

جلد اول: درس‌نامه + آزمون‌های مبحثی و جامع

جامع ریاضیات تجربی + موج آزمون

کاظم اجلالی، ارشک حمیدی



انتشرالگو

فصل اول: تابع (آزمون‌های ۱ تا ۴)	۱
فصل دوم: مثلثات (آزمون‌های ۵ تا ۸)	۵
فصل سوم: حد و پیوستگی (آزمون‌های ۹ تا ۱۲)	۹
فصل چهارم: مشتق (آزمون‌های ۱۳ تا ۱۶)	۱۳
فصل پنجم: کاربردهای مشتق (آزمون‌های ۱۷ تا ۲۰)	۱۷
فصل ششم: هندسه تحلیلی (آزمون‌های ۲۱ و ۲۲)	۲۱
فصل هفتم: آمار و احتمال (آزمون‌های ۲۳ تا ۲۶)	۲۳
فصل هشتم: بازه و مجموعه (آزمون ۲۷)	۲۷
فصل نهم: الگو و دنباله (آزمون‌های ۲۸ و ۲۹)	۲۸
فصل دهم: توان، ریشه، اتحاد، تجزیه و تقسیم (آزمون‌های ۳۰ تا ۳۳)	۳۰
فصل یازدهم: معادله، تعیین علامت و نامعادله (آزمون‌های ۳۴ و ۳۵)	۳۴
فصل دوازدهم: قدرمطلق و جزء صحیح (آزمون‌های ۳۶ و ۳۷)	۳۶
فصل سیزدهم: توابع نمایی و لگاریتمی (آزمون‌های ۳۸ و ۳۹)	۳۸
فصل چهاردهم: استدلال و هندسه (آزمون‌های ۴۰ تا ۴۲)	۴۰
فصل پانزدهم: آزمون‌های جامع (آزمون‌های ۴۳ تا ۴۷)	۴۴
فصل شانزدهم: پاسخ تشریحی آزمون‌ها	۵۹

آزمون فصل تابع (۱)

آزمون ۱

سؤال	گام
۱	۲
۲	۸
۳	۲۱ ۳۲۵
۴	۲۱ ۳۳۱
۵	۲۹ ۳۰ ۳۱ ۳۲
۶	۲۱ ۲۵
۷	۲۶
۸	۵۳ ۳۳۵
۹	۶۲
۱۰	۳۴ ۶۲

۱- به ازای چند مقدار مختلف m رابطه $f = \{(1, 4m^3 - m), (2m, 2), (1, 0), (0, 4), (4m, 2)\}$ تابع است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ صفر

۲- اگر تابع $f(x) = \frac{(a+2)x+3}{2x-3}$ تابعی ثابت باشد، مقدار a چند است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) -۳ (۴) -۴

۳- کدام عدد در دامنه تابع $f(x) = \frac{1}{x-1-\sqrt{x}}$ قرار ندارد؟

- (۱) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ (۲) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ (۳) $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ (۴) $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$

۴- دامنه تابع $f(x) = \sqrt{16 - |x^2 - 9|}$ به صورت $[a, b]$ است. مقدار $b-a$ کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۸

۵- اگر نمودار تابع $y = \sqrt[3]{x}$ را یک واحد به سمت راست و دو واحد به پایین انتقال دهیم، سپس نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، نمودار به دست آمده نمودار اولیه را در چند نقطه قطع می‌کند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ صفر

۶- اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$ ، $g = \{(-1, \sqrt{5}), (0, 1), (1, 4), (3, 5), (4, 3)\}$ و $(2g+f)(a) = 6$ ، مقدار $f(-a)$ کدام است؟

- (۱) $4\sqrt{2}$ (۲) $3\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $4\sqrt{3}$

۷- اگر $f(x) = ax^2 + b$ و $(f \circ f)(x) = 27x^4 - 18x^2 + 2$ ، مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

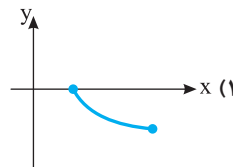
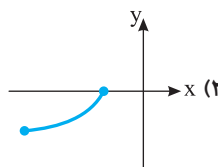
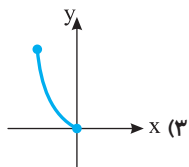
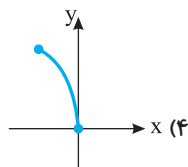
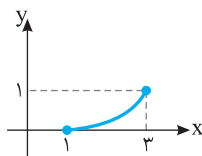
۸- تابع $f(x) = 3x + |kx|$ صعودی است. حدود k کدام است؟

- (۱) $-1 \leq k \leq 1$ (۲) $k \geq -3$ (۳) $-3 \leq k \leq 3$ (۴) $k \leq 1$

۹- نمودار تابع $f(x) = ax^3 - \frac{2}{9}x + b$ در نقطه $(-1, \frac{1}{3})$ نمودار تابع وارونش را قطع می‌کند. مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{9}$ (۲) $-\frac{10}{9}$ (۳) $-\frac{17}{9}$ (۴) $-\frac{23}{9}$

۱۰- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y = f^{-1}(-x) - 1$ کدام گزینه است؟



آزمون فصل تابع (۲)

آزمون ۲

۱۱- اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2}+a & x \geq 2 \\ ax^2+16 & x \leq 2 \end{cases}$ ضابطه تابع f باشد، مقدار $f(a)$ کدام است؟

- ۱) ۱۶ ۲) ۳۲ ۳) -۳۲ ۴) -۱۶

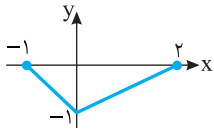
۱۲- اگر $f(x) = mx(2-x) + x^2 + 4x + m$ ضابطه یک تابع خطی باشد، مقدار $f(m)$ کدام است؟

- ۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۳- اگر $f(x) = \left[\frac{x+1}{x}\right] + \left[-\frac{1}{x}\right]$ ، آن گاه $f(-x)$ کدام است؟

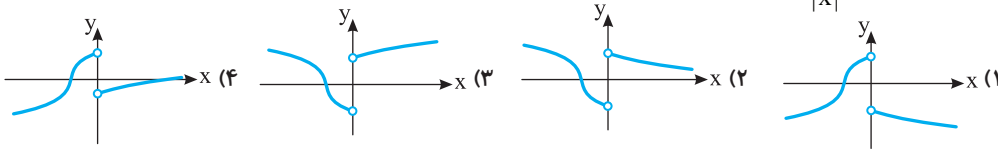
- ۱) $f(x)$ ۲) $-f(x)$ ۳) $1-f(x)$ ۴) $f(x)-1$

۱۴- نمودار تابع f به شکل مقابل است. نمودار تابع $y = 2f\left(\frac{x}{2}\right)$ را رسم می کنیم. مساحت ناحیه محصور بین دو نمودار و محور طول ها کدام است؟

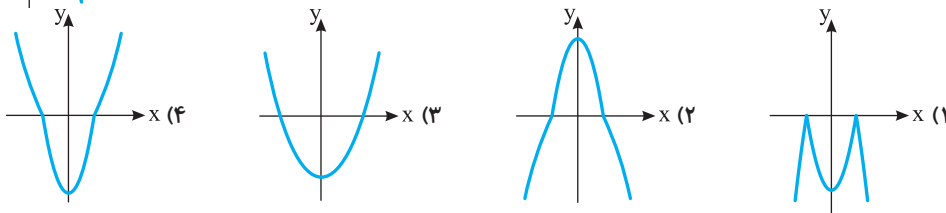
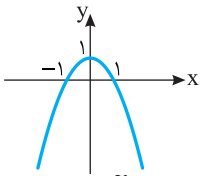


- ۱) $\frac{9}{2}$ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) $\frac{7}{2}$

۱۵- نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{|x|} \sqrt{x+1}$ کدام است؟



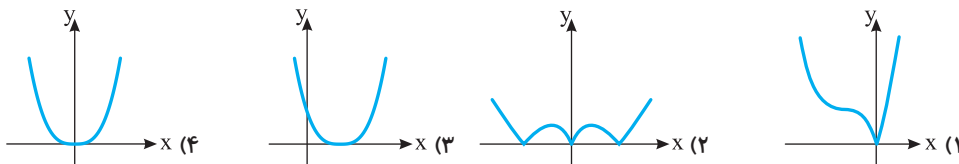
۱۶- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = -2f(x) - |f(x)|$ کدام گزینه است؟



۱۷- نمودار تابع $f(x) = |x||x-2|$ در چند نقطه نمودار تابع $g(x) = \left|\frac{1}{x}\right|$ را قطع می کند؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۸- نمودار تابع $f(x) = |x^2(x+3) + 3x|$ کدام است؟



۱۹- ضابطه تابع وارون تابع $f(x) = \sqrt[3]{2-3x}$ به صورت $f^{-1}(x) = \frac{ax^3+b}{3}$ است. مقدار ab کدام است؟

- ۱) -۴ ۲) -۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۲۰- تابع $f(x) = \sin\left(\frac{3\pi}{4} - 4x\right)$ روی بازه $[a, 0]$ اکیداً نزولی است. حداقل مقدار a کدام است؟

- ۱) $-\frac{\pi}{4}$ ۲) $-\frac{\pi}{3}$ ۳) $-\frac{\pi}{2}$ ۴) $-\pi$

سؤال	گام
۱۱	۶
۱۲	۹
۱۳	۵ ۳۳۷
۱۴	۳۳ ۳۵
۱۵	۲۹ ۳۱ ۳۲
۱۶	۳۲ ۳۳ ۳۲۹
۱۷	۱۰ ۱۱ ۳۷ ۳۲۹
۱۸	۲۹ ۳۰ ۳۱ ۳۷ ۲۸۵
۱۹	۶۳
۲۰	۳۲ ۳۵ ۵۱ ۵۳ ۹۰

آزمون فصل تابع (۳)

آزمون ۳

سؤال	گام
۲۱	۸ ۹
۲۲	۵ ۲۹۰
۲۳	۲۱ ۳۲۴
۲۴	۲۱ ۳۰۰
۲۵	۲۱ ۲۳ ۳۰۰
۲۶	۲۵
۲۷	۲۸ ۳۳۱
۲۸	۵۲
۲۹	۶۱
۳۰	۶۱

- ۲۱- اگر تابع $f(x) = ax^2 - bx + b + c$ تابع همانی باشد، تابع $g(x) = 2^{ax} + bx + c$ چگونه است؟
 (۱) ثابت (۲) خطی (۳) همانی (۴) نمایی
- ۲۲- اگر $f(\frac{1}{x}) = \frac{x+2}{2x^2+1}$ ، ضابطه تابع f برای هر $x \neq 0$ کدام است؟
 (۱) $f(x) = \frac{2x^2+x}{x^2+2}$ (۲) $f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$ (۳) $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2+1}$ (۴) $f(x) = \frac{x^2+2x}{x^2+2}$
- ۲۳- دامنه تابع $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x-3}} - \sqrt{\frac{x-7}{2-x}}$ به صورت $(a, b] - \{c\}$ است. مقدار $a+b+c$ کدام است؟
 (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲
- ۲۴- دامنه تابع $f(x) = \frac{x+1}{m^2x^2+3x+1}$ به صورت $\mathbb{R} - \{n\}$ است. چند مقدار مختلف برای n وجود دارد؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۲۵- دو تابع $f(x) = \frac{5}{x+2}$ و $g(x) = \frac{ax+b}{x^2+cx+4}$ با هم برابرند. مقدار abc کدام است؟
 (۱) ۱۰۰ (۲) ۲۰۰ (۳) -۱۰۰ (۴) -۲۰۰
- ۲۶- اگر $f = \{(1, -1), (4, 2), (3, 2), (5, 1)\}$ ، مجموع اعضای برد تابع $g(x) = \frac{3f(x)}{2-f(x)}$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۲۷- اگر $D_f = [1, 4]$ ، $f(x) = x^2 + x$ و $D_g = [-5, 4]$ ، $g(x) = |x-1|$ ، چند عدد صحیح در دامنه تابع $f \circ g$ قرار دارد؟
 (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸
- ۲۸- تابع درجه دوم $f(x) = (k+2)x^2 + 2x + 1$ با دامنه $(-\infty, 4]$ صعودی است. حدود k کدام است؟
 (۱) $k < -2$ (۲) $k \geq -\frac{9}{4}$ (۳) $-\frac{9}{4} \leq k < -2$ (۴) $-2 < k < -1$
- ۲۹- اگر نمودار تابع وارون تابع $f(x) = \frac{1}{16}x^3 + \sqrt[3]{x} + 2a$ از نقطه $(4, 8)$ عبور کند، مقدار $f(0)$ کدام است؟
 (۱) -۱۲ (۲) -۱۵ (۳) -۲۰ (۴) -۳۰
- ۳۰- اگر تابع‌های f و g با دامنه $\mathbb{R}$ ، وارون پذیر باشند، $f(2x+1) = 2g(3x) - 1$ و $f^{-1}(2) = 5$ ، مقدار $g(6)$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

آزمون فصل تابع (۴)

آزمون ۴

۳۱- اگر $f\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = 3x^2 + \frac{3}{x^2} - 4$ ، مقدار $f(5)$ کدام است؟

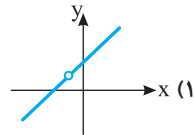
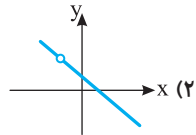
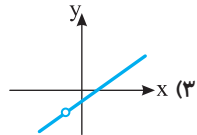
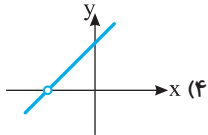
(۴) ۶۰

(۳) ۶۵

(۲) ۷۰

(۱) ۷۱

۳۲- اگر $f(x) = \frac{x^2 + mx + 4}{x + 2}$ ضابطه تابع خطی f باشد، نمودار این تابع کدام است؟



۳۳- اگر دامنه تابع $f(x) = \sqrt{(a+3)x^2 - ax + b}$ بازه $[4, +\infty)$ باشد، مقدار b کدام است؟

(۴) -۱۲

(۳) ۱۲

(۲) ۶

(۱) -۶

۳۴- دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{\pi^2 - x^2}}{\sqrt{\sin x}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

(۴) ۵

(۳) ۴

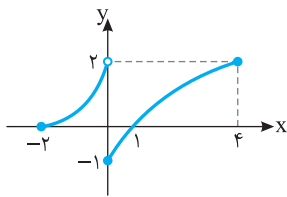
(۲) ۳

(۱) ۲

۳۵- اگر $f(x) = |x-1|$ و $g(x) = |x|$ ، در بازه‌ای که تابع $f-g$ ثابت نیست ضابطه تابع $f+g$ کدام است؟

(۴) $y = -2x + 1$ (۳) $y = 2x - 1$ (۲) $y = -1$ (۱) $y = 1$

۳۶- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. اگر $(f \circ f)(4) = k$ ، آن گاه $f\left(\frac{k}{4}\right)$ در



کدام مجموعه می‌تواند باشد؟

(۲) $(0, 1)$ (۱) $(0, 2)$ (۴) $(1, 2)$ (۳) $(-1, 0)$

۳۷- اگر $g(x) = 2x + 1$ و $(f \circ g)(x) = 8(x^2 - 4x + 5)$ ، ضابطه تابع f کدام است؟

(۲) $f(x) = 2x^2 - 10x + 58$ (۱) $f(x) = 2x^2 + 10x + 58$ (۴) $f(x) = 2x^2 + 20x + 58$ (۳) $f(x) = 2x^2 - 20x + 58$

۳۸- تابع $f(x) = ax + [x]$ یک به یک است. a کدام عدد می‌تواند باشد؟

(۴) -۲

(۳) -۱

(۲) ۱

(۱) صفر

۳۹- نمودار تابع $f(x) = \frac{x+4}{x+2}$ نمودار وارون خود را در دو نقطه قطع می‌کند. حاصل ضرب طول این نقطه‌ها کدام است؟

(۴) ۱

(۳) ۴

(۲) -۴

(۱) -۱

۴۰- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y = -f^{-1}(-x)$ چند

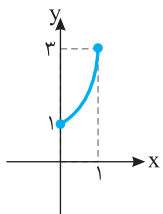
نقطه مشترک با نمودار تابع $g(x) = \frac{x+1}{2}$ دارد؟

(۲) ۲

(۱) ۱

(۴) ۴

(۳) ۳

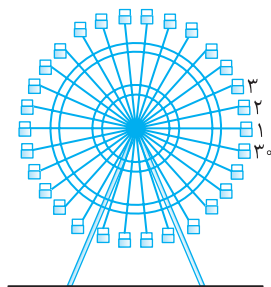
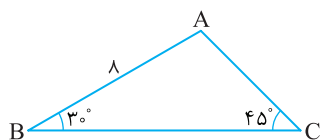


سؤال	گام
۳۱	۵
۳۲	۹ ۲۱
۳۳	۲۱ ۳۱۷ ۳۱۸
۳۴	۲۱ ۷۴
۳۵	۷ ۲۵ ۳۳۶
۳۶	۲۶
۳۷	۲۷
۳۸	۴۲ ۳۴۲
۳۹	۶۳ ۳۱۲
۴۰	۳۲ ۳۴ ۶۲

آزمون فصل مثلثات (۱)

آزمون ۵

سؤال	گام
۴۱	۶۹
۴۲	۸۶
۴۳	۷۸ ۱۰۰
۴۴	۷۴ ۷۶
۴۵	۹۰
۴۶	۹۰
۴۷	۹۳
۴۸	۹۳ ۲۸۲
۴۹	۱۰۶ ۱۰۹
۵۰	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۱۰ ۱۱۳ ۱۱۵



۴۱- در شکل مقابل طول ضلع BC چقدر است؟

(۱) $4(\sqrt{3}-1)$

(۲) $4(\sqrt{3}+1)$

(۳) $4\sqrt{3}$

(۴) $8\sqrt{3}$

۴۲- چرخ و فلکی مطابق شکل ۳۰ کابین دارد که از شماره ۱ تا ۳۰ شماره گذاری شده‌اند. این چرخ و فلک در هر دقیقه ۲ دور می‌چرخد. اگر چرخ و فلک ۱۸۴ ثانیه بچرخد، کابین شماره یک به محل کدام کابین منتقل می‌شود؟

(۱) کابین سوم

(۲) کابین پنجم

(۳) کابین هفتم

(۴) کابین نهم

۴۳- اگر $30^\circ \leq \alpha \leq 120^\circ$ ، آن گاه $\sin \alpha$ در بازه $[a, b]$ است، مقدار $a+b$ کدام است؟

(۴) ۱

(۳) $\frac{3}{2}$

(۲) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

(۱) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

۴۴- اگر $\cot \alpha - \cos \alpha < 0$ و $\cos \alpha \cot \alpha > 0$ ، انتهای کمان نظیر زاویه α در کدام ناحیه مثلثاتی قرار دارد؟

(۴) چهارم

(۳) سوم

(۲) دوم

(۱) اول

۴۵- مقدار عبارت $A = \sin \frac{49\pi}{10} + \sin \frac{7\pi}{5} - \sin \frac{18\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5}$ کدام است؟

(۴) $-2 \cos \frac{\pi}{10}$

(۳) $-2 \sin \frac{\pi}{10}$

(۲) $2 \cos \frac{\pi}{10}$

(۱) $2 \sin \frac{\pi}{10}$

۴۶- اگر $\alpha - \beta = \frac{5\pi}{2}$ ، حاصل عبارت $A = \frac{2 \sin^3 \alpha + \cos^3 \beta}{\cos^3 \alpha + 2 \sin^3 \beta}$ کدام است؟

(۴) $\frac{1}{4} \tan^3 \alpha$

(۳) $4 \tan^3 \alpha$

(۲) $4 \cot^3 \beta$

(۱) $\frac{1}{4} \cot^3 \beta$

۴۷- مقدار عبارت $A = \sin x \cos x (1 - 2 \sin^2 x)$ به ازای $x = \frac{\pi}{16}$ کدام است؟

(۴) $\frac{\sqrt{2}}{16}$

(۳) $\frac{\sqrt{2}}{8}$

(۲) $\frac{\sqrt{2}}{6}$

(۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۴۸- مقدار $\cos^4 \frac{\pi}{12} - \sin^4 \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

(۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(۳) $\frac{1}{2}$

(۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۱) $\frac{1}{4}$

۴۹- جواب‌های کلی معادله $\cos(2x - \frac{\pi}{9}) = \sin(\pi + 2x)$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

(۴) $\frac{k\pi}{2} + \frac{7\pi}{72}$

(۳) $\frac{k\pi}{2} - \frac{7\pi}{72}$

(۲) $\frac{k\pi}{2} - \frac{7\pi}{36}$

(۱) $\frac{k\pi}{2} + \frac{7\pi}{36}$

۵۰- مجموع جواب‌های معادله $2 \cos^2 2x + 3 \cos 2x + 1 = 0$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

(۴) $\frac{5\pi}{2}$

(۳) 2π

(۲) $\frac{3\pi}{2}$

(۱) π

آزمون فصل مثلثات (۲)

آزمون ۶

۵۱- حاصل عبارت $A = \frac{\sin 25^\circ - \sin^3 25^\circ}{\cos 25^\circ - \cos^3 25^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $\tan^2 25^\circ$ (۲) $\tan 25^\circ$ (۳) $\cot 25^\circ$ (۴) $\cot^2 25^\circ$

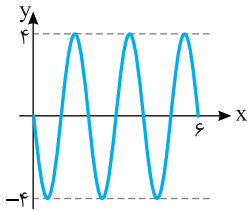
۵۲- اگر انتهای کمان نظیر زاویه α در ناحیه چهارم باشد و $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{3}$ ، مقدار $\sin \alpha - \cos \alpha$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{\sqrt{17}}{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{17}}{3}$ (۳) $\frac{1}{9}$ (۴) $-\frac{1}{9}$

۵۳- اندازه یک زاویه برحسب درجه از $\frac{200}{\pi}$ برابر اندازه آن برحسب رادیان Δ واحد کمتر است. اندازه این زاویه برحسب رادیان کدام است؟

- (۱) $\frac{3\pi}{4}$ (۲) $\frac{\pi}{8}$ (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{3\pi}{8}$

۵۴- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \sin(b\pi x)$ است. مقدار ab کدام است؟



