پاسخ کنکور سراسری ۱۴۰۰ (داخل کشور)

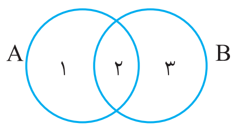
۱۵۳۶ (۱) می‌توان از جدول ارزش گزاره‌ها استفاده کرد:

p	q	r	$q\vee r$	$p\Rightarrow(q\vee r)$
د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د
د	ن	د	د	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د
ن	ن	ن	ن	د

فضای نمونه‌ای

در هفت مورد گزارهٔ $p\Rightarrow(q\vee r)$ درسـت اسـت، پس $n(S)=۷$. در سه مورد از این هفت مورد r نادرست است. پس احتمال مطلوب برابر است با $\frac{۳}{۷}$.

۱۵۳۷ (۱) چون $U=A\cup B$، نمودار ون مسـئله به‌صـورت زیـر اسـت. در ایـن نمودار ناحیه‌ها را شماره‌گذاری می‌کنیم. بنابراین



$$A=\{۱,۲\},\quad B=\{۲,۳\}$$
$$U=\{۱,۲,۳\},\quad C=\{۱,۳\}$$

پس

$$A'-B=\{۳\}-\{۲,۳\}=\varnothing$$
$$(A'-B)'\cap C=\{۱,۲,۳\}\cap\{۱,۳\}=\{۱,۳\}$$
$$((A'-B)'\cap C)'=\{۲\}$$

طبق فرض $((A'-B)'\cap C)'=B$. بنابراین $\{۲\}=\{۲,۳\}$، پس ناحیهٔ ۳ تهی است. در نتیجه $B=\{۲\}$ و بنابراین $B\subseteq A$.

۱۵۳۸ (۳) ابتدا $۲۰!$ را به حاصل‌ضرب عوامل اول تجزیه می‌کنیم:

$$۲۰!=۱\times۲\times۳\times\cdots\times۲۰$$
$$=۲\times۳\times۲^۲\times۵\times(۲\times۳)\times۷\times۲^۳\times۳^۲\times(۲\times۵)\times۱۱\times(۲^۲\times۳)\times۱۳$$
$$\times(۲\times۷)\times(۳\times۵)\times۲^۴\times۱۷\times(۲\times۳^۲)\times۱۹\times(۲^۲\times۵)$$
$$=۲^{۱۸}\times۳^۸\times۵^۴\times۷^۲\times۱۱^۱\times۱۳^۱\times۱۷^۱\times۱۹^۱$$

اکنون به‌دست می‌آید $\sum_{i=۱}^{\infty}a_i=۱۸+۸+۴+۲+۱+۱+۱+۱=۳۶$

می‌توان از نکتهٔ زیر مسئله را حل کرد:

نکته: تعداد عوامل عدد اول p در عدد $n!$ را می‌توان به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{p^۲}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{p^۳}\right\rfloor+\cdots$$

۱۵۳۹ (۳) چون تعداد داده‌ها ۲۲ تا است، پس میانه $(Q_۲)$ میانگین دو دادهٔ یازدهم و دوازدهم اسـت. اگر $a<۱۳$، آن‌گاه داده‌های یازدهم و دوازدهم برابر ۱۳ هسـتند. در این صورت میانه برابر $\frac{۱۳+۱۳}{۲}=۱۳$ خواهد بود. اما مقدار میانه ۱۳/۵ است. پس $a>۱۳$.

بنابراین، چارک اول $(Q_۱)$ که میانهٔ یازده دادهٔ اول، یعنی دادهٔ ششـم است برابر ۱۳ خواهد بود: $Q_۱=۱۳$. چون $Q_۳-Q_۱=۱۷$، پس $Q_۳=۱۷+۱۳=۳۰$. در نتیجه $a=۳۰$.

