲}-۲۵)\leq ۰$$

$$(x^{۲}-۲۵)(x-۴)\leq ۰\Rightarrow (x-۵)(x+۵)(x-۴)\leq ۰$$

x	$-\infty$		-۵		۴		۵		$+\infty$
$(x-۵)(x+۵)(x-۴)$		−	۰	+	۰	−	۰	+	

$x\leq -۵$ یا $۴\leq x\leq ۵ \quad (II)$

از (I) و (II) نتیجه می‌شود فقط به‌ازای $x=۴$ عبارت‌های رادیکالی موجود در معادله تعریف شده هستند. اکنون کافی است مشخص کنیم $x=۴$ جواب معادله هست یا نه.

$$\sqrt{x+\sqrt{-x^{۳}+۴x^{۲}+۲۵x-۱۰۰}}+\sqrt{x^{۲}+\sqrt{-x^{۲}+۶x-۸}}=x+۲$$

$$\sqrt{۴+۰}+\sqrt{۱۶+۰}=۴+۲\Rightarrow ۲+۴=۴+۲$$

پس $x=۴$ تنها جواب معادله است.

۲۰۲۰ (۲و۳) ابتدا توجه کنید که

$$x-۳\sqrt{x}+۲=(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}-۲)$$

بنابراین علامت عبارت $A=\frac{۲x-۳}{x-۳\sqrt{x}+۲}$ مطابق جدول زیر است:

x	$-\infty$		۰		۱		$\frac{۳}{۲}$		۴		$+\infty$
A				−	‖	+	۰	−	‖	+	

اکنون فرض کنید $B=(m^{۲}-۱)x^{۲}-۴mx+۴$، می‌خواهیم مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\geq ۰$ یک بازه باشد. اگر B چندجمله‌ای درجهٔ دوم باشد و ریشه نداشته باشد یا ریشهٔ مضاعف داشته باشد، آن‌گاه با توجه به علامت A مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\geq ۰$ نمی‌تواند یک بازه باشد. پس B دو ریشه دارد و این ریشه‌ها باید از اعداد ۱، $\frac{۳}{۲}$ و ۴ باشند، بنابراین سه حالت را بررسی می‌کنیم:

حالت اول: $x=۱$ ریشهٔ B است.

$$m^{۲}-۱-۴m+۴=۰\Rightarrow m^{۲}-۴m+۳=۰\Rightarrow m=۳\,,\,m=۱\ (\text{غ.ق.ق})$$

$$B=۸x^{۲}-۱۲x+۴=۴(x-۱)(۲x-۱)$$

در این صورت جدول تعیین علامت AB به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		۰		$\frac{۱}{۲}$		۱		$\frac{۳}{۲}$		۴		$+\infty$
AB				−	۰	+	‖	+	۰	−	‖	+	

واضح است که مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\geq ۰$ یک بازه نیست.

حالت دوم: $x=\frac{۳}{۲}$ ریشهٔ B است.

$$(m^{۲}-۱)\frac{۹}{۴}-۴(\frac{۳}{۲})m+۴=۰\Rightarrow ۹m^{۲}-۹-۲۴m+۱۶=۰$$

$$۹m^{۲}-۲۴m+۷=۰\Rightarrow (۳m-۱)(۳m-۷)=۰\Rightarrow m=\frac{۱}{۳}\,,\,m=\frac{۷}{۳}$$

اگر $m=\frac{۱}{۳}$، آن‌گاه

$$B=-\frac{۸}{۹}x^{۲}-\frac{۴}{۳}x+۴=(۲x-۳)(-\frac{۴}{۹}x-\frac{۴}{۳})$$

و جدول تعیین علامت AB به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		۰		۱		$\frac{۳}{۲}$		۴		$+\infty$
AB				−	‖	+	۰	+	‖	−	

و مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\geq ۰$ بازهٔ $(۱,۴)$ است.