- (۱) ۶
(۲) ۴
(۳) -۴
(۴) ۶

۵۵- حاصل $\frac{1}{1 - \cot 38^\circ} + \frac{1}{1 + \cot 11^\circ}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\tan 2^\circ$ (۴) $\cot 1^\circ$

۵۶- اگر $a = \frac{\pi}{32}$ ، مقدار $\frac{\sin 7a \cos 27a}{\sin 21a \cos 9a}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

۵۷- اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ ، مقدار $\cos 4x$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{1}{8}$ (۴) $-\frac{1}{16}$

۵۸- اگر $\cos 4x = \frac{1}{3}$ ، مقدار $\sin^4 x + \cos^4 x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{9}$ (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{1}{9}$ (۴) $\frac{17}{18}$

۵۹- مجموع جواب‌های معادله $\cos 2x - \cos(x + \frac{\pi}{4}) = 0$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5\pi}{6}$ (۲) $\frac{5\pi}{3}$ (۳) $\frac{5\pi}{4}$ (۴) $\frac{5\pi}{2}$

۶۰- معادله $1 + \sin 2x = \cos x + \sin x$ چند جواب در بازه $(0, 2\pi)$ دارد؟

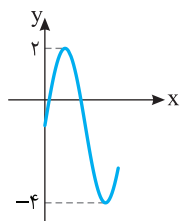
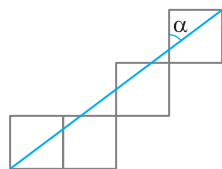
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

سؤال	گام
۵۱	۸۱
۵۲	۷۴ ۸۱ ۲۸۱
۵۳	۸۷
۵۴	۱۰۰ ۱۰۳
۵۵	۸۱ ۹۰
۵۶	۹۰
۵۷	۹۳ ۲۸۱
۵۸	۹۹
۵۹	۱۰۶ ۱۰۷
۶۰	۹۶ ۱۰۷ ۱۱۳ ۱۱۵

آزمون فصل مثلثات (۳)

آزمون ۷

سؤال	گام
۶۱	۶۹
۶۲	۸۱
۶۳	۸۱ ۲۸۱
۶۴	۹۳ ۱۰۳
۶۵	۱۰۰ ۱۰۱ ۱۰۳
۶۶	۷۴ ۹۰ ۹۳
۶۷	۸۱ ۹۳ ۹۸
۶۸	۹۳ ۲۸۱
۶۹	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۱۰
۷۰	۱۰۱ ۱۰۷ ۱۱۳



۶۱- در شکل روبه‌رو طول ضلع مربع‌های کوچک برابر ۱ است. مقدار $\sin \alpha - \tan \alpha$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{7}{4}$ (۲) $-\frac{13}{6}$ (۳) $-\frac{8}{15}$ (۴) $-\frac{9}{14}$

۶۲- اگر $\tan \alpha = \frac{1}{2m}$ و $\cot \alpha = m+2$ ، مقدار $\sin^2 \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{16}{17}$ (۳) $\frac{1}{17}$ (۴) $\frac{2}{5}$

۶۳- اگر $\tan x - 3 \cot x = 2$ ، حاصل $\tan^4 x + 8 \cot^4 x$ کدام است؟

- (۱) ۱۰۰ (۲) ۸۲ (۳) ۹۲ (۴) ۷۰

۶۴- اگر دوره تناوب تابع $f(x) = 3 - 4 \sin^2(2+ax)$ برابر $\frac{\pi}{6}$ باشد، مقدار $|a|$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۸

۶۵- در شکل مقابل، قسمتی از نمودار کدام تابع رسم شده است؟

(۱) $y = 3 \cos(2x) - 4$

(۲) $y = 3 \sin(2x) - 1$

(۳) $y = -3 \sin(3x) - 1$

(۴) $y = -2 \cos(3x) + 1$

۶۶- اگر $\cos(\pi + \alpha) = \frac{1}{3}$ و $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ ، مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$ (۲) $\frac{2\sqrt{2}}{9}$ (۳) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ (۴) $-\frac{2\sqrt{2}}{9}$

۶۷- اگر $\sin x = 2 \cos x$ ، حاصل $\cos 2x$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $-\frac{2}{5}$

۶۸- اگر $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{2}{3}$ ، مقدار $\sin^2 2\alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{16}{25}$ (۲) $\frac{25}{81}$ (۳) $\frac{9}{16}$ (۴) $\frac{49}{81}$

۶۹- معادله $2 \sin 2x - 1 = 0$ چند جواب در بازه $(0, \frac{3\pi}{2})$ دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۰- تابع $f(x) = -2 \cos 4x + 3$ در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ چند بار به حداقل مقدار خود می‌رسد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

آزمون فصل مثلثات (۴)

آزمون ۸

۷۱- مقدار عبارت $A = \frac{(1 + \cot \frac{\pi}{5})(1 - \tan \frac{\pi}{5})}{(1 - \cot \frac{\pi}{5})(1 + \tan \frac{\pi}{5})}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) -۱

۷۲- اگر x زاویه‌ای حاده باشد و $\frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x} = \frac{7}{25}$ ، مقدار $\cos x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۷۳- اگر $\sin x \cos x = \sin x + \cos x$ ، حاصل $\sin x + \cos x$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}-1$ (۲) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ (۳) $1-\sqrt{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

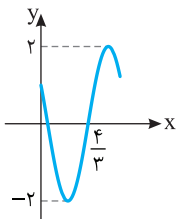
۷۴- حاصل عبارت $A = \cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \cos^2 3^\circ + \dots + \cos^2 180^\circ$ کدام است؟

- (۱) ۴۵ (۲) ۴۵/۵ (۳) ۸۹ (۴) ۹۰

۷۵- اگر $-\frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2}$ و $\tan x = m + 2\sqrt{3}$ ، حداقل مقدار m کدام است؟

- (۱) $-3\sqrt{3}$ (۲) $-4\sqrt{3}$ (۳) $-2\sqrt{3}$ (۴) $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$

۷۶- بخشی از نمودار تابع $f(x) = a \sin(\pi(b-x))$ به شکل مقابل است. مقدار $a+b$ کدام است؟ ($2 < b < 3$)



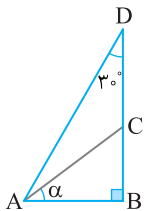
- (۱) $\frac{7}{3}$ (۲) $-\frac{4}{3}$ (۳) $-\frac{7}{3}$ (۴) $\frac{13}{3}$

۷۷- مقدار عبارت $A = \left(\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}\right)^2$ به ازای $x = \frac{\pi}{16}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ (۲) $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$ (۴) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

۷۸- در شکل روبه‌رو $BC=3$ و $AD=8$. مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{12}{25}$ (۲) $\frac{24}{25}$ (۳) $\frac{7}{15}$ (۴) $\frac{14}{15}$



۷۹- نمودار تابع $f(x) = 1 - \sin(2x)$ در بازه $(0, 4\pi)$ چندبار بر محور طول‌ها مماس می‌شود؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸۰- مجموع جواب‌های معادله $\sin(x + \frac{\pi}{8}) + \cos(x - \frac{3\pi}{8}) = -1$ در بازه $[0, 2\pi]$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{11\pi}{4}$ (۲) $\frac{21\pi}{8}$ (۳) $\frac{23\pi}{16}$ (۴) $\frac{21\pi}{16}$

سؤال

گام ۷۱ ۸۱

گام ۷۲ ۷۴ ۸۱

گام ۷۳ ۷۶ ۸۱ ۲۸۱

گام ۷۴ ۸۱ ۹۱

گام ۷۵ ۱۰۵

گام ۷۶ ۱۰۰ ۱۰۳

گام ۷۷ ۸۱ ۹۳ ۹۵

گام ۷۸ ۶۹ ۹۳

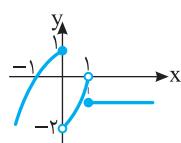
گام ۷۹ ۱۰۰ ۱۱۱ ۱۱۳

گام ۸۰ ۱۰۶ ۱۰۷ ۱۰۹

آزمون فصل حد و پیوستگی (۱)

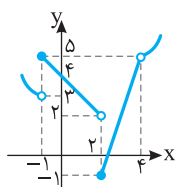
آزمون ۹

سؤال	گام
۸۱	۱۱۹ ۱۲۱
۸۲	۱۱۷ ۱۱۹
۸۳	۱۲۱
۸۴	۱۲۰ ۱۲۱
۸۵	۱۱۸ ۱۲۰ ۱۲۱
۸۶	۱۲۶
۸۷	۱۳۰ ۱۳۱
۸۸	۱۲۶ ۱۳۹ ۳۱۸
۸۹	۱۴۵
۹۰	۱۴۵



۸۱- نمودار تابع f در شکل مقابل آمده است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(1-x^2) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(1-x^2)$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴
صفر



۸۲- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\lim_{x \rightarrow 2^-} (f \circ f)(x)$ کدام است؟

- (۱) -۱
(۲) صفر
(۳) ۲
(۴) ۳

۸۳- اگر حد تابع‌های f و g در نقطه $x=1$ وجود داشته باشد، $\lim_{x \rightarrow 1} (f-2g)(x)=2$ و $\lim_{x \rightarrow 1} (2f+3g)(x)=18$ ،

مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۸۴- مقدار $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[2x](x+2)}{x[-x]+|1-x|}$ کدام است؟

- (۱) -۲
(۲) -۳
(۳) $-\frac{5}{2}$
(۴) $-\frac{3}{2}$

۸۵- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2} \sin 2x & x \leq \frac{\pi}{8} \\ a \cos 2x + 2 & x > \frac{\pi}{8} \end{cases}$ در نقطه $x = \frac{\pi}{8}$ حد داشته باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
(۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(۳) $\sqrt{2}$
(۴) $-\sqrt{2}$

۸۶- مقدار $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2-8}{x^2+3x+2}$ کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) ۴
(۳) ۸
(۴) ۱۶

۸۷- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2+1 & x < 2 \\ b-1 & x = 2 \\ 4ax+21 & x > 2 \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، مقدار b کدام است؟

- (۱) -۱۲
(۲) -۱۴
(۳) -۱۶
(۴) -۱۸

۸۸- اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-x}{x^3+ax^2+3x+b} = +\infty$ ، مقدار $a-b$ کدام است؟

- (۱) -۱
(۲) -۲
(۳) -۳
(۴) -۴

۸۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+(x-1)^2+\dots+(x-9)^2}{5x^2-6x+1}$ کدام است؟

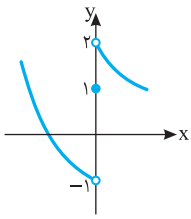
- (۱) صفر
(۲) $\frac{1}{2}$
(۳) $\frac{3}{2}$
(۴) ۲

۹۰- اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2-5x+1-mx^2}{(3x-2)^2} = \frac{1}{2}$ ، مقدار m کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$
(۲) $\frac{1}{2}$
(۳) $\frac{7}{2}$
(۴) $\frac{9}{2}$

آزمون فصل حد و پیوستگی (۲)

آزمون ۱۰



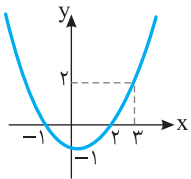
۹۱- نمودار تابع f به شکل مقابل است. مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^3 - x^2)$ کدام است؟

(۱) ۱

(۲) -۱

(۳) ۲

(۴) وجود ندارد.



۹۲- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(f(x-3))+1}{xf(x-1)+2}$ کدام است؟

(۱) ۳

(۲) ۲

(۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۹۳- اگر حد تابع‌های $f+g$ و f^2-g^2 در نقطه $x=2$ به ترتیب برابر ۳ و ۲۱ باشد، مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2x^2)}{g(x+1)}$ کدام است؟

(۱) $-\frac{5}{2}$ (۲) $-\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{5}{2}$

۹۴- برای چه مقدار m تابع $f(x) = x[-x] + m[x^2]$ در نقطه $x=3$ حد دارد؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۹۵- تابع $f(x) = (x^2 - 1)[x]$ در چند نقطه از بازه $(-2, 3)$ حد ندارد؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) صفر

۹۶- اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{ax^2+bx+2} = \frac{3}{4}$ ، مقدار $a+b$ کدام است؟

(۱) $-\frac{11}{3}$

(۲) -۳

(۳) $-\frac{7}{3}$ (۴) $-\frac{5}{3}$

۹۷- تابع $f(x) = [\frac{x}{2}] - [\frac{x}{3}]$ در نقطه $x=12$:

(۱) پیوسته است.

(۲) فقط از چپ پیوسته است.

(۳) فقط از راست پیوسته است.

(۴) نه از چپ پیوسته است و نه از راست.

۹۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2[-\frac{1}{x}] - 1}{4x^2 + x + 1}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{4}$

(۳) صفر

(۴) $-\infty$

۹۹- اگر $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+3}{4x^3 + ax^2 + bx} = -\infty$ ، مقدار $a+b$ کدام است؟

(۱) ۱۲

(۲) ۲۴

(۳) ۳۲

(۴) ۴۸

۱۰۰- اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(b-2)x^2 + 2x + 1}{(a-3)x^2 + (b^2-3a)x^2 + x + 2} = -\infty$ ، مقدار ab کدام است؟

(۱) ۳

(۲) -۳

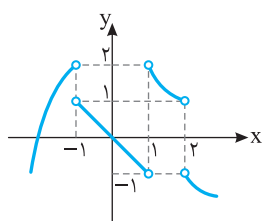
(۳) ۹

(۴) -۹

سؤال	گام
۹۱	۱۱۹ ۱۲۱
۹۲	۱۱۹ ۱۲۱
۹۳	۱۱۹ ۱۲۱
۹۴	۱۱۸ ۱۲۰ ۱۲۱
۹۵	۱۲۳
۹۶	۱۲۸
۹۷	۱۲۰ ۱۳۰
۹۸	۱۲۰ ۱۴۵
۹۹	۱۳۹ ۳۱۸
۱۰۰	۱۴۵

آزمون فصل حد و پیوستگی (۳)

آزمون ۱۱



۱۰۱- نمودار تابع f به شکل مقابل است. مقدار $\lim_{x \rightarrow 2^+} [(f \circ f)(x)]$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) -۱
(۴) -۲

۱۰۲- اگر $f(x) = ax^2 + bx - c$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x+1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(3x)$ مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

- (۱) -۲
(۲) $\frac{1}{4}$
(۳) ۲
(۴) $-\frac{1}{4}$

۱۰۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{x^2}{[x]} - \frac{[-x]}{x} \right)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{5}$
(۲) $\frac{3}{5}$
(۳) $\frac{4}{5}$
(۴) $\frac{5}{5}$

۱۰۴- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} x^4 - 5x^2 + 4 & x > 1 \\ x^2 - 1 & x = 1 \\ \frac{a}{x-2} & x < 1 \end{cases}$ در نقطه $x=1$ حد داشته باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۱۰۵- اگر $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{ax - 3a}{x^2 + ax + 3} = b$ و $b \neq 0$ مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) -۲
(۲) -۴
(۳) -۶
(۴) -۸

۱۰۶- اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + x + a} - 2}{x^2 - 4} = b$ مقدار b کدام است؟

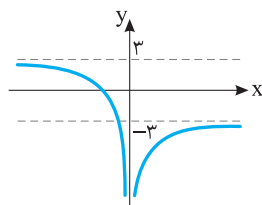
- (۱) $\frac{5}{2}$
(۲) $\frac{5}{4}$
(۳) $\frac{5}{8}$
(۴) $\frac{5}{16}$

۱۰۷- تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1} & x > 1 \\ \frac{x+3}{2x^2 + 1} & x \leq 1 \end{cases}$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) صفر

۱۰۸- نمودار تابع f به شکل مقابل است. حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] - 2 \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right]$ کدام است؟

- (۱) -۴
(۲) -۲
(۳) -۶
(۴) -۸



۱۰۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2x^2 - 50}{x^3 - 10x^2 + 25x}$ کدام است؟

- (۱) $-\infty$
(۲) $+\infty$
(۳) ۲
(۴) $\frac{4}{3}$

۱۱۰- اگر $f(x) = 3x^2 - x$ حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2x) - 1}{f(x) + 3x^2 - 1}$ کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) ۲
(۳) ۱
(۴) صفر

سؤال	گام
۱۰۱	۱۱۷ ۱۱۹ ۱۲۰
۱۰۲	۱۱۹ ۱۲۱
۱۰۳	۱۲۰ ۱۲۱
۱۰۴	۱۱۸ ۱۲۰ ۱۲۱ ۱۲۶
۱۰۵	۱۲۶
۱۰۶	۱۲۸
۱۰۷	۱۲۶ ۱۳۰
۱۰۸	۱۲۰ ۱۳۸
۱۰۹	۱۲۶ ۱۳۹
۱۱۰	۱۴۵

آزمون فصل حد و پیوستگی (۴)

آزمون ۱۲

۱۱۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow (\frac{5\pi}{4})^+} [\sqrt{2} \sin x]$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) ۱ (۴) صفر

۱۱۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4} - 2}{x^2 - 25}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{20}$ (۲) $\frac{1}{30}$ (۳) $-\frac{1}{20}$ (۴) $-\frac{1}{30}$

۱۱۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x-1}}{x-8}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{12}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۱۱۴- تابع $f(x) = \begin{cases} a \sin x & x > \frac{\pi}{2} \\ ab-1 & x = \frac{\pi}{2} \\ \cos 2x + b & x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) ۱ یا ۳ (۲) -۱ یا ۳ (۳) ۱ یا -۳ (۴) -۱ یا -۳

۱۱۵- دامنه تابع‌های f و g مجموعه اعداد حقیقی و برد آن‌ها مجموعه اعداد حقیقی مثبت است. تابع‌های $f+2g$ و $f-g$ در نقطه $x=a$ پیوسته‌اند. کدام تابع ممکن است در این نقطه پیوسته نباشد؟

- (۱) $\frac{1}{f}$ (۲) $\frac{1}{g}$ (۳) $\frac{1}{f+g}$ (۴) $\frac{1}{f-g}$

۱۱۶- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}(\sqrt[3]{x+27}-3) & x \neq 0 \\ \frac{1}{a} & x = 0 \end{cases}$ در نقطه $x=0$ پیوسته باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۶ (۴) ۲۷

۱۱۷- نمودار تابع f به شکل مقابل است. مقدار $\lim_{x \rightarrow 21-} \frac{1}{(f \circ f)(x)}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۲ (۳) $-\infty$ (۴) $+\infty$

۱۱۸- نمودار تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}$ در اطراف خط $x=1$ چگونه است؟

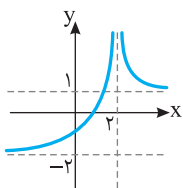


۱۱۹- اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|3-mx| + x - 1}{3x+1} = \frac{2}{3}$ ، آن‌گاه m چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۲۰- f تابعی خطی با شیب مثبت است، $f(3)=10$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f^{-1}(x)} = 9$. مقدار $f(1)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴



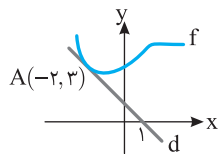
سؤال	گام
۱۱۱	۱۲۸
۱۱۲	۱۲۸
۱۱۳	۱۲۰ ۱۲۱ ۱۳۰ ۱۳۱
۱۱۴	۱۳۵ ۱۳۶
۱۱۵	۱۲۸ ۱۳۰
۱۱۶	۱۱۹ ۱۳۸ ۱۴۱
۱۱۷	۱۴۰
۱۱۸	۱۴۵
۱۱۹	۶۳ ۱۴۵
۱۲۰	۱۲۰ ۱۲۵

آزمون فصل مشتق (۱)

آزمون ۱۳

سؤال	گام
۱۲۱	۱۴۸ ۱۴۹
۱۲۲	۱۴۸ ۱۵۱ ۱۶۷ ۲۸۷
۱۲۳	۱۵۳
۱۲۴	۱۵۳ ۱۶۲ ۱۶۳ ۱۷۰
۱۲۵	۱۶۲ ۱۶۳ ۱۶۴ ۲۸۸
۱۲۶	۱۶۲ ۱۶۳ ۱۶۷
۱۲۷	۱۶۲ ۱۶۳ ۱۶۷
۱۲۸	۱۶۲ ۱۶۳ ۱۶۶
۱۲۹	۱۶۲ ۱۶۳ ۱۸۲
۱۳۰	۱۸۰

- ۱۲۱- در شکل زیر خط d بر نمودار تابع f در نقطه $A(-2, 3)$ مماس است. مقدار $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2f(x) - 6}{x + 2}$ کدام است؟
- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) -۱ (۴) $-\frac{1}{2}$
- ۱۲۲- اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 3}$ ، مقدار $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f^3(x) - f^3(-2)}{x + 2}$ کدام است؟
- (۱) $-\frac{45}{2}$ (۲) -۴۵ (۳) $\frac{45}{2}$ (۴) ۴۵
- ۱۲۳- اگر $f'_+(2) = 3$ و $f'_-(2) = -6$ ، مقدار $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h^2) - f(2)}{h^2 - h^4}$ کدام است؟
- (۱) -۳ (۲) ۳ (۳) -۶ (۴) ۶
- ۱۲۴- اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & x \geq 2 \\ x^3 + x^2 & x < 2 \end{cases}$ ، مقدار $f'_+(2) - f'_-(2)$ کدام است؟
- (۱) -۸ (۲) ۸ (۳) ۲۴ (۴) -۲۴
- ۱۲۵- اگر $f(x) = \frac{x^5 + 1}{x^4 - x^3 + x^2 - x + 1}$ ، مقدار $f'(1000)$ کدام است؟
- (۱) ۱ (۲) ۹۹ (۳) ۹۹۹ (۴) ۱۰۰۰
- ۱۲۶- اگر $f(x) = \frac{ax^2 + 2}{\sqrt{3x + 1}}$ و $f'(1) = \frac{7}{16}$ ، مقدار a کدام است؟
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۱۲۷- اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ و $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ ، عبارت $f'(x)g'(x)$ با کدام یک برابر است؟
- (۱) $\frac{-g^2(x)}{f(x)}$ (۲) $\frac{g^2(x)}{f(x)}$ (۳) $\frac{f(x)}{g^3(x)}$ (۴) $\frac{-f(x)}{g^3(x)}$
- ۱۲۸- اگر $f(x^3 + x) = g(\frac{f}{x})$ و $g'(4) = -4$ ، مقدار $f'(2)$ کدام است؟
- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۴ (۴) -۴
- ۱۲۹- اگر $f(x) = \frac{ax - 1}{x^2 + 1}$ و $f''(1) = 4$ ، مقدار a کدام است؟
- (۱) -۳ (۲) -۵ (۳) -۹ (۴) -۱۱
- ۱۳۰- مجموعه آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = -x^2 + 2x$ در بازه $[a, 0]$ و آهنگ تغییر متوسط این تابع در بازه $[0, a+1]$ برابر ۴ است. مقدار a کدام است؟
- (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{1}{5}$