اکنون $\bar{x}$ و از روی آن $\sigma^۲$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\bar{x}=\frac{۳\times۱۱+۲\times۱۲+۶\times۱۳+۳\times۱۴+۲\times۲۸+۵\times۳۱+۱\times۳۰}{۲۲}=۱۹$$

$$\sigma^۲=\frac{\sum_{i=۱}^{۷}f_i(x_i-\bar{x})^۲}{\sum_{i=۱}^{۷}f_i}=\frac{۳(۱۱-۱۹)^۲+۲(۱۲-۱۹)^۲+۶(۱۳-۱۹)^۲}{۲۲}$$
$$+\frac{۳(۱۴-۱۹)^۲+۲(۲۸-۱۹)^۲+۵(۳۱-۱۹)^۲+(۳۰-۱۹)^۲}{۲۲}=۷۲$$

بـا توجـه به اینکه با افزودن یک مقدار ثابت به همهٔ داده‌ها مقدار واریانس تغییر نمی‌کند پس با افزودن ۴ واحد به همهٔ داده‌ها مقدار واریانس همچنان ۷۲ باقی می‌ماند.

۱۵۴۰ (۳) داده‌ها به صورت زیر هستند:

پایهٔ تحصیلی	سن	جنسیت
↓	↓	↓
۱۲ حالت	۱۲ حالت	۲ حالت

اکنون دادهٔ صدم را به‌دست می‌آوریم:

۱۰۷ □ ⇒ ۱۲ حالت
۱۰۸ □ ⇒ ۱۲ حالت
⋮ ⋮ ⋮ ⋮
۱۱۴ □ ⇒ ۱۲ حالت
⇒ ۸×۱۲=۹۶ عدد

عدد ۱۰۰	عدد ۹۹	عدد ۹۸	عدد ۹۷
$\underline{۱۱۵۰۴}$	۱۱۵۰۳	۱۱۵۰۲	۱۱۵۰۱

سن صدمین عضو برابر ۱۵ است.

۱۵۴۱ (؟) طبق اصل ضرب، کارت اول و دوم را به $۴۲۰=۲۰\times۲۱$ طریق از کیسه بیـرون می‌آوریـم. اعداد روی کارت را به‌ترتیب در کنار هم قرار می‌دهیم و عدد به وجود آمده را در مجموعهٔ A قرار می‌دهیم. تعدادی از این اعداد دو بار تکرار می‌شوند. به‌عنوان مثال عدد ۱۲۱ یک بار با بیرون آمدن ۱۲ به عنوان کارت اول و ۱ به عنوان کارت دوم و بار دیگر با بیرون آمدن ۱ به عنوان کارت اول و ۲۱ به عنوان کارت دوم تولید می‌شود.

همهٔ اعداد تکراری در A به‌صورت زیر هستند:

۲۱۱	۱۱۱
۲۱۲	۱۱۲
⋮	⋮
$\underbrace{۲۱۹}_{۹\ \text{تا}}$	۱۱۹
	$\underbrace{۱۲۱}_{۱۰\ \text{تا}}$

حالت‌های تکراری

در نتیجه $n(A)=۴۲۰-۱۹=۴۰۱$. اکنون باید عددهایی را به‌دست آوریم که مضرب ۶ هسـتند (مجموعهٔ B). برای مشخص کردن تعداد عددهای مضرب ۶ اعداد ۱ تا ۲۱ را به ۳ دسته افراز می‌کنیم:

$$x=۳k\Rightarrow۳,۶,۹,۱۲,۱۵,۱۸,۲۱$$
$$x=۳k+۱\Rightarrow۱,۴,۷,۱۰,۱۳,۱۶,۱۹$$
$$x=۳k+۲\Rightarrow۲,۵,۸,۱۱,۱۴,۱۷,۲۰$$

برای اینکه عدد ساخته شده که از کنار هم قرار دادن دو کارت خارج شده به‌دست می‌آید مضرب ۶ باشد باید آن عدد زوج باشد و بر ۳ بخش‌پذیر باشد. در نتیجه کارت‌ها به‌صورت زیر است

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{3k}\ \overset{\text{زوج}}{\boxed{3k}} \Rightarrow 6\times 3 \\[2ex] \boxed{3k+1}\ \overset{\text{زوج}}{\boxed{3k+2}} \Rightarrow 7\times 4 \\[2ex] \boxed{3k+2}\ \overset{\text{زوج}}{\boxed{3k+1}} \Rightarrow 7\times 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{مجموع} = 18+28+21=67$$

در این حالت هم دو عدد ۱۱۴ و ۲۱۶ دو بار تکرار می‌شوند. بنابراین

$$n(B)=67-2=65$$

در نتیجه $P(B)=\frac{n(B)}{n(A)}=\frac{65}{401}$. (دقت کنید که در این سؤال فضای نمونه‌ای با A نمایش داده شده است.)