اگر $m=\frac{۷}{۳}$، آن‌گاه

$$B=\frac{۴۰}{۹}x^{۲}-\frac{۲۸}{۳}x+۴=\frac{۴}{۹}(۵x-۳)(۲x-۳)$$

و جدول تعیین علامت AB به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		۰		$\frac{۳}{۵}$		۱		$\frac{۳}{۲}$		۴		$+\infty$
AB				−	۰	+	‖	−	۰	−	‖	+	

در این صورت مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\geq ۰$ یک بازه نیست.

حالت سوم: $x=۴$ ریشهٔ B است.

$$۱۶(m^{۲}-۱)-۱۶m+۴=۰\Rightarrow ۴m^{۲}-۴m-۳=۰\Rightarrow m=-\frac{۱}{۲}\,,\,m=\frac{۳}{۲}$$

اگر $m=-\frac{۱}{۲}$، آن‌گاه

$$B=-\frac{۳}{۴}x^{۲}+۲x+۴=(x-۴)(-\frac{۳}{۴}x-۱)$$

و جدول تعیین علامت AB به صورت زیر است:

x	$-\infty$		۰		۱		$\frac{۳}{۲}$		۴		$+\infty$
AB				−	‖	+	۰	−	‖	−	

و مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\geq ۰$ بازهٔ $(۱,\frac{۳}{۲}]$ است.

اگر $m=\frac{۳}{۲}$، آن‌گاه

$$B=\frac{۵}{۴}x^{۲}-۶x+۴=(x-۴)(\frac{۵}{۴}x-۱)$$

و جدول تعیین علامت AB به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		۰		$\frac{۴}{۵}$		۱		$\frac{۳}{۲}$		۴		$+\infty$
AB				−	۰	+	‖	−	۰	+	‖	+	

در این صورت مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\geq ۰$ یک بازه نیست.

اکنون توجه کنید که اگر $m=۱$ یا $m=-۱$، آن‌گاه چندجمله‌ای B از درجهٔ اول است. این دو حالت را هم باید بررسی کنیم.

اگر $m=۱$، آن‌گاه $B=-۴x+۴$ و جدول تعیین علامت AB به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		۰		۱		$\frac{۳}{۲}$		۴		$+\infty$
AB				−	‖	−	۰	+	‖	−	

و مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\geq ۰$ بازهٔ $[\frac{۳}{۲},۴)$ است.

اگر $m=-۱$، آن‌گاه $B=۴x+۴$ و جدول تعیین علامت AB به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		۰		۱		$\frac{۳}{۲}$		۴		$+\infty$
AB				−	‖	+	۰	−	‖	+	

در این صورت مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\geq ۰$ یک بازه نیست.

بنابراین به‌ازای $m=\frac{۱}{۳}$، $m=-\frac{۱}{۲}$ و $m=۱$ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\geq ۰$ یک بازه است.

۲۰۲۱ ۳ **راه‌حل اول** مخرج مشترک می‌گیریم و ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+1-\cos^2\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}=\frac{2\sin^2\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}$$

$$=\frac{2\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{4\times\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=2\cot\frac{\theta}{2}$$

راه‌حل دوم ابتدا هریک از کسرها را ساده می‌کنیم، سپس حاصل را ساده می‌کنیم.

$$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}+\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$=\cot\frac{\theta}{2}+\cot\frac{\theta}{2}=2\cot\frac{\theta}{2}$$

راه‌حل سوم حاصل عبارت را به‌ازای $\theta=\frac{\pi}{3}$ حساب می‌کنیم:

$$\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{1-\cos\frac{\pi}{3}}+\frac{1+\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{3}+\frac{3}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$$

اکنون مقدار گزینه‌ها را به‌ازای $\theta=\frac{\pi}{3}$ حساب می‌کنیم:

گزینهٔ (۱) $\cos\frac{\theta}{2}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

گزینهٔ (۲) $\sin\frac{\theta}{2}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

گزینهٔ (۳) $2\cot\frac{\theta}{2}=2\cot\frac{\pi}{6}=2\sqrt{3}$

گزینهٔ (۴) $2\tan\frac{\theta}{2}=2\tan\frac{\pi}{6}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

