پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\sqrt[۴]{(۴+\sqrt{۷})^{-۱}}\times\sqrt{۱+\sqrt{۷}}=\sqrt[۴]{\frac{۱}{۴+\sqrt{۷}}}\times\sqrt[۴]{(۱+\sqrt{۷})^{۲}}$$
$$=\sqrt[۴]{\frac{۱}{۴+\sqrt{۷}}\times(۱+\sqrt{۷})^{۲}}=\sqrt[۴]{\frac{۱+۷+۲\sqrt{۷}}{۴+\sqrt{۷}}}=\sqrt[۴]{\frac{۸+۲\sqrt{۷}}{۴+\sqrt{۷}}}$$
$$=\sqrt[۴]{\frac{۲(۴+\sqrt{۷})}{۴+\sqrt{۷}}}=\sqrt[۴]{۲}$$

۲- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** فرض می‌کنیم $a_n=An+B$، در این صورت

$$\begin{cases}a_۵=۸\\a_{۱۰}=۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۵A+B=۸\\۱۰A+B=۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-\frac{۳}{۵}\\B=۱۱\end{cases}$$

بنابراین $a_n=-\frac{۳}{۵}n+۱۱\Rightarrow a_{۱۶}=-\frac{۳}{۵}\times۱۶+۱۱=۱/۴$

راه‌حل دوم فرض کنید جملهٔ اول $a_۱$ و قدرنسبت d باشد. در این صورت

$$\begin{cases}a_۵=۸\\a_{۱۰}=۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_۱+۴d=۸\\a_۱+۹d=۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=-\frac{۳}{۵}\\a_۱=\frac{۵۲}{۵}\end{cases}$$

بنابراین $a_{۱۶}=a_۱+۱۵d=\frac{۵۲}{۵}+۱۵(-\frac{۳}{۵})=\frac{۷}{۵}=۱/۴$

۳- گزینهٔ ۱ باید $a>۰$، $\Delta>۰$، $\frac{c}{a}\geq۰$ و $-\frac{b}{a}>۰$.

$$a>۰,\quad \frac{c}{a}\geq۰\Rightarrow\frac{۰}{a}\geq۰\ \checkmark$$
$$\Delta>۰\Rightarrow(۳+۲a)^{۲}>۰\Rightarrow a\neq-\frac{۳}{۲}$$
$$-\frac{b}{a}>۰\Rightarrow-\frac{۳+۲a}{a}>۰\xrightarrow{a>۰}۳+۲a<۰\Rightarrow a<-\frac{۳}{۲}$$

چون اشتراک $a>۰$ و $a<-\frac{۳}{۲}$ تهی است، پس به‌ازای هیچ مقداری از a شرایط مسئله برقرار نیست.

۴- گزینهٔ ۴ ابتدا نامعادلهٔ $\frac{۴-۲x}{۳x+۱}\geq۰$ را به کمک تعیین علامت حل می‌کنیم:

x	$-\infty$		$-\frac{۱}{۳}$		۲		$+\infty$
$\frac{۴-۲x}{۳x+۱}$		$-$		$+$	۰	$-$	

بنابراین $-\frac{۱}{۳}<x\leq۲$. اکنون توجه کنید که $-۱<۳x\leq۶$. پس $[۳x]$ می‌تواند عددهای -۱، ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ باشد که تعداد آن‌ها هشت تاست.

۵- گزینهٔ ۳ چون f و g تابع‌هایی ثابت‌اند، پس

$$f(x)=b-۳ax\Rightarrow-۳a=۰\Rightarrow a=۰\Rightarrow f(x)=b$$
$$g(x)=c-(۳b-۳)x\Rightarrow-(۳b-۳)=۰\Rightarrow b=۱\Rightarrow g(x)=c$$

از طرف دیگر،

$$(f+g)(x)=۵\Rightarrow f(x)+g(x)=۵\Rightarrow b+c=۵\Rightarrow۱+c=۵\Rightarrow c=۴$$

بنابراین $bc=۴$.

۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$g(x)=f(x+۲)=۴(x+۲)-(x+۲)^{۲}=-x^{۲}+۴$$

بنابراین

$$f(x)=g(x)\Rightarrow۴x-x^{۲}=-x^{۲}+۴\Rightarrow۴x=۴\Rightarrow x=۱$$

در نتیجه عرض نقطهٔ برخورد برابر است با $f(۱)=۴\times۱-۱^{۲}=۳$. پس نقطهٔ برخورد نمودارهای دو تابع $(۱,۳)$ است که فاصلهٔ آن از مبدأ مختصات برابر است با

$$\sqrt{۱^{۲}+۳^{۲}}=\sqrt{۱۰}$$

۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$x_۱+x_۲=\frac{a}{۳},\quad x_۱x_۲=\frac{۴}{۳},\quad x_۱=۳x_۲$$

بنابراین $x_۱x_۲=\frac{۴}{۳}\Rightarrow(۳x_۲)x_۲=\frac{۴}{۳}\Rightarrow x_۲^{۲}=\frac{۴}{۹}\Rightarrow x_۲=\pm\frac{۲}{۳}$

اگر $x_۲=\frac{۲}{۳}$، آن‌گاه

$$x_۱=۳x_۲=۳(\frac{۲}{۳})=۲\Rightarrow x_۱+x_۲=\frac{۸}{۳}\Rightarrow\frac{۸}{۳}=\frac{a}{۳}\Rightarrow a=۸$$

اگر $x_۲=-\frac{۲}{۳}$، آن‌گاه

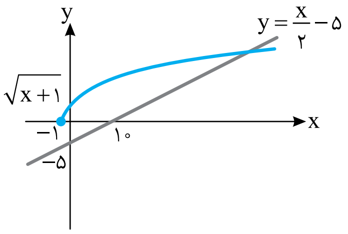
$$x_۱=۳x_۲=۳(-\frac{۲}{۳})=-۲\Rightarrow x_۱+x_۲=-\frac{۸}{۳}\Rightarrow-\frac{۸}{۳}=\frac{a}{۳}\Rightarrow a=-۸$$

بنابراین اختلاف دو مقدار ممکن a برابر ۱۶ است.

۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\frac{\sqrt{x+۱}}{\sqrt{x-۱}+۳}-\frac{\sqrt{x+۱}}{۳-\sqrt{x-۱}}=\frac{x-۱}{\sqrt{x-۱}}$$
$$\frac{\sqrt{x+۱}(۳-\sqrt{x-۱})-\sqrt{x+۱}(\sqrt{x-۱}+۳)}{(\sqrt{x-۱}+۳)(۳-\sqrt{x-۱})}=\frac{(\sqrt{x-۱})^{۲}}{\sqrt{x-۱}}$$
$$\frac{۳\sqrt{x+۱}-\sqrt{x^{۲}-۱}-\sqrt{x^{۲}-۱}-۳\sqrt{x+۱}}{۹-(x-۱)}=\sqrt{x-۱}$$
$$\frac{-۲\sqrt{x^{۲}-۱}}{۱۰-x}=\sqrt{x-۱}\Rightarrow-۲\sqrt{x-۱}\times\sqrt{x+۱}=(۱۰-x)\sqrt{x-۱}$$
$$-۲\sqrt{x+۱}=۱۰-x\ (\text{توجه کنید }\sqrt{x-۱}\neq۰)\Rightarrow\sqrt{x+۱}=\frac{x}{۲}-۵$$

اکنون برای اینکه بفهمیم این معادله چند جواب مثبت دارد، نمودارهای تابع‌های دو طرف معادله را رسم می‌کنیم:



از روی این شکل معلوم می‌شود که معادلهٔ مورد نظر یک جواب بزرگ‌تر از ۱۰ دارد، که چون هیچ کدام از مخرج‌ها را صفر نمی‌کند، پس این جواب قابل قبول است.

۹- گزینهٔ ۲ گزینه‌ها را یکی‌یکی بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): $(-۱,-۲)\Rightarrow(-۲,-۱): -۱\neq(-۲)^۳-(-۲)+۱$

گزینهٔ (۲): $(\frac{۵}{۸},\frac{۱}{۲})\Rightarrow(\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۸}): \frac{۵}{۸}=(\frac{۱}{۲})^۳-\frac{۱}{۲}+۱$

چون این تساوی درست است، پس جواب گزینهٔ (۲) است. لازم نیست بقیهٔ گزینه‌ها را بررسی کنیم.