۱۵۴۲ (۲) عددهای مضرب $18=2\times 3^2$ که مربع کامل هستند به فرم $(6k)^2$ هستند.

$$10^4 \le (6k)^2 < 10^5 \Rightarrow 100 \le 6k < 100\sqrt{10} \Rightarrow 100 \le 6k < 316 \Rightarrow 17 \le k \le 52$$

بنابراین برای k، $52-16=36$ مقدار به‌دست می‌آید.

۱۵۴۳ (۲) توجه کنید که اگر عددی را به حاصل‌ضرب عوامل اول تجزیه کنیم و حاصل‌ضرب $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_n^{\alpha_n}$ به‌دست آید، تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت این عدد برابر است با $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_n+1)$

در نتیجه x تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت $=(m+1)(n+1)$

چون $\frac{x}{40}=\frac{2^m\times 5^n}{2^3\times 5}=2^{m-3}\times 5^{n-1}$ $(m\ge 3, n\ge 1)$، پس

$$\frac{x}{40} \text{ تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت } = (m-2)n$$

اکنون بنابر فرض می‌نویسیم

$$(m+1)(n+1)-(m-2)n=12 \Rightarrow m+3n=11$$

چون حداقل مقدار x مد نظر است، پس

$$m=5\,,\,n=2 \Rightarrow x=2^5\times 5^2=800$$

۱۵۴۴ (۳) چون $\overline{aba}$ بر ۱۲ بخش‌پذیر است، پس

$$\overline{aba} \overset{12}{\equiv} 0 \Rightarrow 100a+10b+a \overset{12}{\equiv} 0 \Rightarrow 101a+10b \overset{12}{\equiv} 0$$

$$\xrightarrow{101 \overset{12}{\equiv} 5} 5a+10b \overset{12}{\equiv} 0 \xrightarrow{\div 5} a+2b \overset{12}{\equiv} 0 \Rightarrow a \overset{12}{\equiv} -2b$$

اکنون با توجه به اینکه a رقمی زوج و غیرصفر است، می‌توان نوشت

$b=1 \Rightarrow a \overset{12}{\equiv} -2$ ×

$b=2 \Rightarrow a \overset{12}{\equiv} -4 \Rightarrow a=8 \to 828$

$b=3 \Rightarrow a \overset{12}{\equiv} -6 \Rightarrow a=6 \to 636$

$b=4 \Rightarrow a \overset{12}{\equiv} -8 \Rightarrow a=4 \to 444$

$b=5 \Rightarrow a \overset{12}{\equiv} -10 \Rightarrow a=2 \to 252$ کوچک‌ترین عدد

$b=6 \Rightarrow a \overset{12}{\equiv} -12$ ×

$b=7 \Rightarrow a \overset{12}{\equiv} -14$ ×

$b=8 \Rightarrow a \overset{12}{\equiv} -16 \Rightarrow a=8 \to 888$ بزرگ‌ترین عدد

$b=9 \Rightarrow a \overset{12}{\equiv} -18 \overset{12}{\equiv} 6 \Rightarrow a=6 \to 696$

در نتیجه میانگین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد سه رقمی به‌صورت $\overline{aba}$ برابر $\frac{888+252}{2}=570$ است.

۱۵۴۵ (۲) بنابر الگوریتم تقسیم،

$$\left.\begin{array}{l} a=11q+r \\ q=r+3 \end{array}\right\} \Rightarrow a=11(r+3)+r=12r+33 \Rightarrow 0\le r<11 \Rightarrow n(S)=11$$

اکنون به‌دست می‌آید
$$a-9=12r+24 \overset{24}{\equiv} 0 \Rightarrow 12r \overset{24}{\equiv} 0 \xrightarrow{\div 12} r \overset{2}{\equiv} 0$$

یعنی r باید زوج باشد. در نتیجه $n(A)=6$. در نهایت به‌دست می‌آید $P(A)=\frac{6}{11}$

