پاسخ کنکور ۱۴۰۰

۲۵۱۴- گزینهٔ ۴ اگر فرض کنیم $t=x^{۲}\geq ۰$، معادلهٔ مورد نظر به‌صورت $t^{۲}-۷t-۵=۰$ درمی‌آید. جواب‌های این معادله به‌صورت زیر هستند:

$$t=\frac{۷+\sqrt{۶۹}}{۲},\quad t=\frac{۷-\sqrt{۶۹}}{۲}<۰\ \text{(غ.ق.ق)}$$

چون جواب‌های معادلهٔ بالا باید نامنفی باشند، پس فقط جواب $t=\frac{۷+\sqrt{۶۹}}{۲}$ قابل قبول است. پس جواب‌های معادلهٔ اصلی به‌صورت زیر هستند:

$$x_{۱}=\sqrt{\frac{۷+\sqrt{۶۹}}{۲}},\quad x_{۲}=-\sqrt{\frac{۷+\sqrt{۶۹}}{۲}}$$

پس حاصل‌ضرب و مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر است با

$$P=x_{۱}x_{۲}=-\left(\sqrt{\frac{۷+\sqrt{۶۹}}{۲}}\right)^{۲}=-\frac{۷+\sqrt{۶۹}}{۲}$$

$$S=x_{۱}+x_{۲}=\sqrt{\frac{۷+\sqrt{۶۹}}{۲}}-\sqrt{\frac{۷+\sqrt{۶۹}}{۲}}=۰$$

بنابراین مقدار عبارت خواسته شده برابر است با

$$۲P^{۲}-۳SP+۲S=۲P^{۲}-۰+۰=۲\left(-\frac{۷+\sqrt{۶۹}}{۲}\right)^{۲}$$

$$=۲\left(\frac{۴۹+۶۹+۱۴\sqrt{۶۹}}{۴}\right)=۵۹+۷\sqrt{۶۹}$$

۲۵۱۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{vmatrix}\log ۵ & \log ۲\\ \log ۲ & \log ۵\end{vmatrix}=(\log ۵)^{۲}-(\log ۲)^{۲}$$

$$=(\log ۵+\log ۲)(\log ۵-\log ۲)$$

$$=\log ۱۰\times\log\frac{۵}{۲}=۱\times\log\frac{۵}{۲}=\log_{۱۰}\frac{۵}{۲}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\log_{۱۰}\frac{۵}{۲}\times\log_{\frac{۵}{۲}}(۳x-۲)=۱$$

$$\log_{۱۰}(۳x-۲)=۱\Rightarrow ۳x-۲=۱۰\Rightarrow ۳x=۱۲\Rightarrow x=۴$$

۲۵۱۶- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$\log_{۲۱}۱۳۲۳=\log_{۲۱}۹\times۱۴۷=\log_{۲۱}۹+\log_{۲۱}۱۴۷$$

$$=۲\log_{۲۱}۳+\log_{۲۱}۱۴۷$$

بنابراین عبارت مورد نظر به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$(\log_{۲۱}۳)^{۲}+\log_{۲۱}۱۴۷(۲\log_{۲۱}۳+\log_{۲۱}۱۴۷)$$

$$=(\log_{۲۱}۳)^{۲}+۲\log_{۲۱}۳\log_{۲۱}۱۴۷+(\log_{۲۱}۱۴۷)^{۲}$$

$$=(\log_{۲۱}۳+\log_{۲۱}۱۴۷)^{۲}=(\log_{۲۱}(۳\times۱۴۷))^{۲}=(\log_{۲۱}۴۴۱)^{۲}$$

$$=(\log_{۲۱}۲۱^{۲})^{۲}=(۲\log_{۲۱}۲۱)^{۲}=(۲\times۱)^{۲}=۴$$

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$\log_{۲۱}۳=\log_{۲۱}\frac{۲۱}{۷}=\log_{۲۱}۲۱-\log_{۲۱}۷=۱-\log_{۲۱}۷$$

$$\log_{۲۱}۱۴۷=\log_{۲۱}(۲۱\times۷)=\log_{۲۱}۲۱+\log_{۲۱}۷=۱+\log_{۲۱}۷$$

$$\log_{۲۱}۱۳۲۳=\log_{۲۱}(۲۱^{۲}\times۳)=۲\log_{۲۱}۲۱+\log_{۲۱}۳=۲+\log_{۲۱}۳$$

پس عبارت مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$(۱-\log_{۲۱}۷)^{۲}+(۱+\log_{۲۱}۷)(۲+\log_{۲۱}۳)$$

$$=۱+(\log_{۲۱}۷)^{۲}-۲\log_{۲۱}۷+۲+\log_{۲۱}۳$$

$$+۲\log_{۲۱}۷+\log_{۲۱}۷\log_{۲۱}۳$$

$$=۳+\log_{۲۱}۳+(\log_{۲۱}۷)(\log_{۲۱}۷+\log_{۲۱}۳)$$

$$=۳+\log_{۲۱}۳+\log_{۲۱}۷\log_{۲۱}۲۱$$

$$=۳+\log_{۲۱}۳+\log_{۲۱}۷=۳+\log_{۲۱}۲۱=۳+۱=۴$$

۲۵۱۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که اگر $x>\frac{۳}{۲}$، آن‌گاه عبارت $۲x-۳$ مثبت است و در نتیجه نامعادلهٔ مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$((m^{۲}-۱)x^{۲}-۴mx+۴)(x-۳\sqrt{x}+۲)>۰$$

از طرف دیگر،

$$A=x-۳\sqrt{x}+۲=(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}-۲)$$

بنابراین علامت عبارت A با شرط $x>\frac{۳}{۲}$ به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$	$\frac{۳}{۲}$		۴		$+\infty$
A			$-$	۰	$+$	

چـون علامـت A روی بازهٔ $(۲,۴)$ منفی اسـت و این بـازه مجموعهٔ جواب‌های نامعادله است، پس علامت عبارت $B=(m^{۲}-۱)x^{۲}-۴mx+۴$ در این بازه باید منفی باشد تا حاصل‌ضرب AB مثبت شود. همچنین علامت A روی بازهٔ $(\frac{۳}{۲},۲)$ منفی است و این بازه جواب نامعادله نیست. پس علامت B روی این بازه باید مثبت باشد. بنابراین $x=۲$ باید ریشهٔ B باشد. پس

$$(m^{۲}-۱)۴-۸m+۴=۰\Rightarrow m^{۲}-۲m=۰\Rightarrow\begin{cases}m=۲\\ m=۰\end{cases}$$

اگر $m=۲$، آن‌گاه

$$B=(۳x^{۲}-۸x+۴)=(۳x-۲)(x-۲)$$

در این صورت علامت B روی بازهٔ $(۲,۴)$ مثبت است که قابل قبول نیست.

اگر $m=۰$، آن‌گاه

$$B=-x^{۲}+۴=-(x-۲)(x+۲)$$

در این صورت علامت B روی بازهٔ $(۲,۴)$ منفی است و قابل قبول است.

۲۵۱۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2(\frac{1}{4})}{1-(\frac{1}{4})^2}=\frac{8}{15}$$

$$\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2(\frac{1}{4})}{1+(\frac{1}{4})^2}=\frac{8}{17}$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-(\frac{1}{4})^2}{1+(\frac{1}{4})^2}=\frac{15}{17}$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{\tan\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\frac{8}{15}-\frac{8}{17}}{\frac{8}{17}-\frac{15}{17}}=-\frac{16}{105}$$

۲۵۱۹- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$(1+\cos 2\alpha)(1+\cos 4\alpha)(1+\cos 8\alpha)=\frac{1}{8}$$

$$(2\cos^2\alpha)(2\cos^2 2\alpha)(2\cos^2 4\alpha)=\frac{1}{8}$$

$$(\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha)^2=\frac{1}{64}$$

$$\left(\frac{\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha}{\sin\alpha}\right)^2=\frac{1}{64}$$

$$\left(\frac{1}{2}\sin 2\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\right)^2=\frac{1}{64}\sin^2\alpha$$

$$\left(\frac{1}{4}\sin 4\alpha\cos 4\alpha\right)^2=\frac{1}{64}\sin^2\alpha\Rightarrow\left(\frac{1}{8}\sin 8\alpha\right)^2=\frac{1}{64}\sin^2\alpha$$

$$\sin^2 8\alpha=\sin^2\alpha\Rightarrow\frac{1-\cos 16\alpha}{2}=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos 16\alpha=\cos 2\alpha$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases}16\alpha=2k\pi+2\alpha\\ 16\alpha=2k\pi-2\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{k\pi}{7}\\ \alpha=\frac{k\pi}{9}\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}$$

بنابراین بزرگ‌ترین جواب معادله که در بازهٔ $[0,\pi]$ قرار دارد، برابر $\frac{8\pi}{9}$ است.

۲۵۲۰- گزینهٔ ۳ فرض کنید $P(x)=ax^2+bx+c$. در این صورت $P'(x)=2ax+b$. اگر $P(x)$ را بر $P'(x)$ تقسیم کنیم و خارج قسمت برابر $\frac{1}{2}x+1$ و باقی‌مانده برابر -2 باشد، آن‌گاه تساوی زیر همواره برقرار است:

$$P(x)=P'(x)(\frac{1}{2}x+1)-2$$

$$ax^2+bx+c=(2ax+b)(\frac{1}{2}x+1)-2$$

این تساوی را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$ax^2+bx+c=ax^2+(2a+\frac{b}{2})x+b-2$$

برای این که تساوی بالا به‌ازای هر مقدار x برقرار باشد، باید

$$\begin{cases}2a+\frac{b}{2}=b\Rightarrow b=4a\\ c=b-2\Rightarrow c=4a-2\end{cases}$$

بنابراین چندجمله‌ای $P(x)$ برابر $ax^2+4ax+4a-2$ است که مجموع ضرایب آن برابر است با $a+4a+4a-2=9a-2$

واضح است که کمترین مقدار این مجموع وقتی a عددی طبیعی است، برابر ۷ است که به‌ازای $a=1$ به‌دست می‌آید.

۲۵۲۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$a_{n+1}=\frac{1}{a_n}+1\Rightarrow a_{100}=\frac{1}{a_{99}}+1\Rightarrow\frac{k}{m}=\frac{1}{a_{99}}+1$$

$$\frac{1}{a_{99}}=\frac{k-m}{m}\Rightarrow a_{99}=\frac{m}{k-m}$$

بنابراین

$$a_{99}=\frac{1}{a_{98}}+1\Rightarrow\frac{m}{k-m}=\frac{1}{a_{98}}+1\Rightarrow\frac{1}{a_{98}}=\frac{m}{k-m}-1=\frac{2m-k}{k-m}$$

$$a_{98}=\frac{k-m}{2m-k}$$

۲۵۲۲- گزینهٔ ۱ ده جملهٔ اول دنباله را پیدا می‌کنیم.

$$a_n=\begin{cases}2^k & n=3k\\ -2k+4 & n=3k+1\\ [\frac{n}{k+2}]+a & n=3k+2\end{cases}$$

$$k=0\Rightarrow\begin{cases}a_0=2^0=1\\ a_1=-2\times 0+4=4\\ a_2=[\frac{3\times 0+2}{0+2}]+a=1+a\end{cases}$$

$$k=1\Rightarrow\begin{cases}a_3=2^1=2\\ a_4=-2\times 1+4=2\\ a_5=[\frac{3\times 1+2}{1+2}]+a=1+a\end{cases}$$

$$k=2\Rightarrow\begin{cases}a_6=2^2=4\\ a_7=-2\times 2+4=0\\ a_8=[\frac{3\times 2+2}{2+2}]+a=2+a\end{cases}$$

$$k=3\Rightarrow a_9=2^3=8$$

مجموع ده جملهٔ اول دنباله برابر ۱۹ است. پس

$$1+4+1+a+2+2+1+a+4+0+2+a+8=19$$

$$3a+25=19\Rightarrow a=-2$$

بنابراین اگر $n=3k+2$، آن‌گاه

$$a_n=[\frac{n}{k+2}]+a=[\frac{3k+2}{k+2}]-2=[3-\frac{4}{k+2}]-2=1+[\frac{-4}{k+2}]$$

$$a_2=-1,\ a_5=-1,\ a_8=a_{11}=a_{14}=a_{17}=a_{20}=a_{23}=a_{26}=a_{29}=0$$

بنابراین مجموع جملات بالا برابر -2 است.

۲۵۲۳- گزینهٔ ۴ اگر فرض کنیم $t=\sqrt[3]{9\cos^2 x-1}$، آن‌گاه ضابطهٔ تابع f به‌صورت $y=2^t-2^{-t}$ در می‌آید. از طرف دیگر،

$$0\le\cos^2 x\le1\Rightarrow 0\le 9\cos^2 x\le 9\Rightarrow -1\le 9\cos^2 x-1\le 8$$

$$-1\le\sqrt[3]{9\cos^2 x-1}\le 2\Rightarrow -1\le t\le 2$$

بنابراین باید برد تابع با ضابطهٔ $f(t)=2^t-2^{-t}$ و دامنهٔ $[-1,2]$ را به‌دست بیاوریم. توجه کنید که تابع $y=2^t$ اکیداً صعودی است. پس تابع $y=2^{-t}$ اکیداً نزولی است و تابع $y=-2^{-t}$ اکیداً صعودی است. پس تابع $y=2^t-2^{-t}$ نیز اکیداً صعودی است. بنابراین

$$-1\le t\le 2\Rightarrow f(-1)\le f(t)\le f(2)$$

$$-\frac{3}{2}\le f(t)\le\frac{15}{4}\Rightarrow R_f=[-\frac{3}{2},\frac{15}{4}]$$

بنابراین $a=-\frac{3}{2}$ و $b=\frac{15}{4}$ و در نتیجه $b-a=\frac{21}{4}$.

۲۵۲۴- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** دامنهٔ تابع f مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{1}{6+\sqrt{|x|}-|x|}>0$ است. اگر فرض کنیم $\sqrt{|x|}=t\ge0$، آن‌گاه نامعادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{6+t-t^2}>0\Rightarrow 6+t-t^2>0\Rightarrow t^2-t-6<0\Rightarrow (t-3)\underbrace{(t+2)}_{\text{مثبت}}<0$$

$$t-3<0\Rightarrow 0\le t<3$$

بنابراین باید نامعادلهٔ $0\le\sqrt{|x|}<3$ را حل کنیم. نابرابری $0\le\sqrt{|x|}$ به‌ازای هر مقدار x برقرار است. پس باید نامعادلهٔ $\sqrt{|x|}<3$ را حل کنیم.

$$\sqrt{|x|}<3\Rightarrow |x|<9\Rightarrow -9<x<9$$

راه‌حل دوم واضح است که $x=-4$ در دامنهٔ تابع قرار دارد.

$$f(-4)=\log_6(\frac{1}{6+\sqrt{4}-4})=\log_6\frac{1}{4}$$

عدد -4 فقط در بازهٔ $(-9,9)$ قرار دارد و عضو بازه‌های دیگر گزینه‌ها نیست. پس گزینهٔ (۱) درست است.

۲۵۲۵- گزینهٔ ۳ اگر نمودار تابع $y=\sqrt{4-x}$ را k واحد در راستای قائم انتقال دهیم، نمودار تابع $y=\sqrt{4-x}+k$ به‌دست می‌آید و اگر نمودار به‌دست آمده را $k-2$ واحد در راستای افقی انتقال دهیم، نمودار تابع زیر به‌دست می‌آید:

$$y=\sqrt{4-(x-(k-2))}+k=\sqrt{k+2-x}+k=f(x)$$

چون نمودار تابع f نمودار تابع وارونش را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند، پس اگر طول نقطهٔ تقاطع a باشد، آن‌گاه

$$f(a)=1\Rightarrow\sqrt{k+2-a}+k=1$$

$$\sqrt{k+2-a}=1-k\xrightarrow{1-k\ge0}a=k+2-(1-k)^2$$

$$f^{-1}(a)=1\Rightarrow f(1)=a\Rightarrow\sqrt{k+2-1}+k=a\xrightarrow{k\ge-1}a=\sqrt{k+1}+k$$

توجه کنید که تساوی‌های فوق فقط برای $-1\le k\le1$ می‌توانند برقرار باشند.

$$k+2-(1-k)^2=\sqrt{k+1}+k\Rightarrow 1+2k-k^2=\sqrt{k+1}$$

با شرط $1+2k-k^2\ge0$، یعنی $1-\sqrt{2}\le k\le 1+\sqrt{2}$، طرفین را به توان دو می‌رسانیم و معادله را ساده می‌کنیم:

$$k^4-4k^3+2k^2+3k=0\Rightarrow k(k^3-4k^2+2k+3)=0$$

$$k(k-3)(k^2-k-1)=0\Rightarrow\begin{cases}k=0\\ k=3\\ k=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\end{cases}$$

چون $-1\le k\le1$ و $1-\sqrt{2}\le k\le1+\sqrt{2}$، پس $1-\sqrt{2}\le k\le1$، پس فقط $k=0$ قابل قبول است. بنابراین $f(x)=\sqrt{2-x}$ و طول نقطهٔ برخورد نمودار تابع $y=f(x)-1$ با محور طول‌ها به‌صورت زیر است:

$$y=0\Rightarrow f(x)-1=0\Rightarrow\sqrt{2-x}=1\Rightarrow x=1$$

۲۵۲۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توابع fog و gof را معین می‌کنیم.