آزمون فصل مشتق (۲)

آزمون ۱۴

۱۳۱- اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{x+2\sqrt{x}}{x^2-4\sqrt{x}}$ ، مقدار $f'(4)$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۳۲- اگر $f(1)=3$ و $f'(x) = \frac{6x}{x+1}$ مقدار $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(1+h)-27}{h}$ کدام است؟

- ۹ (۱) ۲۷ (۲) ۵۴ (۳) ۸۱ (۴)

۱۳۳- اگر $f(x) = x + 2\sqrt{4x^2 - x^4}$ ، مقدار $f'_+(0) + f'_-(0)$ کدام است؟

- ۲ (۱) -۲ (۲) ۴ (۳) -۴ (۴)

۱۳۴- اگر $f(x) = \sqrt{1+x+x^2+\dots+x^{24}}$ ، مقدار $f'(1)$ کدام است؟

- ۲۵ (۱) ۲۷ (۲) ۳۰ (۳) ۳۵ (۴)

۱۳۵- اگر $f(x) = x^2|x-3|\sqrt{x^2-3x}$ ، مقدار $f'(4)$ کدام است؟

- ۶۸ (۱) -۷۲ (۲) ۶۸ (۳) ۷۲ (۴)

۱۳۶- اگر $f(x) = |x^2-3x| - |x^2+3x|$ ، مقدار $f'(0)$ کدام است؟

- ۲ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) وجود ندارد. (۴)

۱۳۷- تابع $f(x) = x|x^2-x|$ در چند نقطه مشتق پذیر نیست؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۳۸- اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ و $g(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$ ، حاصل $g'(x)f'(g(x))$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۱ (۲) x (۳) $\frac{1}{2}x$ (۴)

۱۳۹- محیط هر مربع تابعی از مساحت آن است. آهنگ تغییر لحظه‌ای محیط یک مربع در لحظه‌ای برابر ۴ است. در این لحظه مساحت مربع چقدر است؟

- $\frac{1}{4}$ (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴)

۱۴۰- نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2-ax+9}{x^2+9}$ بر محور طول‌ها مماس است. حاصل ضرب مقادیر ممکن برابر a کدام است؟

- ۹ (۱) -۱۲ (۲) -۱۶ (۳) -۳۶ (۴)

سؤال	گام
۱۳۱	۱۶۱
۱۳۲	۱۴۷ ۱۵۱ ۲۸۷
۱۳۳	۱۵۳ ۱۶۲ ۱۶۳ ۱۶۷
۱۳۴	۱۶۲ ۱۶۳ ۱۶۷ ۲۵۶
۱۳۵	۱۶۲ ۱۶۳ ۱۶۴ ۱۶۷
۱۳۶	۱۴۸ ۱۶۲ ۱۶۳ ۱۶۴
۱۳۷	۱۷۲ ۱۷۴
۱۳۸	۲۶ ۱۶۲ ۱۶۶
۱۳۹	۱۶۲ ۱۸۱
۱۴۰	۱۶۲ ۱۶۳ ۱۷۶

آزمون فصل مشتق (۳)

آزمون ۱۵

سؤال	گام
۱۴۱	۱۴۷ ۱۶۲ ۱۶۳
۱۴۲	۱۶۲ ۱۶۳
۱۴۳	۱۴۸
۱۴۴	۱۳۰ ۱۷۰
۱۴۵	۱۶۳ ۱۶۶ ۱۶۷
۱۴۶	۱۶۲ ۱۶۳ ۱۸۲ ۲۸۸
۱۴۷	۱۴۹ ۱۶۲ ۱۶۳
۱۴۸	۱۶۷ ۱۸۰ ۱۸۱
۱۴۹	۱۶۲ ۱۶۳ ۱۶۷ ۱۷۶
۱۵۰	۱۶۲ ۱۶۳ ۱۷۶ ۱۷۹

۱۴۱- اگر $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+1}$ مقدار $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-1}{h^2-4h}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۱۴۲- اگر $f(x) = \frac{x^2+ax}{x+1}$ و $f'(2) = \frac{11}{9}$ مقدار a کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۴۳- اگر $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-\sqrt{x+5}}$ مقدار $f'_-(3)$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۱۴۴- اگر $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x > 1 \\ 3x & x = 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ آن گاه

- (۱) $f'(1) = 0$ (۲) $f'(1) = 2$

(۳) $f'(1) = 3$ (۴) تابع f در $x=1$ مشتق پذیر نیست.

۱۴۵- اگر $f(x^3-x) = 4x\sqrt{x+1}$ مقدار $f'(24)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{26}$ (۲) $\frac{11}{26}$ (۳) $\frac{13}{2}$ (۴) $\frac{15}{26}$

۱۴۶- اگر $f(x) = \frac{x^5+1}{x+1}$ مقدار $f''(2)$ کدام است؟

- (۱) ۳۲ (۲) ۳۶ (۳) ۳۸ (۴) ۴۰

۱۴۷- شیب خط مماس در نقطه $(2, 3)$ روی نمودار تابع های f و g به ترتیب برابر ۱ و ۲ است. اگر $h(x) = \frac{f(x)+x}{g(x)-x}$ مقدار $h'(2)$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۳ (۴) -۳

۱۴۸- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = \sqrt{1-x}$ در بازه $[a, 1]$ برابر $-\frac{1}{4}$ است. آهنگ تغییر لحظه ای تابع f در $x=a$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{8}$ (۳) $-\frac{1}{16}$ (۴) $-\frac{1}{32}$

۱۴۹- در چند نقطه از نمودار تابع $f(x) = x^2 - 4\sqrt{x^2+3}$ خط مماس بر نمودار موازی محور طول هاست؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۵۰- خط $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$ بر نمودار تابع $g(x) = -x^2 - bx$ مماس است. مجموع مقادیر ممکن برای b کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{1}{16}$

آزمون فصل مشتق (۴)

آزمون ۱۶

۱۵۱- اگر $f(x) = 2x(2x-1)(2x-2)\dots(2x-12)$ مقدار $f'(1)$ کدام است؟

- (۱) $2 \times 10!$ (۲) $-2 \times 10!$ (۳) $4 \times 10!$ (۴) $-4 \times 10!$

۱۵۲- مقدار مشتق تابع $f(x) = \frac{x^3 + \sqrt{x}}{x^2 + \sqrt[3]{x}}$ در نقطه $x=1$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{7}{12}$ (۲) $-\frac{5}{12}$ (۳) $\frac{7}{12}$ (۴) $\frac{5}{12}$

۱۵۳- اگر $f(x) = \frac{|x^2 - x|}{x^3 - [3x]}$ مقدار $f'(\frac{1}{2})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{6}{49}$ (۲) $-\frac{12}{49}$ (۳) $\frac{12}{49}$ (۴) $-\frac{6}{49}$

۱۵۴- اگر $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x & x \geq 1 \\ 3x^2 + 1 & x < 1 \end{cases}$ مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 4}{x^3 - x}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) وجود ندارد.

۱۵۵- اگر تابع f در نقطه $x=4$ مشتق پذیر باشد و $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) + 5}{x - 4} = 5$ مقدار مشتق تابع $g(x) = \frac{x}{f(2x)}$ در نقطه $x=2$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) -۱ (۴) ۱

۱۵۶- اگر $f(x) = 4x + |x|$ و $g(x) = 4x - |x|$ مقدار مشتق تابع $g \circ f$ در نقطه $x=0$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۱۵ (۴) وجود ندارد.

۱۵۷- اگر تابع $f(x) = |x^2 - 6x + m|$ روی $\mathbb{R}$ مشتق پذیر باشد، m چند مقدار طبیعی نمی تواند داشته باشد؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۹

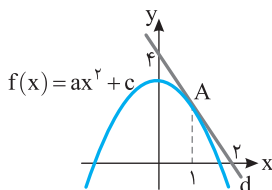
۱۵۸- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = \frac{k}{x}$ در بازه $[3, 6]$ با آهنگ تغییر لحظه ای این تابع در کدام نقطه از این بازه برابر است؟ ($k \neq 0$)

- (۱) $x=4$ (۲) $x=\frac{7}{2}$ (۳) $x=\sqrt{12}$ (۴) $x=\sqrt{18}$

۱۵۹- خط $y=4x+2$ در نقطه ای به طول ۱ بر نمودار تابع $f(x) = x^3 - 3ax + b$ مماس است. مقدار b کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۶۰- در شکل زیر خط d در نقطه A به طول ۱ بر نمودار تابع $f(x) = ax^2 + c$ مماس است. مقدار c کدام است؟



- (۱) ۲ (۲) $\frac{5}{2}$

- (۳) ۳ (۴) $\frac{7}{2}$

سؤال	گام
۱۵۱	۱۴۸ ۱۶۵
۱۵۲	۱۶۲ ۱۶۳
۱۵۳	۱۶۲ ۱۶۳ ۱۶۴
۱۵۴	۱۴۸ ۱۷۰
۱۵۵	۱۴۸ ۱۶۲ ۱۶۳ ۱۶۶
۱۵۶	۲۶ ۱۶۳ ۱۶۴
۱۵۷	۱۷۲ ۳۰۰
۱۵۸	۱۶۲ ۱۸۰ ۱۸۱
۱۵۹	۱۶۲ ۱۶۳ ۱۷۶
۱۶۰	۱۶۲ ۱۶۳ ۱۷۶

آزمون فصل کاربردهای مشتق (۱)

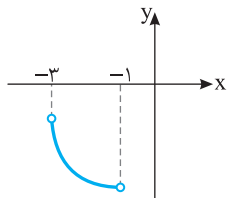
آزمون ۱۷

سؤال	گام
۱۶۱	۱۸۴ ۱۸۵ ۳۱۹
۱۶۲	۱۶۳ ۱۶۷ ۱۸۴
۱۶۳	۱۹۱
۱۶۴	۱۸۸ ۳۲۲
۱۶۵	۱۸۸ ۳۱۸
۱۶۶	۱۸۶
۱۶۷	۱۹۳
۱۶۸	۱۸۶ ۱۹۴ ۱۹۵
۱۶۹	۱۸۶ ۱۹۵
۱۷۰	۲۴ ۱۸۶ ۱۹۵

۱۶۱- تابع $f(x) = ax^3 - 9x^2 + 3ax + 3$ روی $\mathbb{R}$ صعودی است. حدود a کدام است؟

- (۱) $a \leq -3$ (۲) $a \geq 3$ (۳) $-3 \leq a \leq 3$ (۴) $a \geq 3$ یا $a \leq -3$

۱۶۲- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. کدام تابع اکیداً صعودی است؟



(۱) $y = x + f(x)$

(۲) $y = f(x^2)$

(۳) $y = x^2 f(x)$

(۴) $y = \frac{f(x)}{x}$

۱۶۳- تابع $f(x) = \begin{cases} |x-2|-2 & x \geq 0 \\ -|x+2| & x < 0 \end{cases}$ چند نقطهٔ ماکزیمم نسبی و چند نقطهٔ مینیمم نسبی دارد؟

- (۱) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.
(۲) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.
(۳) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.
(۴) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.

۱۶۴- اگر $f'(x) = x^3 + 5x^2 + 4x$ و $D_f = \mathbb{R}$ ، تابع f چند نقطهٔ ماکزیمم نسبی و چند نقطهٔ مینیمم نسبی دارد؟

- (۱) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.
(۲) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.
(۳) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.
(۴) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.

۱۶۵- اگر مقدار ماکزیمم نسبی تابع $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + a$ برابر -4 باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) -8 (۲) -6 (۳) -3 (۴) -1

۱۶۶- عرض نقطهٔ بحرانی تابع $f(x) = \frac{x^2 - 17}{\sqrt{x+5}}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) -8 (۳) $-\sqrt{8}$ (۴) 26

۱۶۷- مقدار مینیمم مطلق تابع $f(x) = (x-2)^2(x+2)$ با دامنهٔ $[-2, 2]$ کدام است؟

- (۱) -10 (۲) -12 (۳) -24 (۴) -27

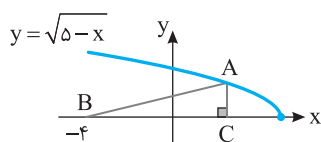
۱۶۸- اگر $x+2y=4$ ، کمترین مقدار ممکن $x+y^2$ کدام است؟

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

۱۶۹- کمترین فاصلهٔ نقطه‌های $(x, 4)$ و $(3x, x+6)$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ (۲) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (۳) $\frac{4}{\sqrt{5}}$ (۴) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

۱۷۰- در شکل مقابل اگر مساحت مثلث ABC بیشترین مقدار ممکن باشد، طول نقطهٔ C کدام است؟



- (۱) 1
(۲) 2
(۳) 3
(۴) 4

آزمون فصل کاربردهای مشتق (۲)

آزمون ۱۸

۱۷۱- به ازای کدام مقدار k تابع $f(x) = \frac{x+k}{x^2+x+1}$ روی بازه $[-\frac{4}{5}, 2]$ صعودی است؟

- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $-\frac{2}{5}$ (۴) $-\frac{3}{5}$

۱۷۲- تابع $f(x) = 2\sqrt{x+4} - \sqrt{x-2}$ روی بازه $[a, b]$ نزولی است. حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{3}$ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) $2\sqrt{5}$

۱۷۳- تابع $f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & x > 0 \\ x^3-1 & x \leq 0 \end{cases}$ چند نقطهٔ ماکزیمم نسبی و چند نقطهٔ مینیمم نسبی دارد؟

- (۱) فقط یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد. (۲) فقط یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی دارد.
(۳) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد. (۴) نه نقطهٔ ماکزیمم نسبی دارد و نه نقطهٔ مینیمم نسبی.

۱۷۴- نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2+1}$ در کدام ناحیهٔ صفحهٔ مختصات قرار دارد؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم
۱۷۵- تابع $f(x) = 2x^3 + ax^2 + x$ اکسترمم نسبی ندارد. حدود a کدام است؟
(۱) $|a| > \sqrt{3}$ (۲) $|a| > \sqrt{6}$ (۳) $|a| \leq \sqrt{6}$ (۴) $|a| \leq \sqrt{3}$

۱۷۶- اگر $f(x) = |x|(x^3-4)$ ، فاصلهٔ نقاط بحرانی تابع f از یکدیگر کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) ۲ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{10}$

۱۷۷- مقدار مینیمم مطلق تابع $f(x) = -5x^3 + x|x-1|$ با دامنهٔ $[0, 2]$ کدام است؟

- (۱) -۳۸ (۲) -۳۹ (۳) -۴۰ (۴) -۴۱

۱۷۸- نسبت بیشترین مقدار به کمترین مقدار تابع $f(x) = x + \sqrt{4-x^2}$ کدام است؟

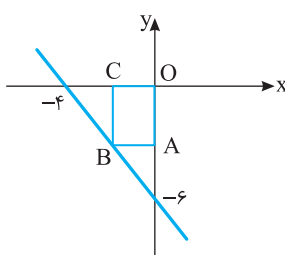
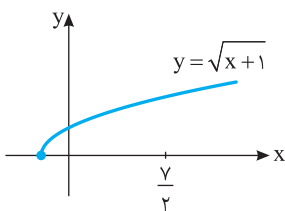
- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) $-\sqrt{2}$ (۴) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۷۹- نزدیک‌ترین نقطه روی نمودار تابع $y = \sqrt{x+1}$ به نقطهٔ $A(\frac{1}{4}, 0)$ کدام نقطه است؟

- (۱) $(3, 2)$ (۲) $(1, \sqrt{2})$ (۳) $(2, \sqrt{3})$ (۴) $(\frac{1}{3}, \frac{2}{\sqrt{3}})$

۱۸۰- در شکل مقابل بیشترین مقدار ممکن مساحت مستطیل OABC کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۹



سؤال	گام
۱۷۱	۱۸۴ ۱۸۵ ۳۱۸
۱۷۲	۱۸۴ ۱۸۵ ۳۲۲
۱۷۳	۱۹۱
۱۷۴	۱۸۸ ۳۱۸
۱۷۵	۱۸۸ ۳۱۹
۱۷۶	۱۷۰ ۱۸۶
۱۷۷	۱۷۰ ۱۹۳
۱۷۸	۲۱ ۱۹۳
۱۷۹	۱۸۶ ۱۹۵
۱۸۰	۲۴ ۱۸۶ ۱۹۵

آزمون فصل کاربردهای مشتق (۳)

آزمون ۱۹

سؤال	گام
۱۸۱	۱۸۴ ۱۸۵ ۳۱۸
۱۸۲	۱۹۱
۱۸۳	۱۸۸ ۳۲۲
۱۸۴	۱۹۰
۱۸۵	۱۸۸ ۳۱۸
۱۸۶	۱۸۶
۱۸۷	۱۹۳
۱۸۸	۲۴ ۱۸۶ ۱۹۵
۱۸۹	۲۴ ۱۸۶ ۱۹۵
۱۹۰	۱۹۴ ۱۹۵

۱۸۱- تابع $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$

(۱) روی دامنه‌اش صعودی است.

(۲) روی دامنه‌اش نزولی است.

(۳) روی بازه‌های $(-\infty, -1)$ ، $(-1, 1)$ و $(1, +\infty)$ صعودی است.

(۴) روی بازه‌های $(-\infty, -1)$ ، $(-1, 1)$ و $(1, +\infty)$ نزولی است.

۱۸۲- تابع $f(x) = ||x| - 2|$ به ترتیب چند نقطه ماکزیمم نسبی و چند نقطه مینیمم نسبی دارد؟

(۱) ۲ و ۱ (۲) ۱ و ۲ (۳) ۱ و ۱ (۴) ۲ و ۰

۱۸۳- تابع $f(x) = x^5 - 5x^4 + 1$ به ترتیب چند نقطه ماکزیمم نسبی و چند نقطه مینیمم نسبی دارد؟

(۱) ۱ و ۱ (۲) ۲ و ۰ (۳) ۰ و ۲ (۴) ۱ و ۰

۱۸۴- اگر $(-1, 2)$ نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x) = \frac{a}{3}x^3 + 2bx^2 + 4x - \frac{4}{3}$ باشد، مقدار $a-b$ کدام است؟

(۱) ۱۷ (۲) ۳۲ (۳) ۲۳ (۴) ۳۱

۱۸۵- عرض نقطه ماکزیمم نسبی تابع $f(x) = \sqrt[3]{3x - x^3}$ کدام است؟

(۱) $\sqrt[3]{3}$ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) $\sqrt[3]{2}$

۱۸۶- تابع $f(x) = (x^2 - 1)\sqrt[3]{x^2}$ چند نقطه بحرانی دارد؟

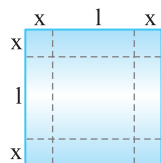
(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۸۷- اگر حداکثر مقدار تابع $f(x) = \frac{x+a}{\sqrt{x}}$ در بازه $[1, 4]$ برابر $\frac{9}{4}$ باشد، مقدار a کدام است؟ ($0 < a < 1$)

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۱۸۸- مطابق شکل می‌خواهیم در چهار گوشه ورق مربعی به طول ضلع ۳۰ سانتی‌متر مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آن‌ها را کنار بگذاریم. سپس با تا کردن ورق در امتداد خط‌چین‌ها یک جعبه بدون در بسازیم. x کدام باشد تا حجم قوطی، حداکثر

مقدار ممکن گردد؟



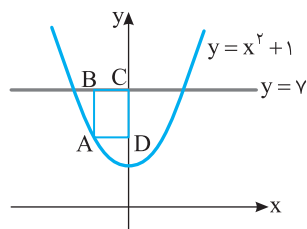
(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵

۱۸۹- در شکل مقابل بیشترین مقدار ممکن مساحت مستطیل ABCD کدام است؟



(۱) $2\sqrt{2}$

(۲) $3\sqrt{2}$

(۳) $4\sqrt{2}$

(۴) $6\sqrt{2}$

۱۹۰- تابع f با ضابطه $f(x) = x^3$ و دامنه $[0, +\infty)$ مفروض است. طول نزدیک‌ترین نقطه از نمودار این تابع به خط $y = 3x - 6$

چقدر است؟

(۱) ۱ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۲ (۴) ۴

آزمون فصل کاربردهای مشتق (۴)

آزمون ۲۰

۱۹۱- تابع $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ روی بازه $[a, b]$ صعودی است. حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) $2\sqrt{5}$

۱۹۲- تابع $f(x) = x + \sqrt{k-x}$ روی بازه $[a, b]$ نزولی است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) ۲

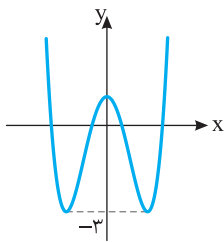
۱۹۳- تابع $f(x) = x + \sqrt{2-[x]^2}$ چند نقطهٔ مینیمم نسبی دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۱۹۴- a عددی مثبت است و تابع $f(x) = \frac{x^2+2x}{x^2+a}$ دو نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد. مجموعهٔ مقادیر a کدام است؟

- (۱) $(0, +\infty)$ (۲) $(0, 2)$ (۳) $(1, +\infty)$ (۴) $(2, +\infty)$

۱۹۵- نمودار تابع $f(x) = x^4 + ax^2 + bx + 1$ به صورت مقابل است. طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f کدام است؟



- (۱) $\pm\sqrt{2}$

- (۲) ± 1

- (۳) ± 2

- (۴) $\pm\sqrt{5}$

۱۹۶- تابع $f(x) = |x^2|x - 1|$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۹۷- تابع $f(x) = \begin{cases} |x^2 - 4| & x \neq 0 \\ k & x = 0 \end{cases}$ در نقطهٔ $x=0$ مینیمم نسبی دارد ولی مینیمم مطلق ندارد. حدود k کدام است؟