۱۵۴۶ (۳) اگر عدد $n!$ بر ۳۶ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه کمترین مقدار ممکن برای n عدد ۶ است. پس $10-m\ge 6 \Rightarrow 4\ge m$

یعنی بزرگ‌ترین عدد طبیعی m برابر ۴ است. در نتیجه باید باقی‌ماندهٔ 4^{123} بر ۱۵ را به‌دست آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} 4^2 \overset{15}{\equiv} 1 \xrightarrow{\text{به توان } 61} (4^2)^{61} \overset{15}{\equiv} 1 \Rightarrow 4^{122} \overset{15}{\equiv} 1 \\[2ex] 4 \overset{15}{\equiv} 4 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ضرب طرفین}} 4^{123} \overset{15}{\equiv} 4$$

۱۵۴۷ (۳) از اطلاعات مسئله نمودار درختی زیر به‌دست می‌آید

- $\frac{1}{6}$ مجموع دو تاس <9
  - $\frac{3}{9}$ مهرهٔ خارج شده از ظرف اول آبی باشد
    - $\frac{5}{10}$ مهرهٔ خارج شده از ظرف دوم قرمز باشد
  - $\frac{6}{9}$ مهرهٔ خارج شده از ظرف اول قرمز باشد
    - $\frac{6}{10}$ مهرهٔ خارج شده از ظرف دوم قرمز باشد
- $\frac{5}{6}$ مجموع دو تاس ≥ 9
  - $\frac{4}{9}$ مهرهٔ خارج شده از ظرف دوم آبی باشد
    - $\frac{6}{10}$ مهرهٔ خارج شده از ظرف اول قرمز باشد
  - $\frac{5}{9}$ مهرهٔ خارج شده از ظرف دوم قرمز باشد
    - $\frac{7}{10}$ مهرهٔ خارج شده از ظرف اول قرمز باشد

اکنون بنابر قانون احتمال کل به‌دست می‌آید

$$P=\frac{1\times 3\times 5+1\times 6\times 6+5\times 4\times 6+5\times 5\times 7}{6\times 9\times 10}=\frac{346}{6\times 9\times 10}=\frac{173}{270}$$

۱۵۴۸ (۴) چون جواب‌های معادلهٔ داده شده صحیح نامنفی است، پس x_4 باید مقسوم‌علیه عدد ۱۰ باشد:

$$x_4=1 \Rightarrow x_1+x_2+x_3=10$$

$$\text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی} = \binom{12}{2}=66$$

$$x_4=2 \Rightarrow x_1+x_2+x_3=5$$

$$\text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی} = \binom{7}{2}=21$$

$$x_4=5 \Rightarrow x_1+x_2+x_3=2$$

$$\text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی} = \binom{4}{2}=6$$

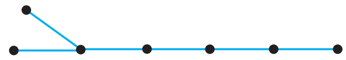
$$x_4=10 \Rightarrow x_1+x_2+x_3=1$$

$$\text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی} = \binom{3}{2}=3$$

در نتیجه بنابر اصل جمع،

$$\text{تعداد کل جواب‌های صحیح و نامنفی} = 66+21+6+3=96$$

۱۵۴۹ (۲) می‌دانیم در هر گراف همبند از مرتبهٔ p و اندازهٔ q، $q \geq p-1$. پس در هر گراف همبند از مرتبهٔ ۷، $q \geq 7-1=6$. گراف زیر مثالی از یک گراف همبند مرتبهٔ ۷ با اندازهٔ ۶ و $\Delta=3$ است. بنابراین پاسخ عدد ۶ است.



۱۵۵۰ (۴) چون در ستون دوم عددهای ۱، ۲ و ۳ وجود دارد، پس گزینه‌های (۲) و (۳) رد می‌شوند. از طرف دیگر ستون چهارم این مربع لاتین به صورت $\begin{array}{|c|}5\\4\\1\\2\\3\end{array}$ است و چون عدد ۳ با b هم‌سطر هستند، بنابراین $b \neq 3$. در نتیجه گزینهٔ (۱) هم نمی‌تواند درست باشد. پس گزینهٔ (۴) درست است. این مربع لاتین به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

۲	۴	۳	۵	۱
۵	۳	۱	۴	۲
۴	۲	۵	۱	۳
۳	۱	۴	۲	۵
۱	۵	۲	۳	۴

۱۵۵۱ (۲و۴) گزینه‌ها را یکی یکی بررسی می‌کنیم.