۲۰۲۲ ۳ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(1+\cos\alpha)(1+\cos2\alpha)(1+\cos4\alpha)=\frac{1}{8}$$

$$(2\cos^2\frac{\alpha}{2})(2\cos^2\alpha)(2\cos^2 2\alpha)=\frac{1}{8}$$

$$(8\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\cos2\alpha)^2=1$$

واضح است که $\alpha=2k\pi$ جواب معادله نیست، پس $\sin\frac{\alpha}{2}\neq 0$ و معادله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\left(\frac{8\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\cos2\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2=1\Rightarrow(4\sin\alpha\cos\alpha\cos2\alpha)^2=\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$(2\sin2\alpha\cos2\alpha)^2=\sin^2\frac{\alpha}{2}\Rightarrow\frac{1-\cos8\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}\Rightarrow\cos8\alpha=\cos\alpha$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases}8\alpha=2k\pi+\alpha\\8\alpha=2k\pi-\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{2k\pi}{7}\\\alpha=\frac{2k\pi}{9}\end{cases},\quad k\in\mathbb{Z}$$

تعداد جواب‌های واقع در بازهٔ $[0,2\pi]$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید. (توجه کنید که $\alpha\neq2k\pi$)

$$0<\frac{2k\pi}{7}<2\pi\Rightarrow0<k<7\Rightarrow k\in\{1,2,3,4,5,6\}$$

$$0<\frac{2k\pi}{9}<2\pi\Rightarrow0<k<9\Rightarrow k\in\{1,2,\dots,8\}$$

پس معادله ۱۴ جواب در بازهٔ $[0,2\pi]$ دارد.

۲۰۲۳ ۴ بنابر قضیهٔ تقسیم، تساوی زیر به‌ازای هر مقدار x برقرار است:

$$P(x)=(x^2+2x)Q(x)+3x+1$$

از طرفین این تساوی مشتق می‌گیریم.

$$P'(x)=(2x+2)Q(x)+(x^2+2x)Q'(x)+3$$

در تساوی بالا قرار می‌دهیم $x=-2$ و نتیجه می‌شود

$$P'(-2)=(-4+2)Q(-2)+(4-4)Q'(-2)+3$$

$$P'(-2)=-2Q(-2)+3=-2\times3+3=-3$$

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم $P'(x)$ بر $x+2$ برابر -3 است.

۲۰۲۴ ۲ ابتدا چند جمله از دنباله را مشخص می‌کنیم.

$$a_1=-1,\quad a_{n+1}=2-\frac{1}{a_n}$$

$$a_2=2-\frac{1}{a_1}=2+1=3\Rightarrow a_2=\frac{2\times2-1}{2\times2-3}$$

$$a_3=2-\frac{1}{a_2}=2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}\Rightarrow a_3=\frac{2\times3-1}{2\times3-3}$$

$$a_4=2-\frac{1}{a_3}=2-\frac{3}{5}=\frac{7}{5}\Rightarrow a_4=\frac{2\times4-1}{2\times4-3}$$

$$a_5=2-\frac{1}{a_4}=2-\frac{5}{7}=\frac{9}{7}\Rightarrow a_5=\frac{2\times5-1}{2\times5-3}$$

بنابراین می‌توان حدس زد که

$$a_{99}=\frac{2\times99-1}{2\times99-3}=\frac{197}{195},\quad a_{100}=\frac{2\times100-1}{2\times100-3}=\frac{199}{197}$$

در نتیجه حاصل‌ضرب صد جملهٔ اول دنباله برابر است با

$$a_1a_2\cdots a_{100}=(-1)(\frac{3}{1})(\frac{5}{3})(\frac{7}{5})(\frac{9}{7})\cdots(\frac{197}{195})(\frac{199}{197})=-199$$

۲۰۲۵ ۲ ده جملهٔ اول دنباله را پیدا می‌کنیم.