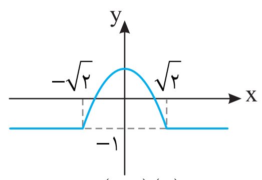
$$(fog)(x)=f(g(x))=f(1-x^2)=\begin{cases}-1 & 1-x^2<-1\\ 1-x^2 & -1\le 1-x^2\le1\\ 1 & 1-x^2>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-1 & x^2>2\\ 1-x^2 & 0\le x^2\le2\\ 1 & x^2<0\end{cases}=\begin{cases}-1 & x>\sqrt{2}\ \text{یا}\ x<-\sqrt{2}\\ 1-x^2 & -\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}\end{cases}$$

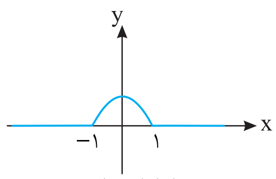
$$(gof)(x)=g(f(x))=1-f^2(x)=\begin{cases}1-(-1)^2 & x<-1\\ 1-x^2 & -1\le x\le1\\ 1-1^2 & x>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & x<-1\ \text{یا}\ x>1\\ 1-x^2 & -1\le x\le1\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع‌های fog و gof به‌صورت زیر است و هرکدام از آن‌ها در دو نقطه مشتق‌پذیر نیستند.



$y=(fog)(x)$

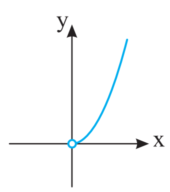


$y=(gof)(x)$

۲۵۲۷- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که ضابطهٔ تابع f به‌صورت زیر است:

$$f(x)=9^{\log_3 x}=(3^2)^{\log_3 x}=(3^{\log_3 x})^2=x^2$$

از طرف دیگر، دامنهٔ تابع f بازهٔ $(0,+\infty)$ است. پس نمودار تابع f به‌صورت زیر است:



۲۵۲۸- گزینهٔ «؟» توجه کنید که اگر $x\to 0^+$، آن‌گاه $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1\to 0^+$ و $\sqrt{2x}\to 0^+$. بنابراین می‌توانیم از هم‌ارزی‌های زیر استفاده کنیم:

$$\alpha\to 0:\quad \tan\alpha\sim\alpha,\quad 1-\cos\alpha\sim\frac{1}{2}\alpha^2$$

در این صورت حد مورد نظر به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1\right)^2}{\left(\frac{1}{2}(\sqrt{2x})^2\right)^n}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}{x^n}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{(1-\sqrt{1-x^2})^2}{x^n}\times\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1-x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{(1-(1-x^2))^2}{x^n}\times\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{(1+\sqrt{1-x^2})^2}\times\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1-x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^{n-4}}\times\frac{1}{(1+1)^2}\times\frac{1}{1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{4x^{n-4}}$$

اکنون توجه کنید که اگر $n>4$، آن‌گاه حد بالا نامتناهی است و نمی‌تواند برابر a باشد. اگر $n=4$، آن‌گاه حد بالا برابر $\frac{1}{4}$ است و در نتیجه $a=\frac{1}{4}$ و $a+n=\frac{17}{4}$. اگر $n<4$، آن‌گاه حد بالا برابر صفر است و در نتیجه $a=0$ و $a+n<4$. پس $a+n$ می‌تواند تمام مقادیر مجموعهٔ $(-\infty,4)\cup\{\frac{17}{4}\}$ را داشته باشد.

۲۵۲۹- گزینهٔ «۱» توجه کنید که توابع $y=\frac{3}{x^2}$ و $y=\frac{-2}{x^2}$ روی بازهٔ $(-\infty,0)$ به‌ترتیب اکیداً صعودی و اکیداً نزولی هستند. پس اگر $x\to(-\frac{1}{2})^-$، آن‌گاه

$$\frac{3}{x^2}\to 12^-,\quad \frac{-2}{x^2}\to(-8)^+$$

بنابراین در یک همسایگی چپ $x=-\frac{1}{2}$، توابع $y=[\frac{3}{x^2}]$ و $y=[\frac{-2}{x^2}]$ به‌ترتیب با تابع‌های $y=11$ و $y=-8$ برابرند. پس

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-}\frac{10x-5+[\frac{3}{x^2}]}{16x-[-\frac{2}{x^2}]}=\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-}\frac{10x-5+11}{16x-(-8)}$$

$$=\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-}\frac{10x+6}{16x+8}=-\infty$$

۲۵۳۰- گزینهٔ «۴» **راه‌حل اول** چون تابع f در دو نقطه ناپیوسته است، پس مخرج $f(x)$ دو ریشه دارد. چون تابع f دو مجانب موازی با محورهای مختصات دارد، پس یا هر دو مجانب آن قائم هستند و مجانب افقی ندارد یا یک مجانب قائم و یک مجانب افقی دارد. اگر $a=0$، آن‌گاه $f(x)=\frac{-bx^2+2}{-bx+2}$ که در این صورت مخرج $f(x)$ فقط یک ریشه دارد و قابل قبول نیست (واضح است که $b\neq 0$). اگر $a\neq 0$، آن‌گاه

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^3}{ax^3}=1$$

یعنی خط $y=1$ مجانب افقی تابع است. پس این تابع فقط یک مجانب قائم دارد، یعنی یکی از ریشه‌های مخرج $f(x)$ ریشهٔ صورت آن نیز هست. اگر این ریشه $x=n$ باشد، آن‌گاه

$$\begin{cases}an^3-bn^2+2=0\\ an^3-bn+2=0\end{cases}\Rightarrow bn^2-bn=0\Rightarrow bn(n-1)=0$$

چون $b\neq 0$ و $n\neq 0$، پس $n=1$، در نتیجه

$$a-b+2=0\Rightarrow b=a+2$$

اکنون توجه کنید که مخرج $f(x)$ علاوه بر $x=1$ یک ریشهٔ مضاعف دارد. پس

$$ax^3-bx+2=ax^3-(a+2)x+2=0\Rightarrow ax(x^2-1)-2(x-1)=0$$

$$(x-1)(a(x^2+x)-2)=0\Rightarrow (x-1)(ax^2+ax-2)=0$$

پس معادلهٔ $ax^2+ax-2=0$ ریشهٔ مضاعف دارد، یعنی

$$\Delta=a^2+8a=0\xrightarrow{a\neq 0}a=-8,\ b=-6$$

راه‌حل دوم مقادیر a و b را از گزینه‌ها در ضابطهٔ f قرار دهید و درست بودن شرایط مسئله را بررسی کنید.

۲۵۳۱- گزینهٔ «۲» ابتدا توجه کنید که حد مخرج کسر $\frac{f(x)}{x}$ در $x=0$ برابر صفر است و اگر حد صورت آن در این نقطه برابر صفر نباشد، حد این کسر نامتناهی می‌شود، پس حد صورت کسر، یعنی $f(x)$ هم باید در $x=0$ برابر صفر باشد. پس

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(\cos^3 2x+ax^2+b)=1+0+b=0\Rightarrow b=-1$$

از طرف دیگر،

$$f(x)=\cos^3 2x+ax^2-1\Rightarrow f'(x)=-6\sin 2x\cos^2 2x+2ax$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{-6\sin 2x\cos^2 2x}{x}+\frac{2ax}{x}\right)$$

$$=-6\times 2\times 1^2+2a=-12+2a=2\Rightarrow a=7$$

بنابراین $a+b=6$.

۲۵۳۲- گزینهٔ «۳» توجه کنید که تابع $f(x)=|\sin 2x|+1$ در نقطهٔ $x=0$ مشتق‌پذیر نیست:

$$x>0\Rightarrow f(x)=\sin 2x+1\Rightarrow f'(x)=2\cos 2x\Rightarrow f'_+(0)=2$$

$$x<0\Rightarrow f(x)=-\sin 2x+1\Rightarrow f'(x)=-2\cos 2x\Rightarrow f'_-(0)=-2$$

بنابراین شیب نیم‌مماس‌های راست و چپ که در $x=0$ بر نمودار تابع f رسم می‌شوند، به‌ترتیب برابر ۲ و ۲- است. معادلهٔ این نیم‌مماس‌ها به‌صورت زیر است:

نیم‌مماس راست: $y-f(0)=f'_+(0)(x-0)\Rightarrow y-1=2x\Rightarrow y=2x+1$

نیم‌مماس چپ: $y-f(0)=f'_-(0)(x-0)\Rightarrow y-1=-2x\Rightarrow y=-2x+1$

نقاط تلاقی امتداد این نیم‌مماس‌ها و نیمساز ناحیهٔ دوم و ناحیهٔ چهارم را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases}y=2x+1\\ y=-x\end{cases}\Rightarrow 2x+1=-x\Rightarrow x=-\frac{1}{3}\Rightarrow y=\frac{1}{3}$$

$$\begin{cases}y=-2x+1\\ y=-x\end{cases}\Rightarrow -2x+1=-x\Rightarrow x=1\Rightarrow y=-1$$

پس باید فاصلهٔ نقاط $A(1,-1)$ و $B(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ را پیدا کنیم:

$$AB=\sqrt{(1+\frac{1}{3})^2+(-1-\frac{1}{3})^2}=\sqrt{2\times\frac{16}{9}}=\frac{4}{3}\sqrt{2}$$

۲۵۳۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $D_f=[0,+\infty)-\{1\}$ و

$$f(x)=2x^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{3}}$$

$$f'(x)=2(\frac{1}{2})x^{-\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}(-\frac{1}{3})(2x)(x^2-1)^{-\frac{4}{3}}=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$$

بنابراین $f'(x)$ روی $(0,+\infty)-\{1\}$ مثبت است. از طرف دیگر،

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=2-(+\infty)=-\infty\ ,\quad \lim_{x\to1^-} f(x)=2-(-\infty)=+\infty$$

بنابراین تابع f روی دامنه‌اش صعودی نیست ولی روی بازه‌های $[0,1)$ و $(1,+\infty)$ صعودی است.

۲۵۳۴- گزینهٔ ۱ مشتق تابع f را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^4}{x^3-8}\ ,\ D_f=\mathbb{R}-\{2\}$$

$$f'(x)=\frac{4x^3(x^3-8)-3x^2(x^4)}{(x^3-8)^2}=\frac{x^3(x^3-32)}{(x^3-8)^2}$$

x	$-\infty$		0		2		$\sqrt[3]{32}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	تعریف نشده	$-$	0	$+$	

بنابراین $f'(x)$ روی بازه‌های $[0,2)$ و $(2,\sqrt[3]{32}]$ و هر زیرمجموعهٔ آن‌ها اکیداً نزولی است. بیشترین مقدار طول این بازه‌ها مربوط به بازهٔ $[0,2)$ است که برابر ۲ است.

۲۵۳۵- گزینهٔ ۳ ابتدا اکسترمم‌های نسبی تابع f را معین می‌کنیم:

$$f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$$

$$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x^2-x-2)=6(x+1)(x-2)$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}x=-1\Rightarrow y=-2-3+12+1=8\\ x=2\Rightarrow y=16-12-24+1=-19\end{cases}$$

پس نقاط $A(-1,8)$ و $B(2,-19)$ نقاط اکسترمم نسبی تابع f هستند و شیب پاره‌خط AB برابر است با $\frac{-19-8}{2-(-1)}=-9$

شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول a برابر $f'(a)$ است.

پس می‌خواهیم بدانیم به‌ازای چند مقدار a تساوی $f'(a)=-9$ برقرار است.

$$f'(a)=6(a+1)(a-2)=-9\Rightarrow 2a^2-2a-4=-3\Rightarrow 2a^2-2a-1=0$$

از معادلهٔ بالا دو جواب برای a به‌دست می‌آید. پس دو نقطه روی نمودار تابع f وجود دارد که خط مماس بر نمودار تابع f در آن نقاط موازی پاره‌خط AB است.

۲۵۳۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\log_a c+\log_b c=1\Rightarrow\frac{1}{\log_c a}+\frac{1}{\log_c b}=1$$

$$\log_c b+\log_c a=\log_c a\times\log_c b\Rightarrow\log_c(ab)=\log_c a\times\log_c b$$

۲۵۳۷- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\log_2(4^x+15)=x+3\Rightarrow4^x+15=2^{x+3}$$

$$(2^x)^2-8\times2^x+15=0\Rightarrow(2^x-5)(2^x-3)=0$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases}2^x-5=0\Rightarrow2^x=5\Rightarrow x=\log_2 5\\ 2^x-3=0\Rightarrow2^x=3\Rightarrow x=\log_2 3\end{cases}$$

پس مجموع جواب‌های معادله برابر است با

$$\log_2 5+\log_2 3=\log_2 5\times3=\log_2 15$$

۲۵۳۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید بـرای اینکه عبارت‌های رادیکالی موجود در معادله تعریف شده باشند، باید شرایط زیر وجود داشته باشد:

$$-x^2+6x-8\ge0\Rightarrow x^2-6x+8\le0\Rightarrow(x-2)(x-4)\le0$$

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$(x-2)(x-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$2\le x\le4\quad$ (I)

$$-x^3+4x^2+25x-100\ge0\Rightarrow x^3-4x^2-25x+100\le0$$

$$(x^3-25x)-(4x^2-100)\le0\Rightarrow x(x^2-25)-4(x^2-25)\le0$$

$$(x^2-25)(x-4)\le0\Rightarrow(x-5)(x+5)(x-4)\le0$$

x	$-\infty$		-5		4		5		$+\infty$
$(x-5)(x+5)(x-4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$x\le-5$ یا $4\le x\le5\quad$ (II)

از (I) و (II) نتیجه می‌شـود فقط به‌ازای $x=4$ عبارت‌های رادیکالی موجود در معادله تعریف شده هستند. اکنون کافی است مشخص کنیم $x=4$ جواب معادله هست یا نه.

$$\sqrt{x+\sqrt{-x^3+4x^2+25x-100}}+\sqrt{x^2+\sqrt{-x^2+6x-8}}=x+2$$

$$\sqrt{4+0}+\sqrt{16+0}=4+2\Rightarrow2+4=4+2$$

پس $x=4$ تنها جواب معادله است.

۲۵۳۹- گزینهٔ ۲و۳ ابتدا توجه کنید که

$$x-3\sqrt{x}+2=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)$$

بنابراین علامت عبارت $A=\frac{2x-3}{x-3\sqrt{x}+2}$ مطابق جدول زیر است:

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		4		$+\infty$
A		تعریف نشده		$-$	تعریف نشده	$+$	0	$-$	تعریف نشده	$+$	

اکنـون فـرض کنیـد $B=(m^2-1)x^2-4mx+4$، می‌خواهیـم مجموعـهٔ جواب‌هـای نامعادلهٔ $AB\ge0$ یک بازه باشـد. اگر B چندجملـه‌ای درجهٔ دوم باشـد و ریشـه نداشته باشـد یا ریشهٔ مضاعف داشـته باشـد، آن‌گاه با توجه به علامت A مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\ge0$ نمی‌تواند یک بازه باشد. پس B دو ریشـه دارد و این ریشـه‌ها باید از اعداد ۱، $\frac{3}{2}$ و ۴ باشـند، بنابراین سـه حالت را بررسی می‌کنیم:

حالت اول: $x=1$ ریشهٔ B است.

$$m^2-1-4m+4=0\Rightarrow m^2-4m+3=0\Rightarrow m=3\,,\,m=1\ (\text{غ.ق.ق})$$

$$B=8x^2-12x+4=4(x-1)(2x-1)$$

در این صورت جدول تعیین علامت AB به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$		4		$+\infty$
AB		▨		$-$	0	$+$	▨	$+$	0	$-$	▨	$+$	

واضح است که مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\ge 0$ یک بازه نیست.