گزینهٔ (۱) رأس g را احاطه نمی‌کند.

گزینهٔ (۲) این مجموعه احاطه‌گر مینیمال است.

گزینهٔ (۳) رأس‌های e و g را احاطه نمی‌کند.

گزینهٔ (۴) این مجموعه احاطه‌گر است و با حذف هر عضو، دیگر احاطه‌گر نیست. بنابراین مینیمال نیز هست.

پاسخ کنکور سراسری ۱۴۰۰ (خارج از کشور)

۱۵۵۲ (۲) گـزارهٔ $(p\vee q)\Rightarrow r$ زمانـی نادرسـت اسـت که $p\vee q$ درسـت و r نادرسـت باشد. $p\vee q$ زمانی درست اسـت که حداقل یکی از گزاره‌های p یا q درست باشند و این اتفاق در سه حالت رخ می‌دهد:

p	q	$p\vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د

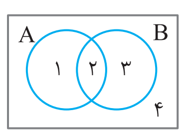
بنابراین فضای نمونه‌ای سـه حالت دارد، یعنی $n(S)=۳$. در این سـه حالت (جدول را ببینیـد) فقط یک حالت وجود دارد که q نادرسـت است، یعنـی $n(A)=۱$. در نتیجه $P(A)=\frac{۱}{۳}$.

توجه: می‌توانستیم با نوشتن جدول ارزش گزاره‌ها هم مسئله را حل کنیم:

p	q	r	$p\vee q$	$(p\vee q)\Rightarrow r$
د	د	د	د	د
د	د	ن	د	ن
د	ن	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	د	د
ن	د	ن	د	ن
ن	ن	د	ن	د
ن	ن	ن	ن	د

فضای نمونه‌ای

۱۵۵۳ (۱) بـرای مجموعه‌هـا نمـودار ون رسـم می‌کنیـم و ناحیه‌هـا را عددگذاری می‌کنیم. با توجه به این نمودار،
$A=\{۱,۲\},\quad B=\{۲,۳\},\quad C=\{۱,۳\}$



اکنون می‌توان نوشت

$$(A'\cap B')'\cap C'=(A\cup B)\cap C'=\{۱,۲,۳\}\cap\{۲,۴\}=\{۲\}=A\cap B$$

۱۵۵۴ (۱) می‌توان ثابت کرد $k\binom{n}{k}=n\binom{n-۱}{k-۱}$:

$$n\binom{n-۱}{k-۱}=n\times\frac{(n-۱)!}{(k-۱)!(n-k)!}=\frac{n!}{(k-۱)!(n-k)!}$$

$$=\frac{k(n!)}{k!(n-k)!}=k\binom{n}{k}$$

اکنون می‌توان نوشت

$$\sum_{k=۱}^{n}k\binom{n}{k}=\sum_{k=۱}^{n}n\binom{n-۱}{k-۱}=n\sum_{k=۱}^{n}\binom{n-۱}{k-۱}$$

$$=n\underbrace{\left[\binom{n-۱}{۰}+\binom{n-۱}{۱}+\cdots+\binom{n-۱}{n-۱}\right]}_{\text{تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ } n-۱ \text{ عضوی}}=n۲^{n-۱}$$

۱۵۵۵ (؟) این تسـت نادرست اسـت. چون برای a مقدار منحصربه‌فردی به‌دست نمی‌آید و به ازای هر $a<۱۳$ میانه برابر ۱۳ است.