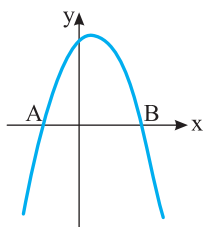
- (۱) $0 < k < 4$ (۲) $k < 4$ (۳) $0 < k < 2$ (۴) $k < 2$

۱۹۸- اگر $x+y=2$ ، کمترین مقدار ممکن x^3+y^3 کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۹۹- نمودار تابع $f(x) = (m^2-2)x^2 + (3-2m)x + 3$ در شکل مقابل رسم شده است. کمترین

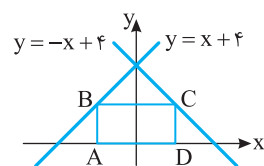
مقدار ممکن $x_A + x_B$ کدام است؟



- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$

- (۳) ۳ (۴) $\frac{1}{4}$

۲۰۰- در شکل مقابل بیشترین مقدار ممکن مساحت مستطیل ABCD کدام است؟



- (۱) ۱۶

- (۲) ۱۲

- (۳) ۸

- (۴) ۶

سؤال	گام
۱۹۱	۱۸۴ ۱۸۵ ۳۱۸
۱۹۲	۱۸۴ ۱۸۵
۱۹۳	۲۱ ۱۹۱ ۳۴۰
۱۹۴	۱۸۸ ۳۰۰
۱۹۵	۱۹۰
۱۹۶	۲۹ ۳۰ ۳۷ ۱۸۶
۱۹۷	۱۸۷ ۱۹۱ ۱۹۲
۱۹۸	۱۸۶ ۱۹۴ ۱۹۵
۱۹۹	۲۴ ۱۸۶ ۱۹۵
۲۰۰	۲۴ ۱۸۶ ۱۹۵

آزمون فصل هندسه تحلیلی (۱)

آزمون ۲۱

سؤال	گام
۲۰۱	۱۹۷ ۱۹۹
۲۰۲	۲۰۲ ۳۲۵
۲۰۳	۱۹۹ ۲۰۱
۲۰۴	۲۰۴
۲۰۵	۲۰۷ ۲۰۸ ۲۰۹
۲۰۶	۲۰۷ ۲۰۹ ۲۱۰
۲۰۷	۲۱۱
۲۰۸	۱۹۶ ۲۱۲
۲۰۹	۱۹۶ ۲۱۲ ۲۱۸
۲۱۰	۲۰۲ ۲۱۲

۲۰۱- معادله میانه وارد بر وتر در مثل قائم الزاویه ای که با محورهای مختصات و خط $x-2y=8$ تشکیل می شود کدام است؟

(۱) $x+2y=0$ (۲) $x-2y=0$ (۳) $x-y=0$ (۴) $2x+y=0$

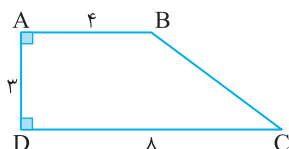
۲۰۲- فاصله نقطه $A(3k, 1)$ از خط $x=ky-1$ برابر ۲ است. مقدار k کدام است؟

(۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{4}{3}$

۲۰۳- معادله خطی که بر خط $2y=-3x$ عمود است و محور y را در نقطه ای به عرض -1 قطع می کند کدام است؟

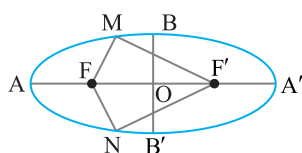
(۱) $3y-2x+3=0$ (۲) $3x-2y-2=0$ (۳) $3y+2x+3=0$ (۴) $3x+2y+2=0$

۲۰۴- دوزنقه $ABCD$ در شکل مقابل را حول ضلع CD آن دوران می دهیم. حجم جسم حاصل چقدر است؟



(۱) 64π (۲) 62π (۳) 56π (۴) 48π

۲۰۵- در شکل مقابل نقطه های F و F' کانون های بیضی هستند و BB' قطر کوچک بیضی است. اگر $BB'=16$ و $OF=6$ ، محیط



چهارضلعی $MFNF'$ چقدر است؟

(۱) ۲۰ (۲) ۳۰ (۳) ۴۰ (۴) ۵۰

۲۰۶- نقطه های $F(-4, 0)$ و $F'(4, 0)$ کانون های یک بیضی اند و خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{2}{3}$ است. طول قطر کوچک این بیضی

چقدر است؟

(۱) $4\sqrt{5}$ (۲) $6\sqrt{5}$ (۳) $8\sqrt{5}$ (۴) $12\sqrt{5}$

۲۰۷- شعاع دایره $(3x-1)^2 + (3y-2)^2 = 4$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$

۲۰۸- شعاع دایره ای هم مرکز با دایره $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 2 = 0$ که از نقطه $(8, 7)$ می گذرد، چقدر است؟

(۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵

۲۰۹- وضعیت دو دایره $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$ و $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$ کدام است؟

(۱) متخارج (۲) متداخل (۳) مماس درونی (۴) مماس بیرونی

۲۱۰- طول وتری که خط $y=2x+2$ از دایره $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 3 = 0$ جدا می کند، برابر ۴ است. مقدار k کدام است؟

(۱) $\pm\sqrt{2}$ (۲) $\pm\sqrt{5}$ (۳) $\pm\sqrt{10}$ (۴) $\pm\sqrt{12}$

آزمون فصل هندسه تحلیلی (۲)

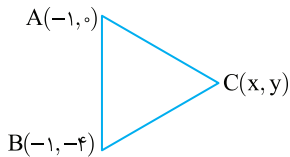
آزمون ۲۲

۲۱۱- اگر نقطه‌های $A(1, 2)$ ، $B(-1, -2)$ و $C(-3, 1)$ رأس‌هایی از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ باشند، مساحت این متوازی‌الاضلاع

چقدر است؟

- (۱) ۱۴ (۲) ۱۵ (۳) ۱۶ (۴) ۲۱

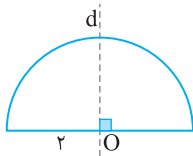
۲۱۲- در شکل مقابل اگر مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد، عرض نقطه C کدام است؟



- (۱) ۲
(۲) -۲
(۳) -۱
(۴) ۳

۲۱۳- دو ضلع یک مربع روی دو خط $3x = 2y + 5$ و $4y = 6x + 3$ هستند. مساحت این مربع کدام است؟

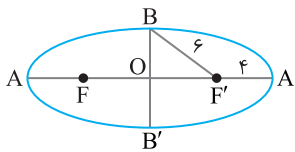
- (۱) $\frac{10}{3}$ (۲) $\frac{9}{4}$ (۳) $\frac{13}{4}$ (۴) $\frac{13}{3}$



۲۱۴- نیم‌دایره به مرکز O در شکل مقابل را حول خط d دوران می‌دهیم. مساحت کل جسم حاصل چقدر است؟

- (۱) 8π (۲) 12π
(۳) 14π (۴) 16π

۲۱۵- در شکل مقابل نقطه‌های F و F' کانون‌های بیضی هستند و BB' قطر کوچک بیضی است. طول BB' چقدر است؟



- (۱) $8\sqrt{2}$ (۲) $6\sqrt{2}$
(۳) $10\sqrt{2}$ (۴) $12\sqrt{2}$

۲۱۶- اختلاف طول قطر بزرگ و طول قطر کوچک یک بیضی برابر ۴ و خروج از مرکز آن برابر $\frac{3}{5}$ است. طول قطر بزرگ این بیضی چقدر است؟

- (۱) ۱۴ (۲) ۱۶ (۳) ۱۸ (۴) ۲۰

۲۱۷- یک سر قطری از دایره $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$ نقطه $(-2, 1)$ است. سر دیگرش کدام نقطه است؟

- (۱) $(5, -6)$ (۲) $(-3, 0)$ (۳) $(1, 2)$ (۴) $(4, -7)$

۲۱۸- معادله دایره‌ای که از نقطه‌های $(0, 1)$ و $(0, 9)$ می‌گذرد و بر محور X مماس است کدام است؟

- (۱) $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 20$ (۲) $(x-1)^2 + (y-5)^2 = 17$
(۳) $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$ (۴) $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 32$

۲۱۹- خط‌های $9x - 12y - 1 = 0$ و $3x - 4y + 3 = 0$ بر دایره‌ای مماس‌اند. شعاع این دایره چقدر است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۲۲۰- اگر دو دایره $x^2 + y^2 + 4x - 2y = k$ و $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 8$ بر هم مماس بیرونی باشند، مقدار k کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۴ (۴) -۴

سؤال	گام
۲۱۱	۱۹۶ ۱۹۹ ۲۰۲
۲۱۲	۱۹۷ ۲۰۰
۲۱۳	۲۰۳
۲۱۴	۲۰۴
۲۱۵	۲۰۷ ۲۰۹
۲۱۶	۲۰۷ ۲۰۹ ۲۱۰
۲۱۷	۱۹۷ ۲۱۲
۲۱۸	۲۱۱ ۲۱۲ ۲۱۷
۲۱۹	۲۰۳
۲۲۰	۱۹۶ ۲۱۲ ۲۱۸

آزمون فصل آمار و احتمال (۱)

آزمون ۲۳

سؤال	گام
۲۲۱	۲۱۹ ۲۲۳
۲۲۲	۲۲۶
۲۲۳	۲۲۹
۲۲۴	۲۳۱ ۲۳۲
۲۲۵	۲۱۹ ۲۲۷ ۲۳۱
۲۲۶	۲۳۲
۲۲۷	۲۳۴
۲۲۸	۲۳۱ ۲۳۳ ۲۳۸
۲۲۹	۲۳۱ ۲۳۳ ۲۳۸
۲۳۰	۲۴۱ ۲۴۲

۲۲۱- در چند عدد سه رقمی، رقم ۵ یا ۶ وجود دارد؟

- (۱) ۴۴۸ (۲) ۴۵۲ (۳) ۴۶۰ (۴) ۴۷۶

۲۲۲- اگر $\frac{P(n+1, 3)}{n+1} = 56$ ، مقدار n کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۲۲۳- تعداد زیرمجموعه‌های چهار عضوی یک مجموعه ۸ برابر تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی آن است. این مجموعه چند زیرمجموعه دو عضوی دارد؟

- (۱) ۴۸۰ (۲) ۵۲۰ (۳) ۵۹۵ (۴) ۶۳۵

۲۲۴- تاسی را دو بار پرتاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که عدد ظاهر شده در پرتاب اول دو برابر عدد ظاهر شده در پرتاب دوم نباشد؟

- (۱) $\frac{11}{12}$ (۲) $\frac{8}{9}$ (۳) $\frac{5}{6}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۲۲۵- در ظرفی سه مهره سفید، دو مهره آبی و پنج مهره زرد وجود دارد. سه مهره به تصادف از ظرف بیرون می‌آوریم. چقدر احتمال دارد که هیچ دو مهره‌ای همرنگ نباشند؟

- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۲۲۶- اگر $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$ و $P(B') = \frac{1}{8}$ ، مقدار $P(A) - P(A \cap B)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{8}$ (۲) $\frac{3}{8}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{8}$

۲۲۷- اگر $P(A) = \frac{1}{3}$ ، $P(A|B) = \frac{1}{2}$ و $P(B|A) = \frac{2}{3}$ ، مقدار $P(B)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{4}{9}$

۲۲۸- دو جعبه داریم. در اولی دو مهره سفید و سه مهره سیاه و در دومی چهار مهره سفید و دو مهره سیاه وجود دارد. به تصادف یک مهره از اولی برمی‌داریم و در دومی می‌اندازیم. سپس یک مهره از جعبه دوم برمی‌داریم. احتمال اینکه این مهره سفید باشد، چقدر است؟

- (۱) $\frac{22}{25}$ (۲) $\frac{22}{35}$ (۳) $\frac{27}{35}$ (۴) $\frac{21}{25}$

۲۲۹- در اولین ظرف از سه ظرف همانند، سه مهره سفید و دو مهره سیاه، در دومین ظرف، پنج مهره سفید و سه مهره سیاه و در ظرف سوم فقط مهره سیاه داریم. با چشم بسته از یکی از ظرف‌ها یک مهره بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه این مهره سیاه باشد چقدر است؟

- (۱) $\frac{71}{120}$ (۲) $\frac{61}{120}$ (۳) $\frac{53}{120}$ (۴) $\frac{43}{120}$

۲۳۰- به ازای کدام مقدار a واریانس داده‌های $a, 11, 12, 9, a$ برابر ۶ است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵

آزمون فصل آمار و احتمال (۲)

آزمون ۲۴

سؤال	گام
۲۳۱	۲۲۲
۲۳۲	۲۲۲ ۲۲۵
۲۳۳	۲۲۶
۲۳۴	۲۲۷ ۲۳۱
۲۳۵	۲۳۲
۲۳۶	۲۱۹ ۲۲۷ ۲۳۱
۲۳۷	۲۳۵ ۲۳۶
۲۳۸	۲۳۱ ۲۳۳ ۲۳۸
۲۳۹	۲۳۱ ۲۳۲ ۲۳۳ ۲۳۸
۲۴۰	۲۴۲ ۲۴۳

۲۳۱- چند عدد چهار رقمی بزرگتر از ۳۳۰۰ می‌توان نوشت که ارقام آن کوچکتر از ۶ و متمایز باشند؟

- (۱) ۱۱۰ (۲) ۱۲۴ (۳) ۱۴۴ (۴) ۱۶۰

۲۳۲- با رقم‌های ۳، ۴، ۵ و ۶ همهٔ عددهای چهاررقمی ممکن را که رقم تکراری ندارند، می‌نویسیم. مجموع رقم‌های یکان این عددها چقدر است؟

- (۱) ۱۰۴ (۲) ۱۰۸ (۳) ۱۱۲ (۴) ۱۱۶

۲۳۳- در چند جایگشت پنج حرفی از حروف کلمهٔ logarithm حرف t در ابتدا و حرف g در انتها قرار می‌گیرد؟

- (۱) ۲۱۰ (۲) ۴۲۰ (۳) ۶۶۰ (۴) ۸۴۰

۲۳۴- سکه‌ای را شش بار پشت سر هم پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه حداکثر سه بار رو بیاید چقدر است؟

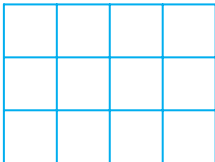
- (۱) $\frac{27}{64}$ (۲) $\frac{25}{64}$ (۳) $\frac{21}{32}$ (۴) $\frac{23}{32}$

۲۳۵- اگر A، B و C پیشامدهایی دوه‌دو ناسازگار باشند و $P(A)=2x$ ، $P(B)=3x$ ، $P(C)=4x$ و $P(A \cup B \cup C)=1-x$ ،

مقدار $P(A \cup B) + P(A \cup C)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{8}$ (۲) $\frac{9}{10}$ (۳) $\frac{1}{11}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۲۳۶- اگر در شکل روبه‌رو یک مستطیل انتخاب کنیم، احتمال اینکه مربع باشد چقدر است؟



- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{11}{45}$ (۳) $\frac{13}{45}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۲۳۷- اگر A و B مستقل از هم باشند، $P(A \cap B') = \frac{1}{4}$ و $P(A' \cap B) = \frac{1}{6}$ ، مقدار $P(A \cup B) - P(A \cap B)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{12}$ (۲) $\frac{7}{12}$ (۳) $\frac{5}{6}$ (۴) $\frac{7}{24}$

۲۳۸- جعبهٔ A شامل هفت مهره با شماره‌های ۲ تا ۸ و جعبهٔ B شامل پنج مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ است. یک جعبه به تصادف انتخاب و مهره‌ای از آن خارج می‌کنیم. اگر شمارهٔ این مهره زوج باشد، مهرهٔ دیگری از همان جعبه و اگر فرد باشد، مهره‌ای از جعبهٔ دیگر بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه روی هر دو مهره عدد زوج نوشته شده باشد، چقدر است؟

- (۱) $\frac{23}{140}$ (۲) $\frac{4}{125}$ (۳) $\frac{8}{125}$ (۴) $\frac{27}{140}$

۲۳۹- در جعبه‌ای دو مهرهٔ قرمز، سه مهرهٔ آبی و پنج مهرهٔ سبز وجود دارد. یک مهره از جعبه بیرون می‌آوریم، رنگ آن را می‌بینیم و آن را به جعبه برمی‌گردانیم. سپس یک مهرهٔ دیگر از جعبه بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه رنگ مهره‌ها با هم فرق کند چقدر است؟

- (۱) $\frac{5}{62}$ (۲) $\frac{5}{64}$ (۳) $\frac{5}{66}$ (۴) $\frac{5}{68}$

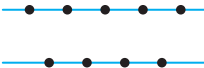
۲۴۰- ضریب تغییرات داده‌های $X_1, \dots, X_n$ و X_n دو برابر ضریب تغییرات داده‌های $X_1+1, \dots, X_n+1$ است. میانگین داده‌های $X_1, \dots, X_n$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{4}{5}$ (۳) $\frac{5}{5}$ (۴) $\frac{8}{5}$

آزمون فصل آمار و احتمال (۳)

آزمون ۲۵

سؤال	گام
۲۴۱	۲۱۹
۲۴۲	۲۲۲ ۲۲۷
۲۴۳	۲۱۹ ۲۲۷
۲۴۴	۲۳۱
۲۴۵	۲۱۹ ۲۲۷ ۲۳۱
۲۴۶	۲۳۴
۲۴۷	۲۳۲ ۲۳۵
۲۴۸	۲۳۸
۲۴۹	۲۳۱ ۲۳۳ ۲۳۸
۲۵۰	۲۴۱ ۲۴۲

- ۲۴۱- چند تابع مانند f وجود دارد که دامنه آن $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و برد آن زیرمجموعه A است و به ازای هر x از دامنه $f(x) \neq x$ ؟
 (۱) ۶۴ (۲) ۸۱ (۳) ۲۵۶ (۴) ۲۸۰
- ۲۴۲- دانش آموزی باید به ده سؤال از سیزده سؤال یک امتحان پاسخ دهد و باید حداقل چهار تا از سؤال‌ها را از پنج سؤال نخست انتخاب کند. او چند انتخاب دارد؟
 (۱) ۱۴۰ (۲) ۱۹۶ (۳) ۲۸۰ (۴) ۳۴۶
- ۲۴۳- چند چهارضلعی می‌توان رسم کرد که رأس‌های آن‌ها از نقاط مشخص شده در شکل زیر باشد؟

 (۱) ۴۸ (۲) ۶۰ (۳) ۶۴ (۴) ۹۰
- ۲۴۴- در آزمایش پرتاب دو تاس، اگر بدانیم حاصل جمع عددهای ظاهر شده عددی اول است، احتمال اینکه مجموع آن‌ها برابر ۷ باشد، چقدر است؟
 (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{1}{18}$ (۴) $\frac{1}{36}$
- ۲۴۵- سکه‌ای را پنج بار پشت سر هم پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه حداکثر دو بار رو بیاید چقدر است؟
 (۱) $\frac{1}{16}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{3}{8}$ (۴) $\frac{1}{2}$
- ۲۴۶- اگر A و B دو پیشامد ناسازگار نباشند، مقدار $P(A' \cup B' | A' \cap B')$ برابر کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) $\frac{P(A)}{P(B)}$ (۳) $P(A' | B')$ (۴) $P(A \cup B)$
- ۲۴۷- اگر $P(A) = 2P(B)$ ، $P(B') = 3P(A')$ و A و B مستقل از هم باشند، مقدار $P(A \cap B)$ کدام است؟
 (۱) $\frac{4}{15}$ (۲) $\frac{8}{15}$ (۳) $\frac{4}{25}$ (۴) $\frac{8}{25}$
- ۲۴۸- در مدرسه‌ای ۴۰٪ دانش‌آموزان در پایه دهم، ۳۰٪ دانش‌آموزان در پایه یازدهم و ۳۰٪ دانش‌آموزان در پایه دوازدهم تحصیل می‌کنند. از دانش‌آموزان پایه دهم ۲۰٪، از دانش‌آموزان پایه یازدهم ۴۰٪ و از دانش‌آموزان پایه دوازدهم ۳۵٪ به کارهای هنری علاقه‌مندند. اگر از این مدرسه دانش‌آموزی را به تصادف انتخاب کنیم، احتمال اینکه به کارهای هنری علاقه‌مند باشد چقدر است؟
 (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{5}{3}$
- ۲۴۹- در دو جعبه به ترتیب بیست و چهار و پانزده لامپ یکسان وجود دارد. در جعبه اول چهار و در جعبه دوم دو لامپ معیوب‌اند. از جعبه اول هشت و از جعبه دوم شش لامپ به تصادف برمی‌داریم و در جعبه جدید قرار می‌دهیم. با کدام احتمال یک لامپ انتخابی از جعبه جدید معیوب است؟
 (۱) $\frac{17}{105}$ (۲) $\frac{16}{105}$ (۳) $\frac{6}{35}$ (۴) $\frac{8}{35}$
- ۲۵۰- به ۹ داده آماری با میانگین ۸ و انحراف معیار ۲ داده‌ای با مقدار ۸ اضافه کرده‌ایم. واریانس کل ۱۰ داده برابر کدام است؟
 (۱) $\frac{3}{6}$ (۲) ۴ (۳) $\frac{4}{2}$ (۴) $\frac{4}{4}$

آزمون فصل آمار و احتمال (۴)

آزمون ۲۶

سؤال	گام
۲۵۱	۲۱۹ ۲۲۷
۲۵۲	۲۱۹ ۲۲۵
۲۵۳	۲۲۷
۲۵۴	۲۳۱
۲۵۵	۲۲۲ ۲۲۷ ۲۳۱ ۲۳۲
۲۵۶	۲۲۲ ۲۲۹ ۲۳۱
۲۵۷	۲۳۲ ۲۳۵ ۲۳۶
۲۵۸	۲۳۲ ۲۳۵ ۲۳۶
۲۵۹	۲۳۱ ۲۳۳ ۲۳۸
۲۶۰	۲۴۱

۲۵۱- در یک صفحه شطرنجی 8×8 چند مستطیل افقی یا عمودی با ابعاد ۲ و ۴ وجود دارد؟

- (۱) ۳۵ (۲) ۶۴ (۳) ۷۰ (۴) ۸۱

۲۵۲- در چند جایگشت از حروف کلمه logarithm حروف صدادر کنار هم و حروف بی‌صدا کنار هم قرار می‌گیرند؟