حالت دوم: $x=\frac{3}{2}$ ریشهٔ B است.

$$(m^2-1)\frac{9}{4}-4(\frac{3}{2})m+4=0\Rightarrow 9m^2-9-24m+16=0$$

$$9m^2-24m+7=0\Rightarrow(3m-1)(3m-7)=0\Rightarrow m=\frac{1}{3}\,,\,m=\frac{7}{3}$$

اگر $m=\frac{1}{3}$، آن‌گاه

$$B=-\frac{8}{9}x^2-\frac{4}{3}x+4=(2x-3)(-\frac{4}{9}x-\frac{4}{3})$$

و جدول تعیین علامت AB به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		4		$+\infty$
AB		▨		$-$	▨	$+$	0	$+$	▨	$-$	

و مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\ge 0$ بازهٔ $(1,4)$ است.

اگر $m=\frac{7}{3}$، آن‌گاه

$$B=\frac{40}{9}x^2-\frac{28}{3}x+4=\frac{4}{9}(5x-3)(2x-3)$$

و جدول تعیین علامت AB به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{5}$		1		$\frac{3}{2}$		4		$+\infty$
AB		▨		$-$	0	$+$	▨	$-$	0	$-$	▨	$+$	

در این صورت مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\ge 0$ یک بازه نیست.

حالت سوم: $x=4$ ریشهٔ B است.

$$16(m^2-1)-16m+4=0\Rightarrow 4m^2-4m-3=0\Rightarrow m=-\frac{1}{2}\,,\,m=\frac{3}{2}$$

اگر $m=-\frac{1}{2}$، آن‌گاه

$$B=-\frac{3}{4}x^2+2x+4=(x-4)(-\frac{3}{4}x-1)$$

و جدول تعیین علامت AB به صورت زیر است:

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		4		$+\infty$
AB		▨		$-$	▨	$+$	0	$-$	▨	$-$	

و مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\ge 0$ بازهٔ $(1,\frac{3}{2}]$ است.

اگر $m=\frac{3}{2}$، آن‌گاه

$$B=\frac{5}{4}x^2-6x+4=(x-4)(\frac{5}{4}x-1)$$

و جدول تعیین علامت AB به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		0		$\frac{4}{5}$		1		$\frac{3}{2}$		4		$+\infty$
AB		▨		$-$	0	$+$	▨	$-$	0	$+$	▨	$+$	

در این صورت مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\ge 0$ یک بازه نیست.

اکنون توجه کنید که اگر $m=1$ یا $m=-1$، آن‌گاه چندجمله‌ای B از درجهٔ اول است. این دو حالت را هم باید بررسی کنیم.

اگر $m=1$، آن‌گاه $B=-4x+4$ و جدول تعیین علامت AB به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		4		$+\infty$
AB		▨		$-$	▨	$-$	0	$+$	▨	$-$	

و مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\ge 0$ بازهٔ $[\frac{3}{2},4)$ است.

اگر $m=-1$، آن‌گاه $B=4x+4$ و جدول تعیین علامت AB به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		4		$+\infty$
AB		▨		$-$	▨	$+$	0	$-$	▨	$+$	

در این صورت مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\ge 0$ یک بازه نیست.

بنابراین به‌ازای $m=\frac{1}{3}$، $m=-\frac{1}{2}$ و $m=1$ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\ge 0$ یک بازه است.

۲۵۴۰- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** مخرج مشترک می‌گیریم و ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+1-\cos^2\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}=\frac{2\sin^2\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}$$

$$=\frac{2\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{4\times\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=2\cot\frac{\theta}{2}$$

راه‌حل دوم ابتدا هریک از کسرها را ساده می‌کنیم، سپس حاصل را ساده می‌کنیم.

$$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}+\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$=\cot\frac{\theta}{2}+\cot\frac{\theta}{2}=2\cot\frac{\theta}{2}$$

راه‌حل سوم حاصل عبارت را به‌ازای $\theta=\frac{\pi}{3}$ حساب می‌کنیم:

$$\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{1-\cos\frac{\pi}{3}}+\frac{1+\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{3}+\frac{3}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$$

اکنون مقدار گزینه‌ها را به‌ازای $\theta=\frac{\pi}{3}$ حساب می‌کنیم:

گزینهٔ (۱) $\cos\frac{\theta}{2}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

گزینهٔ (۲) $\sin\frac{\theta}{2}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

گزینهٔ (۳) $2\cot\frac{\theta}{2}=2\cot\frac{\pi}{6}=2\sqrt{3}$

گزینهٔ (۴) $2\tan\frac{\theta}{2}=2\tan\frac{\pi}{6}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

۲۵۴۱- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(۱+\cos\alpha)(۱+\cos ۲\alpha)(۱+\cos ۴\alpha)=\frac{۱}{۸}$$

$$(۲\cos^۲\frac{\alpha}{۲})(۲\cos^۲\alpha)(۲\cos^۲ ۲\alpha)=\frac{۱}{۸}$$

$$(۸\cos\frac{\alpha}{۲}\cos\alpha\cos ۲\alpha)^۲=۱$$

واضح است که $\alpha=۲k\pi$ جواب معادله نیست، پس $\sin\frac{\alpha}{۲}\neq ۰$ و معادله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\left(\frac{۸\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}\cos\alpha\cos ۲\alpha}{\sin\frac{\alpha}{۲}}\right)^۲=۱$$

$$(۴\sin\alpha\cos\alpha\cos ۲\alpha)^۲=\sin^۲\frac{\alpha}{۲}$$

$$(۲\sin ۲\alpha\cos ۲\alpha)^۲=\sin^۲\frac{\alpha}{۲}\Rightarrow\frac{۱-\cos ۸\alpha}{۲}=\frac{۱-\cos\alpha}{۲}$$

$$\cos ۸\alpha=\cos\alpha$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases}۸\alpha=۲k\pi+\alpha\\ ۸\alpha=۲k\pi-\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{۲k\pi}{۷}\\ \alpha=\frac{۲k\pi}{۹}\end{cases},\quad k\in\mathbb{Z}$$

تعداد جواب‌های واقع در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید. (توجه کنید که $\alpha\neq ۲k\pi$)

$$۰<\frac{۲k\pi}{۷}<۲\pi\Rightarrow ۰<k<۷\Rightarrow k\in\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$$

$$۰<\frac{۲k\pi}{۹}<۲\pi\Rightarrow ۰<k<۹\Rightarrow k\in\{۱,۲,\dots,۸\}$$

پس معادله ۱۴ جواب در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ دارد.

۲۵۴۲- گزینهٔ ۴ بنابر قضیهٔ تقسیم، تساوی زیر به‌ازای هر مقدار x برقرار است:

$$P(x)=(x^۲+۲x)Q(x)+۳x+۱$$

از طرفین این تساوی مشتق می‌گیریم.

$$P'(x)=(۲x+۲)Q(x)+(x^۲+۲x)Q'(x)+۳$$

در تساوی بالا قرار می‌دهیم $x=-۲$ و نتیجه می‌شود

$$P'(-۲)=(-۴+۲)Q(-۲)+(۴-۴)Q'(-۲)+۳$$

$$P'(-۲)=-۲Q(-۲)+۳=-۲\times۳+۳=-۳$$

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم $P'(x)$ بر $x+۲$ برابر -۳ است.

۲۵۴۳- گزینهٔ ۲ ابتدا چند جمله از دنباله را مشخص می‌کنیم.

$$a_۱=-۱,\quad a_{n+۱}=۲-\frac{۱}{a_n}$$

$$a_۲=۲-\frac{۱}{a_۱}=۲+۱=۳\Rightarrow a_۲=\frac{۲\times۲-۱}{۲\times۲-۳}$$

$$a_۳=۲-\frac{۱}{a_۲}=۲-\frac{۱}{۳}=\frac{۵}{۳}\Rightarrow a_۳=\frac{۲\times۳-۱}{۲\times۳-۳}$$

$$a_۴=۲-\frac{۱}{a_۳}=۲-\frac{۳}{۵}=\frac{۷}{۵}\Rightarrow a_۴=\frac{۲\times۴-۱}{۲\times۴-۳}$$

$$a_۵=۲-\frac{۱}{a_۴}=۲-\frac{۵}{۷}=\frac{۹}{۷}\Rightarrow a_۵=\frac{۲\times۵-۱}{۲\times۵-۳}$$

بنابراین می‌توان حدس زد که

$$a_{۹۹}=\frac{۲\times۹۹-۱}{۲\times۹۹-۳}=\frac{۱۹۷}{۱۹۵},\quad a_{۱۰۰}=\frac{۲\times۱۰۰-۱}{۲\times۱۰۰-۳}=\frac{۱۹۹}{۱۹۷}$$

در نتیجه حاصل‌ضرب صد جملهٔ اول دنباله برابر است با

$$a_۱a_۲\cdots a_{۱۰۰}=(-۱)(\frac{۳}{۱})(\frac{۵}{۳})(\frac{۷}{۵})(\frac{۹}{۷})\cdots(\frac{۱۹۷}{۱۹۵})(\frac{۱۹۹}{۱۹۷})=-۱۹۹$$

۲۵۴۴- گزینهٔ ۲ ده جملهٔ اول دنباله را پیدا می‌کنیم.

$$a_n=\begin{cases}۲^k & n=۳k\\ -۲k+۴ & n=۳k+۱\\ [\frac{n}{k+۲}]+a & n=۳k+۲\end{cases}$$

$$k=۰\Rightarrow\begin{cases}a_۰=۲^۰=۱\\ a_۱=-۲\times۰+۴=۴\\ a_۲=[\frac{۳\times۰+۲}{۰+۲}]+a=۱+a\end{cases}$$

$$k=۱\Rightarrow\begin{cases}a_۳=۲^۱=۲\\ a_۴=-۲\times۱+۴=۲\\ a_۵=[\frac{۳\times۱+۲}{۱+۲}]+a=۱+a\end{cases}$$

$$k=۲\Rightarrow\begin{cases}a_۶=۲^۲=۴\\ a_۷=-۲\times۲+۴=۰\\ a_۸=[\frac{۳\times۲+۲}{۲+۲}]+a=۲+a\end{cases}$$

$$k=۳\Rightarrow a_۹=۲^۳=۸$$

مجموع ده جملهٔ اول دنباله برابر ۱۹ است. پس

$$۱+۴+۱+a+۲+۲+۱+a+۴+۰+۲+a+۸=۱۹$$

$$۳a+۲۵=۱۹\Rightarrow a=-۲$$

بنابراین باید میانگین $a_{۲۸}$ و $a_{۲۹}$ را پیدا کنیم.

$$a_{۲۸}=-۲\times۹+۴=-۱۴,\quad a_{۲۹}=[\frac{۲۹}{۹+۲}]-۲=۲-۲=۰$$

پس میانگین جملات بیست و نهم $(a_{۲۹})$ و سی‌ام $(a_{۲۸})$ برابر است با

$$\frac{-۱۴+۰}{۲}=-۷$$

۲۵۴۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$۰\le\sin^۲x\le۱\Rightarrow ۰\le۵\sin^۲x\le۵\Rightarrow -۱\le۵\sin^۲x-۱\le۴$$

$$۰\le\sqrt{۵\sin^۲x-۱}\le۲\Rightarrow -۲\le-\sqrt{۵\sin^۲x-۱}\le۰$$

$$۲^{-۲}\le۲^{-\sqrt{۵\sin^۲x-۱}}\le۲^۰\Rightarrow\frac{۱}{۴}\le f(x)\le۱$$

بنابراین $R_f=[\frac{۱}{۴},۱]$. در نتیجه

$$a=\frac{۱}{۴},\ b=۱\Rightarrow a+b=\frac{۵}{۴}$$

۲۵۴۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{t}=\log_{2^{-1}}t^{-1}=\log_2 t$$

بنابراین اگر فرض کنیم $t=12+\sqrt{[x]}-[x]$، آن‌گاه

$$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{t}-1=\log_2 t-1$$

چون $R_f=\{\log_2 3,\log_2 5\}$، پس

$$\begin{cases}\log_2 t-1=\log_2 3\Rightarrow\log_2 t=1+\log_2 3=\log_2 6\Rightarrow t=6\\ \log_2 t-1=\log_2 5\Rightarrow\log_2 t=1+\log_2 5=\log_2 10\Rightarrow t=10\end{cases}$$

بنابراین با فرض $u=\sqrt{[x]}\geq 0$ داریم

$$\begin{cases}12+u-u^2=6\Rightarrow u^2-u-6=0\Rightarrow u=3\,,\,u=-2\ (\text{غ.ق.ق})\\ 12+u-u^2=10\Rightarrow u^2-u-2=0\Rightarrow u=2\,,\,u=-1\ (\text{غ.ق.ق})\end{cases}$$

بنابراین

$$\sqrt{[x]}=2\Rightarrow[x]=4\Rightarrow 4\leq x<5$$

$$\sqrt{[x]}=3\Rightarrow[x]=9\Rightarrow 9\leq x<10$$

بنابراین حداکثر عددهای صحیح ۴ و ۹ در دامنهٔ تابع f قرار دارند.

۲۵۴۷- گزینهٔ ۳ تابع f اکیداً صعودی است و اگر نمودار آن را k واحد به بالا یا پایین منتقل کنیم، باز هم تابعی اکیداً صعودی حاصل می‌شود که نمودار وارونش را روی خط $y=x$ قطع می‌کند. پس نقطهٔ تقاطع نمودار تابع $y=f(x)+k$ و وارونش نقطهٔ $(1,1)$ است، پس

$$f(1)+k=1\Rightarrow\sqrt{\sqrt{1}+3}+k=1\Rightarrow k=-1$$

اکنون اگر نمودار حاصل را نسبت به محور x قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-(f(x)-1)$ به‌دست می‌آید و اگر این نمودار را ۴ واحد در جهت افقی به سمت چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y=-f(x+4)+1$ به‌دست می‌آید. پس ضابطهٔ تابع مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$y=-\sqrt{\sqrt{x+4}+3}+1$$

واضح است که نمودار این تابع از نقطهٔ $(0,1-\sqrt{5})$ عبور می‌کند.

۲۵۴۸- گزینهٔ ۴ ابتدا توابع fog و gof را معین می‌کنیم.

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(1-x^2)=\begin{cases}-1 & 1-x^2<-1\\ 1-x^2 & -1\leq 1-x^2\leq 1\\ 1 & 1-x^2>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-1 & x^2>2\\ 1-x^2 & 0\leq x^2\leq 2\\ 1 & x^2<0\end{cases}=\begin{cases}-1 & x>\sqrt{2}\ \text{یا}\ x<-\sqrt{2}\\ 1-x^2 & -\sqrt{2}\leq x\leq\sqrt{2}\end{cases}$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=1-f^2(x)=\begin{cases}1-(-1)^2 & x<-1\\ 1-x^2 & -1\leq x\leq 1\\ 1-1^2 & x>1\end{cases}$$

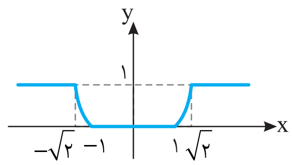
$$=\begin{cases}0 & x<-1\ \text{یا}\ x>1\\ 1-x^2 & -1\leq x\leq 1\end{cases}$$

بنابراین تابع $h=gof-fog$ به‌صورت زیر است:

$$h(x)=\begin{cases}0-(-1) & x<-\sqrt{2}\\ 0-(1-x^2) & -\sqrt{2}\leq x<-1\\ 1-x^2-(1-x^2) & -1\leq x\leq 1\\ 0-(1-x^2) & 1<x\leq\sqrt{2}\\ 0-(-1) & x\geq\sqrt{2}\end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases}1 & x<-\sqrt{2}\ \text{یا}\ x\geq\sqrt{2}\\ x^2-1 & -\sqrt{2}\leq x<-1\ \text{یا}\ 1<x\leq\sqrt{2}\\ 0 & -1\leq x\leq 1\end{cases}$$

پس نمودار تابع h به‌صورت زیر است و ماکزیمم مقدار آن برابر ۱ است.



۲۵۴۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $x\to 0^+$، آن‌گاه $[x]=0$، پس

$$\tan[x]=\tan 0=0$$

از طرف دیگر، $\sqrt{3x}\to 0^+$ و $(\sqrt{1-x^3}-1)\to 0^-$ و می‌توان از هم‌ارزی‌های $\sin\alpha\sim\alpha$ و $1-\cos\alpha\sim\frac{1}{2}\alpha^2$ استفاده کرد. پس

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(\sqrt{1-x^3}-1)-2\tan[x]}{x^n(1-\cos\sqrt{3x})}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{x^n(\frac{1}{2}(3x))}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-x^3-1}{\frac{3}{2}x^{n+1}}\times\frac{1}{\sqrt{1-x^3}+1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{3x^{n-2}}$$

اکنون توجه کنید که اگر $n>2$، آن‌گاه حد بالا موجود نیست. اگر $n=2$، آن‌گاه حد بالا برابر $-\frac{1}{3}$ است. پس $a=-\frac{1}{3}$ و در نتیجه $a^n=\frac{1}{9}$. اگر $0<n<2$، آن‌گاه حد مورد نظر برابر صفر است و در نتیجه $a^n=0$. بنابراین مقدار a^n می‌تواند برابر $\frac{1}{9}$ یا صفر باشد که فقط $\frac{1}{9}$ در گزینه‌ها وجود دارد.