$$a_n=\begin{cases}2^k & n=3k\\-2k+4 & n=3k+1\\\left[\frac{n}{k+2}\right]+a & n=3k+2\end{cases}$$

$$k=0\Rightarrow\begin{cases}a_0=2^0=1\\a_1=-2\times0+4=4\\a_2=\left[\frac{3\times0+2}{0+2}\right]+a=1+a\end{cases}$$

$$k=1\Rightarrow\begin{cases}a_3=2^1=2\\a_4=-2\times1+4=2\\a_5=\left[\frac{3\times1+2}{1+2}\right]+a=1+a\end{cases}$$

$$k=2\Rightarrow\begin{cases}a_6=2^2=4\\a_7=-2\times2+4=0\\a_8=\left[\frac{3\times2+2}{2+2}\right]+a=2+a\end{cases}$$

$$k=3\Rightarrow a_9=2^3=8$$

مجموع ده جملهٔ اول دنباله برابر ۱۹ است. پس

$$1+4+1+a+2+2+1+a+4+0+2+a+8=19$$

$$3a+25=19\Rightarrow a=-2$$

بنابراین باید میانگین a_{28} و a_{29} را پیدا کنیم.

$$a_{28}=-2\times9+4=-14,\quad a_{29}=\left[\frac{29}{9+2}\right]-2=2-2=0$$

پس میانگین جملات بیست و نهم (a_{28}) و سی‌ام (a_{29}) برابر است با $\frac{-14+0}{2}=-7$

۲۰۲۶ (۴) توجه کنید که

$$0\le \sin^2 x\le 1\Rightarrow 0\le 5\sin^2 x\le 5\Rightarrow -1\le 5\sin^2 x-1\le 4$$

$$0\le\sqrt{5\sin^2x-1}\le 2\Rightarrow -2\le -\sqrt{5\sin^2 x-1}\le 0$$

$$2^{-2}\le 2^{-\sqrt{5\sin^2x-1}}\le 2^0\Rightarrow \frac14\le f(x)\le 1$$

بنابراین $R_f=[\frac14,1]$. در نتیجه $a=\frac14, b=1\Rightarrow a+b=\frac54$

۲۰۲۷ (۲) توجه کنید که

$$\log_{\frac12}\frac1t=\log_{2^{-1}}t^{-1}=\log_2 t$$

بنابراین اگر فرض کنیم $t=12+\sqrt{[x]}-[x]$، آن‌گاه

$$f(x)=\log_{\frac12}\frac1t-1=\log_2 t-1$$

چون $R_f=\{\log_2 3,\log_2 5\}$، پس

$$\begin{cases}\log_2 t-1=\log_2 3\Rightarrow\log_2 t=1+\log_2 3=\log_2 6\Rightarrow t=6\\ \log_2 t-1=\log_2 5\Rightarrow\log_2 t=1+\log_2 5=\log_2 10\Rightarrow t=10\end{cases}$$

بنابراین با فرض $u=\sqrt{[x]}\ge 0$ داریم

$$\begin{cases}12+u-u^2=6\Rightarrow u^2-u-6=0\Rightarrow u=3,\ u=-2\ (\text{غ.ق.ق})\\ 12+u-u^2=10\Rightarrow u^2-u-2=0\Rightarrow u=2,\ u=-1\ (\text{غ.ق.ق})\end{cases}$$

بنابراین

$$\sqrt{[x]}=2\Rightarrow[x]=4\Rightarrow 4\le x<5$$

$$\sqrt{[x]}=3\Rightarrow[x]=9\Rightarrow 9\le x<10$$

بنابراین حداکثر عددهای صحیح ۴ و ۹ در دامنهٔ تابع f قرار دارند.