۱۵۵۶ (۴) بنابر اصل جمع تعداد کل مردها برابر است با

$$۱\times۱۰۱\times۸۵=۸۵۸۵$$

$$\underbrace{۱}_{\text{جنسیت}}\times\underbrace{۱۰۱}_{\text{افراد هم‌سن}}\times\underbrace{۸۵}_{\text{سن}}=۸۵۸۵$$

برای پیدا کردن نفر ده هزارم باید $۱۰۰۰۰-۸۵۸۵=۱۴۱۵$ اُمین زن را به‌دسـت آوریم. پس اولین رقم سـمت چپ برابر ۲ اسـت. با ثابت گرفتن سـه رقم بعـدی که مربوط به تعداد افراد هم‌سن است، داریم:

۸۵ حالت ⇐ ◯ (سن) ـ ـ ـ (افراد هم‌سن) ۲

چون $۱۴۱۵=۸۵\times۱۶+۵۵=۱۳۶۰+۵۵$ و

۸۵ حالت ⇐ ◯ (سن) ۲۰۰۱
⋮
۸۵ حالت ⇐ ◯ (سن) ۲۰۱۶
⇐ ۱۳۶۰ نفر

بنابرایـن ۱۴۱۵ اُمیـن فـرد کـدی بـه صـورت ◯۲۰۱۷ دارد و چـون کـد ۱۳۶۱=۱۳۶۰+۱ اُمیـن فرد ۲۰۱۷۰۱ اسـت، پس کد ۱۴۱۵=۱۳۶۰+۵۵ اُمین فرد ۲۰۱۷۵۵=۲۰۱۷۵۵ اسـت. پس سـن مورد انتظار بـرای ده هزارمین عضو مجموعه ۵۵ سال است.

۱۵۵۷ (۱) ابتدا تعداد فضای نمونه‌ای را به‌دست می‌آوریم:

$$n(S)=\underset{\text{کارت اول عدد فرد}}{۶}\times۱۱+\underset{\text{کارت اول عدد زوج}}{۶}\times۶=۱۰۲$$

(توجـه کنیـد که بعد از خارج کردن کارت اول دیگر آن را در کیسـه قرار نمی‌دهیم). اگر کارت اول زوج باشـد و کارت دومـی که خارج می‌کنیم ۴، ۸ یا ۱۲ باشـد، عدد مطلوب مضرب ۴ اسـت. اما توجه کنید که ۴۴، ۸۸ و ۱۲۱۲ امکان‌پذیر نیسـت. در این حالت $۶\times۳-۳=۱۵$ عـدد به‌دسـت می‌آید. اگر عـدد اول فرد باشـد، عـدد روی تاس تنها می‌توانـد ۲ و ۶ باشـد و در این حالت عـدد تکراری نداریم. در نتیجـه در این حالت هم $۶\times۲=۱۲$ حالت به‌دست می‌آید. در نتیجه $n(A)=۱۵+۱۲=۲۷$ و احتمال مطلوب برابر است با

$$P(A)=\frac{۲۷}{۱۰۲}=\frac{۹}{۳۴}$$

۱۵۵۸ (۲) اعـداد مضرب ۹ که مکعب کامل باشـند به‌صورت $(۳k)^۳$ هسـتند. چون عددهای سه و چهاررقمی را می‌خواهیم، پس

$$۱۰^۲\le(۳k)^۳<۱۰^۴\Rightarrow\sqrt[۳]{۱۰^۲}\le۳k<\sqrt[۳]{۱۰^۴}\Rightarrow۴/۶۴\le۳k<۲۱$$

$$۱/۴۷\le k<۷\Rightarrow۲\le k\le۶$$

پس $۶-۱=۵$ عدد با این ویژگی وجود دارد.

۱۵۵۹ (۴) ابتدا عدد x را به حاصل‌ضرب عوامل اول تجزیه می‌کنیم:

$$x=۲^{m+n}\times۳^{m}\times۵^{n}$$

عدد $۱۵x$ هم به صورت زیر است:

$$۱۵x=۲^{m+n}\times۳^{m+۱}\times۵^{n+۱}$$

اکنون بنابر فرض مسئله می‌توان نوشت

$$۳۵+(m+n+۱)(m+۱)(n+۱)=(m+n+۱)(m+۲)(n+۲)$$

با ساده کردن این برابری به‌دست می‌آید

$$(m+n)^۲+۴(m+n)-۳۲=۰\Rightarrow m+n=-۸\ ,\ m+n=۴$$

چون x عددی صحیح است، $m+n=-۸$ قابل قبول نیست. بنابراین $m+n=۴$.