۲۵۵۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که اگر $x\to(-\frac{1}{2})^+$، آن‌گاه $\frac{-2}{x^2}\to(-8)^-$ و $\frac{3}{x^2}\to 12^+$. بنابراین $[-\frac{2}{x^2}]=-9$ و $[\frac{3}{x^2}]=12$. پس حد مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^+}\frac{16x-(-9)}{24x+12}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

۲۵۵۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x^3-5x+4}{(x-a)(4x^2-4x+1)}=\frac{(x-1)(x^2+x-4)}{(x-a)(2x-1)^2}$$

واضح است که $y=\frac{1}{4}$ مجانب افقی و $x=\frac{1}{2}$ مجانب قائم نمودار تابع f است.

پس این تابع نباید مجانب قائم دیگری داشته باشد. سه حالت ممکن است:

حالت اول: $x=a$ همان $x=\frac{۱}{۲}$ باشد، یعنی $a=\frac{۱}{۲}$.

حالت دوم: $x=a$ همان $x=۱$ باشد، یعنی $a=۱$.

حالت سوم: $x=a$ ریشهٔ معادلهٔ $x^۲+x-۴=۰$ باشد که در این حالت مجموع مقدارهای ممکن برای a برابر ۱− است. پس مجموع تمام مقادیر ممکن a برابر است با

$$\frac{۱}{۲}+۱-۱=\frac{۱}{۲}$$

۲۵۵۲- گزینهٔ ۳ ابتدا مشتق تابع f را پیدا می‌کنیم.

$$f(x)=\sin^n(x^۲)\Rightarrow f'(x)=۲nx\cos(x^۲)\sin^{n-۱}(x^۲)$$

بنابراین

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{f(x)f'(x)}{(۱-\cos x)^m}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sin^n(x^۲)۲nx\cos(x^۲)\sin^{n-۱}(x^۲)}{(۱-\cos x)^m}$$

$$=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۲nx\sin^{۲n-۱}(x^۲)\cos(x^۲)}{(۱-\cos x)^m}=۳۲\sqrt{۲}$$

اکنون از هم‌ارزی‌های $\sin\alpha\sim\alpha$ و $۱-\cos\alpha\sim\frac{۱}{۲}\alpha^۲$ استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{۲nx(x^۲)^{۲n-۱}\cos(x^۲)}{(\frac{۱}{۲}x^۲)^m}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{n\times ۲^{m+۱}x^{۴n-۱}}{x^{۲m}}=۳۲\sqrt{۲}$$

بنابراین

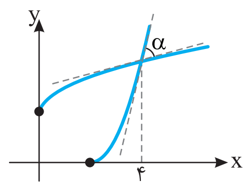
$$\begin{cases}۲m=۴n-۱\Rightarrow m=۲n-\frac{۱}{۲}\\ n\times ۲^{m+۱}=۳۲\sqrt{۲}\Rightarrow n\times ۲^{۲n+\frac{۱}{۲}}=۳۲\sqrt{۲}\Rightarrow n=۲\Rightarrow m=\frac{۷}{۲}\end{cases}$$

پس $۲m+n=۹$.

۲۵۵۳- گزینهٔ ۴ تابع $f(x)=\sqrt{x}+۲$ اکیداً صعودی است و محل تقاطع نمودار آن با نمودار وارونش روی خط $y=x$ است. پس کافی است معادلهٔ $f(x)=x$ را حل کنیم.

$$\sqrt{x}+۲=x\Rightarrow\sqrt{x}=x-۲\Rightarrow x=x^۲-۴x+۴$$

$$x^۲-۵x+۴=۰\Rightarrow x=۴\,,\,x=۱\text{(غ.ق.ق)}$$



اکنون شیب خطوط مماس بر نمودار تابع‌های f و $f^{-۱}$ را در نقطهٔ $x=۴$ پیدا می‌کنیم.

$$f(x)=\sqrt{x}+۲\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\Rightarrow f'(۴)=\frac{۱}{۴}$$

$$f^{-۱}(x)=(x-۲)^۲\Rightarrow(f^{-۱})'(x)=۲(x-۲)\Rightarrow(f^{-۱})'(۴)=۴$$

تانژانت زاویهٔ بین دو خط با شیب‌های $m_۱$ و $m_۲$ از تساوی $\tan\alpha=|\frac{m_۱-m_۲}{۱+m_۱m_۲}|$ به‌دست می‌آید. پس

$$\tan\alpha=|\frac{۴-\frac{۱}{۴}}{۱+۴(\frac{۱}{۴})}|=\frac{۱۵}{۸},\quad \sin ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}=\frac{۲(\frac{۱۵}{۸})}{۱+(\frac{۱۵}{۸})^۲}=\frac{۲۴۰}{۲۸۹}$$

۲۵۵۴- گزینهٔ ۱ مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم.

$$f(x)=۳\sqrt[۳]{x}+|x|=\begin{cases}۳\sqrt[۳]{x}+x & x\geq ۰\\ ۳\sqrt[۳]{x}-x & x\leq ۰\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}+۱ & x>۰\\ \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}-۱ & x<۰\end{cases}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow\begin{cases}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}+۱=۰\ \text{(غ.ق.ق)}\\ \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}-۱=۰\Rightarrow\sqrt[۳]{x^۲}=۱\Rightarrow x^۲=۱\Rightarrow x=-۱\end{cases}$$

x	$-\infty$		-۱		۰		$+\infty$
$f'(x)$		−	۰	+	(تعریف‌نشده)	+	

بنابراین تابع f روی بازهٔ $[-۱,+\infty)$ صعودی است.

۲۵۵۵- گزینهٔ ۳ مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم.

$$f(x)=\frac{x^۴-۳}{x^۲-۲}\Rightarrow f'(x)=\frac{۴x^۳(x^۲-۲)-۲x(x^۴-۳)}{(x^۲-۲)^۲}$$

$$=\frac{۲x^۵-۸x^۳+۶x}{(x^۲-۲)^۲}=\frac{۲x(x^۴-۴x^۲+۳)}{(x^۲-۲)^۲}=\frac{۲x(x^۲-۱)(x^۲-۳)}{(x^۲-۲)^۲}$$

x	$-\infty$		-۲		$-\sqrt{۳}$		$-\sqrt{۲}$		-۱		۰		۱		$\sqrt{۲}$		$\sqrt{۳}$		۲		$+\infty$
$f'(x)$		(تعریف‌نشده)		−	۰	+	(تعریف‌نشده)	+	۰	−	۰	+	۰	−	(تعریف‌نشده)	−	۰	+		(تعریف‌نشده)	

بنابراین تابع f روی بازه‌های $(-۲,-\sqrt{۳})$، $(-۱,۰)$، $(۱,\sqrt{۲})$ و $(\sqrt{۲},\sqrt{۳})$ اکیداً نزولی است و در نقاط $-\sqrt{۳}$، ۱−، ۰، ۱ و $\sqrt{۳}$ (پنج بار) جهت صعودی و نزولی نمودار تابع f تغییر می‌کند.

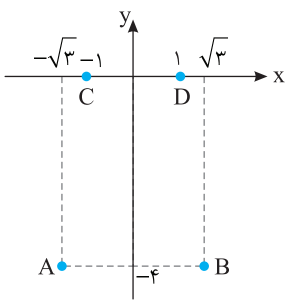
۲۵۵۶- گزینهٔ ۱ مشتق اول و مشتق دوم تابع را تعیین علامت می‌کنیم و نقاط مینیمم نسبی و عطف تابع را معین می‌کنیم.

$$f(x)=x^۴-۶x^۲+۵\Rightarrow f'(x)=۴x^۳-۱۲x\Rightarrow f''(x)=۱۲x^۲-۱۲$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۴x(x^۲-۳)=۰\Rightarrow x=۰\,,\,x=\pm\sqrt{۳}$$

$$f''(x)=۰\Rightarrow ۱۲(x^۲-۱)=۰\Rightarrow x=\pm ۱$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{۳}$		-۱		۰		۱		$\sqrt{۳}$		$+\infty$
$f'(x)$		−	۰	+		+	۰	−		−	۰	+	
$f''(x)$		+		+	۰	−		−	۰	+		+	
			min		عطف		max		عطف		min		



پس نقاط $A(-\sqrt{۳},-۴)$ و $B(\sqrt{۳},-۴)$ مینیمم نسبی تابع f هستند و نقاط $C(-۱,۰)$ و $D(۱,۰)$ نقاط عطف این تابع هستند. شیب پاره‌خط‌های AB و CD برابر صفر است. بنابراین زاویهٔ بین آن‌ها برابر صفر است.

۲۵۵۷- گزینهٔ ۴ عبارت مورد نظر را A می‌نامیم. در این صورت

$$A=(a^2+b^2-2ab)^2(a^2+b^2+2ab)^2=((a-b)^2)^2((a+b)^2)^2$$
$$=(((a-b)(a+b))^2)^2$$

از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم.

$$A=((a^2-b^2)^2)^2=(a^4-2a^2b^2+b^4)^2$$

اکنون توجه کنید که

$$a^4=(\sqrt[4]{\sqrt{6}-2})^4=\sqrt{6}-2,\quad b^4=(\sqrt[4]{\sqrt{6}+2})^4=\sqrt{6}+2$$
$$a^2b^2=(\sqrt[4]{\sqrt{6}-2})^2\times(\sqrt[4]{\sqrt{6}+2})^2=\sqrt{\sqrt{6}-2}\times\sqrt{\sqrt{6}+2}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)}=\sqrt{6-4}=\sqrt{2}$$

بنابراین

$$A=(a^4-2a^2b^2+b^4)^2=(\sqrt{6}-2-2\sqrt{2}+\sqrt{6}+2)^2$$
$$=(2\sqrt{6}-2\sqrt{2})^2=4(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2=4(6+2-2\sqrt{12})$$

چون $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ ، پس

$$A=4(8-4\sqrt{3})=16(2-\sqrt{3})$$

۲۵۵۸- گزینهٔ ۴ فرض می‌کنیم $\sqrt[3]{x}=t$. در این صورت معادلهٔ مورد نظر به شکل مقابل در می‌آید:

$$(t^2+\frac{1}{t^2}+1)(t^2-1)=2t\Rightarrow(\frac{t^4+1+t^2}{t^2})(t^2-1)=2t$$

برای اینکه معادله را ساده کنیم، دو طرف آن را در t^2 ضرب می‌کنیم

$$(t^4+t^2+1)(t^2-1)=2t^3$$

اکنون توجه کنید که می‌توانیم سمت چپ معادله را به کمک اتحاد چاق و لاغر ساده کنیم

$$(t^2)^3-1^3=2t^3\Rightarrow(t^3)^2-2t^3-1=0\qquad(*)$$

چون $\sqrt[3]{x}=t$ ، پس $x=t^3$ ، در نتیجه معادلهٔ $(*)$ می‌شود $x^2-2x-1=0$ ، که مجموع جواب‌های آن برابر است با $-\frac{(-2)}{1}=2$.

۲۵۵۹- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** توجه کنید که چون x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ $x^2+x-5=0$ هستند، پس $x_1+x_2=-1$ و $x_1x_2=-5$. اکنون می‌توانیم مجموع جواب‌های معادلهٔ جدید را به صورت زیر حساب کنیم:

$$S=\frac{1}{(x_1+1)^3}+\frac{1}{(x_2+1)^3}\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}}S=\frac{(x_1+1)^3+(x_2+1)^3}{(x_1+1)^3(x_2+1)^3}$$

از اتحاد $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ استفاده می‌کنیم و صورت کسر را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$S=\frac{(x_1+1+x_2+1)^3-3(x_1+1)(x_2+1)(x_1+1+x_2+1)}{((x_1+1)(x_2+1))^3}$$
$$=\frac{(x_1+x_2+2)^3-3(x_1+x_2+x_1x_2+1)(x_1+x_2+2)}{(x_1+x_2+x_1x_2+1)^3}$$
$$=\frac{(-1+2)^3-3(-1-5+1)(-1+2)}{(-1-5+1)^3}=\frac{1-3(-5)(1)}{(-5)^3}=-\frac{16}{125}$$

همچنین حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ جدید به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$P=\frac{1}{(x_1+1)^3}\times\frac{1}{(x_2+1)^3}=\frac{1}{((x_1+1)(x_2+1))^3}$$
$$=\frac{1}{(x_1+x_2+x_1x_2+1)^3}=\frac{1}{(-1-5+1)^3}=-\frac{1}{125}$$

بنابراین معادلهٔ جدید به‌صورت $x^2+\frac{16}{125}x-\frac{1}{125}=0$ است، که اگر دو طرف آن را در ۱۲۵ ضرب کنیم، می‌شود $125x^2+16x-1=0$.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$S=\frac{1}{(x_1+1)^3}+\frac{1}{(x_2+1)^3}=(\frac{1}{x_1+1})^3+(\frac{1}{x_2+1})^3=\frac{x_1^3}{125}+\frac{x_2^3}{125}=\frac{x_1^3+x_2^3}{125}$$

اکنون از اتحاد $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ استفاده می‌کنیم. چون $x_1+x_2=-1$ و $x_1x_2=-5$ ، پس

$$S=\frac{(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)}{125}=\frac{(-1)^3-3(-5)(-1)}{125}=-\frac{16}{125}$$

از طرف دیگر،

$$P=\frac{1}{(x_1+1)^3}\times\frac{1}{(x_2+1)^3}=(\frac{1}{x_1+1})^3\times(\frac{1}{x_2+1})^3=\frac{x_1^3}{5^3}\times\frac{x_2^3}{5^3}=\frac{(x_1x_2)^3}{5^3\times5^3}$$

چون $x_1x_2=-5$ ، پس $P=\frac{(-5)^3}{5^3\times5^3}$ ، یعنی $P=-\frac{1}{125}$. در نتیجه معادلهٔ مورد نظر به‌صورت $x^2+\frac{16}{125}x-\frac{1}{125}=0$ است، که اگر دو طرف آن را در ۱۲۵ ضرب کنیم، می‌شود $125x^2+16x-1=0$.