۲۰۲۸ (۳) تابع f اکیداً صعودی است و اگر نمودار آن را k واحد به بالا یا پایین منتقل کنیم، باز هم تابعی اکیداً صعودی حاصل می‌شود که نمودار وارونش را روی خط $y=x$ قطع می‌کند. پس نقطهٔ تقاطع نمودار تابع $y=f(x)+k$ و وارونش نقطهٔ $(1,1)$ است، پس

$$f(1)+k=1\Rightarrow\sqrt{\sqrt{1}+3}+k=1\Rightarrow k=-1$$

اکنون اگر نمودار حاصل را نسبت به محور x قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-(f(x)-1)$ به‌دست می‌آید و اگر این نمودار را ۴ واحد در جهت افقی به سمت چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y=-f(x+4)+1$ به‌دست می‌آید. پس ضابطهٔ تابع مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$y=-\sqrt{\sqrt{x+4}+3}+1$$

واضح است که نمودار این تابع از نقطهٔ $(0,1-\sqrt5)$ عبور می‌کند.

۲۰۲۹ (۴) ابتدا توابع fog و gof را معین می‌کنیم.

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(1-x^2)=\begin{cases}-1 & 1-x^2<-1\\ 1-x^2 & -1\le 1-x^2\le 1\\ 1 & 1-x^2>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-1 & x^2>2\\ 1-x^2 & 0\le x^2\le 2\\ 1 & x^2<0\end{cases}=\begin{cases}-1 & x>\sqrt2\ \text{یا}\ x<-\sqrt2\\ 1-x^2 & -\sqrt2\le x\le\sqrt2\end{cases}$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=1-f^2(x)=\begin{cases}1-(-1)^2 & x<-1\\ 1-x^2 & -1\le x\le 1\\ 1-1^2 & x>1\end{cases}$$

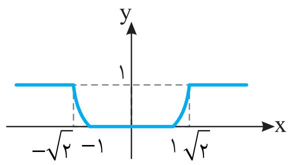
$$=\begin{cases}0 & x<-1\ \text{یا}\ x>1\\ 1-x^2 & -1\le x\le 1\end{cases}$$

بنابراین تابع $h=gof-fog$ به‌صورت زیر است:

$$h(x)=\begin{cases}0-(-1) & x<-\sqrt2\\ 0-(1-x^2) & -\sqrt2\le x<-1\\ 1-x^2-(1-x^2) & -1\le x\le 1\\ 0-(1-x^2) & 1<x\le\sqrt2\\ 0-(-1) & x\ge\sqrt2\end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases}1 & x<-\sqrt2\ \text{یا}\ x\ge\sqrt2\\ x^2-1 & -\sqrt2\le x<-1\ \text{یا}\ 1<x\le\sqrt2\\ 0 & -1\le x\le 1\end{cases}$$

پس نمودار تابع h به‌صورت زیر است و ماکزیمم مقدار آن برابر ۱ است.



۲۰۳۰ (۱) ابتدا توجه کنید که اگر $x\to 0^+$، آن‌گاه $[x]=0$، پس

$$\tan[x]=\tan 0=0$$

از طرف دیگر، $\sqrt{3x}\to 0^+$ و $(\sqrt{1-x^3}-1)\to 0^-$ و می‌توان از هم‌ارزی‌های $\sin\alpha\sim\alpha$ و $1-\cos\alpha\sim\frac12\alpha^2$ استفاده کرد. پس

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin(\sqrt{1-x^3}-1)-2\tan[x]}{x^n(1-\cos\sqrt{3x})}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{x^n(\frac12(3x))}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1-x^3-1}{\frac32x^{n+1}}\times\frac{1}{\sqrt{1-x^3}+1}=\lim_{x\to0^+}\frac{-1}{3x^{n-2}}$$

اکنون توجه کنید که اگر $n>2$، آن‌گاه حد بالا موجود نیست. اگر $n=2$، آن‌گاه حد بالا برابر $-\frac13$ است. پس $a=-\frac13$ و در نتیجه $a^n=\frac19$. اگر $0<n<2$، آن‌گاه حد مورد نظر برابر صفر است و در نتیجه $a^n=0$. بنابراین مقدار a^n می‌تواند برابر $\frac19$ یا صفر باشد که فقط $\frac19$ در گزینه‌ها وجود دارد.