- (۱) $2 \times 6!$ (۲) $6 \times 6!$ (۳) $9 \times 6!$ (۴) $12 \times 6!$

۲۵۳- اگر $\binom{n+3}{2} = \binom{5}{n}^{-1} + \binom{6}{n}^{-1} = \binom{4}{n}^{-1}$ مقدار $\binom{n+3}{2}$ کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۲۸ (۳) ۱۰۵ (۴) ۱۵۳

۲۵۴- اگر A و B دو پیشامد ناتهی از فضای نمونه‌ای S باشند، کدام دو پیشامد زیر می‌توانند ناسازگار نباشند؟

- (۱) A' و B' (۲) $A-B$ و $B-A$
(۳) B و $A-B$ (۴) $A \cap B$ و $A' \cap B$

۲۵۵- در کیسه‌ای پنج مهره قرمز و چهار مهره آبی وجود دارد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال اینکه حداکثر دو تا از آن‌ها قرمز باشند، چقدر است؟

- (۱) $\frac{37}{42}$ (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{31}{42}$ (۴) $\frac{29}{42}$

۲۵۶- اگر زیرمجموعه‌ای سه‌عضوی از مجموعه $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ انتخاب کنیم، احتمال اینکه مجموع عضوهای آن فرد باشد چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{3}{10}$ (۴) $\frac{7}{10}$

۲۵۷- اگر $P(A) = \frac{1}{3}$ ، $P(B') = \frac{1}{6}$ و A و B مستقل از هم باشند، مقدار $P(A' \cup B)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{14}{15}$ (۲) $\frac{17}{18}$ (۳) $\frac{8}{9}$ (۴) $\frac{11}{12}$

۲۵۸- احتمال اینکه پگاه در رشته پزشکی قبول شود ۷۵٪ و احتمال اینکه او در رشته پزشکی قبول نشود اما در رشته دندانپزشکی قبول شود برابر ۲۴٪ است. احتمال اینکه پگاه در رشته دندانپزشکی قبول نشود چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{4}{5}$

۲۵۹- در جعبه‌ای دو مهره قرمز و شش مهره آبی وجود دارد. در جعبه‌ای دیگر، پنج مهره قرمز و سه مهره آبی وجود دارد. اگر به تصادف یکی از جعبه‌ها را انتخاب کنیم و مهره‌ای از آن بیرون بیاوریم، احتمال اینکه آبی باشد چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{3}{8}$ (۳) $\frac{7}{16}$ (۴) $\frac{9}{16}$

۲۶۰- میانگین ۱۰ داده برابر $\frac{17}{5}$ است. اگر به این داده‌ها ۴ داده ۱۳، ۱۹، ۲۹ و ۳۰ را اضافه کنیم، میانگین کل ۱۴ داده برابر کدام می‌شود؟

- (۱) ۱۸ (۲) $\frac{18}{3}$ (۳) $\frac{18}{7}$ (۴) ۱۹

آزمون فصل بازه و مجموعه

آزمون ۲۷

سؤال	گام
۲۶۱	۲۴۵ ۲۴۸
۲۶۲	۲۴۵
۲۶۳	۲۴۵
۲۶۴	۲۴۷ ۲۴۸
۲۶۵	۲۵۱
۲۶۶	۲۵۱ ۲۵۲
۲۶۷	۲۵۲ ۲۵۳
۲۶۸	۲۵۱
۲۶۹	۲۵۲
۲۷۰	۲۵۲

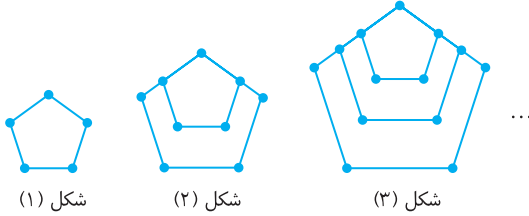
- ۲۶۱- اگر مجموعه مرجع $[-3, 9]$ باشد، $A = (3, 7]$ و $B = (-1, 9)$ ، مجموع عددهای صحیح در مجموعه $A' - B'$ چقدر است؟
 (۱) ۲۰ (۲) ۱۴ (۳) ۱۳ (۴) ۲۱
- ۲۶۲- اگر اشتراک دو بازه $[-2, 4]$ و $(2a, a)$ تهی نباشد، مجموعه مقادیر ممکن برای a کدام است؟
 (۱) $(-1, 0)$ (۲) $(-2, 0)$ (۳) $(-4, 0)$ (۴) $(-\infty, -2)$
- ۲۶۳- اگر $A \cap B = (1, 3]$ و $A - B = [-2, 1]$ ، مجموعه A کدام است؟
 (۱) $[-2, 2]$ (۲) $(-2, 2)$ (۳) $(-2, 3]$ (۴) $[-2, 3]$
- ۲۶۴- مجموعه‌های A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه مرجع U هستند. اگر A مجموعه‌ای متناهی و B مجموعه‌ای نامتناهی باشد، کدام مجموعه حتماً نامتناهی است؟
 (۱) $A' - B$ (۲) $A - B'$ (۳) $B - A$ (۴) $B' - A'$
- ۲۶۵- مجموعه‌های A و B زیرمجموعه مجموعه مرجع U هستند. اگر $n(A) = 12$ ، $n(B) = 7$ و $n(A) = 3n(A')$ ، مجموعه B چند عضو دارد؟
 (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۸ (۴) ۹
- ۲۶۶- اگر مجموعه مرجع U باشد، $n(U) = 26$ ، $n(A \cup B) = 14$ و $n(A) = n(A')$ ، مقدار $n(B - A)$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۲۶۷- اگر $n(A) = n(B) + 3$ ، $n(A - B) = 2n(B - A)$ و $n(A \cap B) = 5$ ، مقدار $n(A \cup B)$ کدام است؟
 (۱) ۱۳ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶
- ۲۶۸- اگر U مجموعه مرجع باشد، $n(U) = 23$ ، $n(A) = 10$ و $n(B) = 7$ ، بیشترین مقدار ممکن $n(A' \cap B')$ کدام است؟
 (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴
- ۲۶۹- در کلاسی، هر دانش‌آموز دست کم به یکی از درس‌های فیزیک یا ریاضی علاقه‌مند است. ۶۰٪ از دانش‌آموزان یک کلاس به فیزیک و ۷۰٪ آن‌ها به ریاضیات علاقه‌مندند. اگر تعداد کسانی که به هر دو درس علاقه‌مندند ۶ نفر باشد، این کلاس چند دانش‌آموز دارد؟
 (۱) ۱۶ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴) ۲۲
- ۲۷۰- از ۱۲۰ دانش‌آموز پایه دهم ۱۰۵ نفر به ریاضیات و ۹۵ نفر به فیزیک علاقه دارند. حداقل چند نفر به هر دو درس علاقه دارند؟
 (۱) ۷۰ (۲) ۷۵ (۳) ۸۰ (۴) ۸۵

آزمون فصل الگو و دنباله (۱)

آزمون ۲۸

۲۷۱- تعداد نقاط روی شکل چندم از الگوی مقابل برابر ۶۱ است؟

- (۱) چهاردهم
(۲) پانزدهم
(۳) شانزدهم
(۴) هفدهم



۲۷۲- در دنباله با جمله عمومی $a_n = 95n - n^2$ چند جمله مثبت وجود دارد؟

- (۱) ۹۵ (۲) ۹۴ (۳) ۹۰ (۴) ۸۹

۲۷۳- در دنباله‌ای حسابی $a_5 = 2a_1$ ، مقدار $15a_{15}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۲۷۴- اگر $\log_2(16a)$ ، $\log_2(3a+4)$ و $\log_2 a$ سه جمله متوالی دنباله‌ای حسابی باشند، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۸

۲۷۵- جمله اول دنباله حسابی با جمله عمومی $a_n = 2 - 3n$ را ۴ واحد کاهش و قدرنسبت را ۶ واحد افزایش می‌دهیم. جمله

بیست و یکم دنباله حسابی جدید کدام است؟

- (۱) ۵۰ (۲) ۵۲ (۳) ۵۵ (۴) ۵۷

۲۷۶- در یک دنباله حسابی با n جمله، مجموع سه جمله اول برابر $6 - \sqrt{2}$ و مجموع سه جمله آخر برابر $6 + \sqrt{2}$ است. مجموع جمله اول و جمله آخر دنباله کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۲۷۷- حاصل ضرب پانزده جمله اول دنباله هندسی $\frac{1}{2}, 1, 2, \dots$ کدام است؟

- (۱) 2^{30} (۲) 2^{60} (۳) 2^{75} (۴) 2^{90}

۲۷۸- اگر عددهای $3x-1$ ، $2x+3$ و $y-9$ جمله‌های متوالی دنباله‌ای حسابی و هندسی باشند، حاصل $x+y$ کدام است؟

- (۱) ۳۲ (۲) ۲۸ (۳) ۲۲ (۴) ۲۴

۲۷۹- اگر x, y, z, t جمله‌های متوالی دنباله‌ای هندسی باشند، $x+z=20$ و $y+t=60$ ، قدرنسبت این دنباله هندسی چقدر است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۸۰- در دنباله‌ای هندسی $a_3 - a_5 = 96$ و $a_8 - a_6 = 12$ ، جمله پنجم این دنباله چقدر است؟

- (۱) -۶۴ (۲) -۱۶ (۳) -۳۲ (۴) -۸

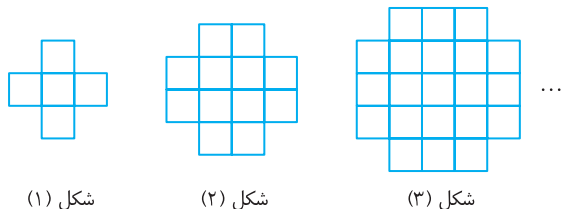
سؤال	گام
۲۷۱	۲۵۵
۲۷۲	۲۵۷
۲۷۳	۲۵۹
۲۷۴	۲۶۴ ۳۴۸
۲۷۵	۲۵۹
۲۷۶	۲۶۳
۲۷۷	۲۶۸ ۲۷۰
۲۷۸	۲۷۴
۲۷۹	۲۶۸
۲۸۰	۲۶۸

آزمون فصل الگو و دنباله (۲)

آزمون ۲۹

سؤال	گام
۲۸۱	۲۵۵
۲۸۲	۲۵۷
۲۸۳	۲۵۷
۲۸۴	۲۶۲
۲۸۵	۲۵۹
۲۸۶	۲۶۴
۲۸۷	۲۷۲
۲۸۸	۲۵۹
۲۸۹	۲۶۴
۲۹۰	۲۵۹

۲۸۱- الگوی مقابل از مربع‌های 1×1 ساخته شده است. مساحت شکل هشتم کدام است؟



- (۱) ۶۴
(۲) ۶۰
(۳) ۹۶
(۴) ۱۰۰

شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

۲۸۲- بزرگ‌ترین جمله دنباله با جمله عمومی $a_n = -2n^2 + 19n + 1$ چقدر است؟

- (۱) ۴۵ (۲) ۴۶ (۳) ۴۷ (۴) ۴۸

۲۸۳- اگر جمله عمومی دنباله‌ای به صورت $a_n = \frac{2n-1}{n+2}$ باشد، چند جمله این دنباله در بازه $(\frac{9}{10}, \frac{11}{10})$ هستند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۸۴- در دنباله‌ای حسابی $a_7 + a_9 = 0$ و $a_7 + a_9 = 128$. قدرنسبت دنباله کدام است؟

- (۱) ± 3 (۲) ± 2 (۳) ± 4 (۴) ± 6

۲۸۵- در دنباله‌ای حسابی مجموع جمله‌های سوم، هفتم، چهاردهم و هجدهم برابر با ۱۰ شده است. مجموع جمله اول و جمله بیستم دنباله چقدر است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۱۵ (۳) ۱۰ (۴) ۵

۲۸۶- اگر x واسطه حسابی $\sin^2 \alpha$ و $\cos^2 \alpha$ و y واسطه هندسی $\tan^2 \alpha$ و $\cot^2 \alpha$ باشد، مقدار $x+y$ کدام است؟ ($y > 0$)

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{5}{2}$

۲۸۷- اگر عددهای جدول زیر جملات متوالی دنباله‌ای هندسی باشند، مقدار xyz کدام است؟

x	$\frac{1}{2}$	y	z	۳۲
-----	---------------	-----	-----	----

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۶

۲۸۸- در جدول مقابل عددهای ستون A از بالا به پایین جمله‌های متوالی دنباله‌ای هندسی هستند و عددهای سطر B از چپ به راست جمله‌های متوالی دنباله‌ای حسابی. مقدار $a+b$ کدام است؟

A				
				$0/125$
B	۴			20
		a		b

- (۱) ۵۶
(۲) ۵۸
(۳) ۶۰
(۴) ۶۲

۲۸۹- جمله‌های اول، دوم و چهارم یک دنباله هندسی غیرثابت متوالی یک دنباله حسابی‌اند. اگر قدرنسبت دنباله هندسی عددی مثبت باشد، مقدار آن کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

۲۹۰- مجموع جمله‌های دنباله حسابی a, b, c برابر ۱۵ است. اگر $a+8, b+6, c+4$ دنباله‌ای هندسی باشد، مقدار ac کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۸ (۳) ۲۱ (۴) ۲۴

آزمون فصل توان، ریشه، اتحاد، تجزیه و تقسیم (۱)

آزمون ۳۰

سؤال	گام
۲۹۱	۲۷۸ ۲۷۹
۲۹۲	۲۷۸ ۲۷۹
۲۹۳	۲۸۱ ۲۸۴
۲۹۴	۲۸۱ ۲۸۲ ۲۸۷ ۲۹۱
۲۹۵	۲۸۵
۲۹۶	۲۸۲ ۲۸۸
۲۹۷	۲۸۱ ۲۸۲ ۲۸۹
۲۹۸	۲۸۲ ۲۸۷ ۲۹۱
۲۹۹	۲۹۳
۳۰۰	۲۹۳

۲۹۱- عبارت $\frac{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}\sqrt{x}}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\sqrt[6]{x}$ (۲) $\sqrt[3]{x}$ (۳) $\sqrt[3]{x^2}$ (۴) $\sqrt{x}$

۲۹۲- اگر $\sqrt[4]{x^5} = \sqrt[2]{x^2} \sqrt[4]{\frac{1}{x}}$ ، مقدار x کدام است؟

- (۱) $\sqrt[5]{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt[5]{4}$

۲۹۳- اگر $a + \frac{2}{a} = 25$ ، مقدار $\frac{(a^2-4)(a^2-1)}{a^2}$ کدام است؟

- (۱) ۶۰۰ (۲) ۶۰۶ (۳) ۶۱۲ (۴) ۶۱۶

۲۹۴- اگر $a = 3 + \sqrt{3}$ و $b = 3 - \sqrt{3}$ ، مقدار $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}$ کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۶ (۳) ۱۸ (۴) ۲۶

۲۹۵- اگر $\sqrt[3]{a+9} - \sqrt[3]{a-9} = 3$ ، مقدار a^2 کدام است؟

- (۱) ۵۴ (۲) ۸۰ (۳) ۸۲ (۴) ۹۰

۲۹۶- اگر $f(x) = \frac{x^4-1}{(x^3+x)(x^6-x^4+x^2-1)}$ ، مقدار $f(-\frac{2}{3})$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{3}{4}$

۲۹۷- کدام عبارت در تجزیه $x^2 - 2x + 4y - y^2 - 3$ وجود دارد؟

- (۱) $x+y+1$ (۲) $x-y-3$ (۳) $x-y+1$ (۴) $x+y+3$

۲۹۸- مقدار $\frac{\sqrt[3]{2+1}}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2+1}}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\sqrt[3]{4}-1$ (۲) $\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}$ (۳) $\sqrt[3]{2}-1$ (۴) $4-\sqrt[3]{2}$

۲۹۹- اگر $P(x+3) = x^3 - mx^2 + mx + 2$ و باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x-3)$ بر $x-4$ برابر ۶ باشد، مقدار m کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۱ (۴) ۲

۳۰۰- $P(x)$ و $Q(x)$ چندجمله‌ای هستند و $P(x-1) = (3-2x)Q(1-x)$. اگر باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+2$ برابر ۱۰ باشد، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $Q(x)$ بر $x-2$ چقدر است؟

- (۱) ۲ (۲) ۵ (۳) ۱۰ (۴) ۲۰

آزمون فصل توان، ریشه، اتحاد، تجزیه و تقسیم (۲)

آزمون ۳۱

سؤال	گام
۳۰۱	۲۷۶ ۲۸۲
۳۰۲	۲۷۸ ۲۷۹ ۲۸۰
۳۰۳	۲۸۴
۳۰۴	۲۸۱ ۲۸۲
۳۰۵	۲۸۱ ۲۸۵
۳۰۶	۲۸۱ ۲۸۵
۳۰۷	۲۸۴ ۲۸۹
۳۰۸	۲۸۱ ۲۸۲
۳۰۹	۲۸۲ ۲۹۱
۳۱۰	۲۹۳

۳۰۱- مقدار $\frac{\sqrt{\sqrt{5}+2} \times \sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt[6]{\sqrt{5}+2}}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\sqrt{5}+2$ (۳) $\sqrt{5}-2$ (۴) ۲

۳۰۲- اگر $a=\sqrt{2}$ ، $b=\sqrt[3]{4}$ و $c=\sqrt[3]{2\sqrt{3}}$ ، کدام گزینه درست است؟

- (۱) $a < b < c$ (۲) $c < a < b$ (۳) $a < c < b$ (۴) $c < b < a$

۳۰۳- اگر $a+b=8$ و $b-c=11$ ، مقدار $a^2+ab+bc+ca$ کدام است؟

- (۱) -۲۶ (۲) -۲۴ (۳) -۲۰ (۴) -۱۸

۳۰۴- اگر $a-b+\sqrt{c}=6$ و $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}=3$ ، مقدار a کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{4}$ (۲) $\frac{16}{9}$ (۳) $\frac{25}{4}$ (۴) $\frac{25}{16}$

۳۰۵- اگر $a+\frac{1}{a}=3$ ، مقدار $a^5+\frac{1}{a^5}$ کدام است؟

- (۱) ۱۲۱ (۲) ۱۲۲ (۳) ۱۲۳ (۴) ۱۲۴

۳۰۶- a عددی مثبت است و $\frac{a^2}{4}+\frac{4}{a^2}=23$ ، مقدار $\frac{a^3}{8}+\frac{8}{a^3}$ کدام است؟

- (۱) ۱۱۰ (۲) ۱۱۵ (۳) ۱۲۰ (۴) ۱۳۰

۳۰۷- کدام گزینه عاملی از $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$ نیست؟

- (۱) x^2-x+5 (۲) x^2+x+5 (۳) $x-1$ (۴) $x+2$

۳۰۸- مقدار $\frac{1}{3}(\sqrt{7}-1)\sqrt{4+\sqrt{7}}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{2}$

۳۰۹- مقدار $\frac{2}{1-\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{6}}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}$ (۳) $(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{2})$ (۴) $(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{2})$

۳۱۰- اگر $P(x)=x^4+ax^3+6x^2+bx+10$ و باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x-1)$ بر $x-2$ برابر ۱۲ باشد، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x+1)$ بر $x+2$ چقدر است؟

- (۱) ۲۲ (۲) ۱۲ (۳) -۱۲ (۴) -۲۲

آزمون فصل توان، ریشه، اتحاد، تجزیه و تقسیم (۳)

آزمون ۳۲

- ۳۱۱- اگر $x = \sqrt[3]{3\sqrt{3}}$ مقدار $\sqrt[3]{x^{21}}$ کدام است؟
 (۱) ۳ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) ۹ (۴) $\sqrt[3]{9}$
- ۳۱۲- مقدار $\sqrt[3]{2\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}}} \times \sqrt[9]{16}$ کدام است؟
 (۱) $\sqrt[9]{16}$ (۲) $\sqrt[9]{8}$ (۳) $\sqrt[9]{4}$ (۴) ۲
- ۳۱۳- اگر $a, b > 0$ حاصل $\sqrt[3]{\frac{a}{b^3}} \times \sqrt[3]{\frac{b^2}{a^5}} \times \sqrt[12]{a^{14}b^{10}}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{5}{a^6 b^3}$ (۲) $\frac{1}{a^3 b^6}$ (۳) $\frac{5}{a^6}$ (۴) ۱
- ۳۱۴- اگر $3^{x-1} + 3^{-x-1} = 2$ مقدار $9^x + 9^{-x}$ کدام است؟
 (۱) ۳۴ (۲) ۳۶ (۳) ۳۸ (۴) ۴۰
- ۳۱۵- اگر $a = \frac{\sqrt{17}+3}{2}$ و $a+b = \sqrt{17}$ مقدار $a^3 - b^3 + 9ab$ کدام است؟
 (۱) ۶۲ (۲) ۶۳ (۳) ۶۴ (۴) ۶۵
- ۳۱۶- اگر $\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{(1+\sqrt[3]{2})(1+\sqrt[3]{4})}$ مقدار x^{48} کدام است؟
 (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۶
- ۳۱۷- مقدار $\sqrt{\sqrt{2}+1} \times \sqrt[3]{\sqrt{2}-1} \times \sqrt[6]{\sqrt{2}-1}$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt[3]{2}$ (۴) ۲
- ۳۱۸- مقدار $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1} - \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) -۱ (۴) $-\frac{1}{2}$
- ۳۱۹- کدام عبارت در تجزیه عبارت $x^2y^2 - x^2 - y^2 - 4xy + 1$ وجود دارد؟
 (۱) $xy - x + y - 1$ (۲) $xy + x - y - 1$
 (۳) $xy - x - y - 1$ (۴) $xy + x + y + 1$
- ۳۲۰- چندجمله‌ای $P(x+1)$ بر $x-2$ بخش‌پذیر است. اگر $P(1-x) = ax^2 - x + 2a$ مقدار a کدام است؟
 (۱) -۱ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{3}$ (۴) $-\frac{1}{4}$