۱۰- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $(gof)(x)=g(f(x))=g(۲x)$. بنابراین

$$g(۲x)=۵x^۲+۱۱ \xrightarrow{x\to\frac{x}{۲}} g(x)=۵(\frac{x}{۲})^۲+۱۱$$

$$g(x-۷)=۵(\frac{x-۷}{۲})^۲+۱۱$$

بنابراین کمترین مقدار تابع $y=g(x-۷)$ برابر ۱۱ است.

۱۱- گزینهٔ ۱ باید $-۹+k^۲<۰\Rightarrow k^۲<۹\Rightarrow -۳<k<۳$

بنابراین k یکی از عددهای صحیح ۲−، ۱−، ۰، ۱ و ۲ است، که مجموع آن‌ها برابر صفر است.

۱۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$-\frac{\pi}{۴}<x<\frac{\pi}{۴}\Rightarrow -\frac{\pi}{۴}<-x<\frac{\pi}{۴}\Rightarrow ۰<\frac{\pi}{۴}-x<\frac{\pi}{۲}$$

بنابراین $\tan(\frac{\pi}{۴}-x)>۰\Rightarrow\frac{۱-m}{۲+m}>۰$

جدول تعیین علامت این نامعادله به صورت زیر است:

m	$-\infty$		-۲		۱		$+\infty$
$\frac{۱-m}{۲+m}$		$-$		$+$	۰	$-$	

بنابراین مجموعهٔ مقادیر m بازهٔ $(-۲,۱)$ است.

۱۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$۲\sin^۲x+\cos^۲x=\frac{۴}{۳}\Rightarrow ۲(۱-\cos^۲x)+\cos^۲x=\frac{۴}{۳}$$

$$۲-\cos^۲x=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\cos^۲x=۲-\frac{۴}{۳}=\frac{۲}{۳}$$

بنابراین $۱+\tan^۲x=\frac{۱}{\cos^۲x}=\frac{۱}{\frac{۲}{۳}}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\tan^۲x=\frac{۳}{۲}-۱=\frac{۱}{۲}$

۱۴- گزینهٔ ۳ از روی نمودار تابع معلوم می‌شود که ماکزیمم تابع برابر ۵ و مینیمم تابع برابر ۱ است. بنابراین

$$c=\frac{\text{ماکزیمم}+\text{مینیمم}}{۲}=\frac{۵+۱}{۲}=\frac{۶}{۲}=۳$$

۱۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$۸\cos x-\tan^۲x=۱\Rightarrow ۸\cos x=۱+\tan^۲x\Rightarrow ۸\cos x=\frac{۱}{\cos^۲x}$$

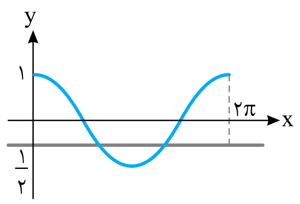
$$۸\cos^۳x=۱\Rightarrow\cos^۳x=\frac{۱}{۸}\Rightarrow\cos x=\frac{۱}{۲}=\cos\frac{\pi}{۳}$$

$$x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳},\quad k\in\mathbb{Z}$$

اکنون برای اینکه تعداد جواب‌ها در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ را مشخص کنیم، می‌توانیم از جدول زیر استفاده کنیم:

k	-۱	صفر	۱
$۲k\pi+\frac{\pi}{۳}$	$-۲\pi+\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۳}$	$۲\pi+\frac{\pi}{۳}$
$۲k\pi-\frac{\pi}{۳}$	$-۲\pi-\frac{\pi}{۳}$	$-\frac{\pi}{۳}$	$۲\pi-\frac{\pi}{۳}$

توجه کنید که فقط جواب‌های $\frac{\pi}{۳}$ و $۲\pi-\frac{\pi}{۳}$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ هستند و بقیهٔ جواب‌ها خارج از این بازه هستند. بنابراین معادلهٔ مثلثاتی مورد نظر در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ دو جواب دارد. توجه کنید که چون تعداد جواب‌های معادلهٔ مورد نظر را می‌خواهیم، می‌توانستیم از نمودار هم استفاده کنیم. از روی نمودار زیر معلوم می‌شود که تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی مورد نظر دوتاست.



۱۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\log_۸ ۱۸=m\Rightarrow\log_{۲^۳}۱۸=\frac{۱}{۳}\log_۲ ۱۸=m\Rightarrow\log_۲ ۱۸=۳m$$

$$\log_۲(۲\times۹)=۳m\Rightarrow\log_۲ ۲+\log_۲ ۳^۲=۳m\Rightarrow ۱+۲\log_۲ ۳=۳m$$

$$\log_۲ ۳=\frac{۳m-۱}{۲}$$

از طرف دیگر،

$$\log_۴ ۱۲=\log_۴(۳\times۴)=\log_۴ ۳+\log_۴ ۴=\log_{۲^۲}۳+۱$$

$$=\frac{۱}{۲}\log_۲ ۳+۱=\frac{۱}{۲}(\frac{۳m-۱}{۲})+۱=\frac{۳m-۱}{۴}+۱=\frac{۳}{۴}(m+۱)$$

۱۷- گزینهٔ ۳ چون نمودار تابع از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس

$$f(۰)=۰\Rightarrow a+b(\frac{۱}{۲})^۰=۰\Rightarrow a+b=۰\quad(۱)$$

همچنین

$$f^{-۱}(-۱)=-۱\Rightarrow f(-۱)=-۱\Rightarrow a+b(\frac{۱}{۲})^{-۱}=-۱\Rightarrow a+۲b=-۱\quad(۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a+2b=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1\\ b=-1\end{cases}$$

بنابراین $a-b=2$.

۱۸- گزینهٔ ۴ اگـر $x_1,\dots,x_9$ داده‌ها باشـند و $\bar{x}$ میانگیـن آن‌ها باشد، طبق فرض،

$$(x_1-\bar x)^2=(x_2-\bar x)^2=\dots=(x_8-\bar x)^2=(+1 \text{ یا } -1)^2=1$$

و $(x_9-\bar x)^2=0$. بنابراین

$$\sigma^2=\frac{(x_1-\bar x)^2+\dots+(x_8-\bar x)^2+(x_9-\bar x)^2}{9}=\frac{8\times1+0}{9}=\frac{8}{9}$$

در نتیجه $\sigma=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{\sqrt8}{\sqrt9}=\frac{2\sqrt2}{3}$.

۱۹- گزینهٔ ۱ میانگین و میانهٔ داده‌ها برابر است. فرض کنید این مقدار برابر a باشد. در این‌صورت میانگین و میانهٔ داده‌های جدید برابر $a+2$ است، که اختلاف آن‌ها صفر است.

۲۰- گزینهٔ ۲ توجه کنیـد که اگر $x\to2^+$، آن‌گاه $x^3\to8^+$، پس $[x^3]=8$. بنابراین

$$\lim_{x\to2^+}\frac{x^2-4}{x^3-[x^3]}=\lim_{x\to2^+}\frac{x^2-4}{x^3-8}=\lim_{x\to2^+}\frac{2x}{3x^2}=\lim_{x\to2^+}\frac{2}{3x}=\frac13$$

۲۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\lim_{x\to1^+}(4-[x])g(x)=\lim_{x\to1^+}(4-1)g(x)=\lim_{x\to1^+}3g(x)=6$$

بنابراین $\lim_{x\to1^+}g(x)=\frac63=2$، یعنی

$$\lim_{x\to1^+}g(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{|x-1|}=2$$

چـون $\lim_{x\to1^+}|x-1|=0$، پـس $\lim_{x\to1^+}\sqrt{ax^2+bx+c}=0$، یعنـی $x=1$ ریشـهٔ عبـارت زیر رادیکال اسـت. از طـرف دیگر، $x=1$ باید ریشـهٔ مضاعف عبـارت زیر رادیکال باشـد چون در غیر این صـورت درجهٔ $x-1$ در صورت از درجهٔ $x-1$ در مخرج کمتر و مقدار حد بی‌نهایت می‌شود. بنابراین باید صورت $g(x)$ به‌صورت $\sqrt{a(x-1)^2}$ باشد. پس

$$\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{a(x-1)^2}}{|x-1|}=2\Rightarrow\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt a|x-1|}{|x-1|}=2\Rightarrow\sqrt a=2\Rightarrow a=4$$