۲۰۳۱ (۲) توجه کنید که اگر $x\to(-\frac12)^+$، آن‌گاه $\frac{-2}{x^2}\to(-8)^-$ و $\frac{3}{x^2}\to 12^+$.

بنابراین $[-\frac{2}{x^2}]=-9$ و $[\frac{3}{x^2}]=12$. پس حد مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$\lim_{x\to(-\frac12)^+}\frac{16x-(-9)}{24x+12}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

۲۰۳۲ (۱) ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x^3-5x+4}{(x-a)(4x^2-4x+1)}=\frac{(x-1)(x^2+x-4)}{(x-a)(2x-1)^2}$$

واضح است که $y=\frac14$ مجانب افقی و $x=\frac12$ مجانب قائم نمودار تابع f است. پس این تابع نباید مجانب قائم دیگری داشته باشد. سه حالت ممکن است:

حالت اول: $x=a$ همان $x=\frac12$ باشد، یعنی $a=\frac12$.

حالت دوم: $x=a$ همان $x=1$ باشد، یعنی $a=1$.

حالت سوم: $x=a$ ریشهٔ معادلهٔ $x^2+x-4=0$ باشد که در این حالت مجموع مقدارهای ممکن برای a برابر -1 است. پس مجموع تمام مقادیر ممکن a برابر است با

$$\frac12+1-1=\frac12$$

۲۰۳۳ (۳) ابتدا مشتق تابع f را پیدا می‌کنیم.

$$f(x)=\sin^n(x^۲)\Rightarrow f'(x)=۲nx\cos(x^۲)\sin^{n-۱}(x^۲)$$

بنابراین

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{f(x)f'(x)}{(۱-\cos x)^m}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sin^n(x^۲)۲nx\cos(x^۲)\sin^{n-۱}(x^۲)}{(۱-\cos x)^m}$$

$$=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۲nx\sin^{۲n-۱}(x^۲)\cos(x^۲)}{(۱-\cos x)^m}=۳۲\sqrt{۲}$$

اکنون از هم‌ارزی‌های $\sin\alpha\sim\alpha$ و $۱-\cos\alpha\sim\frac{۱}{۲}\alpha^۲$ استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{۲nx(x^۲)^{۲n-۱}\cos(x^۲)}{(\frac{۱}{۲}x^۲)^m}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{n\times ۲^{m+۱}x^{۴n-۱}}{x^{۲m}}=۳۲\sqrt{۲}$$

بنابراین

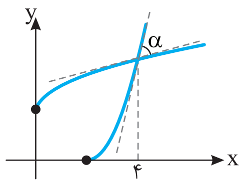
$$\begin{cases}۲m=۴n-۱\Rightarrow m=۲n-\frac{۱}{۲}\\ n\times ۲^{m+۱}=۳۲\sqrt{۲}\Rightarrow n\times ۲^{۲n+\frac{۱}{۲}}=۳۲\sqrt{۲}\Rightarrow n=۲\Rightarrow m=\frac{۷}{۲}\end{cases}$$

پس $۲m+n=۹$.

۲۰۳۴ (۴) تابع $f(x)=\sqrt{x}+۲$ اکیداً صعودی است و محل تقاطع نمودار آن با نمودار وارونش روی خط $y=x$ است. پس کافی است معادلهٔ $f(x)=x$ را حل کنیم.

$$\sqrt{x}+۲=x\Rightarrow \sqrt{x}=x-۲\Rightarrow x=x^۲-۴x+۴$$

$$x^۲-۵x+۴=۰\Rightarrow x=۴\ ,\ x=۱\ (\text{غ.ق.ق})$$



اکنون شیب خطوط مماس بر نمودار تابع‌های f و $f^{-۱}$ را در نقطهٔ $x=۴$ پیدا می‌کنیم.