سؤال	گام
۳۱۱	۲۷۸ ۲۷۹
۳۱۲	۲۷۸ ۲۷۹
۳۱۳	۲۷۸ ۲۷۹
۳۱۴	۲۸۱
۳۱۵	۲۸۷
۳۱۶	۲۸۲
۳۱۷	۲۷۶ ۲۸۲
۳۱۸	۲۸۱ ۲۸۲ ۲۹۱
۳۱۹	۲۸۱ ۲۸۲
۳۲۰	۲۹۲ ۲۹۳

آزمون فصل توان، ریشه، اتحاد، تجزیه و تقسیم (۴)

آزمون ۳۳

سؤال	گام
۳۲۱	۲۷۸ ۲۷۹
۳۲۲	۲۷۸ ۲۷۹
۳۲۳	۲۷۸ ۲۷۹
۳۲۴	۲۸۳
۳۲۵	۲۸۱ ۲۸۷
۳۲۶	۲۸۱ ۲۸۵
۳۲۷	۲۸۹
۳۲۸	۲۸۱ ۲۸۲
۳۲۹	۲۸۱ ۲۸۲ ۲۸۷
۳۳۰	۲۹۳

- ۳۲۱- مقدار $\sqrt[3]{2^4} \times \sqrt[4]{2^3}$ کدام است؟
 (۱) ۲ (۲) $\sqrt[3]{2}$ (۳) $\sqrt[4]{2}$ (۴) $\sqrt[12]{2}$
- ۳۲۲- مقدار $\frac{\sqrt{2}\sqrt[3]{2}\sqrt[4]{2}}{\sqrt[5]{2}\sqrt[6]{2}}$ کدام است؟
 (۱) $\sqrt[2]{2}$ (۲) $\sqrt[3]{2}$ (۳) $\sqrt[4]{2}$ (۴) $\sqrt[12]{2}$
- ۳۲۳- اگر $\sqrt[5]{3^5 9} = \sqrt[5]{27} \sqrt[5]{a}$ ، مقدار $\sqrt[4]{a}$ کدام است؟
 (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt[4]{3}}{3}$ (۴) $3\sqrt{3}$
- ۳۲۴- اگر $2a^2 + b^2 + 3c^2 = 23$ ، $2a^2 + 3b^2 + c^2 = 33$ و $ab + bc + ca = 11$ ، مقدار $|a+b+c|$ کدام است؟
 (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷
- ۳۲۵- اگر $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 1$ و $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 3$ ، مقدار $\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}$ کدام است؟
 (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷
- ۳۲۶- اگر $a^2 + b^2 = \sqrt{6}$ و $ab = 1$ ، مقدار $a^{12} + b^{12}$ کدام است؟
 (۱) ۵۲ (۲) ۵۳ (۳) ۵۴ (۴) ۵۵
- ۳۲۷- کدام گزینه عاملی از $15x^{10} + 13x^5 + 2$ است؟
 (۱) $3x^5 - 2$ (۲) $3x^5 - 1$ (۳) $5x^5 + 1$ (۴) $5x^5 - 2$
- ۳۲۸- مقدار $(\sqrt{11} + \sqrt{7})\sqrt{9 - \sqrt{77}}$ برابر کدام است؟
 (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $3\sqrt{2}$ (۴) $4\sqrt{2}$
- ۳۲۹- عبارت $\frac{x^{18} - 1}{(x^6 + x^3 + 1)(x^6 - x^3 + 1)}$ برابر کدام است؟
 (۱) $x^2 - 1$ (۲) $x^6 - 1$ (۳) $x^6 - 1$ (۴) $x^8 - 1$
- ۳۳۰- باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای‌های $2P(x) - 1$ و $Q(x) + x$ بر $x + 1$ به ترتیب برابر ۳ و -۳ است. باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $(x-3)P(1-x) + Q(3-2x)$ بر $x-2$ کدام است؟
 (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) -۴

آزمون فصل معادله، تعیین علامت و نامعادله (۱)

آزمون ۳۴

سؤال	گام
۳۳۱	۳۰۰
۳۳۲	۲۹۱ ۲۹۶ ۳۰۵
۳۳۳	۳۰۲
۳۳۴	۳۰۲ ۳۰۴
۳۳۵	۳۱۲ ۳۱۴
۳۳۶	۳۱۲ ۳۱۵
۳۳۷	۳۲۵ ۳۲۶
۳۳۸	۳۲۵ ۳۲۷
۳۳۹	۳۱۸
۳۴۰	۳۱۸ ۳۱۹ ۳۲۴

۳۳۱- به ازای چند مقدار m معادله $mx^2 - 2x + 4m = 0$ فقط یک جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۳۲- مجموع دو عدد برابر ۴ و حاصل ضرب آن‌ها برابر ۲- است. نسبت عدد بزرگ‌تر به عدد کوچک‌تر کدام است؟

- (۱) $2 - 2\sqrt{6}$ (۲) $-2 - 2\sqrt{6}$ (۳) $-5 - 2\sqrt{6}$ (۴) $-5 - \sqrt{6}$

۳۳۳- اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادله $x^2 + 8x - 13 = 0$ باشند، حاصل $\frac{1}{x_1 + 2} + \frac{1}{x_2 + 2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{11}$ (۲) $\frac{4}{25}$ (۳) $\frac{4}{11}$ (۴) $\frac{2}{25}$

۳۳۴- در معادله $x^2 - 8x + m = 0$ اگر یکی از جواب‌ها از دو برابر جواب دیگر ۴ واحد بیشتر باشد، مقدار m کدام است؟

- (۱) $\frac{20}{3}$ (۲) $\frac{80}{9}$ (۳) $\frac{80}{3}$ (۴) $\frac{40}{9}$

۳۳۵- حاصل ضرب جواب‌های معادله $\frac{4}{x^2 - 4} + \frac{5}{x^2 - 3} = 2$ کدام است؟

- (۱) ۲۸ (۲) ۸ (۳) $\frac{7}{2}$ (۴) ۲

۳۳۶- صد کیلوگرم محلول آب و شکر با غلظت ۲۵٪ موجود است. اگر یک سوم از آب آن را تبخیر کنیم، چند کیلوگرم باید شکر اضافه کنیم تا غلظت آن ۵۰٪ گردد؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۵ (۳) ۳۰ (۴) این کار ممکن نیست.

۳۳۷- معادله $2\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2} = 2$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۳۳۸- جواب معادله $\sqrt{2x-1} + x = \sqrt{3x-1}$ کدام است؟

- (۱) $5 - 2\sqrt{5}$ (۲) $5 + 2\sqrt{5}$ (۳) $\frac{5 + 2\sqrt{5}}{2}$ (۴) $\frac{5 - 2\sqrt{5}}{2}$

۳۳۹- جدول تعیین علامت عبارت $P(x) = mx^2 + (m^2 - 12)x - m - 2n$ به صورت زیر است. مقدار n کدام است؟

x	$-\infty$	۱	۳	$+\infty$
$P(x)$		-	+	-

- (۱) -۱۲ (۲) ۱۲ (۳) -۴ (۴) ۴

۳۴۰- اگر مجموعه جواب‌های نامعادله $\frac{x^2 - mx - m}{x^2 - x + 1} \leq 3$ مجموعه اعداد حقیقی باشد، حداکثر مقدار m کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

آزمون فصل معادله، تعیین علامت و نامعادله (۲)

آزمون ۳۵

سؤال	گام
۳۴۱	۳۰۰
۳۴۲	۳۰۲ ۳۰۳
۳۴۳	۳۰۲ ۳۰۵
۳۴۴	۳۰۲ ۳۰۴
۳۴۵	۳۰۸ ۳۱۲
۳۴۶	۳۱۲ ۳۱۳
۳۴۷	۳۲۵ ۳۲۶
۳۴۸	۳۲۵ ۳۲۸
۳۴۹	۳۱۸ ۳۲۴
۳۵۰	۳۲۲ ۳۲۴

- ۳۴۱- اگر معادله $kx^2 + (2k-8)x + k-7 = 0$ یک ریشه مضاعف داشته باشد، معادله $x^2 - kx + 1 = 0$ چند جواب دارد؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) حداکثر ۱
- ۳۴۲- اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادله $x^2 - 6x + 4 = 0$ باشند، مقدار $x_1\sqrt{x_1} + x_2\sqrt{x_2}$ کدام است؟
 (۱) $2\sqrt{10}$ (۲) $4\sqrt{10}$ (۳) $6\sqrt{5}$ (۴) $8\sqrt{5}$
- ۳۴۳- اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادله $x^2 - 8x + 2 = 0$ باشند، معادله‌ای که جواب‌هایش $x_1 - \frac{3}{x_1}$ و $x_2 - \frac{3}{x_2}$ هستند، کدام است؟
 (۱) $x^2 - 4x + 1 = 0$ (۲) $x^2 - 8x + 1 = 0$ (۳) $2x^2 + 8x + 1 = 0$ (۴) $2x^2 - 8x + 1 = 0$
- ۳۴۴- اگر $x = \sqrt{2} - 1$ یکی از جواب‌های معادله $x^2 + \sqrt{2}mx + m = 0$ باشد، جواب دیگر معادله کدام است؟
 (۱) $\frac{1-\sqrt{2}}{7}$ (۲) $\frac{1+\sqrt{2}}{7}$ (۳) $\frac{1-2\sqrt{2}}{7}$ (۴) $\frac{1+2\sqrt{2}}{7}$
- ۳۴۵- معادله $\frac{2}{(x+1)^2} - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x^2+1} = 0$ چند جواب دارد؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر
- ۳۴۶- به ازای چند مقدار a معادله $\frac{1}{x} + \frac{3}{x+a} = \frac{4}{x-1}$ جواب ندارد؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۳۴۷- معادله $\sqrt{x^4 + 2x - 5} = 1 + x$ چند جواب دارد؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳
- ۳۴۸- حاصل ضرب جواب‌های معادله $x\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[3]{x^2} + 3 = 0$ کدام است؟
 (۱) ۱۲ (۲) ۲۷ (۳) ۴۸ (۴) ۶۴
- ۳۴۹- مجموعه جواب‌های نامعادلات $2x^2 - 4 \leq x^2 \leq 18 - 3x^2$ شامل چند عدد صحیح است؟
 (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸
- ۳۵۰- مجموعه جواب‌های نامعادله $\frac{x+6}{x-4} \geq x$ به صورت $(-\infty, a] \cup (b, \infty)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟
 (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

آزمون ۳۶

آزمون فصل قدر مطلق و جزء صحیح (۱)

۳۵۱- مجموع جواب‌های معادله $|2x^2 + 5x - 3| = |2x + 6|$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) -۲ (۳) -۴ (۴) -۵

۳۵۲- مجموع جواب‌های معادله $|x-1| = |x^2-3|$ چقدر است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ۲

۳۵۳- اگر $|2x-5| < 3$ ، ساده شده عبارت $|4x - \sqrt{x^2 - 8x + 16}|$ کدام است؟

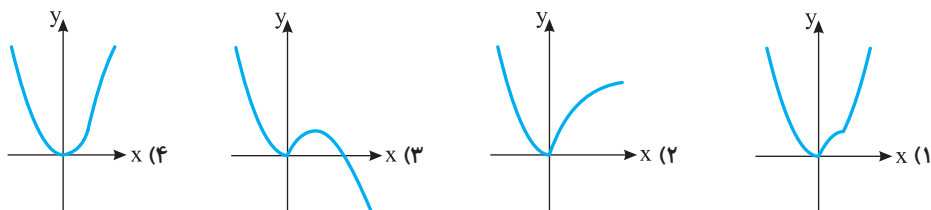
- (۱) $3x-2$ (۲) $-3x+2$ (۳) $5x-4$ (۴) $-5x+4$

۳۵۴- مجموعه جواب‌های نامعادله $|x^2-3x| < 2x$ بازه (a, b) است. مقدار $b-a$ کدام است؟

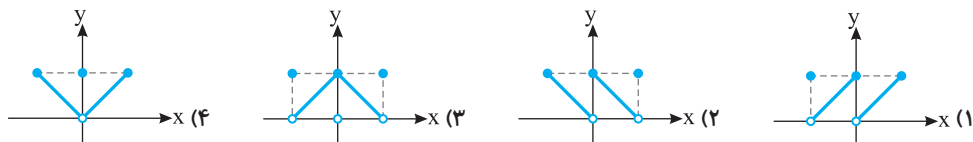
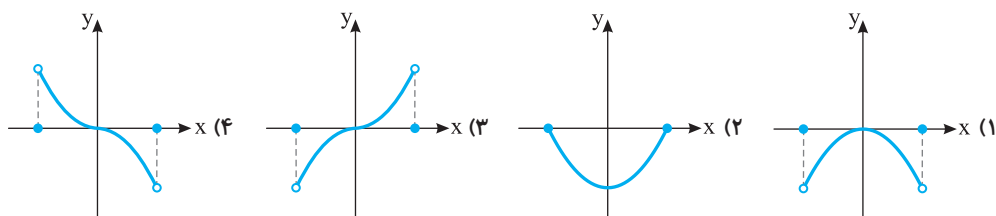
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۵۵- اگر $-3 \leq x \leq 6$ ، مجموع حداقل و حداکثر مقدار تابع $f(x) = ||x-1| - 8|$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۴

۳۵۶- نمودار تابع $f(x) = |x^2 - x| + x$ کدام است؟۳۵۷- اگر $f(x) = \left[\frac{x}{11}\right] - \left[\frac{-x}{17}\right]$ ، مقدار $f(120)$ کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۷ (۳) ۱۸ (۴) ۲۰

۳۵۸- نمودار تابع f با دامنه $[-1, 1]$ و ضابطه $f(x) = [x] + |x-1|$ کدام است؟۳۵۹- نمودار تابع $f(x) = x^2([x] - x)$ روی بازه $[-1, 1]$ کدام است؟۳۶۰- اگر $f(x) = 4x - [x] - [3x]$ ، حاصل $f(x-1)$ کدام است؟

- (۱) $f(x)$ (۲) $-f(x)$ (۳) $f(x)-1$ (۴) $-f(x)+1$

سؤال	گام
۳۵۱	۳۲۹ ۳۳۰
۳۵۲	۳۰۲ ۳۳۰
۳۵۳	۳۲۹ ۳۳۱
۳۵۴	۳۲۹ ۳۳۱
۳۵۵	۲۲ ۳۲۹ ۳۳۵
۳۵۶	۳۳۵
۳۵۷	۳۳۷ ۳۳۹
۳۵۸	۳۳۷ ۳۴۰
۳۵۹	۳۳۷ ۳۴۰
۳۶۰	۳۳۷ ۳۳۹

آزمون فصل قدر مطلق و جزء صحیح (۲)

آزمون ۳۷

سؤال	گام
۳۶۱	۳۲۹ ۳۳۰
۳۶۲	۳۳۰
۳۶۳	۳۳۱
۳۶۴	۳۲۴ ۳۲۹ ۳۳۱
۳۶۵	۳۲۴ ۳۲۹ ۳۳۱
۳۶۶	۳۳۶
۳۶۷	۳۳۷ ۳۴۰
۳۶۸	۳۳۷ ۳۴۰
۳۶۹	۲۱ ۳۳۱ ۳۳۷
۳۷۰	۳۳۷ ۳۳۸

۳۶۱- معادله $|x+1|-2x=4$ چند جواب دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۳۶۲- معادله $|x-k|=4$ جواب ندارد. حدود k کدام است؟

- ۱ (۱) $k < -4$ ۲ (۲) $k < -4$ ۳ (۳) $k > 4$ ۴ (۴) $k > -4$

۳۶۳- چند عدد صحیح در نامعادله $3-|x-2| \leq 4$ صدق می‌کنند؟

- ۱۲ (۱) ۱۵ (۲) ۱۸ (۳) ۴ (۴) نامتناهی

۳۶۴- مجموعه جواب‌های نامعادله $|\frac{x+2}{2x-1}| > 1$ کدام است؟

- ۱ (۱) $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 3)$ ۲ (۲) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, 2)$ ۳ (۳) $(\frac{1}{2}, 3)$ ۴ (۴) $(-\frac{1}{3}, 2)$

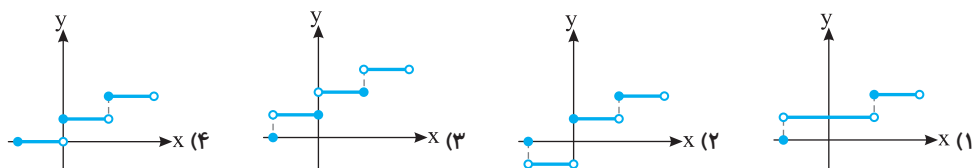
۳۶۵- مجموعه جواب‌های نامعادله $x^2+2x < 1+|x+1|$ شامل چند عدد صحیح است؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

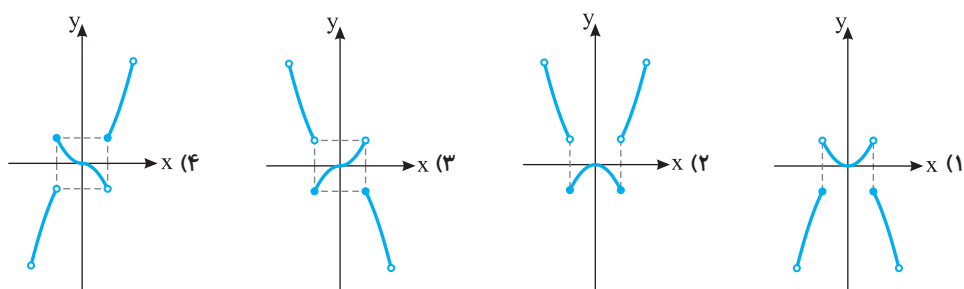
۳۶۶- اگر همه نمودار تابع $y=|x-1|+|x-3|$ بالاتر از خط $y=a$ قرار نگیرد. حدود مقدارهای a کدام است؟

- ۰ < a ≤ ۴ (۱) a ≥ ۴ (۲) ۰ < a ≤ ۲ (۳) a ≥ ۲ (۴)

۳۶۷- نمودار تابع f با دامنه $[-2, 4]$ و ضابطه $f(x) = [\frac{x}{2}+1]$ کدام است؟



۳۶۸- نمودار تابع $f(x) = x^2(-1)^{[x]}$ روی بازه $(-2, 2)$ کدام است؟



۳۶۹- دامنه تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{1-|x+3|}$ بازه (a, b) است. مقدار $b-a$ کدام است؟

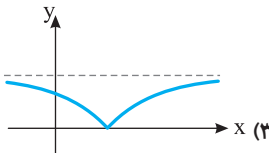
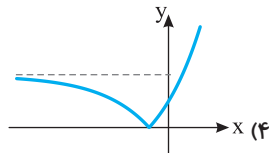
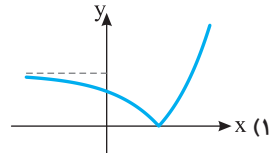
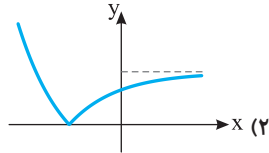
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۳۷۰- اگر مجموعه جواب‌های معادله $[\frac{3x-a}{2}] = 3$ بازه $[-\frac{2}{3}, 0)$ باشد، مقدار a کدام است؟

- ۴ (۱) -۶ (۲) -۸ (۳) -۱۰ (۴)

آزمون فصل توابع نمایی و لگاریتمی (۱)

آزمون ۳۸

۳۷۱- نمودار تابع $f(x) = |3^{x-1} - 1|$ کدام است؟۳۷۲- مجموع جواب‌های معادله $4^x - 3 \times 2^{x+2} + 27 = 0$ در کدام بازه است؟

- (۱) $(1, 2)$ (۲) $(2, 3)$ (۳) $(3, 4)$ (۴) $(4, 5)$

۳۷۳- فرض کنید $f(x) = a^x + b$. اگر $f(1) = 1$ و $f(2) = 7$ ، مقدار $f^{-1}(-\frac{5}{3})$ کدام است؟

- (۱) -3 (۲) 2 (۳) -1 (۴) 3

۳۷۴- برد تابع $f(x) = 2^x - \frac{|x|}{x}$ کدام است؟

- (۱) $(-1, +\infty)$ (۲) $(0, +\infty)$ (۳) $(-1, 0) \cup (2, +\infty)$ (۴) $(0, +\infty) - \{1\}$

۳۷۵- نمودار تابع $f(x) = \log_a(bx - 3)$ محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۵ قطع می‌کند. اگر نمودار تابع از نقطه $(15, 2)$ بگذرد،مقدار ab کدام است؟

- (۱) $\frac{6}{5}$ (۲) $\frac{8}{5}$ (۳) $\frac{12}{5}$ (۴) $\frac{14}{5}$
- ۳۷۶- اگر $\log 3 = a$ و $\log 2 = b$ ، مقدار $\log \sqrt[4]{72}$ برحسب a و b کدام است؟
- (۱) $\frac{2a+3b}{4}$ (۲) $\frac{3a+2b}{4}$ (۳) $\frac{a+3b}{4}$ (۴) $\frac{3a+b}{4}$

۳۷۷- مقدار $\frac{1}{\log_3 30} + \frac{1}{\log_3 30} + \frac{1}{\log_3 30}$ کدام است؟

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

۳۷۸- جواب معادله $\log(x-1) - \log x = \log(\log 2)$ کدام است؟

- (۱) $1 + \log_2 2$ (۲) $\log_2 5$ (۳) $\log_2 2$ (۴) $1 + \log_2 5$

۳۷۹- جواب معادله $2^{x+1} = 5^{x-1}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{1-2\log 2}$ (۲) $\frac{1}{1-\log 2}$ (۳) $\frac{1}{1-2\log 5}$ (۴) $\frac{1}{1-\log 5}$

۳۸۰- دامنه تابع $f(x) = \frac{\log(x+3)}{\log(2-x)}$ کدام است؟

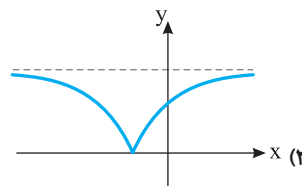
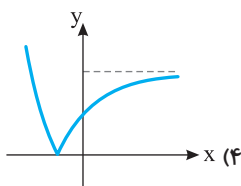
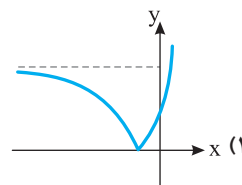
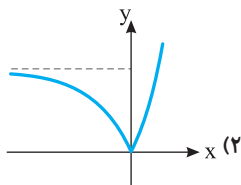
- (۱) $(-3, 2) - \{1\}$ (۲) $(-2, 3)$ (۳) $(-3, -2)$ (۴) $(-2, 3) - \{2\}$

سؤال	گام
۳۷۱	۳۰ ۳۱ ۳۷ ۳۴۳
۳۷۲	۳۴۲ ۳۴۵
۳۷۳	۶۱ ۳۴۲
۳۷۴	۲۲ ۳۰ ۳۳۵ ۳۴۳
۳۷۵	۳۴۷ ۳۵۰
۳۷۶	۳۴۸
۳۷۷	۳۴۸
۳۷۸	۳۱۲ ۳۴۸ ۳۵۴
۳۷۹	۳۴۲ ۳۴۷ ۳۴۸ ۳۴۹
۳۸۰	۲۱ ۳۵۲ ۳۵۴

آزمون فصل توابع نمایی و لگاریتمی (۲)

آزمون ۳۹

۳۸۱- نمودار تابع $f(x) = |2^{-x} - 2|$ کدام است؟



۳۸۲- در مورد نقاط تلاقی نمودار توابع $y = |x^2 - 1|$ و $y = 1 - 2^x$ کدام گزینه درست است؟

- (۱) یک نقطه با طول مثبت و یک نقطه با طول منفی.
(۲) دو نقطه با طولهای مثبت.
(۳) دو نقطه با طولهای منفی و یک نقطه با طول مثبت.
(۴) دو نقطه با طولهای منفی.