اکنون توجه کنید که

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4(x-1)^2}}{|x-1|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2|x-1|}{|x-1|}=2$$

۲۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x\left(\sqrt{\frac{2x+1}{5x+9}}\right)^3}{x}=\lim_{x\to0}\left(\sqrt{\frac{2x+1}{5x+9}}\right)^3$$

$$=\left(\sqrt{\frac{0+1}{0+9}}\right)^3=\left(\frac13\right)^3=\frac{1}{27}$$

۲۳- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که شیب خط $4y-3x=n$ برابر با $\frac34$ است. از طرف دیگر،

$$f(x)=\frac{x^2+mx+1}{x+3}\Rightarrow f'(x)=\frac{(2x+m)(x+3)-(1)(x^2+mx+1)}{(x+3)^2}$$

$$=\frac{x^2+6x+3m-1}{(x+3)^2}$$

چون شیب خط مماس با $f'(1)$ برابر است، پس

$$f'(1)=\frac34\Rightarrow\frac{1+6+3m-1}{16}=\frac34\Rightarrow\frac{2+m}{4}=1\Rightarrow m=2$$

بنابراین

$$f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x+3}\Rightarrow f(1)=\frac{1+2+1}{1+3}=1$$

چـون نقطهٔ $(1,f(1))$، یعنـی $(1,1)$ روی خط $4y-3x=n$ نیز قـرار دارد، پس $4\times1-3\times1=n\Rightarrow n=1$. بنابراین $m+n=2+1=3$.

راه‌حل دوم معادلهٔ حاصل از برخورد خط مماس و تابع را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{x^2+mx+1}{x+3}=\frac{3x+n}{4}\Rightarrow4(x^2+mx+1)=(x+3)(3x+n)$$

$$4x^2+4mx+4=3x^2+nx+9x+3n$$

$$x^2+(4m-n-9)x+4-3n=0$$

چون $x=1$ ریشهٔ مضاعف این معادله است، پس سمت چپ آن به‌صورت $(x-1)^2$ است. بنابراین

$$x^2+(4m-n-9)x+4-3n=(x-1)^2=x^2-2x+1$$

در نتیجه

$$\begin{cases}4m-n-9=-2\\ 4-3n=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=2\\ n=1\end{cases}$$

پس $m+n=2+1=3$.

۲۴- گزینهٔ ۲ چـون نقطهٔ $(0,4)$ روی نمودار تابع قرار دارد و ماکزیمم نسبی تابع است، پس

$$f(0)=4\Rightarrow c=4\Rightarrow f(x)=x^3+ax^2+bx+4$$

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

$$f'(0)=0\Rightarrow b=0\Rightarrow f(x)=x^3+ax^2+4$$

اگر طول نقطهٔ تماس نمودار با محور طول‌ها برابر x_0 باشد، آن‌گاه

$$\begin{cases}f(x_0)=0\\ f'(x_0)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0^3+ax_0^2+4=0 & (1)\\ 3x_0^2+2ax_0=0 & (2)\end{cases}$$

از تساوی (۲) به‌دست می‌آید

$$x_0(3x_0+2a)=0\Rightarrow x_0=0 \text{ یا } x_0=-\frac{2a}{3}$$

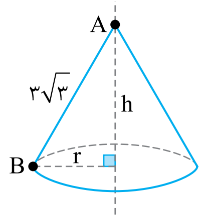
نقطهٔ با طول صفر نقطهٔ ماکزیمم نسبی است. بنابراین طول نقطهٔ مینیمم نسبی برابر $-\frac{2a}{3}$ است. اکنون از تساوی (۱) به‌دست می‌آید

$$\left(-\frac{2a}{3}\right)^3+a\left(-\frac{2a}{3}\right)^2+4=0$$

$$-\frac{8a^3}{27}+\frac{4a^3}{9}+4=0\Rightarrow\frac{4a^3}{27}=-4\Rightarrow a^3=-27\Rightarrow a=-3$$

بنابراین $x_0=-\frac{2(-3)}{3}=2$.

۲۵- گزینۀ ۲ اگر شعاع قاعدۀ مخروط برابر r و ارتفاع آن برابر با h باشد، بنابر قضیۀ فیثاغورس،



$$r^۲+h^۲=AB^۲=(۳\sqrt{۳})^۲=۲۷$$

پس $r^۲=۲۷-h^۲$. از طرف دیگر، حجم مخروط برابر است با

$$V=\frac{\pi}{۳}r^۲h=\frac{\pi}{۳}(۲۷-h^۲)h=-\frac{\pi}{۳}h^۳+۹\pi h\Rightarrow V'=-\pi h^۲+۹\pi$$

$$V'=۰\Rightarrow-\pi h^۲+۹\pi=۰\Rightarrow h^۲=۹\Rightarrow h=-۳\,(\text{غ.ق.ق}),\ h=۳$$

۲۶- گزینۀ ۳ شرایط انتخاب کتاب‌ها را می‌توان به‌صورت زیر حالت‌بندی کرد:

حالت ۱: هیچ‌کدام از کتاب‌های ریاضی، فیزیک و زیست را انتخاب نکنیم. در این‌صورت باید هر چهار کتاب را از بین چهار کتاب دیگر انتخاب کنیم. این کار به $\binom{۴}{۴}=۱$ طریق ممکن است.

حالت ۲: کتاب ریاضی را انتخاب کنیم. در این‌صورت باید حتماً کتاب زیست را هم انتخاب کنیم اما کتاب فیزیک را انتخاب نکنیم. بنابراین باید از بین چهار کتاب باقی‌مانده دو تا را انتخاب کنیم. این کار به $\binom{۴}{۲}=۶$ طریق ممکن است.

حالت ۳: کتاب ریاضی را انتخاب نکنیم، اما کتاب زیست را انتخاب کنیم. در این‌صورت باید کتاب فیزیک را انتخاب نکنیم، یعنی باید از بین چهار کتاب دیگر سه تا را انتخاب کنیم. این کار به $\binom{۴}{۳}=۴$ طریق ممکن است.

حالت ۴: کتاب ریاضی را انتخاب نکنیم، اما کتاب فیزیک را انتخاب کنیم. در این‌صورت باید کتاب زیست را انتخاب نکنیم، یعنی باید از بین چهار کتاب دیگر سه تا را انتخاب کنیم. این کار به $\binom{۴}{۳}=۴$ طریق ممکن است.

بنابراین طبق اصل جمع، تعداد انتخاب‌های ممکن برابر است با

$$۱+۶+۴+۴=۱۵$$

۲۷- گزینۀ ۲ اگر A پیشامد شیوع بیماری و B پیشامد بهبود باشد، آن‌گاه $P(A)=۰/۰۸$ و $P(B|A)=۰/۵$. در این صورت احتمال مورد نظر برابر است با

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=۰/۰۸\times۰/۵=۰/۰۴$$

۲۸- گزینۀ ۱ نقطۀ B محل برخورد خطوط AB و BC است. پس مختصات آن جواب‌های دستگاه معادله‌های این دو خط هستند:

$$\begin{cases}y+۲x=۷\\ ۲y-۷x=-۱۹\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-۲y-۴x=-۱۴\\ ۲y-۷x=-۱۹\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}}-۱۱x=-۳۳$$

$$x=۳\Rightarrow y=۱$$

پس باید فاصلۀ نقطۀ $B(۳,۱)$ از خط $۴y-۳x-۱۷=۰$ را به‌دست آوریم که برابر است با

$$BH=\frac{|۴\times۱-۳\times۳-۱۷|}{\sqrt{۴^۲+(-۳)^۲}}=\frac{۲۲}{۵}=۴/۴$$

۲۹- گزینۀ ۴ چون $DE\parallel BC$، پس بنابر تعمیم قضیۀ تالس.

$$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}\Rightarrow\frac{۵}{۵+۷}=\frac{DE}{BC}\Rightarrow\frac{DE}{BC}=\frac{۵}{۱۲}$$