۲۵۶۰- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$f(\frac{\pi}{36})=16\cos^2\frac{3\pi}{36}\cos^2\frac{6\pi}{36}\cos^2\frac{12\pi}{36}\cos^2\frac{24\pi}{36}$$
$$=16\cos^2\frac{\pi}{12}\cos^2\frac{\pi}{6}\cos^2\frac{\pi}{3}\cos^2\frac{2\pi}{3}$$
$$=16\cos^2\frac{\pi}{12}(\frac{\sqrt{3}}{2})^2(\frac{1}{2})^2(-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}\cos^2\frac{\pi}{12}$$

اکنون برای اینکه مقدار $\cos^2\frac{\pi}{12}$ را حساب کنیم، از اتحاد مثلثاتی $\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos2\alpha)$ استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$f(\frac{\pi}{36})=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}(1+\cos\frac{2\pi}{12})=\frac{3}{8}(1+\frac{\sqrt{3}}{2})$$
$$=\frac{3}{8}(\frac{2+\sqrt{3}}{2})=\frac{6+3\sqrt{3}}{16}$$

راه‌حل دوم عبارت داده شده را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=16(\cos3x\cos6x\cos12x\cos24x)^2$$

اکنون عبارت داخل پرانتز را در $\sin3x$ ضرب و تقسیم می‌کنیم

$$f(x)=16(\frac{\sin3x\cos3x\cos6x\cos12x\cos24x}{\sin3x})^2$$

از اتحاد مثلثاتی $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin2\alpha$ به‌دست می‌آید

$$\sin3x\cos3x=\frac{1}{2}\sin6x$$

درنتیجه

$$f(x)=16\left(\frac{\frac{1}{2}\sin 6x\cos 6x\cos 12x\cos 24x}{\sin 3x}\right)^2$$

به‌طور مشابه $\sin 6x\cos 6x=\frac{1}{2}\sin 12x$، پس

$$f(x)=16\left(\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin 12x\cos 12x\cos 24x}{\sin 3x}\right)^2$$

به‌طور مشابه با انجام دو مرحلهٔ دیگر عبارت را به ساده‌ترین صورت می‌نویسیم.

$$f(x)=16\left(\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin 24x\cos 24x}{\sin 3x}\right)^2$$

$$=16\left(\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin 48x}{\sin 3x}\right)^2=\frac{\sin^2 48x}{16\sin^2 3x}$$

بنابراین

$$f\left(\frac{\pi}{36}\right)=\frac{\sin^2\frac{48\pi}{36}}{16\sin^2\frac{3\pi}{36}}=\frac{\sin^2\frac{4\pi}{3}}{16\sin^2\frac{\pi}{12}}=\frac{\sin^2(\pi+\frac{\pi}{3})}{16\sin^2\frac{\pi}{12}}\xrightarrow[2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha]{\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha}$$

$$f\left(\frac{\pi}{36}\right)=\frac{(-\sin\frac{\pi}{3})^2}{8(1-\cos\frac{2\pi}{12})}=\frac{\sin^2\frac{\pi}{3}}{8(1-\cos\frac{\pi}{6})}=\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}{8(1-\frac{\sqrt{3}}{2})}=\frac{\frac{3}{4}}{4(2-\sqrt{3})}$$

در نهایت صورت و مخرج را در مزدوج $2-\sqrt{3}$، یعنی $2+\sqrt{3}$ ضرب می‌کنیم

$$f\left(\frac{\pi}{36}\right)=\frac{3}{16(2-\sqrt{3})}\times\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{3(2+\sqrt{3})}{16(4-3)}=\frac{6+3\sqrt{3}}{16}$$

راه‌حل سوم عبارت $f(x)$ را به شکل زیر ساده می‌کنیم:

$$f(x)=(2\cos^2 3x)(2\cos^2 6x)(2\cos^2 12x)(2\cos^2 24x)$$

$$=(1+\cos 6x)(1+\cos 12x)(1+\cos 24x)(1+\cos 48x)$$

بنابراین

$$f\left(\frac{\pi}{36}\right)=\left(1+\cos\frac{6\pi}{36}\right)\left(1+\cos\frac{12\pi}{36}\right)\left(1+\cos\frac{24\pi}{36}\right)\left(1+\cos\frac{48\pi}{36}\right)$$

$$=\left(1+\cos\frac{\pi}{6}\right)\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right)\left(1+\cos\frac{2\pi}{3}\right)\left(1+\cos\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$=\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{2+\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{6+3\sqrt{3}}{16}$$

۲۵۶۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\sin 2\alpha\ ,\quad \cos(\alpha+\pi)=-\cos\alpha$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{\sin 2\alpha-\cos\alpha}{\cot 2\alpha}$. اکنون مقادیر $\cos\alpha$ و $\sin 2\alpha$ را حساب می‌کنیم. چون $\tan\alpha=\frac{3}{4}$، پس می‌توان نوشت

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow 1+\frac{9}{16}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{16}{25}$$

چون انتهای کمان α در ناحیهٔ سوم مثلثاتی است، پس $\cos\alpha<0$، یعنی $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$. از طرف دیگر،

$$\sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{2(\frac{3}{4})}{1+\frac{9}{16}}=\frac{24}{25}$$

$$\cos 2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}}=\frac{7}{25}$$

$$\cot 2\alpha=\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{\frac{7}{25}}{\frac{24}{25}}=\frac{7}{24}$$

در نتیجه، عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{\sin 2\alpha-\cos\alpha}{\cot 2\alpha}=\frac{\frac{24}{25}+\frac{4}{5}}{\frac{7}{24}}=\frac{1056}{175}$

۲۵۶۲- گزینهٔ ۳ می‌توان نوشت

$$\cos^2 x-\sin^2 x\cos 3x=1\Rightarrow 1-\cos^2 x+\sin^2 x\cos 3x=0$$

$$\sin^2 x+\sin^2 x\cos 3x=0\Rightarrow\sin^2 x(1+\cos 3x)=0$$

$$\begin{cases}\sin^2 x=0\Rightarrow\sin x=0\Rightarrow x=k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\\ \cos 3x=-1\Rightarrow 3x=(2k+1)\pi\Rightarrow x=\frac{(2k+1)\pi}{3}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

برای اینکه جواب‌های واقع در بازهٔ $[0,2\pi]$ را پیدا کنیم، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

k	0	1	2	3
$k\pi$	0	π	2π	$\cancel{3\pi}$
$\frac{(2k+1)\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{5\pi}{3}$	$\cancel{\frac{7\pi}{3}}$

از این جدول معلوم می‌شود که جواب‌های مورد نظر 0، $\frac{\pi}{3}$، π، $\frac{5\pi}{3}$ و 2π هستند، که تعداد آنها پنج‌تاست.

۲۵۶۳- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ که در آن $g(x)=\log_4(x^2-x-2)$ و $h(x)=\sqrt{x^2-1}+1$. برای پیدا کردن دامنهٔ تابع f، دامنهٔ تابع‌های g و h را به‌دست می‌آوریم، از آنها اشتراک می‌گیریم و در آخر جواب‌های معادلهٔ $h(x)=0$ را از آن حذف می‌کنیم، یعنی

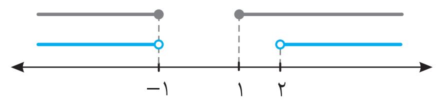
$$D_f=(D_g\cap D_h)-\{x\,|\,x\in D_h,h(x)=0\}$$

برای پیدا کردن دامنهٔ تابع g باید نامعادلهٔ $x^2-x-2>0$ را حل کنیم:

$$x^2-x-2>0\xrightarrow{\text{اتحاد جملهٔ مشترک}}(x-2)(x+1)>0\Rightarrow x<-1 \text{ یا } x>2$$

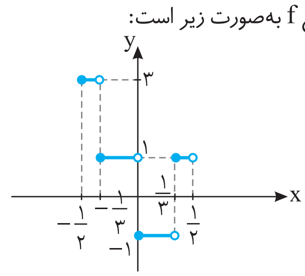
پس $D_g=(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$. از طرف دیگر، برای پیدا کردن دامنهٔ تابع h باید نامعادلهٔ $x^2-1\geq 0$ را حل کنیم: $x^2-1\geq 0\Rightarrow x^2\geq 1\Rightarrow x\geq 1$ یا $x\leq -1$

پس $D_h=(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)$. توجه کنید که معادلهٔ $h(x)=۰$ جواب ندارد، زیرا $\sqrt{x^۲-۱}+۱$ همواره مثبت است. بنابراین
$$D_f=((-\infty,-۱)\cup(۲,+\infty))\cap((-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty))=(-\infty,-۱)\cup(۲,+\infty)$$



راه‌حل دوم توجه کنید که عدد ۳ در دامنهٔ تابع f است، زیرا
$$f(۳)=\frac{\log_۴(۹-۳-۲)}{\sqrt{۹-۱}+۱}=\frac{\log_۴ ۴}{\sqrt{۸}+۱}=\frac{۱}{۲\sqrt{۲}+۱}$$
پس گزینه‌های (۲) و (۴) حذف می‌شوند، زیرا ۳ عضو آن‌ها نیست. از طرف دیگر، چون ۲ عضو مجموعهٔ گزینهٔ (۱) نیست، ولی عضو مجموعهٔ گزینهٔ (۳) است، پس کافی است ببینیم ۲ در دامنهٔ تابع f هست یا خیر. توجه کنید که
$$f(۲)=\frac{\log_۴(۴-۲-۲)}{\sqrt{۴-۱}+۱}=\frac{\log_۴ ۰}{\sqrt{۳}+۱}$$
چون $\log_۴ ۰$ تعریف نشده است، پس عدد ۲ در دامنهٔ تابع f نیست، یعنی گزینهٔ (۳) نیز حذف می‌شود. بنابراین گزینهٔ (۱) دامنهٔ تابع f است.

۲۵۶۴- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول چون $-\frac{۱}{۲}\le x<\frac{۱}{۲}$، پس $-\frac{۳}{۲}\le ۳x<\frac{۳}{۲}$. بنابراین
$$-\frac{۳}{۲}\le ۳x<-۱\Rightarrow[۳x]=-۲,-\frac{۱}{۲}\le x<-\frac{۱}{۳}\Rightarrow f(x)=۲|-۲|-۱=۳$$
$$-۱\le ۳x<۰\Rightarrow[۳x]=-۱,-\frac{۱}{۳}\le x<۰\Rightarrow f(x)=۲|-۱|-۱=۱$$
$$۰\le ۳x<۱\Rightarrow[۳x]=۰,۰\le x<\frac{۱}{۳}\Rightarrow f(x)=۲|۰|-۱=-۱$$
$$۱\le ۳x<\frac{۳}{۲}\Rightarrow[۳x]=۱,\frac{۱}{۳}\le x<\frac{۱}{۲}\Rightarrow f(x)=۲|۱|-۱=۱$$
در نتیجه نمودار تابع f به‌صورت زیر است:

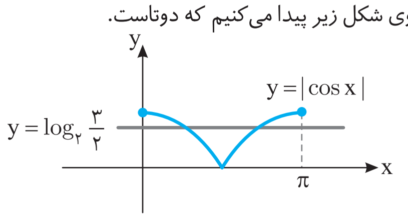


راه‌حل دوم توجه کنید که اگر $x\to۰^-$، آن‌گاه $۳x\to۰^-$، پس $[۳x]=-۱$. در نتیجه
$$\lim_{x\to۰^-}f(x)=\lim_{x\to۰^-}(۲|[۳x]|-۱)=۲|-۱|-۱=۱$$
همچنین اگر $x\to۰^+$، آن‌گاه $۳x\to۰^+$، پس $[۳x]=۰$. در نتیجه
$$\lim_{x\to۰^+}f(x)=\lim_{x\to۰^+}(۲|[۳x]|-۱)=۲|۰|-۱=-۱$$
فقط گزینهٔ (۲) این شرایط را دارد.

۲۵۶۵- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول نقطهٔ برخورد منحنی‌ها جواب دستگاه زیر است:
$$\begin{cases}۲y=x^۲\\ x=\sqrt{y+۳}-\sqrt{y-۳}\end{cases}$$
دو طرف معادلهٔ دوم را به توان دو می‌رسانیم و به جای $x^۲$ قرار می‌دهیم $۲y$:
$$x^۲=(\sqrt{y+۳}-\sqrt{y-۳})^۲\Rightarrow ۲y=y+۳+y-۳-۲\sqrt{(y+۳)(y-۳)}$$
$$۲y=۲y-۲\sqrt{y^۲-۹}\Rightarrow -۲\sqrt{y^۲-۹}=۰\Rightarrow y^۲-۹=۰\Rightarrow y=\pm ۳$$
توجه کنید که چون $۲y=x^۲\ge ۰$، پس فقط $y=۳$ قبول است. در نتیجه
$$x=\sqrt{y+۳}-\sqrt{y-۳}=\sqrt{۶}-\sqrt{۰}=\sqrt{۶}$$
بنابراین نقطهٔ برخورد منحنی‌ها $(\sqrt{۶},۳)$ است، که فاصله‌اش از مبدأ برابر است با
$$\sqrt{(\sqrt{۶})^۲+۳^۲}=\sqrt{۶+۹}=\sqrt{۱۵}$$
راه‌حل دوم با توجه به ضابطهٔ منحنی $x=\sqrt{y+۳}-\sqrt{y-۳}$، متوجه می‌شویم که $y\ge ۳$. اکنون اگر در ضابطه‌های داده شده قرار دهیم $y=۳$، برای هر دو به‌دست می‌آید $x=\sqrt{۶}$، یعنی $(\sqrt{۶},۳)$ نقطهٔ تلاقی دو منحنی است که فاصلهٔ آن از مبدأ مختصات برابر است با $\sqrt{(\sqrt{۶})^۲+۳^۲}=\sqrt{۱۵}$.

۲۵۶۶- گزینهٔ ۲ در صورت از ۳^x و در مخرج از $۲^{x-۲}$ فاکتور می‌گیریم:
$$\frac{۳^x(۱+۳+۳^۲+۳^۳+۳^۴+۳^۵)}{۲^{x-۲}(۱+۲+۲^۲+۲^۳+۲^۴+۲^۵)}=۵۲\Rightarrow\frac{۳^x\times ۳۶۴}{۲^{x-۲}\times ۶۳}=۵۲$$
$$\frac{۳^{x-۲}\times ۹\times ۵۲\times ۷}{۲^{x-۲}\times ۹\times ۷}=۵۲\Rightarrow\frac{۳^{x-۲}}{۲^{x-۲}}=۱\Rightarrow(\frac{۳}{۲})^{x-۲}=۱=(\frac{۳}{۲})^{۰}\Rightarrow x-۲=۰\Rightarrow x=۲$$

۲۵۶۷- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که انتقال به اندازهٔ $\frac{\pi}{۲}$ در امتداد محور x در جهت مثبت معادل $\frac{\pi}{۲}$ واحد انتقال به راست و انتقال به اندازهٔ $\frac{۳}{۲}$ در امتداد محور y در جهت منفی معادل $\frac{۳}{۲}$ واحد فقط یک فاصله انتقال به پایین است. پس
$$y=۲^{|\sin x|}\xrightarrow{\frac{\pi}{۲}\text{ واحد به راست}}y=۲^{|\sin(x-\frac{\pi}{۲})|}$$
چون که $\sin(x-\frac{\pi}{۲})=-\cos x$، پس
$$y=۲^{|-\cos x|}=۲^{|\cos x|}\xrightarrow{\frac{۳}{۲}\text{ واحد به پایین}}y=۲^{|\cos x|}-\frac{۳}{۲}$$
بنابراین با انجام انتقال‌های خواسته شده، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=۲^{|\cos x|}-\frac{۳}{۲}$ به‌دست می‌آید. برای پیدا کردن تعداد نقاط برخورد نمودار تابع بالا با محور x در فاصلهٔ $[۰,\pi]$، باید تعداد جواب‌های معادلهٔ $۲^{|\cos x|}-\frac{۳}{۲}=۰$ را در این فاصله پیدا کنیم. اکنون با استفاده از تعریف تابع لگاریتم داریم
$$۲^{|\cos x|}-\frac{۳}{۲}=۰\Rightarrow ۲^{|\cos x|}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow|\cos x|=\log_۲\frac{۳}{۲}$$
توجه کنید که $\log_۲ ۱<\log_۲\frac{۳}{۲}<\log_۲ ۲$، پس $۰<\log_۲\frac{۳}{۲}<۱$. اکنون تعداد نقاط برخورد خط $y=\log_۲\frac{۳}{۲}$ و نمودار تابع $y=|\cos x|$ را روی بازهٔ $[۰,\pi]$ از روی شکل زیر پیدا می‌کنیم که دوتاست.



۲۵۶۸- گزینهٔ ۱ اگر فرض کنیم $a=\log_x y$، آن‌گاه $\frac{۱}{a}=\log_y x$.

بنابراین از تساوی داده شده به‌دست می‌آید

$$a-۲(\frac{۱}{a})=۱\xrightarrow{\times a}a^۲-۲=a\Rightarrow a^۲-a-۲=۰$$

به کمک اتحاد جملهٔ مشترک عبارت بالا را تجزیه می‌کنیم

$$(a+۱)(a-۲)=۰\Rightarrow a=-۱, a=۲$$

چون $x, y>۱$، پس $a=\log_x y>۰$، در نتیجه فقط $a=۲$ قابل قبول است.

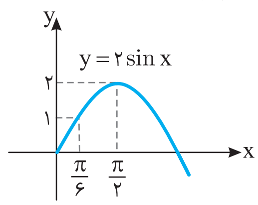
پس

$$\log_x y=۲\Rightarrow y=x^۲$$

۲۵۶۹- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** اگر $x\to\frac{\pi}{۶}^-$، آن‌گاه $\sin x\to\frac{۱}{۲}^-$ و در نتیجه $۲\sin x\to ۱^-$، پس $۲\sin x-۱\to ۰^-$. بنابراین $[۲\sin x-۱]=-۱$، یعنی

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}^-}[۲\sin x-۱]=-۱$$

راه‌حل دوم چون به‌ازای هر عدد حقیقی x و هر عدد صحیح k، $[x+k]=[x]+k$، پس $[۲\sin x-۱]=[۲\sin x]-۱$. اکنون به نمودار تابع $y=۲\sin x$ در شکل زیر توجه کنید.