در نتیجه

$$x \text{ کوچک‌ترین مقدار } \Rightarrow m=۴\ ,\ n=۰\Rightarrow x_{min}=۲^۴\times ۳^۴$$

$$x \text{ بزرگ‌ترین مقدار } \Rightarrow m=۰\ ,\ n=۴\Rightarrow x_{max}=۲^۴\times ۵^۴$$

در نهایت به‌دست می‌آید

$$x_{max}-x_{min}=۲^۴(۵^۴-۳^۴)=۱۶\times ۵۴۴=۸۷۰۴$$

۱۵۶۰ ؟ می‌دانیم $۱۰\overset{۱۱}{\equiv}-۱$ ، $۱۰^۲\overset{۱۱}{\equiv}۱$ ، $۱۰^۳\overset{۱۱}{\equiv}-۱$ ، $۱۰^۴\overset{۱۱}{\equiv}۱$ و $۱۰^۵\overset{۱۱}{\equiv}-۱$.

چون $\overline{abaaba}=a\times ۱۰^۵+b\times ۱۰^۴+a\times ۱۰^۳+a\times ۱۰^۲+b\times ۱۰+a$ ، بنابراین عدد $\overline{abaaba}$ همواره بر ۱۱ بخش‌پذیر است:

$$\overline{abaaba}\overset{۱۱}{\equiv}-a+b-a+a-b+a\overset{۱۱}{\equiv}۰$$

همچنین $۱۰\overset{۸}{\equiv}۲$ ، $۱۰^۲\overset{۸}{\equiv}۴$ ، $۱۰^۳\overset{۸}{\equiv}۰$ ، $۱۰^۴\overset{۸}{\equiv}۰$ و $۱۰^۵\overset{۸}{\equiv}۰$ ، پس بخش‌پذیری آن بر ۸ را بررسی می‌کنیم:

$$\overline{abaaba}\overset{۸}{\equiv}۴a+۲b+a\overset{۸}{\equiv}۵a+۲b\overset{۸}{\equiv}۰\Rightarrow ۲b\overset{۸}{\equiv}-۵a+۸a\Rightarrow ۲b\overset{۸}{\equiv}۳a$$

a زوج است، بنابراین

$$a=۲\Rightarrow b\overset{۴}{\equiv}۳\Rightarrow b=۳,۷\Rightarrow ۲۳۲۲۳۲\ ,\ ۲۷۲۲۷۲$$

$$a=۴\Rightarrow b\overset{۴}{\equiv}۲\Rightarrow b=۲,۶\Rightarrow ۴۲۴۴۲۴\ ,\ ۴۶۴۴۶۴$$

$$a=۶\Rightarrow b\overset{۴}{\equiv}۱\Rightarrow b=۱,۵,۹\Rightarrow ۶۱۶۶۱۶,۶۵۶۶۵۶,۶۹۶۶۹۶$$

$$a=۸\Rightarrow b\overset{۴}{\equiv}۰\Rightarrow b=۰,۴,۸\Rightarrow ۸۰۸۸۰۸\ ,\ ۸۴۸۸۴۸\ ,\ ۸۸۸۸۸۸$$

پس تعداد عددهای مورد نظر برابر ۱۰ است.

۱۵۶۱ ۳ بنابر الگوریتم تقسیم

$$a=۱۳q+r\ ,\quad ۰\le r<۱۳\ ,\quad q+r=۱۷$$

قرار می‌دهیم $q=۱۷-r$: $\qquad a=۱۳(۱۷-r)+r=۲۲۱-۱۲r$

بنابر فرض،

$$a-۸\overset{۳۶}{\equiv}۲۱\Rightarrow ۲۲۱-۱۲r-۸\overset{۳۶}{\equiv}۲۱\Rightarrow ۱۲r\overset{۳۶}{\equiv}۱۹۲\Rightarrow r\overset{۳}{\equiv}۱۶\Rightarrow r\overset{۳}{\equiv}۱$$

به ازای $r=۱,۴,۷,۱۰$ این رابطه برقرار است. پس احتمال مورد نظر برابر $\frac{۴}{۱۳}$ است.