بنابراین

$$\frac{S_{BCE}}{S_{BDE}}=\frac{BC}{DE}=\frac{۱۲}{۵}=۲/۴$$

۳۰- گزینۀ ۲ چون قطر کوچک بیضی برابر ۱۸ است، پس $۲b=۱۸$، یعنی $b=۹$. همچنین $c=۱۲$. بنابراین

$$a^۲=b^۲+c^۲=۹^۲+۱۲^۲=۲۲۵\Rightarrow a=۱۵$$

بنابراین خروج از مرکز برابر است با

$$e=\frac{c}{a}=\frac{۱۲}{۱۵}=۰/۸$$

۳۱- گزینۀ ۱ **راه‌حل اول** ابتدا پرانتزها را جداگانه ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}{\sqrt{۱۰}+۲}=\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}\sqrt{۵}+(\sqrt{۲})^۲}=\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}(\sqrt{۵}+\sqrt{۲})}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

$$A=\sqrt{۳-\sqrt{۵}}-\sqrt{۳+\sqrt{۵}}$$

$$A^۲=۳-\sqrt{۵}+۳+\sqrt{۵}-۲\sqrt{۳-\sqrt{۵}}\sqrt{۳+\sqrt{۵}}$$

$$=۶-۲\sqrt{(۳-\sqrt{۵})(۳+\sqrt{۵})}$$

$$=۶-۲\sqrt{۹-۵}=۶-۲\sqrt{۴}=۶-۲\times۲=۲$$

توجه کنید که چون $\sqrt{۳-\sqrt{۵}}<\sqrt{۳+\sqrt{۵}}$، پس A عددی منفی است. در نتیجه $A=-\sqrt{۲}$. بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}}\times(-\sqrt{۲})=-۱$$

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}{\sqrt{۱۰}+۲}=\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}\sqrt{۵}+(\sqrt{۲})^۲}=\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}(\sqrt{۵}+\sqrt{۲})}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(\sqrt{۳-\sqrt{۵}}-\sqrt{۳+\sqrt{۵}}\right)=\frac{۱}{۲}\left(\sqrt{۲}\sqrt{۳-\sqrt{۵}}-\sqrt{۲}\sqrt{۳+\sqrt{۵}}\right)$$

$$=\frac{۱}{۲}\left(\sqrt{۶-۲\sqrt{۵}}-\sqrt{۶+۲\sqrt{۵}}\right)=\frac{۱}{۲}\left(\sqrt{(۱-\sqrt{۵})^۲}-\sqrt{(۱+\sqrt{۵})^۲}\right)$$

$$=\frac{۱}{۲}\left(|۱-\sqrt{۵}|-|۱+\sqrt{۵}|\right)=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۵}-۱-۱-\sqrt{۵})=\frac{۱}{۲}(-۲)=-۱$$

۳۲- گزینۀ ۴ فرض می‌کنیم $a_n=An^۲+Bn+C$. در این صورت بنابر فرض،

$$\begin{cases}A=-\frac{۱}{۷۰}a_۵=-\frac{۱}{۵}\\ a_۵=۱۴\\ a_۷=۱۷/۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\frac{۱}{۵}\times۵^۲+۵B+C=۱۴\\ -\frac{۱}{۵}\times۷^۲+۷B+C=۱۷/۲\end{cases}$$

$$\begin{cases}۵B+C=۱۹\\ ۷B+C=۲۷\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=۴\\ C=-۱\end{cases}$$

بنابراین

$$a_n=-\frac{۱}{۵}n^۲+۴n-۱\Rightarrow\begin{cases}a_{۱۵}=-\frac{۱}{۵}\times۱۵^۲+۴\times۱۵-۱=۱۴\\ a_۱=-\frac{۱}{۵}\times۱^۲+۴\times۱-۱=\frac{۱۴}{۵}\end{cases}$$

در نتیجه $\frac{a_{۱۵}}{a_۱}=۵$، پس $a_{۱۵}$ پنج برابر $a_۱$ است.

۳۳- گزینهٔ ۲ طول رأس سهمی $f(x)=-ax^۲+ax+۲$ برابر است با

$$-\frac{a}{۲(-a)}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین عرض رأس این سهمی برابر است با

$$f(\frac{۱}{۲})=-a(\frac{۱}{۲})^۲+a(\frac{۱}{۲})+۲=-\frac{a}{۴}+\frac{a}{۲}+۲=\frac{a+۸}{۴}$$

طول رأس سهمی $g(x)=۲bx^۲-bx-۱$ برابر است با $-\frac{-b}{۲(۲b)}=\frac{۱}{۴}$

بنابراین عرض رأس این سهمی برابر است با

$$g(\frac{۱}{۴})=۲b(\frac{۱}{۴})^۲-b(\frac{۱}{۴})-۱=\frac{-b-۸}{۸}$$

اکنون توجه کنید که نقطهٔ $(\frac{۱}{۲},\frac{a+۸}{۴})$ روی سهمی g است، پس مختصات آن در معادلهٔ سهمی g صدق می‌کنند:

$$\frac{a+۸}{۴}=۲b(\frac{۱}{۲})^۲-b(\frac{۱}{۲})-۱=\frac{b}{۲}-\frac{b}{۲}-۱=-۱\Rightarrow a+۸=-۴\Rightarrow a=-۱۲$$

بنابراین $f(x)=۱۲x^۲-۱۲x+۲$. چون نقطهٔ $(\frac{۱}{۴},\frac{-b-۸}{۸})$ روی این سهمی است، پس مختصات آن در معادلهٔ این سهمی صدق می‌کنند:

$$\frac{-b-۸}{۸}=۱۲(\frac{۱}{۴})^۲-۱۲(\frac{۱}{۴})+۲=\frac{۳}{۴}-۳+۲=-\frac{۱}{۴}\Rightarrow b=-۶$$

بنابراین $b-a=-۶-(-۱۲)=۶$.

۳۴- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا نامعادله‌های $-۲<\frac{۱-۳x}{x+۱}<۰$ را با استفاده از جدول تعیین علامت حل می‌کنیم. برای حل کردن نامعادلهٔ $\frac{۱-۳x}{x+۱}<۰$ جدول تعیین علامت زیر را تشکیل می‌دهیم:

x	$-\infty$		-۱		$\frac{۱}{۳}$		$+\infty$
$\frac{۱-۳x}{x+۱}$		$-$		$+$	۰	$-$	

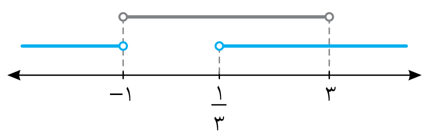
پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{۱-۳x}{x+۱}<۰$ مجموعهٔ $(-\infty,-۱)\cup(\frac{۱}{۳},+\infty)$ است. برای حل کردن نامعادلهٔ $-۲<\frac{۱-۳x}{x+۱}$ ابتدا آن را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$-۲<\frac{۱-۳x}{x+۱}\Rightarrow\frac{۱-۳x}{x+۱}+۲>۰\Rightarrow\frac{۱-۳x+۲x+۲}{x+۱}>۰\Rightarrow\frac{۳-x}{x+۱}>۰$$

اکنون جدول تعیین علامت زیر را تشکیل می‌دهیم:

x	$-\infty$		-۱		۳		$+\infty$
$\frac{۳-x}{x+۱}$		$-$		$+$	۰	$-$	

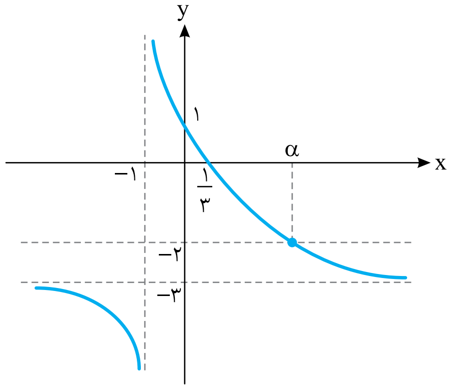
پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{۳-x}{x+۱}>۰$ مجموعهٔ $(-۱,۳)$ است. بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های مورد نظر اشتراک مجموعه‌های جواب‌های دو نامعادله‌ای است که حل کردیم، که با توجه به شکل زیر برابر $(\frac{۱}{۳},۳)$ است.