از روی این نمودار معلوم می‌شود که

$$x\to\frac{\pi}{۶}^-\Rightarrow ۰<۲\sin x<۱\Rightarrow[۲\sin x]=۰$$

بنابراین

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}^-}([۲\sin x]-۱)=\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}^-}(۰-۱)=-۱$$

۲۵۷۰- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون، x را برحسب y به‌دست می‌آوریم

$$f(x)=y=۲+\sqrt{x-۱}\Rightarrow y-۲=\sqrt{x-۱}\xrightarrow{\text{به توان دو}}$$

$$(y-۲)^۲=x-۱\Rightarrow x=(y-۲)^۲+۱$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=(x-۲)^۲+۱$. اگر این نمودار را ۲ واحد در جهت مثبت محور x و سپس ۳ واحد در جهت منفی محور y انتقال دهیم، نمودار تابع $g(x)=f^{-۱}(x-۲)-۳$ به‌دست می‌آید. بنابراین

$$g(۴)=f^{-۱}(۴-۲)-۳=f^{-۱}(۲)-۳=(۲-۲)^۲+۱-۳=-۲$$

راه‌حل دوم قرینهٔ نمودار تابع $f(x)=۲+\sqrt{x-۱}$ نسبت به خط $y=x$ نمودار تابع $f^{-۱}$ است. بنابراین $g(x)=f^{-۱}(x-۲)-۳$. قرار می‌دهیم $g(۴)=a$ و از تعریف تابع معکوس استفاده می‌کنیم. در نتیجه

$$g(۴)=f^{-۱}(۲)-۳=a\Rightarrow f^{-۱}(۲)=a+۳$$

$$\xrightarrow{\text{تعریف تابع وارون}}f(a+۳)=۲$$

پس

$$۲+\sqrt{a+۳-۱}=۲\Rightarrow\sqrt{a+۲}=۰\Rightarrow a=-۲$$

۲۵۷۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$(gof)(x)=g(f(x))=\begin{cases}۱ & f(x)>۰\\ ۰ & f(x)=۰\\ -۱ & f(x)<۰\end{cases}$$

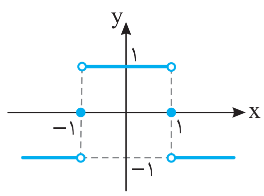
از طرف دیگر، جدول تعیین علامت $f(x)$ به صورت زیر است:

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
$۱-x^۲$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	

بنابراین

$$(gof)(x)=\begin{cases}۱ & x\in(-۱,۱)\\ ۰ & x=\pm۱\\ -۱ & x\in(-\infty,-۱)\cup(۱,+\infty)\end{cases}$$

پس نمودار تابع gof به‌صورت زیر است، که در نقاط $x=\pm۱$ ناپیوسته است.



۲۵۷۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲(x^۲-۴)}{x^۲-۱} & x^۲\geq۴\\[2ex] \dfrac{-x^۲(x^۲-۴)}{x^۲-۱} & x^۲\leq۴, x\neq\pm۱\end{cases}$$

از طرف دیگر، اگر $g(x)=\frac{x^۲(x^۲-۴)}{x^۲-۱}=\frac{x^۴-۴x^۲}{x^۲-۱}$، آن‌گاه

$$g'(x)=\frac{(۴x^۳-۸x)(x^۲-۱)-(۲x)(x^۴-۴x^۲)}{(x^۲-۱)^۲}=\frac{۲x((x^۲-۱)^۲+۳)}{(x^۲-۱)^۲}$$

بنابراین

$$f'(x)=\begin{cases}g'(x) & x>۲ \text{ یا } x<-۲\\ -g'(x) & -۲<x<۲, x\neq\pm۱\end{cases}$$

توجه کنید که تابع f در نقطه‌های ۲ و -۲ مشتق‌پذیر نیست، زیرا این عددها ریشه‌های سادهٔ عبارت داخل قدرمطلق هستند. همچنین،

$$f'(x)=۰\Rightarrow g'(x)=۰\Rightarrow x=۰$$

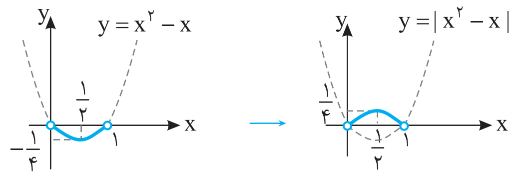
پس نقاط بحرانی تابع f نقطه‌های ۲، -۲ و صفر هستند، که مطابق جدول زیر هر سه طول نقاط اکسترمم نسبی تابع f هستند $(x\neq\pm۱)$:

x	$-\infty$		-۲		۰		۲		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	۰	$-$		$+$	

۲۵۷۳- گزینهٔ ۳ اگر مختصات نقطهٔ A واقع بر سهمی $f(x)=x^2$ به‌صورت (x,x^2) باشد، مختصات نقطهٔ A'، یعنی قرینهٔ A نسبت به نیمساز نواحی اول و سوم، به‌صورت (x^2,x) است. بنابراین

$$AA'=\sqrt{(x-x^2)^2+(x^2-x)^2}=\sqrt{2(x^2-x)^2}=\sqrt{2}|x^2-x|$$

از طرف دیگر، چون طول نقطهٔ A بین دو طول متوالی از محل برخورد تابع f با خط نیمساز نواحی اول و سوم (خط $y=x$)، یعنی نقاط $(0,0)$ و $(1,1)$ قرار دارد، پس باید ماکزیمم AA' را در بازهٔ $(0,1)$ پیدا کنیم. برای پیدا کردن ماکزیمم تابع $y=|x^2-x|$ در بازهٔ $(0,1)$ از روش رسم نمودار تابع استفاده می‌کنیم.



بنابراین بیشترین مقدار AA' در بازهٔ $(0,1)$ به‌ازای $x=\frac{1}{2}$ به‌دست می‌آید، که برابر می‌شود با

$$AA'=\sqrt{2}\left|\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right|=\sqrt{2}\times\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

۲۵۷۴- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$(fog)'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)=g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)f'\left(g\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)\right)$$

توجه کنید که $g\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)^2-1}}=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{9}{8}-1}}=2$. پس باید مقدار $g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)f'(2)$ را حساب کنیم. مقدار $g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)$ را به‌سادگی می‌توان حساب کرد

$$g(x)=(x^2-1)^{-\frac{1}{3}}\Rightarrow g'(x)=\left(-\frac{1}{3}\right)(2x)(x^2-1)^{-\frac{1}{3}-1}$$

$$=-\frac{2}{3}x(x^2-1)^{-\frac{4}{3}}$$

$$g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)=-\frac{2}{3}\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)\left(\frac{9}{8}-1\right)^{-\frac{4}{3}}=-8\sqrt{2}$$

برای پیدا کردن مقدار $f'(2)$ ابتدا ضابطهٔ تابع f را در یک همسایگی نقطهٔ $x=2$ پیدا می‌کنیم. توجه کنید که

$$x\to2\Rightarrow x^2\to4\Rightarrow4<x^2+\frac{1}{2}<5\Rightarrow\left[x^2+\frac{1}{2}\right]=4$$

در نتیجه

$$f(x)=(4x)^2+1=16x^2+1\Rightarrow f'(x)=32x\Rightarrow f'(2)=64$$

بنابراین

$$(fog)'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)=(-8\sqrt{2})(64)=4(-128\sqrt{2})$$

۲۵۷۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $g'(x)=2ax+b$ و $g''(x)=2a$. بنابراین

$$f(x)=\begin{cases}g(x) & x\ge k\\ g'(x) & x<k\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}g'(x) & x\ge k\\ g''(x) & x<k\end{cases}$$

چون تابع f در نقطهٔ $x=k$ مشتق‌پذیر است، پس

$$g(k)=g'(k)\Rightarrow ak^2+bk+c=2ak+b$$

$$g'(k)=g''(k)\Rightarrow2ak+b=2a\Rightarrow b=2a-2ak$$

اکنون از تساوی $b=2a-2ak$ و شرط $b+c=a$ می‌توان نتیجه گرفت

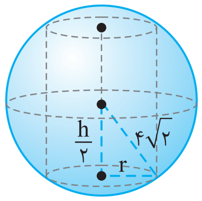
$$ak^2+bk+a-b=2a\Rightarrow ak^2+(2a-2ak)k+a-(2a-2ak)=2a$$

$$a(k^2+2k-2k^2+1-2+2k)=2a\xrightarrow{a\neq0}-k^2+4k-1=2$$

$$k^2-4k+3=0\xrightarrow{\text{اتحاد جملهٔ مشترک}}(k-1)(k-3)=0\Rightarrow k=1\,,\,k=3$$

پس بیشترین مقدار k برابر با ۳ است.

۲۵۷۶- گزینهٔ ۲ شکل مقابل را ببینید.



مساحت جانبی استوانه برابر است با $S=2\pi rh$.
از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$r^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2=(4\sqrt{2})^2\Rightarrow r^2=32-\frac{h^2}{4}$$

$$r=\sqrt{32-\frac{h^2}{4}}$$

$$S=2\pi\sqrt{32-\frac{h^2}{4}}\times h=2\pi\sqrt{\frac{(128-h^2)h^2}{4}}=\pi\sqrt{-h^4+128h^2}$$

برای اینکه S ماکزیمم باشد، باید $-h^4+128h^2$ ماکزیمم باشد. توجه کنید که

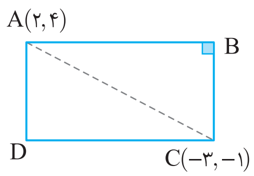
$$y=-h^4+128h^2\Rightarrow y'=-4h^3+256h$$

$$y'=0\Rightarrow-4h(h^2-64)=0\Rightarrow h^2=64$$

بنابراین ماکزیمم S به‌ازای $h^2=64$ به‌دست می‌آید، که برابر است با

$$S=\pi\sqrt{-64^2+128\times64}=64\pi$$

۲۵۷۷- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول**



ابتدا معادلهٔ خطی را که ضلع AB روی آن است، می‌نویسیم

$$y-4=3(x-2)\Rightarrow3x-y-2=0$$

فاصلهٔ نقطهٔ C از خط به‌دست آمده برابر است با

$$CB=\frac{|3(-3)-(-1)-2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

از طرف دیگر،

$$AC=\sqrt{(2+3)^2+(4+1)^2}=\sqrt{50}$$

اکنون با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABC، طول AB را به‌دست می‌آوریم

$$AB^2+BC^2=AC^2\Rightarrow AB^2+10=50\Rightarrow AB=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

پس محیط مستطیل برابر است با $2(\sqrt{10}+2\sqrt{10})=6\sqrt{10}$.

راه‌حل دوم ابتدا معادلات اضلاع AB و BC را می‌نویسیم

$$AB:3x-y-2=0$$

$$BC\perp AB\Rightarrow m_{BC}=-\frac{1}{m_{AB}}=-\frac{1}{3}\Rightarrow y-(-1)=-\frac{1}{3}(x-(-3))$$

$$BC:x+3y+6=0$$

محل تلاقی اضلاع AB و BC همان نقطهٔ B است.

$$\begin{cases}3x-y-2=0\\ x+3y+6=0\end{cases}\Rightarrow B(0,-2)$$

اکنون طول پاره‌خط‌های AB و BC را به‌دست می‌آوریم و سپس محیط مستطیل را محاسبه می‌کنیم.

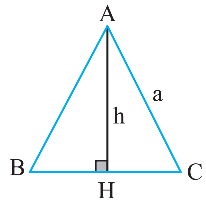
$$AB=\sqrt{(2-0)^2+(4+2)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

$$BC=\sqrt{(0+3)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$

در نتیجه

$$\text{محیط مستطیل}=2(AB+BC)=2(2\sqrt{10}+\sqrt{10})=6\sqrt{10}$$

۲۵۷۸- گزینهٔ «۲» توجه کنید که $\frac{\sqrt{۳}}{۲}a=h$، پس $a=\frac{۲}{\sqrt{۳}}h$، در نتیجه $۳a=\frac{۳\times ۲h}{\sqrt{۳}}=۲\sqrt{۳}h$، یعنی $۳a=۲\sqrt{۳}h=$محیط مثلث. از طرف دیگر، چون محیط مثلث برابر $\sqrt{۲۷۰}$ است، پس



$$۲\sqrt{۳}h=\sqrt{۲۷۰}\Rightarrow h=\frac{\sqrt{۲۷۰}}{۲\sqrt{۳}}=\frac{۳}{۲}\sqrt{۱۰}$$

اگر مختصات نقطهٔ A به‌صورت (a,b) باشد، آن‌گاه

$$h=AH=\frac{|۳a-b-۵|}{\sqrt{۳^۲+(-۱)^۲}}=\frac{|۳a-b-۵|}{\sqrt{۱۰}}=\frac{۳}{۲}\sqrt{۱۰}$$

$$|۳a-b-۵|=\frac{۳}{۲}\sqrt{۱۰}\times\sqrt{۱۰}=۱۵ \qquad (*)$$

از طرف دیگر، شیب خطی که ضلع BC روی آن است، برابر ۳ است. چون AH بر BC عمود است، پس شیب خطی که ارتفاع AH روی آن است، قرینهٔ معکوس ۳، یعنی برابر $-\frac{۱}{۳}$ است. به این ترتیب،

$$\frac{b-۱}{a-۲}=-\frac{۱}{۳}\Rightarrow ۳b-۳=۲-a\Rightarrow a=۵-۳b$$

بنابراین اگر در تساوی $(*)$ به‌جای a قرار دهیم $۵-۳b$، به‌دست می‌آید

$$|۳(۵-۳b)-b-۵|=۱۵$$

$$|۱۰-۱۰b|=۱۵\Rightarrow\begin{cases}۱۰-۱۰b=۱۵\\ ۱۰-۱۰b=-۱۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=\frac{۱۳}{۲}\\ b=\frac{۵}{۲}\Rightarrow a=-\frac{۵}{۲}\end{cases}$$

در نتیجه A می‌تواند یکی از نقطه‌های $(\frac{۱۳}{۲},-\frac{۱}{۲})$ و $(-\frac{۵}{۲},\frac{۵}{۲})$ باشد.

۲۵۷۹- گزینهٔ «۲» **راه‌حل اول** با استفاده از اتحاد مزدوج می‌توان نوشت

$$(a+\frac{۱}{a}+\sqrt{۲})^۲(a+\frac{۱}{a}-\sqrt{۲})^۲=((a+\frac{۱}{a})^۲-(\sqrt{۲})^۲)^۲$$

$$=(a^۲+\frac{۱}{a^۲}+۲-۲)^۲=(a^۲+\frac{۱}{a^۲})^۲=a^۴+\frac{۱}{a^۴}+۲$$

اکنون توجه کنید که $a=\sqrt[۴]{۷-۴\sqrt{۳}}\Rightarrow a^۴=۷-۴\sqrt{۳}$

$$\frac{۱}{a^۴}=\frac{۱}{۷-۴\sqrt{۳}}\times\frac{۷+۴\sqrt{۳}}{۷+۴\sqrt{۳}}=\frac{۷+۴\sqrt{۳}}{۴۹-۴۸}=۷+۴\sqrt{۳}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$a^۴+\frac{۱}{a^۴}+۲=(۷-۴\sqrt{۳})+(۷+۴\sqrt{۳})+۲=۱۶$$

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$a=\sqrt[۴]{۷-۴\sqrt{۳}}=\sqrt[۴]{(۲-\sqrt{۳})^۲}=\sqrt{۲-\sqrt{۳}}\Rightarrow a^۲=۲-\sqrt{۳}$$

$$\frac{۱}{a^۲}=\frac{۱}{۲-\sqrt{۳}}\times\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}=\frac{۲+\sqrt{۳}}{۴-۳}=۲+\sqrt{۳}$$

بنابراین

$$(a+\frac{۱}{a}+\sqrt{۲})^۲(a+\frac{۱}{a}-\sqrt{۲})^۲=((a+\frac{۱}{a})^۲-(\sqrt{۲})^۲)^۲=(a^۲+\frac{۱}{a^۲}+۲-۲)^۲$$

$$=(a^۲+\frac{۱}{a^۲})^۲=(۲-\sqrt{۳}+۲+\sqrt{۳})^۲=۱۶$$

۲۵۸۰- گزینهٔ «۳» فرض می‌کنیم پول اولیهٔ علی x و پول اولیهٔ اکرم y باشد. در این صورت

$$\begin{cases}x+y=۱۰۰\\ (x-۱۰)(y+۱۰)=۴۷۵\end{cases}$$

از معادلهٔ اول به‌دست می‌آید $x=۱۰۰-y$ و در نتیجه معادلهٔ دوم را می‌توان این‌طور نوشت

$$(۱۰۰-y-۱۰)(y+۱۰)=۴۷۵\Rightarrow(۱۰۰-(y+۱۰))(y+۱۰)=۴۷۵$$

$$۱۰۰(y+۱۰)-(y+۱۰)^۲=۴۷۵\Rightarrow(y+۱۰)^۲-۱۰۰(y+۱۰)+۴۷۵=۰$$

اگر فرض کنیم $y+۱۰=A$، معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$A^۲-۱۰۰A+۴۷۵=۰$$