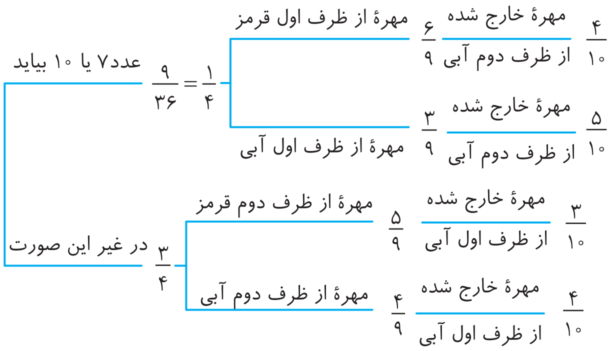
۱۵۶۲ ۴ کوچک‌ترین مقدار m که به ازای آن $m!$ بر ۳۰ بخش‌پذیر است عدد ۵ است. پس باید باقی‌ماندهٔ $۵^{۳۳۲}$ را بر ۳۱ به‌دست آوریم. بنابر قضیهٔ فرما اگر p عددی اول باشد و $(a,p)=۱$ ، آن‌گاه $a^{p-۱}\overset{p}{\equiv}۱$. در نتیجه

$$\left.\begin{array}{l} ۵^{۳۰}\overset{۳۱}{\equiv}۱\Rightarrow (۵^{۳۰})^{۱۱}\overset{۳۱}{\equiv}۱\Rightarrow ۵^{۳۳۰}\overset{۳۱}{\equiv}۱ \\ ۵^۲\overset{۳۱}{\equiv}۲۵ \end{array}\right\}\Rightarrow ۵^{۳۳۲}\overset{۳۱}{\equiv}۲۵$$

توجه کنید که می‌توان باقی‌ماندهٔ $۵^{۳۳۲}$ بر ۳۱ را بدون قضیهٔ فرما هم به‌دست آورد:

$$۵^۳\overset{۳۱}{\equiv}۱\Rightarrow (۵^۳)^{۱۱۰}\overset{۳۱}{\equiv}۱\Rightarrow ۵^{۳۳۰}\overset{۳۱}{\equiv}۱\Rightarrow ۵^۲\times ۵^{۳۳۰}\overset{۳۱}{\equiv}۲۵\Rightarrow ۵^{۳۳۲}\overset{۳۱}{\equiv}۲۵$$

۱۵۶۳ ۲ از نمودار درختی زیر استفاده می‌کنیم:



اکنون بنابر قانون احتمال کل به‌دست می‌آید

$$P=\frac{۱\times ۶\times ۴+۱\times ۳\times ۵+۳\times ۵\times ۳+۳\times ۴\times ۴}{۴\times ۹\times ۱۰}=\frac{۲۴+۱۵+۴۵+۴۸}{۴\times ۹\times ۱۰}=\frac{۱۳۲}{۴\times ۹\times ۱۰}=\frac{۱۱}{۳۰}$$

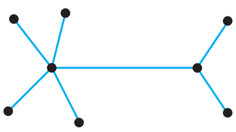
۱۵۶۴ ۴ ابتدا تعداد جواب‌های طبیعی هریک از دو معادله را به‌دست می‌آوریم:

$$x_۱+x_۲+x_۳=۹\Rightarrow \text{تعداد جواب‌های طبیعی}=\binom{۸}{۲}=۲۸$$

$$x_۴+x_۵=۷\Rightarrow \text{تعداد جواب‌های طبیعی}=\binom{۶}{۱}=۶$$

اکنون بنابر اصل ضرب، تعداد جواب‌های طبیعی دستگاه معادلات برابر است با $۲۸\times ۶=۱۶۸$

۱۵۶۵ ۱ توجه کنید که درخت یک گراف همبند فاقد دور است و با شرایط داده شده گراف را به‌صورت مقابل رسم می‌کنیم. در این گراف هیچ رأس درجهٔ ۲ وجود ندارد.



۱۵۶۶ ۱ مربع لاتین داده شده را به‌صورت زیر کامل می‌کنیم:

۲	۴	۳	۵	۱
b=۵	۳	۱	۴	۲
۴	۲	۵	۱	۳
۳	۱	۴	۲	۵
۱	۵	۲	۳	a=۴

۱۵۶۷ ۲ با انتخاب مجموعهٔ $\{۱۴,۱۵,۱۶\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم به‌دست می‌آید و عدد احاطه‌گری برابر ۳ است.