اکنون توجه کنید که $\frac{۱}{۳}<x<۳\Rightarrow\frac{۱}{۶}<\frac{x}{۲}<\frac{۳}{۲}\Rightarrow[\frac{x}{۲}]=۰$ یا ۱

یعنی مجموعهٔ مقادیر $[\frac{x}{۲}]$ دو عضو دارد.

راه‌حل دوم نمودار تابع $f(x)=\frac{۱-۳x}{x+۱}$ به‌صورت زیر است:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های مورد نظر بازهٔ $(\frac{۱}{۳},\alpha)$ است. برای پیدا کردن α، توجه کنید که α طول نقطهٔ برخورد خط $y=-۲$ و نمودار تابع f است. بنابراین α جواب معادلهٔ زیر است:

$$-۲=\frac{۱-۳x}{x+۱}\Rightarrow-۲x-۲=۱-۳x\Rightarrow x=۳$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های مورد نظر بازهٔ $(\frac{۱}{۳},۳)$ است. اکنون توجه کنید که $\frac{۱}{۳}<x<۳\Rightarrow\frac{۱}{۶}<\frac{x}{۲}<\frac{۳}{۲}\Rightarrow[\frac{x}{۲}]=۰$ یا ۱

بنابراین مجموعهٔ مقادیر $[\frac{x}{۲}]$ دو عضو دارد.

۳۵- گزینهٔ ۳ ابتدا ضابطهٔ تابع را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$f(x)=(ax+۲)(b-x)-۷x^۲=abx-ax^۲+۲b-۲x-۷x^۲$$
$$=-(a+۷)x^۲+(ab-۲)x+۲b$$

چون تابع f ثابت است، پس ضریب‌های جمله‌های شامل x باید صفر باشند:

$$-(a+۷)=۰\Rightarrow a=-۷,\quad ab-۲=۰\Rightarrow-۷b-۲=۰\Rightarrow b=-\frac{۲}{۷}$$

پس ضابطهٔ تابع f به‌صورت $f(x)=۲b=-\frac{۴}{۷}$ است و برد آن مجموعهٔ $\{-\frac{۴}{۷}\}$ است.

۳۶- گزینهٔ ۴ تبدیل‌های گفته شده را به‌ترتیب روی نمودار تابع f انجام می‌دهیم:

$$y=f(x)\xrightarrow{\text{۱ واحد به راست}}y=f(x-۱)\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور x}}$$
$$y=-f(x-۱)\xrightarrow{\text{۲ واحد به پایین}}y=-f(x-۱)-۲$$

اگر تابع نهایی را g بنامیم، آن‌گاه

$$g(x)=-f(x-۱)-۲=-\frac{۱}{x-۱}-۲=\frac{-۱-۲x+۲}{x-۱}=\frac{۱-۲x}{x-۱}$$

اکنون توجه کنید طول‌های نقطه‌های برخورد نمودارهای تابع‌های f و g جواب‌های معادلهٔ زیر هستند:

$$f(x)=g(x)\Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{1-2x}{x-1}\Rightarrow x-1=x-2x^2\Rightarrow x^2=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

چون نقطه‌های برخورد روی نمودار تابع f هستند، عرض آن‌ها برابر $f(\frac{1}{\sqrt{2}})=\sqrt{2}$ و $f(-\frac{1}{\sqrt{2}})=-\sqrt{2}$ است. بنابراین نقطه‌های برخورد $(\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2})$ و $(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\sqrt{2})$ هستند که فاصلهٔ هر دو آن‌ها از مبدأ مختصات برابر است با $\sqrt{(\pm\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\pm\sqrt{2})^2}=\sqrt{\frac{1}{2}+2}=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

۳۷- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که مجموع جواب‌ها از یک طرف برابر $a+b$ و از طرف دیگر برابر a^2+b^2-12 است. همین طور، حاصل‌ضرب جواب‌ها از یک طرف برابر ab و از طرف دیگر برابر $a+b-1$ است. بنابراین

$$\begin{cases} a+b=a^2+b^2-12 \\ ab=a+b-1 \end{cases}$$

چون $S=a+b$ را می‌خواهیم، پس از اتحاد $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ به‌دست می‌آوریم:

$$a+b=(a+b)^2-2ab-12\Rightarrow S=S^2-2(S-1)-12$$

$$S=S^2-2S+2-12\Rightarrow S^2-3S-10=0$$

$$(S+2)(S-5)=0\Rightarrow S=-2,\ S=5$$

چون a و b عددهای طبیعی‌اند، پس مجموع‌شان مثبت است، یعنی $S=-2$ قابل قبول نیست و در نتیجه $S=5$.

راه‌حل دوم چون حاصل‌ضرب جواب‌ها از یک طرف برابر ab و از طرف دیگر برابر $a+b-1$ است، پس

$$ab=a+b-1\Rightarrow a+b-ab-1=0\Rightarrow a(1-b)+b-1=0$$

$$(1-b)(a-1)=0\Rightarrow a=1 \text{ یا } b=1$$

از طرف دیگر، مجموع جواب‌ها از یک طرف برابر $a+b$ و از طرف دیگر برابر a^2+b^2-12 است. بنابراین $a+b=a^2+b^2-12$. پس اگر $a=1$، آن‌گاه

$$1+b=1+b^2-12\Rightarrow b^2-b-12=0\Rightarrow (b-4)(b+3)=0$$

$b=4$ یا $b=-3$ (غ.ق.ق)

در این حالت $a+b=5$. به همین ترتیب معلوم می‌شود که اگر $b=1$، آن‌گاه $a=4$ و باز هم $a+b=5$.

۳۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\frac{1}{\sqrt{2-x}+2}-\frac{1}{2-\sqrt{2-x}}=\frac{2-x}{5\sqrt{2-x}}$$

$$\frac{2-\sqrt{2-x}-(\sqrt{2-x}+2)}{(\sqrt{2-x}+2)(2-\sqrt{2-x})}=\frac{(\sqrt{2-x})^2}{5\sqrt{2-x}}\Rightarrow\frac{-2\sqrt{2-x}}{4-(2-x)}=\frac{\sqrt{2-x}}{5}$$

چون $x=2$ مخرج کسر سمت راست معادله را صفر می‌کند، بنابراین جواب معادله نیست، یعنی $x\neq 2$، پس $\sqrt{2-x}\neq 0$. در نتیجه می‌توانیم دو طرف معادلهٔ داده شده را بر $\sqrt{2-x}$ تقسیم کنیم. به این ترتیب، به دست می‌آید

$$\frac{-2}{2+x}=\frac{1}{5}\Rightarrow 2+x=-10\Rightarrow x=-12$$

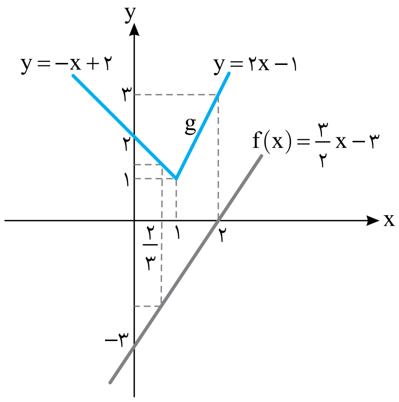
بنابراین معادلهٔ مورد نظر جواب مثبت ندارد.

۳۹- گزینهٔ ۱ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): $(9,-2)\Rightarrow(-2,9):\ 9=-3(-2)^3+2(-2)-11$

بنابراین گزینهٔ (۱) جواب است. دیگر لازم نیست گزینه‌های دیگر را بررسی کنیم.