۳۸۳- معادله $2^{x+2} - 5^{x+2} = 2^{x+1} - 4 \times 5^{x+1}$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۳۸۴- مجموعه جوابهای نامعادله $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} > \frac{1}{9}$ به صورت $(-\infty, a)$ است. مقدار a کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{9}$ (۴) $\frac{9}{8}$

۳۸۵- نمودار تابع $f(x) = \log_p(ax+b)$ محور طولها را در نقطه‌ای به طول -1 و محور عرضها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. اگر دامنه این تابع بازه $(c, +\infty)$ باشد، حداقل مقدار c کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $-\frac{5}{2}$ (۴) $-\frac{9}{2}$

۳۸۶- اگر $\log 5 = a$ ، مقدار $\log_{\frac{2}{5}} \frac{2}{5}$ برحسب a کدام است؟

- (۱) $\frac{1-2a}{2-3a}$ (۲) $\frac{1-2a}{1+3a}$ (۳) $\frac{1-2a}{1-3a}$ (۴) $\frac{1-3a}{2-3a}$

۳۸۷- اگر $2^x = 5^y = 10$ ، مقدار $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{10}$ (۴) $\frac{1}{5}$

۳۸۸- اگر k جواب معادله $5^{\log_2 x} + 4 \times x^{\log_2 5} = 125$ باشد، مقدار $\log_2(k+4)$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۳۸۹- چند عدد طبیعی در نامعادله $\log_{\frac{1}{2}}(\log_3(x+1)) < -1$ صدق نمی‌کنند؟

- (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۷ (۴) ۶

۳۹۰- دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\log_3 x + 2 \log_x 3 - 3}$ به صورت $(a, b] \cup [9, +\infty)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

سؤال	گام
۳۸۱	۳۰ ۳۷ ۳۴۳
۳۸۲	۳۰ ۳۲ ۳۷ ۳۴۳
۳۸۳	۳۴۲ ۳۴۵
۳۸۴	۳۲۴ ۳۴۲ ۳۴۶
۳۸۵	۳۵۰ ۳۵۲
۳۸۶	۳۴۸
۳۸۷	۳۴۷ ۳۴۸
۳۸۸	۳۴۷ ۳۴۸ ۳۵۴
۳۸۹	۳۴۷ ۳۵۵
۳۹۰	۲۱ ۳۲۲ ۳۲۴ ۳۴۷ ۳۵۵

آزمون فصل استدلال و هندسه (۱)

آزمون ۴۰

سؤال	گام
۳۹۱	۳۶۰
۳۹۲	۳۵۹ ۳۷۲
۳۹۳	۳۶۰ ۳۶۲
۳۹۴	۳۶۰ ۳۶۲
۳۹۵	۳۶۰ ۳۶۲
۳۹۶	۳۶۴
۳۹۷	۳۶۹
۳۹۸	۳۶۹
۳۹۹	۳۶۹ ۳۷۲
۴۰۰	۳۶۰ ۳۶۸

۳۹۱- اگر $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{4x-ky}{7}$ ، مقدار k کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) -۲ (۴) ۲

۳۹۲- در شکل مقابل AC نیمساز زاویه KAD است. مقدار x کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۶

۳۹۳- در شکل مقابل $EF \parallel BC$ و $EF = \frac{3}{4} BC$. مقدار $x+y$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۷

۳۹۴- در شکل مقابل $EF \parallel BC$ و $AF - FC = \frac{3}{2}$. طول ضلع AC چقدر است؟

- (۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) ۳

۳۹۵- در شکل مقابل AB ، EF و CD موازی‌اند. مقدار $\frac{AE}{ED}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{4}{3}$

۳۹۶- در شکل مقابل AB ، EF و CD موازی‌اند. مقدار x کدام است؟

- (۱) ۱۴ (۲) ۱۶ (۳) ۱۸ (۴) ۲۴

۳۹۷- در شکل مقابل نسبت $\frac{BC}{DE}$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۳۹۸- در شکل مقابل محیط مثلث BCD برابر ۲۰ است. طول BC چقدر است؟

- (۱) ۹ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۷

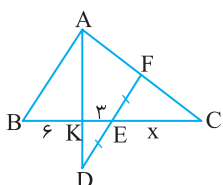
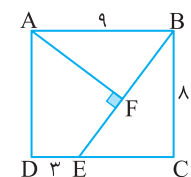
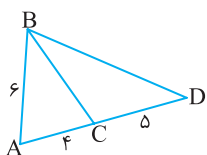
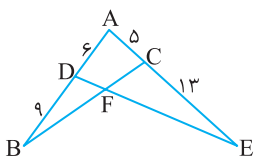
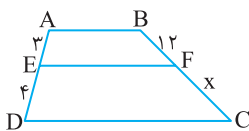
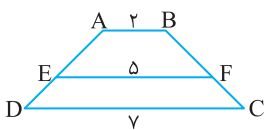
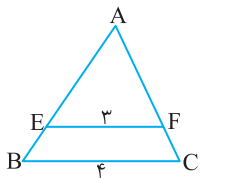
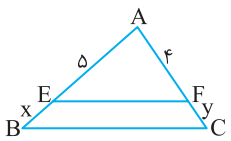
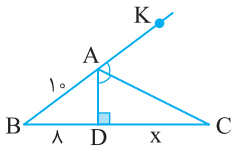
۳۹۹- در شکل مقابل $ABCD$ مستطیل است. طول پاره خط EF چقدر است؟

- (۱) $\frac{3}{8}$ (۲) $\frac{4}{2}$ (۳) $\frac{4}{4}$ (۴) $\frac{4}{6}$

۴۰۰- در شکل مقابل $DF \parallel AB$. طول پاره خط BC چقدر است؟

- (۱) ۱۴ (۲) ۱۶ (۳) ۱۸ (۴) ۲۴

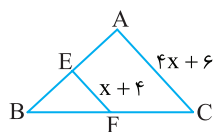
(۴) ۲



آزمون فصل استدلال و هندسه (۲)

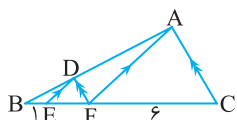
آزمون ۴۱

سؤال	گام
۴۰۱	۳۵۹ ۳۷۲
۴۰۲	۳۶۶
۴۰۳	۳۶۰ ۳۶۱
۴۰۴	۳۶۰ ۳۶۲
۴۰۵	۳۶۰ ۳۶۹
۴۰۶	۳۶۰ ۳۶۹
۴۰۷	۳۶۹ ۳۷۰
۴۰۸	۳۷۲
۴۰۹	۳۷۲
۴۱۰	۳۷۲



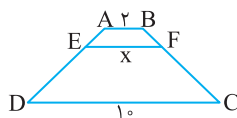
۴۰۱- در شکل مقابل E وسط ضلع AB و F وسط ضلع BC است. طول پاره خط EF چقدر است؟

- (۱) ۵
(۲) ۶
(۳) ۷
(۴) ۸



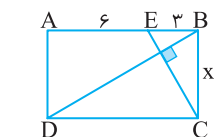
۴۰۲- در شکل مقابل ED||FA و FD||CA. طول پاره خط EF چقدر است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴



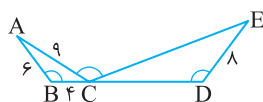
۴۰۳- در شکل مقابل AB، EF و CD موازی اند و DE=۳AE. مقدار x کدام است؟

- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۵
(۴) ۶



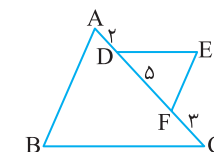
۴۰۴- در شکل مقابل ABCD مستطیل است. مقدار x کدام است؟

- (۱) $۳\sqrt{۲}$
(۲) $۲\sqrt{۲}$
(۳) $۲\sqrt{۳}$
(۴) $۳\sqrt{۳}$



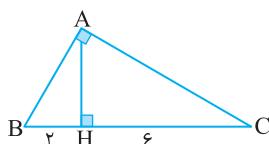
۴۰۵- در شکل زیر $\hat{A}BD = \hat{EDB} = \hat{ACE}$. مقدار $CD \times EC$ کدام است؟

- (۱) ۲۲۵
(۲) ۲۱۶
(۳) ۲۱۴
(۴) ۲۱۰



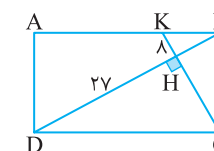
۴۰۶- در شکل مقابل DE||BC و EF||AB. اگر $DE + EF = ۹$ ، محیط مثلث ABC چقدر است؟

- (۱) ۳۶
(۲) ۳۲
(۳) ۲۸
(۴) ۲۶



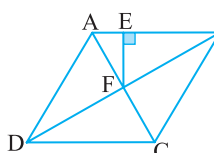
۴۰۷- در شکل مقابل مقدار $AB \times AC$ کدام است؟

- (۱) $۱۶\sqrt{۲}$
(۲) $۱۴\sqrt{۲}$
(۳) $۱۴\sqrt{۳}$
(۴) $۱۶\sqrt{۳}$



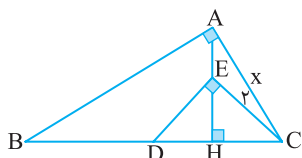
۴۰۸- در شکل مقابل ABCD مستطیل است. طول پاره خط BH چقدر است؟

- (۱) ۱۲
(۲) ۱۵
(۳) ۱۶
(۴) ۲۱



۴۰۹- در شکل مقابل ABCD لوزی است و $BE = ۳AE$. مقدار $\frac{BD}{AC}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{۳}$
(۲) $۲\sqrt{۳}$
(۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
(۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$



۴۱۰- در شکل مقابل $BD = DC$. مقدار x کدام است؟

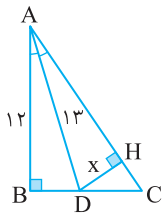
- (۱) $\sqrt{۲}$
(۲) $۲\sqrt{۲}$
(۳) $۳\sqrt{۲}$
(۴) $۴\sqrt{۲}$

آزمون فصل استدلال و هندسه (۳)

آزمون ۴۲

سؤال	گام
۴۱۱	۳۵۹ ۳۷۲
۴۱۲	۳۶۲ ۳۶۶
۴۱۳	۳۶۰ ۳۶۲
۴۱۴	۳۶۰ ۳۶۹
۴۱۵	۳۶۹
۴۱۶	۳۶۴
۴۱۷	۳۶۶ ۳۶۸
۴۱۸	۳۶۰ ۳۶۱ ۳۶۸
۴۱۹	۳۷۲
۴۲۰	۳۷۲

۴۱۱- در شکل مقابل AD نیمساز زاویه BAC است. مقدار x کدام است؟



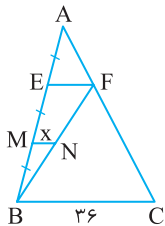
۵ (۱)

۱۲ (۲)

۷ (۳)

۹ (۴)

۴۱۲- در شکل مقابل نقطه‌های E و M پاره خط AB را به سه قسمت برابر تقسیم کرده‌اند و $EF \parallel MN \parallel BC$.



مقدار x کدام است؟

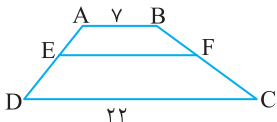
۴ (۱)

۶ (۲)

۹ (۳)

۱۲ (۴)

۴۱۳- در شکل مقابل $AB \parallel EF \parallel CD$ و $3BF = 2FC$. طول پاره خط EF چقدر است؟



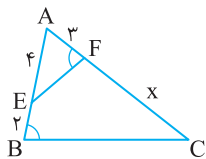
۱۲ (۲)

۱۴ (۴)

۱۱ (۱)

۱۳ (۳)

۴۱۴- در شکل مقابل $\angle ABC = \angle AFE$. مقدار x کدام است؟



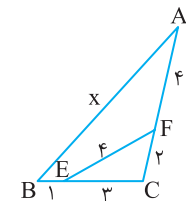
۴ (۱)

۵ (۲)

۶ (۳)

۸ (۴)

۴۱۵- در شکل مقابل مقدار x کدام است؟



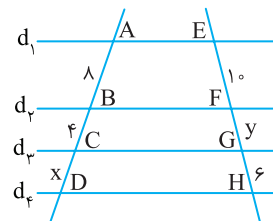
۶ (۱)

۸ (۲)

۱۰ (۳)

۱۲ (۴)

۴۱۶- در شکل مقابل خط‌های d_1, d_2, d_3, d_4 موازی‌اند. مقدار $x+y$ کدام است؟



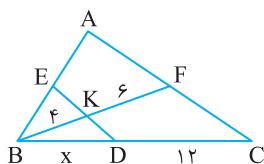
$\frac{47}{5}$ (۲)

$\frac{49}{5}$ (۴)

$\frac{46}{5}$ (۱)

$\frac{48}{5}$ (۳)

۴۱۷- در شکل مقابل نقطه‌های E و F به ترتیب وسط ضلع‌های AB و AC از مثلث ABC هستند. مقدار x کدام است؟



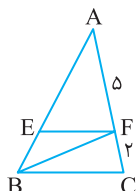
۴ (۲)

۸ (۴)

۳ (۱)

۶ (۳)

۴۱۸- در شکل مقابل $EF \parallel BC$. نسبت مساحت مثلث AEF به مساحت مثلث BEF چقدر است؟



$\frac{7}{2}$ (۲)

$\frac{3}{2}$ (۴)

$\frac{9}{2}$ (۱)

$\frac{5}{2}$ (۳)

۴۱۹- در شکل مقابل مقدار x کدام است؟

(۱) $۸\sqrt{۳}$

(۲) $\frac{۱۵\sqrt{۳}}{۲}$

(۳) $۴\sqrt{۳}$

(۴) $۵\sqrt{۳}$

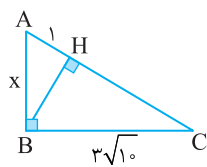
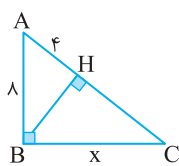
۴۲۰- در شکل مقابل مقدار x کدام است؟

(۱) $\sqrt{۶}$

(۲) $۲\sqrt{۲}$

(۳) $\sqrt{۱۰}$

(۴) $۲\sqrt{۳}$



آزمون جامع (۱)

آزمون ۴۳

۴۲۱- اگر a عضو بازه $(-a-2, -3a+2)$ باشد، مجموعه مقادیر ممکن برای a کدام است؟

- (۱) $[-1, \frac{1}{3}]$ (۲) $[\frac{1}{3}, 1]$ (۳) $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ (۴) $[-1, 1]$

۴۲۲- در یک دنباله حسابی با جمله اول a و قدرنسبت d تساوی $2 + \frac{4a_2}{a} = \frac{5a_3}{a_2}$ برقرار است. مقدار $\frac{a}{d}$ کدام است؟

- (۱) 2 یا $\frac{2}{3}$ (۲) -2 یا $\frac{2}{3}$ (۳) 2 یا $-\frac{2}{3}$ (۴) -2 یا $-\frac{2}{3}$

۴۲۳- مقدار $\frac{\sqrt{5^4 \sqrt{5^3 \sqrt{5}}}}{\sqrt[4]{5^6 \sqrt{5}}}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt[3]{5}$ (۲) $\sqrt[4]{5}$ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) $5\sqrt{5}$

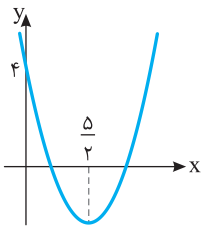
۴۲۴- اگر $a^2 + ab - 6b^2 = 0$ و $a + 3b \neq 0$ ، مقدار $\frac{a-4b}{a+3b}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{5}$ (۲) $-\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{2}{5}$

۴۲۵- اگر نمودار تابع $f(x) = x^2 + ax - b$ به صورت مقابل باشد، مجموع جواب‌های معادله $f(x) = 0$

چقدر از حاصل ضرب آن‌ها بیشتر است؟

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{5}{2}$



۴۲۶- معادله $(x^2 + x)^2 - 5(x^2 + x) - 6 = 0$ چند جواب حقیقی دارد؟

- (۱) فقط دو جواب مثبت دارد. (۲) فقط دو جواب منفی دارد. (۳) دو جواب مثبت و دو جواب منفی دارد. (۴) یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد.

۴۲۷- مجموعه جواب‌های معادله $\sqrt{x} + \sqrt{3-x} = 2$ کدام است؟

- (۱) 2 (۲) 3 (۳) 4 (۴) 5

۴۲۸- مساحت متوازی‌الاضلاعی با اضلاع x و 8 و یک زاویه 135° برابر $24\sqrt{2}$ است. مقدار x کدام است؟

- (۱) 6 (۲) 8 (۳) 10 (۴) 12

۴۲۹- اگر $\frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) - 2 \sin(2\pi + \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) - 2 \cos(3\pi - \alpha)} = 3$ ، مقدار $\tan(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$ کدام است؟

- (۱) 5 (۲) -5 (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $-\frac{1}{5}$

۴۳۰- اگر $\frac{\sin x + 2 \cos x}{\cos x - \sin x} = \frac{1}{4}$ ، مقدار $\sin 2x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{31}{9}$ (۳) $-\frac{35}{37}$ (۴) $\frac{35}{12}$

۴۳۱- نمودار تابع $f(x) = \cos 3x$ در بازه $(\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{2})$ چند بار محور طول‌ها را قطع می‌کند؟

- (۱) 7 (۲) 8 (۳) 9 (۴) 10

۴۳۲- مجموعه جواب‌های نامعادله $|x^2 - x| > 2x$ به صورت $\mathbb{R} - [a, b]$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) 2 (۲) 3 (۳) 4 (۴) 5

۴۳۳- اگر $f(x) = \sqrt{4x - x^2} + 3$ و دامنه تابع $f \circ f$ به صورت $[b, 4] \cup [0, a]$ باشد، مقدار ab کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $4\sqrt{3}$ (۴) $2\sqrt{3}$

۴۳۴- تابع $f(x) = \begin{cases} x^3 + m & x \leq 3 \\ mx + 3 & x > 3 \end{cases}$ یک به یک است. مجموعه مقادیرهای m کدام است؟

- (۱) $(-\infty, 12]$ (۲) $[0, 12]$ (۳) $[12, +\infty)$ (۴) $[12, 24]$

۴۳۵- ضابطه وارون تابع $f(x) = 2 - \sqrt{4 - x^2}$, $-2 \leq x \leq 0$ ، به صورت $f^{-1}(x) = a\sqrt{b + 4x - x^2}$ است. مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) -۶ (۲) -۴ (۳) -۲ (۴) -۱

۴۳۶- نمودار تابع $g(x) = 4f(2x)$ را یک واحد به راست و دو واحد به بالا منتقل می کنیم. سپس طول و عرض نقاط این نمودار را نصف می کنیم. ضابطه تابعی که نمودار آن به دست آمده کدام است؟

- (۱) $y = 8f(x - 2) + 1$ (۲) $y = f(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}) + 1$
(۳) $y = 2f(4x - 2) + 1$ (۴) $y = 2f(x - 2) + 1$

۴۳۷- دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{\Delta}}(x - 3) - 1}$ به صورت $D_f = (a, b]$ است. مقدار $b - a$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۴۳۸- مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{2x - \sqrt{3x^2 + 1}}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۴۳۹- مقدار $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{[\cos x]}{\sin x - \sin^2 x}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) $+\infty$ (۴) $-\infty$

۴۴۰- به ازای کدام مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} 3x - [x] & x < 2 \\ a & x = 2 \\ x + 2 & x > 2 \end{cases}$ در نقطه $x = 2$ پیوسته است؟

- (۱) ۴ (۲) $4/5$ (۳) ۵ (۴) هیچ مقدار a

۴۴۱- اگر $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} + 2}{\sqrt{x+6} + 1}$ ، مقدار $f'(3)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{16}$ (۲) $\frac{1}{32}$ (۳) $\frac{1}{48}$ (۴) $\frac{1}{64}$

۴۴۲- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} 1 - a\sqrt{x} & x > 1 \\ bx^2 + x & x \leq 1 \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ مشتق پذیر باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

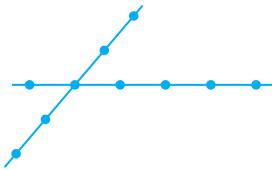
۴۴۳- تابع f در نقطه $x = 2$ مشتق پذیر است. اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - 9}{h} = \frac{3}{2}$ ، مشتق تابع $g(x) = x\sqrt{f(x)}$ در نقطه $x = 2$ کدام است؟

- (۱) $2/5$ (۲) ۳ (۳) $3/5$ (۴) ۴

۴۴۴- تابع $f(x) = \frac{x^2}{x^3 + 4}$ روی بازه $[0, a]$ صعودی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\sqrt[3]{2}$ (۴) $\sqrt[3]{4}$

۴۴۵- چند مثلث می‌توان رسم کرد که رأس‌هایشان از ده نقطه مشخص شده در شکل



مقابل باشند؟

۷۶ (۲)

۶۸ (۱)

۹۰ (۴)

۸۴ (۳)

۴۴۶- اگر A و B دو پیشامد باشند که $P(A) = \frac{1}{y}$ ، $P(B) = \frac{3}{y}$ و $P(A \cup B) = \frac{1}{y}$ ، مقدار $P(A' \cap B)$ کدام است؟

$\frac{13}{14}$ (۴)

$\frac{11}{14}$ (۳)

$\frac{9}{14}$ (۲)

$\frac{5}{14}$ (۱)

۴۴۷- نقطه‌های $F(-8, 0)$ و $F'(8, 0)$ کانون‌های یک بیضی‌اند و طول قطر بزرگ این بیضی برابر 20° است. طول قطر کوچک این بیضی

چقدر است؟

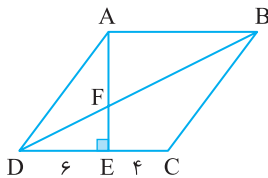
۱۸ (۴)

۱۶ (۳)

۱۴ (۲)

۱۲ (۱)

۴۴۸- در شکل مقابل $ABCD$ لوزی است و AE بر CD عمود است. طول پاره خط EF چقدر است؟



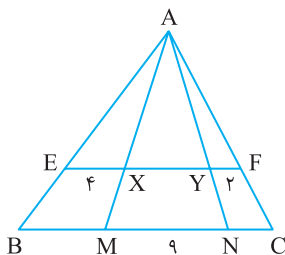
۲ (۱)

۳ (۲)

۶ (۳)

۸ (۴)

۴۴۹- در شکل مقابل $EF \parallel BC$ و $BM = XY$. طول پاره خط NC کدام است؟



۳ (۱)

۴ (۲)

۶ (۳)

۸ (۴)

۴۵۰- اگر میانگین داده‌های $3, a, 6, a, 4, a, 0, 3$ برابر ۴ باشد، میانه این داده‌ها برابر کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

آزمون جامع (۲)

آزمون ۴۴

۴۵۱- اگر مجموعه مرجع اعداد طبیعی کمتر از ۹ باشد، $(A \cap B)' = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$ ، $B - A = \{2, 5\}$ و $(A \cup B)' = \{6, 7\}$.