از اتحاد جملهٔ مشترک استفاده و سمت چپ معادله را تجزیه می‌کنیم.

$$(A-۵)(A-۹۵)=۰\begin{cases}A=۵\Rightarrow y+۱۰=۵\Rightarrow y=-۵\ (\text{غ.ق.ق})\\ A=۹۵\Rightarrow y+۱۰=۹۵\Rightarrow y=۸۵\ \text{تومان}\end{cases}$$

۲۵۸۱- گزینهٔ «۱» **راه‌حل اول** توجه کنید که چون $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ $x^۲-x-۴=۰$ هستند، پس $x_۱+x_۲=۱$ و $x_۱x_۲=-۴$. اکنون می‌توانیم مجموع جواب‌های معادلهٔ جدید را به‌صورت زیر حساب کنیم:

$$S=(x_۱^۳+\frac{۱}{x_۲})+(x_۲^۳+\frac{۱}{x_۱})=x_۱^۳+x_۲^۳+\frac{۱}{x_۱}+\frac{۱}{x_۲}$$

با استفاده از اتحاد $a^۳+b^۳=(a+b)^۳-۳ab(a+b)$ و نیز مخرج مشترک گرفتن، عبارت را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$S=(x_۱+x_۲)^۳-۳x_۱x_۲(x_۱+x_۲)+\frac{x_۱+x_۲}{x_۱x_۲}=۱-۳(-۴)(۱)+\frac{۱}{-۴}=\frac{۵۱}{۴}$$

همچنین حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ جدید به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$P=(x_۱^۳+\frac{۱}{x_۲})(x_۲^۳+\frac{۱}{x_۱})=x_۱^۳x_۲^۳+x_۱^۲+x_۲^۲+\frac{۱}{x_۱x_۲}$$

$$=(x_۱x_۲)^۳+(x_۱+x_۲)^۲-۲x_۱x_۲+\frac{۱}{x_۱x_۲}=(-۴)^۳+۱-۲(-۴)+\frac{۱}{-۴}$$

$$=-\frac{۲۲۱}{۴}$$

بنابراین معادلهٔ جدید به صورت $x^۲-\frac{۵۱}{۴}x-\frac{۲۲۱}{۴}=۰$ است، که اگر دو طرف آن را در ۴ ضرب کنیم، می‌شود $۴x^۲-۵۱x-۲۲۱=۰$.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$\xrightarrow{\times x} x^۳=x^۲+۴x=(x+۴)+۴x=۵x+۴$$

$$x=x^۲-۴\Rightarrow x^۲=x+۴$$

بنابراین $x_۱^۳=۵x_۱+۴$ و $x_۲^۳=۵x_۲+۴$. از طرف دیگر،

$$x_۱x_۲=-۴\Rightarrow\frac{۱}{x_۱}=-\frac{x_۲}{۴},\quad \frac{۱}{x_۲}=-\frac{x_۱}{۴}$$

اکنون می‌توانیم مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ جدید را به‌صورت زیر به‌دست آوریم:

$$S=(x_۱^۳+\frac{۱}{x_۲})+(x_۲^۳+\frac{۱}{x_۱})=(۵x_۱+۴-\frac{x_۱}{۴})+(۵x_۲+۴-\frac{x_۲}{۴})$$

$$=\frac{۱۹}{۴}(x_۱+x_۲)+۸=\frac{۱۹}{۴}(۱)+۸=\frac{۵۱}{۴}$$

$$P=(x_۱^۳+\frac{۱}{x_۲})(x_۲^۳+\frac{۱}{x_۱})=(۵x_۱+۴-\frac{x_۱}{۴})(۵x_۲+۴-\frac{x_۲}{۴})$$

$$=(\frac{۱۹}{۴}x_۱+۴)(\frac{۱۹}{۴}x_۲+۴)=(\frac{۱۹}{۴})^۲x_۱x_۲+۱۹(x_۱+x_۲)+۱۶=-\frac{۲۲۱}{۴}$$

بنابراین معادلهٔ جدید به‌صورت زیر است:

$$x^۲-\frac{۵۱}{۴}x-\frac{۲۲۱}{۴}=۰\Rightarrow ۴x^۲-۵۱x-۲۲۱=۰$$

۲۵۸۲- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** می‌توان نوشت

$$f(\frac{\pi}{۱۲})=۳۲\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}\cos^۲\frac{۲\pi}{۱۲}\cos^۲\frac{۴\pi}{۱۲}\cos^۲\frac{۸\pi}{۱۲}\cos^۲\frac{۱۶\pi}{۱۲}$$

$$=۳۲\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}\cos^۲\frac{\pi}{۶}\cos^۲\frac{\pi}{۳}\cos^۲\frac{۲\pi}{۳}\cos^۲\frac{۴\pi}{۳}$$

$$=۳۲\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲(\frac{۱}{۲})^۲(-\frac{۱}{۲})^۲(-\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۳}{۸}\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}$$

اکنون برای اینکه $\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}$ را حساب کنیم، از اتحاد مثلثاتی $\cos^۲\alpha=\frac{۱}{۲}(۱+\cos ۲\alpha)$ استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$f(\frac{\pi}{۱۲})=\frac{۳}{۸}\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}=\frac{۳}{۸}(\frac{۱}{۲}(۱+\cos\frac{\pi}{۶}))=\frac{۳}{۱۶}(۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\frac{۶+۳\sqrt{۳}}{۳۲}$$

$$=\frac{۶+\sqrt{۲۷}}{۳۲}$$

راه‌حل دوم $f(x)=۳۲(\cos x\cos ۲x\cos ۴x\cos ۸x\cos ۱۶x)^۲$

اکنون عبارت داخل پرانتز را در $\sin x$ ضرب و تقسیم می‌کنیم

$$f(x)=۳۲(\frac{\sin x\cos x\cos ۲x\cos ۴x\cos ۸x\cos ۱۶x}{\sin x})^۲$$

از اتحاد مثلثاتی $\sin x\cos x=\frac{۱}{۲}\sin ۲x$ به‌دست می‌آید

$$f(x)=۳۲(\frac{\frac{۱}{۲}\sin ۲x\cos ۲x\cos ۴x\cos ۸x\cos ۱۶x}{\sin x})^۲$$

به‌طور مشابه $\sin ۲x\cos ۲x=\frac{۱}{۲}\sin ۴x$، پس

$$f(x)=۳۲(\frac{\frac{۱}{۴}\sin ۴x\cos ۴x\cos ۸x\cos ۱۶x}{\sin x})^۲$$

به‌طور مشابه با انجام سه مرحلهٔ دیگر عبارت را به ساده‌ترین صورت می‌نویسیم.

$$f(x)=۳۲(\frac{\frac{۱}{۸}\sin ۸x\cos ۸x\cos ۱۶x}{\sin x})^۲=۳۲(\frac{\frac{۱}{۱۶}\sin ۱۶x\cos ۱۶x}{\sin x})^۲$$

$$=۳۲(\frac{\frac{۱}{۳۲}\sin ۳۲x}{\sin x})^۲=\frac{\sin^۲ ۳۲x}{۳۲\sin^۲ x}$$

بنابراین

$$f(\frac{\pi}{۱۲})=\frac{\sin^۲\frac{۳۲\pi}{۱۲}}{۳۲\sin^۲\frac{\pi}{۱۲}}=\frac{\sin^۲(۳\pi-\frac{۴\pi}{۱۲})}{۳۲\sin^۲\frac{\pi}{۱۲}}=\frac{\sin^۲\frac{\pi}{۳}}{۳۲\times\frac{۱}{۲}(۱-\cos\frac{۲\pi}{۱۲})}$$

$$=\frac{\frac{۳}{۴}}{۱۶(۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲})}=\frac{۳}{۳۲(۲-\sqrt{۳})}=\frac{۳(۲+\sqrt{۳})}{۳۲(۴-۳)}=\frac{۶+\sqrt{۲۷}}{۳۲}$$

۲۵۸۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\sin(\alpha+\frac{\pi}{۲})=\cos\alpha,\quad \sin(\alpha-\pi)=-\sin\alpha$$

از طرف دیگر، $\sin^۲\alpha=۱-\cos^۲\alpha=۱-\frac{۴}{۹}=\frac{۵}{۹}$. چون انتهای کمان α در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی است، پس $\sin\alpha<۰$، یعنی $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{۵}}{۳}$. در نتیجه

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{\sqrt{۵}}{۳}}{\frac{۲}{۳}}=-\frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{|\tan^۲\alpha-۱|}=\frac{\frac{۲}{۳}-\frac{\sqrt{۵}}{۳}}{|\frac{۵}{۴}-۱|}=\frac{\frac{۲-\sqrt{۵}}{۳}}{\frac{۱}{۴}}=\frac{۴(۲-\sqrt{۵})}{۳}$$

۲۵۸۴- گزینهٔ ۲ معادلهٔ مثلثاتی را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$۵\sin^۲x+۲\cos ۳x+۲=۰\Rightarrow ۵\sin^۲x+۲(\cos ۳x+۱)=۰$$

$$۵\sin^۲x+۲(۲\cos^۲\frac{۳x}{۲})=۰\Rightarrow ۵\sin^۲x+۴\cos^۲\frac{۳x}{۲}=۰$$

چون $۵\sin^۲x$ و $۴\cos^۲\frac{۳x}{۲}$ غیرمنفی‌اند، پس باید هر دو برابر صفر باشند، بنابراین جواب‌های مشترک معادله‌های مثلثاتی $\sin^۲x=۰$ و $\cos^۲\frac{۳x}{۲}=۰$ جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی مورد نظر هستند:

$$\sin^۲x=۰\Rightarrow\sin x=۰\Rightarrow x=k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}$$

$$\cos^۲\frac{۳x}{۲}=۰\Rightarrow\cos\frac{۳x}{۲}=۰\Rightarrow\frac{۳x}{۲}=(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=(۲k+۱)\frac{\pi}{۳},k\in\mathbb{Z}$$

برای اینکه جواب‌های در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ را پیدا کنیم، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

k	-۲	-۱	۰	۱	۲
$k\pi$	$\cancel{-۲\pi}$	$-\pi$	۰	π	$\cancel{۲\pi}$
$(۲k+۱)\frac{\pi}{۳}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۳}$	π	$\cancel{\frac{۵\pi}{۳}}$

از این جدول معلوم می‌شود که جواب‌های مورد نظر $x=-\pi$ و $x=\pi$ هستند که تعداد آن‌ها دوتاست.

۲۵۸۵- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** باید نامعادلهٔ $|x^۲-۲|-x>۰$ را حل کنیم:

$$|x^۲-۲|-x>۰\Rightarrow |x^۲-۲|>x$$

توجه کنید که همواره $|x^۲-۲|\geq ۰$، پس تمام xهای منفی و نیز $x=۰$ در این نامعادله صدق می‌کنند: $x\in(-\infty,۰]$ (۱)

اکنون فرض می‌کنیم x مثبت باشد. در این صورت

$$|x^۲-۲|>x\Rightarrow\begin{cases} x^۲-۲>x\Rightarrow x^۲-x-۲=\underbrace{(x+۱)}_{+}(x-۲)>۰\\ x^۲-۲<-x\Rightarrow x^۲+x-۲=(x-۱)\underbrace{(x+۲)}_{+}<۰\end{cases}$$

$$\begin{cases}x-۲>۰\\x-۱<۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in(۲,+\infty) & (۲)\\ x\in(۰,۱) & (۳)\end{cases}$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر، یعنی دامنهٔ تابع f برابر اجتماع جواب‌های (۱)، (۲) و (۳) است:

$$D_f=(-\infty,۰]\cup(۰,۱)\cup(۲,+\infty)=(-\infty,۱)\cup(۲,+\infty)$$

راه‌حل دوم توجه کنید که عدد ۲ در دامنهٔ تابع f نیست، زیرا $f(۲)=\log_۴(|۴-۲|-۲)=\log_۴ ۰$ که تعریف نشده است. بنابراین گزینه‌های (۲) و (۳) حذف می‌شوند. زیرا عدد ۲ عضو آن‌ها هست. همچنین عدد صفر در دامنهٔ تابع f هست، زیرا $f(۰)=\log_۴(|۰-۲|-۰)=\log_۴ ۲=\frac{۱}{۲}$.

بنابراین گزینهٔ (۱) حذف می‌شود، زیرا عدد صفر عضو آن نیست. در نتیجه گزینهٔ (۴) درست است.

۲۵۸۶- گزینهٔ ۲ ابتدا نشان می‌دهیم تابع $f(x)=\sqrt{x+۳}-۱$ با دامنهٔ $D_f=[-۳,+\infty)$ اکیداً صعودی است. می‌توان نوشت

$$x_۱,x_۲\geq -۳: x_۱<x_۲\Rightarrow x_۱+۳<x_۲+۳\Rightarrow\sqrt{x_۱+۳}<\sqrt{x_۲+۳}$$

$$\sqrt{x_۱+۳}-۱<\sqrt{x_۲+۳}-۱\Rightarrow f(x_۱)<f(x_۲)$$

چون تابع f اکیداً صعودی است، پس نمودار تابع f نمودار تابع وارون خود را روی خط $y=x$ قطع می‌کند. در نتیجه باید معادلهٔ $\sqrt{x+۳}-۱=x$ را حل کنیم تا طول نقطهٔ M به‌دست بیاید:

$$\sqrt{x+۳}-۱=x\Rightarrow\sqrt{x+۳}=x+۱\xrightarrow{\text{دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم}}$$

$$x+۳=(x+۱)^۲\Rightarrow x+۳=x^۲+۲x+۱\Rightarrow x^۲+x-۲=۰$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد جملهٔ مشترک}}(x-۱)(x+۲)=۰\Rightarrow x=۱, x=-۲$$

توجه کنید که $x=-۲$ در معادلهٔ مورد نظر صدق نمی‌کند. بنابراین $x=۱$ و عرض نقطهٔ M برابر است با $f(۱)=\sqrt{۱+۳}-۱=۲-۱=۱$

در نتیجه فاصلهٔ نقطهٔ M از مبدأ مختصات برابر است با $OM=\sqrt{۱^۲+۱^۲}=\sqrt{۲}$.