۴۰- گزینهٔ ۲ ابتدا ضابطهٔ تابع‌های f و g را از روی شکل پیدا می‌کنیم:



برای پیدا کردن $f^{-1}(-2)$ فرض می‌کنیم $a=f^{-1}(-2)$. در این صورت $f(a)=-2$، پس $f(a)=-2\Rightarrow \frac{3}{2}a-3=-2\Rightarrow a=\frac{2}{3}\Rightarrow f^{-1}(-2)=\frac{2}{3}$

در نتیجه $(gof^{-1})(-2)=g(f^{-1}(-2))=g(\frac{2}{3})=-\frac{2}{3}+2=\frac{4}{3}$

همچنین $g(0)=2$، پس $(gog)(0)=g(g(0))=g(2)=3$

پس $(gof^{-1})(-2)\times(gog)(0)=\frac{4}{3}\times 3=4$

۴۱- گزینهٔ ۴ دامنهٔ تابع g مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ زیر است:

$$x^2f(x)\geq 0$$

به جدول تعیین علامت زیر توجه کنید:

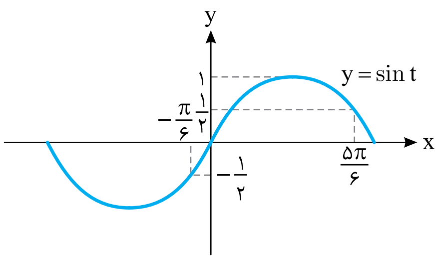
x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x^2		+	0	+		+	
$f(x)$		+		+	0	−	
$x^2f(x)$		+	0	+	0	−	

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $x^2f(x)\geq 0$ بازهٔ $(-\infty,3]$ است که عددهای صحیح نامنفی در آن ۰، ۱، ۲ و ۳ هستند و تعداد آن‌ها چهارتاست.

۴۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$-\frac{\pi}{12}<x<\frac{5\pi}{12}\Rightarrow -\frac{\pi}{6}<2x<\frac{5\pi}{6}$$

پس اگر $t=2x$، آن‌گاه $-\frac{\pi}{6}<t<\frac{5\pi}{6}$ و در نتیجه از روی نمودار زیر معلوم می‌شود که $-\frac{1}{2}<\sin t\leq 1$.



بنابراین باید نامعادله‌های زیر را حل کنیم:

$$-\frac{۱}{۲}<\frac{m-۱}{۴}\le ۱\Rightarrow -۲<m-۱\le ۴\Rightarrow -۱<m\le ۵\Rightarrow m\in(-۱,۵]$$

۴۳- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که از تساوی داده شده به‌دست می‌آید:

$$\sin x+\cos x=\frac{۶\sqrt{۵}}{۱۰}=\frac{۳}{\sqrt{۵}}$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، به‌دست می‌آید:

$$۱+۲\sin x\cos x=\frac{۹}{۵}\Rightarrow ۲\sin x\cos x=\frac{۴}{۵}\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{۲}{۵}$$

چون مجموع و حاصل‌ضرب $\sin x$ و $\cos x$ را داریم، پس $\sin x$ و $\cos x$ جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم زیر هستند:

$$t^{۲}-\frac{۳}{\sqrt{۵}}t+\frac{۲}{۵}=۰ \xrightarrow{\times ۵} ۵t^{۲}-۳\sqrt{۵}t+۲=۰$$

$$t=\frac{۳\sqrt{۵}\pm\sqrt{(۳\sqrt{۵})^{۲}-۴(۵)(۲)}}{۲\times ۵}=\frac{۳\sqrt{۵}\pm\sqrt{۵}}{۱۰}\Rightarrow \begin{cases} t=\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}\\ t=\frac{\sqrt{۵}}{۵}\end{cases}$$

در نتیجه

$$\sin x=\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}\ ,\ \cos x=\frac{\sqrt{۵}}{۵}\Rightarrow \tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=۲$$

یا

$$\cos x=\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}\ ,\ \sin x=\frac{\sqrt{۵}}{۵}\Rightarrow \tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{۱}{۲}$$

راه‌حل دوم توجه کنید که بنابر فرض $\sin x+\cos x=\frac{۶\sqrt{۵}}{۱۰}=\frac{۳}{\sqrt{۵}}$

اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، به‌دست می‌آید:

$$۱+\sin ۲x=\frac{۹}{۵}\Rightarrow \sin ۲x=\frac{۹}{۵}-۱=\frac{۴}{۵}$$

اکنون توجه کنید

$$\sin ۲x=\frac{۲\tan x}{۱+\tan^{۲} x}\Rightarrow\frac{۴}{۵}=\frac{۲\tan x}{۱+\tan^{۲} x}\Rightarrow ۲+۲\tan^{۲} x=۵\tan x$$

$$۲\tan^{۲} x-۵\tan x+۲=۰\Rightarrow \tan x=\frac{۵\pm\sqrt{(-۵)^{۲}-۴(۲)(۲)}}{۲\times ۲}=\frac{۵\pm\sqrt{۹}}{۴}=\frac{۵\pm ۳}{۴}$$

پس $\tan x=۲$ یا $\tan x=\frac{۱}{۲}$.

۴۴- گزینهٔ ۴ از روی نمودار تابع معلوم می‌شود که

$$\text{ماکزیمم تابع}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow|a|+c=\frac{۵}{۲}\ ,$$

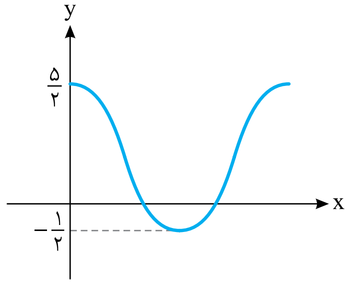
$$\text{مینیمم تابع}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow -|a|+c=-\frac{۱}{۲}$$

اگر این تساوی‌ها را جمع کنیم، به‌دست می‌آید $۲c=۲$، پس $c=۱$. از طرف دیگر،

$$|a|+c=\frac{۵}{۲}\Rightarrow|a|+۱=\frac{۵}{۲}\Rightarrow|a|=\frac{۳}{۲}$$

چون گزینه‌ها همگی عددهایی منفی‌اند، پس $a=-\frac{۳}{۲}$ و در نتیجه $ac=-\frac{۳}{۲}$.

توجه کنید که اگر $a=\frac{۳}{۲}$، ضابطهٔ تابع به‌صورت $y=\frac{۳}{۲}\cos bx+۱$ می‌شود که نمودار آن به‌صورت زیر است (که شبیه نمودار داده شده نیست):



۴۵- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$\cos(x-\frac{\pi}{۳})=\cos(-(x-\frac{\pi}{۳}))=\cos(\frac{\pi}{۳}-x)$$

اکنون توجه کنید که چون $x+\frac{\pi}{۶}$ و $\frac{\pi}{۳}-x$ متمم یکدیگرند، پس

$$\sin(x+\frac{\pi}{۶})=\cos(\frac{\pi}{۳}-x)$$

در نتیجه معادلهٔ داده شده به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\sin(x+\frac{\pi}{۶})\cos(x-\frac{\pi}{۳})=۱\Rightarrow\cos(\frac{\pi}{۳}-x)\cos(\frac{\pi}{۳}-x)=۱$$

$$\cos^{۲}(\frac{\pi}{۳}-x)=۱\Rightarrow\cos(\frac{\pi}{۳}-x)=\pm ۱\Rightarrow\frac{\pi}{۳}-x=k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$$

$$x=\frac{\pi}{۳}-k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$$

جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

k	-۲	-۱	۰	۱
$\frac{\pi}{۳}-k\pi$	$۲\pi+\frac{\pi}{۳}$	$\pi+\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۳}-\pi=\frac{-۲\pi}{۳}$

بنابراین جواب‌ها در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ برابر $\pi+\frac{\pi}{۳}$ و $\frac{\pi}{۳}$ هستند، که تعداد آنها دوتاست.

راه‌حل دوم چون $\sin(x+\frac{\pi}{۶})$ و $\cos(x-\frac{\pi}{۳})$ عددهایی در بازهٔ $[-۱,۱]$ هستند و حاصل‌ضربشان برابر ۱ شده است، یا هر دو ۱ هستند یا هر دو -۱ هستند. بنابراین

$$\begin{cases}\sin(x+\frac{\pi}{۶})=۱\\ \cos(x-\frac{\pi}{۳})=۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+\frac{\pi}{۶}=\frac{\pi}{۲}\\ x-\frac{\pi}{۳}=۰\end{cases}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۳}$$

یا

$$\begin{cases}\sin(x+\frac{\pi}{۶})=-۱\\ \cos(x-\frac{\pi}{۳})=-۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+\frac{\pi}{۶}=\frac{۳\pi}{۲}\\ x-\frac{\pi}{۳}=\pi\end{cases}\Rightarrow x=\frac{۴\pi}{۳}$$

پس معادلهٔ مورد نظر در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ دو جواب دارد.