$$f(x)=\sqrt{x}+۲\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\Rightarrow f'(۴)=\frac{۱}{۴}$$

$$f^{-۱}(x)=(x-۲)^۲\Rightarrow (f^{-۱})'(x)=۲(x-۲)\Rightarrow (f^{-۱})'(۴)=۴$$

تانژانت زاویهٔ بین دو خط با شیب‌های $m_۱$ و $m_۲$ از تساوی $\tan\alpha=|\frac{m_۱-m_۲}{۱+m_۱m_۲}|$ به‌دست می‌آید. پس

$$\tan\alpha=|\frac{۴-\frac{۱}{۴}}{۱+۴(\frac{۱}{۴})}|=\frac{۱۵}{۸},\quad \sin ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}=\frac{۲(\frac{۱۵}{۸})}{۱+(\frac{۱۵}{۸})^۲}=\frac{۲۴۰}{۲۸۹}$$

۲۰۳۵ (۱) مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم.

$$f(x)=۳\sqrt[۳]{x}+|x|=\begin{cases}۳\sqrt[۳]{x}+x & x\geq ۰\\ ۳\sqrt[۳]{x}-x & x\leq ۰\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}+۱ & x>۰\\ \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}-۱ & x<۰\end{cases}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow\begin{cases}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}+۱=۰\ (\text{غ.ق.ق})\\ \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}-۱=۰\Rightarrow \sqrt[۳]{x^۲}=۱\Rightarrow x^۲=۱\Rightarrow x=-۱\end{cases}$$

x	$-\infty$		-۱		۰		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	‖	$+$	

بنابراین تابع f روی بازهٔ $[-۱,+\infty)$ صعودی است.

۲۰۳۶ (۳) مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم.

$$f(x)=\frac{x^۴-۳}{x^۲-۲}\Rightarrow f'(x)=\frac{۴x^۳(x^۲-۲)-۲x(x^۴-۳)}{(x^۲-۲)^۲}$$

$$=\frac{۲x^۵-۸x^۳+۶x}{(x^۲-۲)^۲}=\frac{۲x(x^۴-۴x^۲+۳)}{(x^۲-۲)^۲}=\frac{۲x(x^۲-۱)(x^۲-۳)}{(x^۲-۲)^۲}$$

x	$-\infty$		-۲		$-\sqrt{۳}$		$-\sqrt{۲}$		-۱		۰		۱		$\sqrt{۲}$		$\sqrt{۳}$		۲		$+\infty$
$f'(x)$		////	‖	$-$	۰	$+$	‖	$+$	۰	$-$	۰	$+$	۰	$-$	‖	$-$	۰	$+$	‖	////	

بنابراین تابع f روی بازه‌های $(-۲,-\sqrt{۳})$ ، $(-۱,۰)$ ، $(۱,\sqrt{۲})$ و $(\sqrt{۲},\sqrt{۳})$ اکیداً نزولی است و در نقاط $-\sqrt{۳}$ ، -۱ ، ۰ ، ۱ و $\sqrt{۳}$ (پنج بار) جهت صعودی و نزولی نمودار تابع f تغییر می‌کند.

۲۰۳۷ (۱) مشتق اول و مشتق دوم تابع را تعیین علامت می‌کنیم و نقاط مینیمم نسبی و عطف تابع را معین می‌کنیم.

$$f(x)=x^۴-۶x^۲+۵\Rightarrow f'(x)=۴x^۳-۱۲x\Rightarrow f''(x)=۱۲x^۲-۱۲$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۴x(x^۲-۳)=۰\Rightarrow x=۰\ ,\ x=\pm\sqrt{۳}$$

$$f''(x)=۰\Rightarrow ۱۲(x^۲-۱)=۰\Rightarrow x=\pm ۱$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{۳}$		-۱		۰		۱		$\sqrt{۳}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$		$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$	
$f''(x)$		$+$		$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$		$+$	
			min		عطف		max		عطف		min		

پس نقاط $A(-\sqrt{۳},-۴)$ و $B(\sqrt{۳},-۴)$ مینیمم نسبی تابع f هستند و نقاط $C(-۱,۰)$ و $D(۱,۰)$ نقاط عطف این تابع هستند. شیب پاره‌خط‌های AB و CD برابر صفر است. بنابراین زاویهٔ بین آن‌ها برابر صفر است.