۲۵۸۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که هر بار که توپ بالا می‌رود، به همان اندازه هم پایین می‌آید. بنابراین مجموع مورد نظر برابر است با

$$S=۶+۲(۰/۸\times۶+(۰/۸)^۲\times۶+\cdots+(۰/۸)^{۹۹}\times۶)$$

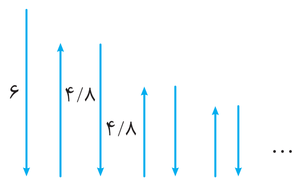
$$=۶+۲\times۶(۰/۸+(۰/۸)^۲+\cdots+(۰/۸)^{۹۹})$$

عبارت داخل پرانتز مجموع ۹۹ جملهٔ نخست یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_۱=۰/۸$ و قدرنسبت $q=۰/۸$ است. بنابراین

$$S=۶+۱۲\times۰/۸\times\frac{(۰/۸)^{۹۹}-۱}{۰/۸-۱}$$

توجه کنید که می‌توانیم از $(۰/۸)^{۹۹}$ صرف‌نظر کنیم، زیرا عددی بسیار کوچک است. بنابراین

$$S\simeq۶+۱۲\times۰/۸\times\frac{۱}{۱-۰/۸}=۵۴ \text{ متر}$$



۲۵۸۸- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که ۳ واحد انتقال در امتداد محور x در جهت منفی معادل ۳ واحد انتقال به چپ و ۲ واحد انتقال در امتداد محور y در جهت منفی معادل ۲ واحد انتقال به پایین است. اکنون به تبدیلات زیر توجه کنید:

$$y=۲^{x+|x|}\xrightarrow{\text{۳ واحد به چپ}}y=۲^{x+۳+|x+۳|}$$

$$\xrightarrow{\text{۲ واحد به پایین}}y=۲^{x+۳+|x+۳|}-۲$$

بنابراین با انجام انتقال‌های خواسته شده، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=۲^{x+۳+|x+۳|}-۲$ به‌دست می‌آید. برای یافتن طول نقطهٔ تلاقی نمودار این تابع با محور x باید جواب معادلهٔ زیر را پیدا کنیم:

$$۲^{x+۳+|x+۳|}-۲=۰\Rightarrow ۲^{x+۳+|x+۳|}=۲^۱\Rightarrow x+۳+|x+۳|=۱$$

$$|x+۳|=-x-۲\Rightarrow\begin{cases}x+۳=-x-۲\Rightarrow x=-\frac{۵}{۲}\\ -(x+۳)=-x-۲ \quad \text{جواب ندارد}\end{cases}$$

۲۵۸۹- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** مقدار x را برابر ۹ قرار می‌دهیم و معادله را ساده می‌کنیم.

$$۲\log_۹ a+\log_a\sqrt{۹}=۲\Rightarrow ۲\log_{۳^۲}a+\log_a ۳=۲$$

$$۲\times(\frac{۱}{۲}\log_۳ a)+\log_a ۳=۲\Rightarrow\log_۳ a+\frac{۱}{\log_۳ a}=۲$$

دو طرف معادله را در $\log_۳ a$ ضرب می‌کنیم:

$$(\log_۳ a)^۲+۱=۲\log_۳ a\Rightarrow(\log_۳ a)^۲-۲\log_۳ a+۱=۰$$

اکنون با استفاده از اتحاد مربع تفاضل دو جمله می‌توان نوشت

$$(\log_۳ a-۱)^۲=۰\Rightarrow\log_۳ a=۱\Rightarrow a=۳^۱=۳$$

راه‌حل دوم می‌توان نوشت

$$۲\log_x a+\log_a\sqrt{x}=۲\Rightarrow\log_{x^{\frac{۱}{۲}}}a+\log_a\sqrt{x}=۲$$

$$\log_{\sqrt{x}}a+\log_a\sqrt{x}=۲\Rightarrow\log_{\sqrt{x}}a+\frac{۱}{\log_{\sqrt{x}}a}=۲$$

چون هر عدد حقیقی و معکوسش هم‌علامت هستند و مجموع $\log_{\sqrt{x}}a$ و معکوسش برابر عددی مثبت است، پس $\log_{\sqrt{x}}a>۰$. همچنین، چون مجموع عدد حقیقی مثبت $\log_{\sqrt{x}}a$ و معکوسش برابر ۲ است، پس این عدد برابر ۱ است. بنابراین

$$\log_{\sqrt{x}}a=۱\xrightarrow{x=۹}\log_{\sqrt{۹}}a=۱\Rightarrow\log_۳ a=۱\Rightarrow a=۳^۱=۳$$

۲۵۹۰- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** چون خط $x=۲$ محور تقارن سهمی است و سهمی از نقطهٔ $(۰,۰)$ می‌گذرد، پس سهمی از نقطهٔ $(۴,۰)$ نیز می‌گذرد. بنابراین معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=a(x-۰)(x-۴)$ یا $y=ax(x-۴)$ است. چون این سهمی از نقطهٔ $(۲,۱)$ نیز می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ سهمی صدق می‌کنند. بنابراین

$$۱=a\times ۲(۲-۴)\Rightarrow a=-\frac{۱}{۴}$$

در نتیجه $f(x)=-\frac{۱}{۴}x(x-۴)$، از طرف دیگر، چون خط راست مورد نظر از نقطه‌های $(۰,۱)$ و $(۴,۰)$ می‌گذرد، معادلهٔ آن به‌صورت زیر است:

$$y-۰=\frac{۰-۱}{۴-۰}(x-۴)\Rightarrow y=-\frac{۱}{۴}(x-۴)$$

بنابراین $g(x)=-\frac{۱}{۴}(x-۴)$. اکنون توجه کنید که

$$\lim_{x\to ۴^-}\frac{f(x)+g(x)}{۴-x}=\lim_{x\to ۴^-}\frac{-\frac{۱}{۴}x(x-۴)-\frac{۱}{۴}(x-۴)}{۴-x}$$

$$=\lim_{x\to ۴^-}\frac{-\frac{۱}{۴}(x-۴)(x+۱)}{-(x-۴)}=\lim_{x\to ۴^-}\frac{x+۱}{۴}=\frac{۵}{۴}$$

راه‌حل دوم چون $f(۴)=g(۴)=۰$، پس حد مورد نظر را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\lim_{x\to ۴^-}\frac{f(x)+g(x)}{۴-x}=-\lim_{x\to ۴^-}\frac{(f(x)-f(۴))+(g(x)-g(۴))}{x-۴}$$

$$=-(\lim_{x\to ۴^-}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}+\lim_{x\to ۴^-}\frac{g(x)-g(۴)}{x-۴})=-(f'_-(۴)+g'_-(۴))$$

از طرف دیگر، سهمی f و خط راست g همه‌جا مشتق‌پذیرند. پس مقدار حد مورد نظر برابر است با $-(f'(۴)+g'(۴))$. اکنون توجه کنید که

$$f(x)=-\frac{۱}{۴}x(x-۴)=-\frac{۱}{۴}x^۲+x\Rightarrow f'(x)=-\frac{۱}{۲}x+۱\Rightarrow f'(۴)=-۱$$

$$g'(۴)=m=-\frac{۱}{۴}$$

در نتیجه مقدار حد مورد نظر برابر است با $-(-۱-\frac{۱}{۴})=\frac{۵}{۴}$.

۲۵۹۱- گزینهٔ ۱ ابتدا ضابطهٔ تابع $f^{-۱}$ را پیدا می‌کنیم. برای این کار x را بر حسب y به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}-۱}\Rightarrow \sqrt{x}+۱=y\sqrt{x}-y\Rightarrow \sqrt{x}-y\sqrt{x}=-y-۱$$

$$\sqrt{x}(۱-y)=-(y+۱)\Rightarrow \sqrt{x}=\frac{y+۱}{y-۱}\Rightarrow x=(\frac{y+۱}{y-۱})^۲$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=(\frac{x+۱}{x-۱})^۲$. به این ترتیب

$$(f^{-۱})'(x)=۲(\frac{x+۱}{x-۱})(\frac{-۲}{(x-۱)^۲})=\frac{-۴(x+۱)}{(x-۱)^۳}$$

$$\text{شیب خط مماس}=(f^{-۱})'(۲)=\frac{-۴(۲+۱)}{(۲-۱)^۳}=-۱۲$$

۲۵۹۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$(fog)(x)=f(g(x))=\begin{cases}f(۱)=۰ & x>۰\\ f(۰)=۰ & x=۰\\ f(-۱)=۰ & x<۰\end{cases}$$

بنابراین $(fog)(x)=۰$. در نتیجه

$$((fof)og)(x)=(fo(fog))(x)=f((fog)(x))=f(۰)=۰$$

یعنی $(fof)og$ تابع ثابت صفر است، پس نقطهٔ ناپیوستگی ندارد.

۲۵۹۳- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که مطابق جدول تعیین علامت زیر، عبارت $۳-x^۲$ روی بازهٔ $[-۱/۵,\sqrt{۳}]$ نامنفی است.

x	$-\infty$	$-\sqrt{۳}$	$-۱/۵$	$\sqrt{۳}$	$+\infty$
$۳-x^۲$	$-$		$+$		$-$

بنابراین $|۳-x^۲|=۳-x^۲$ و در نتیجه $f(x)=x(۳-x^۲)=۳x-x^۳$

چون تابع f در هر نقطه از بازهٔ $(-۱/۵,\sqrt{۳})$ مشتق‌پذیر است، پس طول‌های نقاط بحرانی آن در این بازه از حل معادلهٔ $f'(x)=۰$ به‌دست می‌آیند. اکنون توجه کنید که

$$f'(x)=۳-۳x^۲=۳(۱-x^۲),\quad f'(x)=۰\Rightarrow ۱-x^۲=۰\Rightarrow x=\pm ۱$$

بنابراین باید مقادیر $f(\pm۱)$، $f(-۱/۵)$ و $f(\sqrt{۳})$ را با هم مقایسه کنیم:

$$f(۱)=۲,\quad f(-۱)=-۲,\quad f(-۱/۵)=-\frac{۹}{۸},\quad f(\sqrt{۳})=۰$$

در نتیجه مینیمم مطلق تابع f برابر است با $f(-۱)=-۲$ (توجه کنید که چون مقادیر f به‌ازای عددهای مثبت، مثبت‌اند، پس کافی بود مقادیر تابع f را فقط برای عددهای منفی حساب می‌کردیم).

۲۵۹۴- گزینهٔ ۲ اگر نقطهٔ A نقطهٔ $(x,\sqrt[۳]{-x})$، یعنی نقطهٔ $(x,-\sqrt[۳]{x})$ باشد، آن‌گاه A'، یعنی قرینهٔ A نسبت به نیمساز نواحی دوم و چهارم نقطهٔ $(\sqrt[۳]{x},-x)$ است. بنابراین

$$AA'=\sqrt{(x-\sqrt[۳]{x})^۲+(-\sqrt[۳]{x}+x)^۲}=\sqrt{۲(x-\sqrt[۳]{x})^۲}=\sqrt{۲}|x-\sqrt[۳]{x}|$$

چون $x\in[۰,۱]$، پس $x\le\sqrt[۳]{x}$ و در نتیجه $AA'=\sqrt{۲}(\sqrt[۳]{x}-x)$. بنابراین باید ماکزیمم مطلق تابع $g(x)=\sqrt{۲}(\sqrt[۳]{x}-x)$ را روی بازهٔ $[۰,۱]$ پیدا کنیم. توجه کنید که

$$g'(x)=\sqrt{۲}(\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}-۱)$$

$$g'(x)=۰\Rightarrow\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}-۱=۰\Rightarrow\sqrt[۳]{x^۲}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow x=\frac{۱}{\sqrt{۲۷}}=\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}$$

چون $g(۱)=g(۰)=۰$، پس ماکزیمم مطلق تابع g به‌ازای $x=\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}$ به‌دست می‌آید و برابر است با (توجه کنید که $\sqrt[۳]{x^۲}=\frac{۱}{۳}$، پس $\sqrt[۳]{x}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$)

$$g(\frac{۱}{۳\sqrt{۳}})=\sqrt{۲}(\frac{۱}{\sqrt{۳}}-\frac{۱}{۳\sqrt{۳}})=\sqrt{۲}\times\frac{۲}{۳\sqrt{۳}}=\frac{۴}{۳\sqrt{۶}}$$

۲۵۹۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که وقتی $x\to(\frac{\sqrt{۵}}{۲})^-$، آن‌گاه $g(x)\to ۲^+$. پس در یک همسایگی چپ $x=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$، ضابطهٔ تابع f به‌صورت $f(x)=(۲x)^۳$ است، اکنون می‌توان نوشت

$$(fog)'_-(\frac{\sqrt{۵}}{۲})=g'(\frac{\sqrt{۵}}{۲})f'_+(g(\frac{\sqrt{۵}}{۲}))=g'(\frac{\sqrt{۵}}{۲})f'_+(۲)$$

مقدار $g'(\frac{\sqrt{۵}}{۲})$ را به‌سادگی می‌توان حساب کرد

$$g(x)=(x^۲-۱)^{-\frac{۱}{۲}}\Rightarrow g'(x)=-\frac{۱}{۲}(۲x)(x^۲-۱)^{-\frac{۳}{۲}}=\frac{-x}{\sqrt{(x^۲-۱)^۳}}$$

$$g'(\frac{\sqrt{۵}}{۲})=\frac{-\frac{\sqrt{۵}}{۲}}{(\frac{۱}{۲})^۳}=-۴\sqrt{۵}$$

از طرف دیگر،

$$f(x)=(۲x)^۳=۸x^۳\Rightarrow f'(x)=۲۴x^۲\Rightarrow f'_+(۲)=۹۶$$

پس

$$(fog)'_-(\frac{\sqrt{۵}}{۲})=(-۴\sqrt{۵})\times۹۶=(-۴۸\sqrt{۵})(۸)$$

یعنی $(fog)'_-(\frac{\sqrt{۵}}{۲})$ هشت برابر $-۴۸\sqrt{۵}$ است.

۲۵۹۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $g'(x)=۲ax+۵$ و $g''(x)=۲a$. بنابراین

$$f(x)=\begin{cases}g(x) & x\leq ۲\\ g'(x) & x>۲\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}g'(x) & x\leq ۲\\ g''(x) & x>۲\end{cases}$$

چون تابع f در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر است، پس

$$\left.\begin{array}{l}g(۲)=g'(۲)\Rightarrow ۴a+۱۰+b=۴a+۵\Rightarrow b=-۵\\ g'(۲)=g''(۲)\Rightarrow ۴a+۵=۲a\Rightarrow a=-\frac{۵}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow a+b=-\frac{۱۵}{۲}$$

۲۵۹۷- گزینهٔ ۳ هر نقطه روی سهمی $y^۲=۴x$ به‌صورت $A(\frac{t^۲}{۴},t)$ است. فاصلهٔ نقطهٔ A از نقطهٔ $M(۳,۰)$ برابر است با

$$AM=\sqrt{(\frac{t^۲}{۴}-۳)^۲+(t-۰)^۲}=\sqrt{\frac{t^۴}{۱۶}-\frac{۳}{۲}t^۲+۹+t^۲}$$

$$=\sqrt{\frac{t^۴-۸t^۲+۱۴۴}{۱۶}}=\frac{۱}{۴}\sqrt{(t^۲-۴)^۲+۱۲۸}$$

بنابراین کمترین مقدار AM به‌ازای $t^۲=۴$ به‌دست می‌آید و برابر است با

$$\frac{۱}{۴}\sqrt{۱۲۸}=۲\sqrt{۲}$$

۲۵۹۸- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که چون عرض از مبدأ خط مورد نظر برابر ۱- است، پس این خط از نقطهٔ $(۰,-۱)$ می‌گذرد. بنابراین معادلهٔ این خط به‌صورت زیر است:

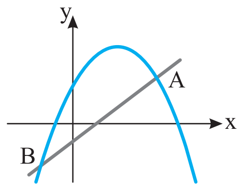
$$y-۰=\frac{۰+۱}{۱-۰}(x-۱)\Rightarrow y=x-۱$$

طول نقطه‌های برخورد این خط و سهمی داده شده، یعنی A و B جواب‌های معادلهٔ زیر هستند:

$$-x^۲+۲x+۱=x-۱\Rightarrow x^۲-x-۲=۰\xrightarrow{\text{اتحاد جملهٔ مشترک}}$$

$$(x+۱)(x-۲)=۰\Rightarrow x_A=۲, x_B=-۱$$

چون این نقطه‌ها روی خط $y=x-۱$ هستند، پس عرض آن‌ها برابر است با $y_A=۲-۱=۱$ و $y_B=-۱-۱=-۲$. بنابراین نقطه‌های مورد نظر $A(۲,۱)$ و $B(-۱,-۲)$ هستند که نقطهٔ وسط آن‌ها $M(\frac{۲-۱}{۲},\frac{۱-۲}{۲})$، یعنی $M(\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲})$ است. از طرف دیگر، رأس سهمی $y=-x^۲+۲x+۱$ نقطهٔ $(۱,۲)$ است. بنابراین فاصلهٔ مورد نظر برابر است با $\sqrt{(۱-\frac{۱}{۲})^۲+(۲+\frac{۱}{۲})^۲}=\frac{\sqrt{۲۶}}{۲}$. پس این فاصله $\frac{۱}{۲}$ برابر $\sqrt{۲۶}$ است.



۲۵۹۹- گزینهٔ ۲ فرض کنید مختصات نقطهٔ A به‌صورت (a,b) باشد. چون مثلث ABC متساوی‌الساقین است، پس میانهٔ AM ارتفاع نیز هست، یعنی خط AM بر خط BC عمود است. اما شیب خط BC برابر $m_{BC}=-\frac{۱}{۲}$ است و شیب خط AM برابر $m_{AM}=\frac{b-۲}{a-۳}$ است. اکنون می‌توان نوشت

$$BC\perp AM\Rightarrow m_{BC}\times m_{AM}=-۱$$

$$-\frac{۱}{۲}\times\frac{b-۲}{a-۳}=-۱\Rightarrow b-۲=۲(a-۳)\Rightarrow b=۲a-۴$$

از طرف دیگر، فاصلهٔ نقطهٔ A از خط BC برابر با $۵\sqrt{۵}$ است. بنابراین

$$\frac{|a+۲b-۷|}{\sqrt{۱^۲+۲^۲}}=۵\sqrt{۵}\xrightarrow{b=۲a-۴}\frac{|a+۴a-۸-۷|}{\sqrt{۵}}=۵\sqrt{۵}$$

$$|۵a-۱۵|=۲۵\Rightarrow\begin{cases}۵a-۱۵=۲۵\\ ۵a-۱۵=-۲۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۸\\ a=-۲\end{cases}$$

در نتیجه طول نقطهٔ A هرکدام از دو مقدار ۸ و ۲- می‌تواند باشد که با توجه به گزینه‌ها، $a=-۲$ درست است.