۴۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $\log_{۲} ۳=a\Rightarrow ۲^{a}=۳$

$$\log_{۸} b=\frac{۲}{۳}(۱+a)\Rightarrow ۸^{\frac{۲}{۳}(۱+a)}=b\Rightarrow(۲^{۳})^{\frac{۲}{۳}(۱+a)}=b\Rightarrow ۲^{۲(۱+a)}=b$$

$$(۲^{۱+a})^{۲}=b\Rightarrow(۲\times ۲^{a})^{۲}=b\Rightarrow(۲\times ۳)^{۲}=b\Rightarrow b=۳۶$$

بنابراین $\log(3b-8)=\log(3\times 36-8)=\log 100=2$

۴۷- گزینهٔ ۱ چون نمودار تابع f از نقطهٔ $(\frac{1}{2},1)$ می‌گذرد، پس

$$f(\frac{1}{2})=1\Rightarrow \sqrt[3]{2^{\frac{a}{2}+b}}=1\Rightarrow 2^{\frac{a}{2}+b}=1\Rightarrow \frac{a}{2}+b=0$$

از طرف دیگر،

$$f^{-1}(8)=5\Rightarrow f(5)=8\Rightarrow \sqrt[3]{2^{5a+b}}=8\Rightarrow 2^{5a+b}=8^3=2^9$$

$$5a+b=9$$

بنابراین

$$\begin{cases}\frac{a}{2}+b=0\\ 5a+b=9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=-1\end{cases}$$

در نتیجه $a-b=2+1=3$.

۴۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\sigma=2$، پس $\sigma^2=2^2=4$. از طرف دیگر،

$$\sigma^2=\frac{a^2+0^2+(-1)^2+b^2+(-1)^2+3^2}{6}=\frac{a^2+b^2+11}{6}=4$$

پس $a^2+b^2+11=6\times 4=24\Rightarrow a^2+b^2=13 \quad (1)$

چون مجموع اختلاف‌های داده‌ها از میانگین برابر صفر است، پس

$$a+0+(-1)+b+(-1)+3=0\Rightarrow a+b=-1\Rightarrow a=-1-b$$

در نتیجه از تساوی (۱) به‌دست می‌آید

$$(-1-b)^2+b^2=13\Rightarrow 1+b^2+2b+b^2=13\Rightarrow 2b^2+2b=12$$

$$b^2+b-6=0\Rightarrow b=\frac{-1\pm\sqrt{1-4(1)(-6)}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2}$$

در نتیجه $b=-3$ یا $b=2$. اگر $b=2$، آن‌گاه $a=-1-b=-3$ که چون طبق فرض $a>0$، پس به تناقض رسیده‌ایم. بنابراین $b=-3$.

۴۹- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم داده‌ها به‌صورت مرتب شده باشند:

$$\underbrace{x_1,x_2,\dots,x_k}_{\text{داده‌های کوچک‌تر از میانه}}\ \ \underset{\text{میانه}}{\uparrow}\ \ \underbrace{x_{k+1},\dots,x_{2k}}_{\text{داده‌های بزرگ‌تر از میانه}}$$

فرض کنید $\bar{x}_1$ میانگین داده‌های کوچک‌تر از میانه و $\bar{x}_2$ میانگین داده‌های بزرگ‌تر از میانه باشد، یعنی

$$\bar{x}_1=\frac{x_1+\dots+x_k}{k}\ ,\ \bar{x}_2=\frac{x_{k+1}+\dots+x_{2k}}{k}$$

اگر دو طرف این تساوی‌ها را در k ضرب کنیم، به‌دست می‌آید

$$k\bar{x}_1=x_1+\dots+x_k\ ,\ k\bar{x}_2=x_{k+1}+\dots+x_{2k}$$

از طرف دیگر، بنابر فرض $-\bar{x}_1=\bar{x}_2-6$، پس $\bar{x}_1+\bar{x}_2=6$. اکنون توجه کنید که میانگین کل داده‌ها برابر است با

$$\frac{(x_1+\dots+x_k)+(x_{k+1}+\dots+x_{2k})}{2k}=\frac{k\bar{x}_1+k\bar{x}_2}{2k}=\frac{\bar{x}_1+\bar{x}_2}{2}=\frac{6}{2}=3$$

۵۰- گزینهٔ ۴ توجه کنید که اگر $x\to(-1)^+$، آن‌گاه $[x]=-1$ و

$$x>-1\Rightarrow -x<1\Rightarrow [-x]=0$$

همچنین $x>-1\Rightarrow x+1>0\Rightarrow |x+1|=x+1$

در نتیجه

$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{|x+1|+[x]}{x-[-x]}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x+1+(-1)}{x-0}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x}{x}=1$$

۵۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x+2}=\frac{1}{2}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{ax^2+x+1}}{x+2}=\frac{1}{2}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{a}x}{x}=\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{a}=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{4}$$

در نتیجه $f(x)=\sqrt{\frac{1}{4}x^2+x+1}$. از طرف دیگر، اگر $x\to(-1)^-$، آن‌گاه

$$x<-1\Rightarrow \frac{1}{x}>-1\Rightarrow [\frac{1}{x}]=-1$$

بنابراین

$$\lim_{x\to(-1)^-}[\frac{1}{x}]f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}(-1)\sqrt{\frac{1}{4}x^2+x+1}=-\sqrt{\frac{1}{4}-1+1}=-\frac{1}{2}$$

۵۲- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول توجه کنید که

$$\lim_{x\to1}\frac{2f(x)-1}{2(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{2x\sqrt{x}}{2x^2+x-1}-1}{2(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{2x\sqrt{x}-2x^2-x+1}{2(x-1)(2x^2+x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2x\sqrt{x}(1-\sqrt{x})+(1-x)}{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(2x^2+x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2x\sqrt{x}(1-\sqrt{x})+(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(2x^2+x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(1-\sqrt{x})(2x\sqrt{x}+1+\sqrt{x})}{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(2x^2+x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-(2x\sqrt{x}+1+\sqrt{x})}{2(\sqrt{x}+1)(2x^2+x-1)}=\frac{-(2+1+1)}{2(1+1)(2+1-1)}$$

$$=-\frac{4}{8}=-\frac{1}{2}$$

راه‌حل دوم می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to1}\frac{2f(x)-1}{2(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{2x\sqrt{x}}{2x^2+x-1}-1}{2(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{2x\sqrt{x}-2x^2-x+1}{2(x-1)(2x^2+x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2x\sqrt{x}-2x^2-x+1}{x-1}\times\lim_{x\to1}\frac{1}{2(2x^2+x-1)}$$

اکنون توجه کنید بنابر قاعدهٔ هوپیتال،

$$\lim_{x\to1}\frac{2x\sqrt{x}-2x^2-x+1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2\sqrt{x}+2x\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-4x-1}{1}$$

$$=2+2\times\frac{1}{2}-4-1=-2$$

همچنین

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{2(2x^2+x-1)}=\frac{1}{2(2+1-1)}=\frac{1}{4}$$

بنابراین حد مورد نظر برابر است با $(-2)\times\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}$

۵۳- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که شیب خط $y=2x+b$ برابر با ۲ است. از طرف دیگر،

$$f(x)=\frac{x+a}{ax+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{1\times(ax+1)-a(x+a)}{(ax+1)^2}=\frac{1-a^2}{(ax+1)^2}$$

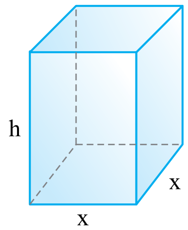
بنابراین
$$f'(1)=\frac{1-a^2}{(a+1)^2}=\frac{(1-a)(1+a)}{(a+1)^2}=\frac{1-a}{1+a}$$
چون شیب خط مماس با $f'(1)$ برابر است، پس
$$2=\frac{1-a}{1+a}\Rightarrow 2+2a=1-a\Rightarrow a=-\frac{1}{3}$$
بنابراین
$$f(x)=\frac{x-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}x+1}\Rightarrow f(1)=\frac{1-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}+1}=1$$
چون نقطهٔ $(1,f(1))=(1,1)$ روی خط $y=2x+b$ قرار دارد، پس
$$1=2\times1+b\Rightarrow b=-1$$
در نتیجه $a-b=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$.

راه‌حل دوم معادلهٔ حاصل از برخورد خط و تابع را تشکیل می‌دهیم:
$$2x+b=\frac{x+a}{ax+1}\Rightarrow 2ax^2+2x+abx+b=x+a$$
$$2ax^2+(1+ab)x+b-a=0$$
چون $x=1$ ریشهٔ مضاعف این معادله است، پس سمت چپ آن به‌صورت $2a(x-1)^2$ است. بنابراین
$$2ax^2+(1+ab)x+b-a=2a(x^2-2x+1)=2ax^2-4ax+2a$$
در نتیجه
$$\begin{cases}1+ab=-4a\\ b-a=2a\end{cases}$$
از معادلهٔ دوم به‌دست می‌آید $b=3a$ و در نتیجه معادلهٔ اول می‌شود
$$1+a(3a)=-4a\Rightarrow 3a^2+4a+1=0\Rightarrow a=-1\ ,\ a=-\frac{1}{3}$$
اگر $a=-1$، آن‌گاه $f(x)=\frac{x-1}{-x+1}=-1$، یعنی f تابعی ثابت می‌شود که خط $y=2x+b$ بر آن مماس نیست. بنابراین $a=-\frac{1}{3}$ و در نتیجه $b=3a=-1$.

بنابراین $a-b=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$.

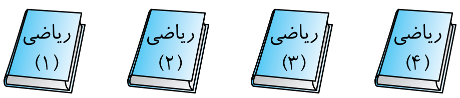
۵۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که
$$f(x)=x^3+ax^2-2bx-4\Rightarrow f'(x)=3x^2+2ax-2b$$
بنابراین
$$f'(0)=-2b\Rightarrow 0=-2b\Rightarrow b=0$$
پس $f'(x)=3x^2+2ax$. پس
$$f'(-2)=3\times(-2)^2+2a(-2)=12-4a\Rightarrow 0=12-4a\Rightarrow a=3$$
بنابراین $f(x)=x^3+3x^2-4$. اکنون توجه کنید که
$$f(0)=-4\ ,\ f(-2)=-8+12-4=0$$
در نتیجه نقطه‌های اکسترمم نسبی تابع $(0,-4)$ و $(-2,0)$ هستند، که فاصلهٔ آن‌ها برابر است با
$$\sqrt{(-2-0)^2+(0-(-4))^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

۵۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که مساحت کل این قوطی حلبی درباز برابر است با مجموع مساحت قاعده و مساحت چهار وجه آن، که اگر طول ضلع قاعده برابر x و ارتفاع قوطی برابر h باشد، می‌شود $S=x^2+4xh$

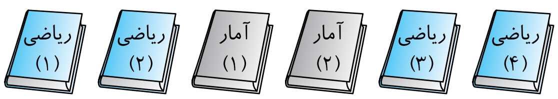


از طرف دیگر، حجم این قوطی برابر است با مساحت قاعدهٔ آن ضرب در ارتفاع آن، که می‌شود x^2h. بنابر فرض $x^2h=4$، پس $h=\frac{4}{x^2}$ و در نتیجه
$$S=x^2+4xh=x^2+4x\times\frac{4}{x^2}=x^2+\frac{16}{x}$$
باید مینیمم مطلق S را حساب کنیم. توجه کنید که $S'=2x-\frac{16}{x^2}$
$$S'=0\Rightarrow 2x-\frac{16}{x^2}=0\Rightarrow 2x=\frac{16}{x^2}\Rightarrow x^3=8\Rightarrow x=2$$
بنابراین مینیمم مطلق S به‌ازای $x=2$ به‌دست می‌آید و برابر است با
$$S=2^2+\frac{16}{2}=12$$

۵۶- گزینهٔ ۳ ابتدا کتاب‌های ریاضی را در قفسه می‌چینیم. این کار به $4!$ طریق ممکن است.

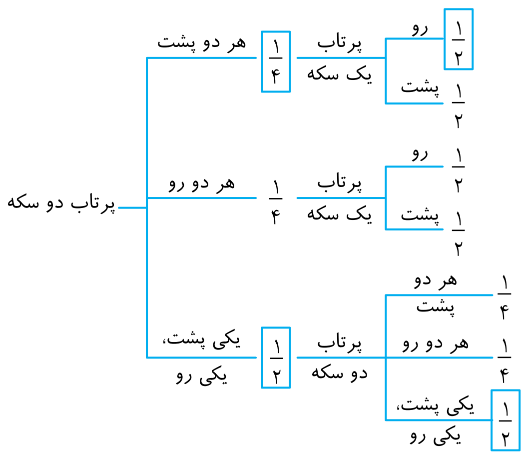


اکنون توجه کنید که برای اینکه موضوع دو کتاب مجاور هر کتاب (به‌جز کتاب‌های اول و آخر) متفاوت باشد، کتاب‌های آمار باید بین کتاب‌های ریاضی (۲) و ریاضی (۳) قرار بگیرند (شکل زیر را ببینید). این کار به $2!$ طریق ممکن است.



در نتیجه طبق اصل ضرب پاسخ مسئله برابر است با $4!\times2!=48$.

۵۷- گزینهٔ ۴ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم می‌شود احتمال اینکه دقیقاً دو سکه پشت بیایند برابر است با $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

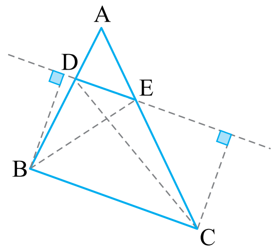
۵۸- گزینهٔ ۳ ابتدا معادلهٔ خط BC را می‌نویسیم. چون این خط از نقطه‌های $B(۳,۳)$ و $C(۷,۱۱)$ می‌گذرد، معادلهٔ آن به‌صورت زیر است:

$$y-۳=\frac{۱۱-۳}{۷-۳}(x-۳) \Rightarrow y-۳=۲(x-۳) \Rightarrow y-۳=۲x-۶$$
$$۲x-y-۳=۰$$

فاصلهٔ نقطهٔ $A(۱,۹)$ از این خط برابر است با

$$AH=\frac{|۲\times۱-۹-۳|}{\sqrt{۲^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۱۰}{\sqrt{۵}}=۲\sqrt{۵}$$

۵۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که بنابر اندازه‌های داده شده،



$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}=\frac{۱}{۲}$$

در نتیجه بنابر عکس قضیهٔ تالس $DE||BC$. بنابراین ارتفاع وارد از رأس C در مثلث CDE با ارتفاع وارد از رأس B در مثلث BDE برابر است. چون قاعدهٔ DE در این دو مثلث هم مشترک است. پس مساحت این دو مثلث برابر است، یعنی نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر ۱ است.

۶۰- گزینهٔ ۲ ابتدا شعاع و مرکز دو دایره را به‌دست می‌آوریم:

$$x^۲+y^۲-۴x+۲y=۰ \Rightarrow \text{مرکز}: O_۱(-\frac{-۴}{۲},-\frac{۲}{۲})=(۲,-۱)$$
$$r_۱=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۴)^۲+۲^۲-۴\times۰}=\sqrt{۵}$$

$$x^۲+y^۲-۲y-۲=۰ \Rightarrow \text{مرکز}: O_۲(-\frac{۰}{۲},-\frac{-۲}{۲})=(۰,۱)$$
$$r_۲=\frac{۱}{۲}\sqrt{۰^۲+(-۲)^۲-۴\times(-۲)}=\sqrt{۳}$$

اکنون توجه کنید که

$$O_۱O_۲=\sqrt{(۲-۰)^۲+(-۱-۱)^۲}=۲\sqrt{۲}\simeq۲\times۱/۴=۲/۸$$

از طرف دیگر،

$$r_۱+r_۲=\sqrt{۵}+\sqrt{۳}\simeq۲/۲+۱/۷=۳/۹$$
$$|r_۱-r_۲|=|\sqrt{۵}-\sqrt{۳}|\simeq۲/۲-۱/۷=۰/۵$$

چون $|r_۱-r_۲|<O_۱O_۲<r_۱+r_۲$، پس دایره‌ها متقاطع‌اند.