مجموع اعضای A چقدر است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۵ (۳) ۱۶ (۴) ۱۸

۴۵۲- اگر $a - b, a + b, 2a - b, \dots$ دنباله‌ای هندسی باشد ($a \neq 0$)، نسبت جمله چهارم این دنباله به جمله نخست آن چقدر است؟

- (۱) $\frac{27}{8}$ (۲) $\frac{8}{27}$ (۳) $\frac{27}{64}$ (۴) $\frac{64}{27}$

۴۵۳- حاصل عبارت $\sqrt[6]{12} \times \sqrt[4]{54} \times \sqrt[3]{24} \sqrt[6]{6}$ کدام است؟

- (۱) $6\sqrt[6]{3}$ (۲) $3\sqrt[6]{32}$ (۳) $2\sqrt[3]{9}$ (۴) ۶

۴۵۴- اگر $a - b = b - c = 4$ ، مقدار $\frac{ab - ac + bc - b^2}{a - c}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۸

۴۵۵- x_1 و x_2 جواب‌های معادله $x^2 - 3x + 2m + 1 = 0$ هستند و $3x_1 - x_2 = 1$. مقدار m کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۴۵۶- مجموع جواب‌های معادله $(x-1)(x-2)(x-4)(x-5) = 40$ چقدر است؟

- (۱) ۱۲ (۲) -۱۲ (۳) ۶ (۴) -۶

۴۵۷- مجموعه جواب‌های نامعادله $\frac{1}{x+3} < \frac{x-5}{9}$ به صورت $(a, -3) \cup (b, +\infty)$ است. مقدار ab کدام است؟

- (۱) -۲۴ (۲) ۲۴ (۳) -۱۰ (۴) ۱۰

۴۵۸- معادله $\cos x - \sin x = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۴۵۹- عضوهای مجموعه شکل مقابل در کدام نابرابری‌ها صدق می‌کنند؟



- (۱) $1 \leq |x| \leq 4$ (۲) $1 \leq |x+1| \leq 4$
(۳) $|x| \leq 4$ (۴) $1 \leq |x-1| \leq 4$

۴۶۰- نقطه $(1, -2)$ رأس سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + ab$ است. این سهمی محور عرض‌ها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟ ($b > 0$)

- (۱) $-\frac{9+\sqrt{17}}{4}$ (۲) $-\frac{9+\sqrt{17}}{2}$ (۳) $-\frac{3+\sqrt{15}}{2}$ (۴) $-\frac{3+\sqrt{15}}{4}$

۴۶۱- اگر $f(x) = \frac{x}{x-1}$ و $g(x) = \frac{2x-3}{x+2}$ ، مجموع مقادیری که در دامنه تابع fog قرار ندارند، کدام است؟

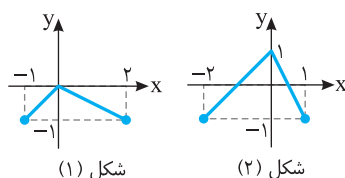
- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۴۶۲- اگر $f(x) = \sqrt{ax+b}$ و نمودار تابع‌های f و f^{-1} در نقطه $(1, 2)$ برخورد کنند، حاصل $3a+b$ کدام است؟

- (۱) -۸ (۲) -۷ (۳) -۶ (۴) -۵

۴۶۳- نمودار تابع f به صورت شکل (۱) است. نمودار کدام تابع به صورت

شکل (۲) است؟

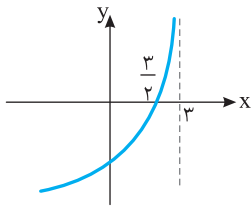


شکل (۱)

شکل (۲)

- (۱) $y = 1 - 2f(-x)$ (۲) $y = 1 + 2f(-x)$
(۳) $y = 1 - 2f(x)$ (۴) $y = 1 + 2f(x)$

۴۶۴- نمودار تابع $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(ax+b)$ در شکل روبه‌رو رسم شده است. مقدار $f^{-1}(-2)$ کدام است؟



(۱) -۲

(۲) -۳

(۳) -۴

(۴) -۵

۴۶۵- اگر $\log \sqrt{a} = a$ ، مقدار $\log 125$ کدام است؟

(۴) $2-2a$ (۳) $3-2a$ (۲) $2-3a$ (۱) $3-3a$

۴۶۶- اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - ax + b}{2x^2 - 3x + 1} = a-4$ ، حاصل $a+b$ کدام است؟

(۴) ۷

(۳) ۶

(۲) ۵

(۱) ۴

۴۶۷- اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(a+1)x^3 - 2x^2 + x}{(b+1)x^2 - 4} = 2$ ، مقدار $a+b$ کدام است؟

(۴) -۴

(۳) -۳

(۲) -۲

(۱) -۱

۴۶۸- فرض کنید $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = \begin{cases} f(x) & x \notin \mathbb{Z} \\ f(x)-1 & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$. اگر دامنه تابع g بازه $[-4, 4]$ باشد، تعداد نقاط ناپیوستگی آن چندتا است؟

(۴) صفر

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

۴۶۹- اگر شیب خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = x^4 + mx^2 + x + 3$ در نقطه $x=1$ برابر با ۲ باشد، مقدار m کدام است؟

(۴) -۱

(۳) $-\frac{3}{2}$

(۲) -۲

(۱) $-\frac{5}{2}$

۴۷۰- اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & x > 3 \\ x-1 & x \leq 3 \end{cases}$ ، مقدار $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(3+h) - f(3-h)}{h}$ کدام است؟

(۴) وجود ندارد.

(۳) صفر

(۲) $\frac{5}{4}$ (۱) $-\frac{3}{4}$

۴۷۱- مشتق دوم تابع $f(x) = x^3 \sqrt{x}$ در نقطه $x=4$ کدام است؟

(۴) ۱۴۰

(۳) $\frac{70}{3}$

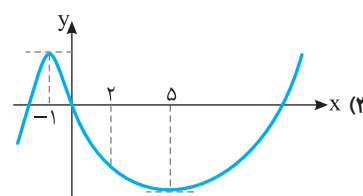
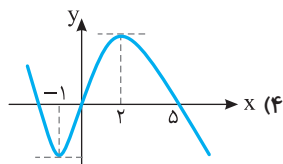
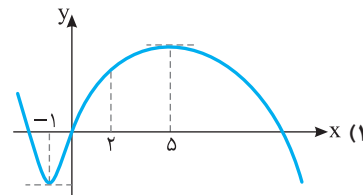
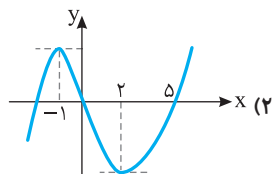
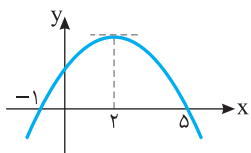
(۲) ۷۰

(۱) ۳۵

۴۷۲- اگر تابع $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + kx - 6$ اکیداً صعودی باشد، حدود مقادیر k کدام است؟

(۴) $k \leq 1$ (۳) $k \geq -1$ (۲) $k \leq -1$ (۱) $k \geq 1$

۴۷۳- نمودار تابع مشتق تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع f به کدام شکل می‌تواند باشد؟



۴۷۴- اگر دایره‌های $(x-k)^2 + (y-2)^2 = 81$ و $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 4$ بر هم مماس درونی باشند، مجموع مقادیر k کدام است؟

- (۱) -۱۳ (۲) -۱۱ (۳) -۲ (۴) ۴

۴۷۵- نقطه‌های $(-۴, ۰)$ و $(۴, ۰)$ کانون‌های یک بیضی و نقطه‌های $(۰, ۳)$ و $(۰, -۳)$ دو سر قطر کوچک این بیضی هستند. معادله

دایره‌ای که مرکزش مرکز این بیضی است و از دو سر قطر بزرگ بیضی می‌گذرد کدام است؟

- (۱) $x^2 + y^2 = 25$ (۲) $x^2 + y^2 = 16$ (۳) $x^2 + y^2 = 9$ (۴) $x^2 + y^2 = 4$

۴۷۶- در یک کیسه تعدادی مهره قرمز و آبی وجود دارد. تعداد مهره‌های قرمز دو برابر تعداد مهره‌های آبی است. دو مهره همزمان از

این کیسه خارج می‌کنیم. می‌دانیم احتمال اینکه مهره‌ها هم‌رنگ نباشند برابر $\frac{7}{15}$ است. تعداد مهره‌های آبی چندتا است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۹ (۳) ۸ (۴) ۷

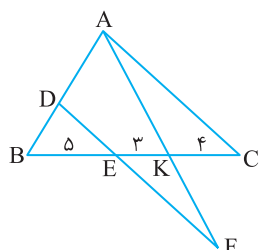
۴۷۷- اگر کسی را به تصادف انتخاب کنیم، احتمال اینکه سرطان داشته باشد $۰/۰۲$ است. احتمال اینکه جواب آزمایش تشخیص سرطان

روی کسی که سرطان دارد مثبت باشد $۰/۹۵$ است و روی کسی که سرطان ندارد $۰/۰۳$ است. اگر کسی را به تصادف انتخاب

کنیم، احتمال اینکه جواب آزمایش او مثبت باشد چقدر است؟

- (۱) $۰/۰۲۴$ (۲) $۰/۹۹۹۶$ (۳) $۰/۰۱۹۶$ (۴) $۰/۰۴۸۴$

۴۷۸- در شکل مقابل $DF \parallel AC$. نسبت $\frac{DE}{EF}$ چقدر است؟

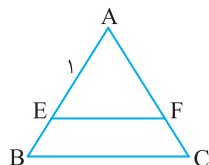


- (۱) $\frac{4}{9}$ (۲) $\frac{5}{9}$

- (۳) $\frac{7}{9}$ (۴) $\frac{8}{9}$

۴۷۹- در شکل مقابل $EF \parallel BC$ و مساحت مثلث AEF با مساحت چهارضلعی BEFC برابر

است. طول پاره خط AB چقدر است؟



- (۱) $1 + \sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{2}$

- (۳) $2\sqrt{2} - 1$ (۴) $2\sqrt{2}$

۴۸۰- میانگین و انحراف معیار ۱۸ داده آماری به ترتیب ۲۵ و ۳ است. اگر داده‌های ۲۰، ۲۷ و ۲۸ به آنان افزوده شود، واریانس ۲۱

داده جدید به‌طور تقریبی کدام است؟

- (۱) $۹/۲۵$ (۲) $۹/۳۶$ (۳) $۹/۵۲$ (۴) $۹/۶۳$

آزمون جامع (۳)

آزمون ۴۵

۴۸۱- اگر مجموعه مرجع ۵۶ عضو باشد، $n(A) + n(B) = 62$ و $n(A' \cup B') = 44$ ، مقدار $n(A' \cap B')$ کدام است؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

۴۸۲- اگر a, b, c جمله‌های متوالی دنباله‌ای حسابی و a, b, c جمله‌های متوالی دنباله‌ای هندسی باشند و $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{12}$ ، مقدار b

کدام است؟

- ۶ (۱) ۱۲ (۲) ۲۴ (۳) ۳۶ (۴)

۴۸۳- حاصل عبارت $A = \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} + \frac{3}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1}$ کدام است؟

- $\sqrt[3]{2}$ (۱) $2\sqrt[3]{2}$ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴)

۴۸۴- a و b عددهایی متمایزند و $a^3 - a = b^3 - b = 7$ ، مقدار $a^2 + ab + b^2$ کدام است؟

- ۱ (۱) -۱ (۲) ۲ (۳) -۳ (۴)

۴۸۵- هر یک از جواب‌های معادله $x^2 - (2m-3)x + 2n + 2 = 0$ یک واحد از جواب‌های معادله $x^2 - nx + m + 1 = 0$ بیشتر است.

مقدار $m+n$ کدام است؟

- ۵ (۱) ۶ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴)

۴۸۶- اگر معادله $x^4 + 2mx^2 + m^2 - 1 = 0$ جواب نداشته باشد، حدود m کدام است؟

- $m > 1$ (۱) $0 < m < 1$ (۲) $m < -1$ (۳) $-1 < m < 0$ (۴)

۴۸۷- جواب معادله $\sqrt{3x+2} = 2x+1$ به صورت $x = \frac{a+b\sqrt{17}}{\lambda}$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

- ۱ (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) صفر (۴)

۴۸۸- اگر $\cos^2 x - \cos^4 x = \frac{1}{\lambda}$ ، حاصل عبارت $\tan^2 x + \cot^2 x$ کدام است؟

- ۵ (۱) ۷ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴)

۴۸۹- خط $y=1$ در بازه $(0, \frac{\pi}{4})$ چند بار نمودار تابع $f(x) = 3 \cos^4 x + 1$ را قطع می‌کند؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۴۹۰- مجموعه جواب‌های نامعادله $-1 \leq \frac{x-2}{x-3} \leq 1$ به صورت $(-\infty, \frac{a}{b}]$ است ($\frac{a}{b}$ ساده شدنی نیست). مقدار $a+b$ کدام است؟

- ۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

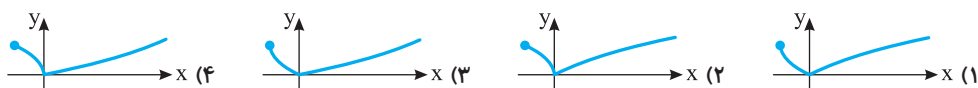
۴۹۱- نمودار تابع $f(x) = x|x-2|$ در سه نقطه نمودار تابع $g(x) = |x-1|$ را قطع می‌کند. کمترین طول مربوط به این نقاط کدام است؟

- $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ (۱) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ (۲) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (۳) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (۴)

۴۹۲- برد تابع f با دامنه $[0, 2]$ و ضابطه $f(x) = [-2x+3]$ چند عضو دارد؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

۴۹۳- نمودار تابع $y = |1 - \sqrt{x+1}|$ کدام است؟



۴۹۴- ضابطه تابع وارون تابع $f(x) = \frac{2x-|x|}{2}$ به صورت $f^{-1}(x) = \frac{ax+2|x|}{b}$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۹

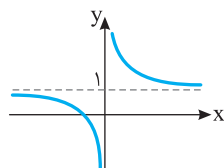
۴۹۵- نمودار تابع $f(x) = \log_2(x+2)$ و نمودار تابع $g(x) = 1-|x|$ در دو نقطه مشترک هستند. فاصله این دو نقطه از یکدیگر کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) $\sqrt{2}$

۴۹۶- اگر $\log_8 \frac{x}{y} + \log_8(xy) = 0$ ، مقدار $\log_x y$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۳ (۳) -۴ (۴) -۵

۴۹۷- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^2(x)-1}{2f^2(x)-3f(x)+1}$ کدام است؟



- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴) -۲

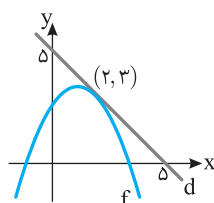
۴۹۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{x^3-4x^2+5x-2}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) صفر (۳) $+\infty$ (۴) $-\infty$

۴۹۹- به ازای کدام مقدار a ، تابع $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{x} & 1 \leq x \leq 6 \\ a + \cos^2 \frac{\pi x}{36} & x > 6 \end{cases}$ روی مجموعه عددهای حقیقی بزرگتر از ۱ پیوسته است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۵۰۰- در شکل مقابل خط d بر نمودار تابع f در نقطه $(2, 3)$ مماس است. اگر $g(x) = f^2(x)$ ، مقدار $g'(2)$ کدام است؟



- (۱) -۱۲ (۲) -۶ (۳) -۱۸ (۴) -۲۴

۵۰۱- اگر $f(x) = x^3 - 2x$ ، مقدار $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h) - f(2)}{\Delta h}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۶

۵۰۲- مجموع طول و عرض نقطه بحرانی تابع $f(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{5-x}$ در بازه $(3, 5)$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۵۰۳- چند عدد طبیعی مانند n وجود دارد که $45 < \binom{n-2}{n-4}$ ؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۵۰۴- احتمال پیروزی یک تیم در مسابقه با تیم‌های A و B به ترتیب $\frac{1}{4}$ و $\frac{3}{8}$ است. احتمال اینکه این تیم فقط بر یکی از تیم‌های A و B پیروز شود، کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{16}$ (۲) $\frac{7}{16}$ (۳) $\frac{9}{16}$ (۴) $\frac{11}{16}$

۵۰۵- اگر نقطه‌های $A(\alpha, 6)$ ، $B(-5, 0)$ و $C(5, 0)$ رأس‌های مثلثی متساوی‌الساقین باشند، مجموع قدرمطلق‌های مقادیر ممکن α کدام است؟

- (۱) ۳۲ (۲) ۳۴ (۳) ۳۶ (۴) ۳۸

۵۰۶- اگر دایره $x^2 + y^2 + 4x + 2ay + 4 = 0$ بر محور y مماس باشد، مقدار $|a|$ کدام است؟

۱ (۴)

۸ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

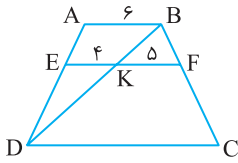
۵۰۷- در شکل مقابل $AB \parallel EF \parallel DC$. طول پاره خط DC چقدر است؟

۱۵ (۱)

۱۴ (۲)

۱۲ (۳)

۱۰ (۴)



۵۰۸- در مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم ۳ و ۷ واحد، طول نیمساز داخلی زاویه قائمه

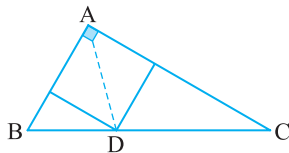
کدام است؟

۲/۱ (۲)

۱/۴√۲ (۱)

۲/۱۷√۲ (۴)

۲/۸ (۳)



۵۰۹- در شکل مقابل ABCD مستطیل است و AF بر BE عمود است.

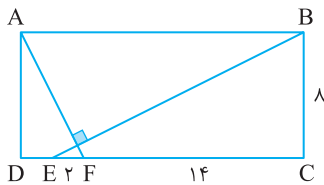
طول پاره خط DE چقدر است؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)



۵۱۰- در یک سری داده آماری ضریب تغییرات $2/0$ است. اگر ۵ برابر میانگین را به هر داده بیفزاییم ضریب تغییرات جدید کدام است؟

۱/۱۵ (۴)

۱/۲۵ (۳)

۱/۳۰ (۲)

۰/۲ (۱)

آزمون جامع (۴)

آزمون ۴۶

۵۱۱- در الگوی روبه‌رو، تعداد دایره‌های رنگ شده در شکل سیزدهم چندناست؟

۹۸ (۱)
۹۹ (۲)
۱۱۲ (۳)
۱۱۳ (۴)

شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳) شکل (۴)

۵۱۲- عددهای طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جمله‌های هر دسته برابر شماره آن دسته باشد:
(۱), (۳, ۵), (۷, ۹, ۱۱), ...

مجموع دو جمله اول و آخر دسته سی‌ام کدام است؟

- ۱۷۵۰ (۱) ۱۷۵۰ (۲) ۱۸۰۰ (۳) ۱۸۵۰ (۴)

۵۱۳- اگر $\sqrt{5\sqrt{3}} = \sqrt[4]{5\sqrt{x}}$ ، مقدار x کدام است؟

- ۴۵ (۱) ۶۰ (۲) ۷۵ (۳) ۹۰ (۴)

۵۱۴- اگر $a+b-c=4$ و $\frac{1}{c} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{3}{abc}$ ، مقدار $a^2+b^2+c^2$ کدام است؟

- ۶ (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۶ (۴)

۵۱۵- اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادله $x^2+6x-3=0$ باشند، مقدار $(\frac{x_1}{x_2}+x_2)(\frac{x_2}{x_1}+x_1)$ کدام است؟

- ۶۰ (۱) ۷۲ (۲) ۸۰ (۳) ۸۸ (۴)

۵۱۶- اگر چندجمله‌ای $P(x)=ax^3+fx^2+14x+10$ بر $x-1$ بخش‌پذیر باشد، مقدار a کدام است؟

- ۱۴ (۱) -۲۸ (۲) ۲۸ (۳) ۱۴ (۴)

۵۱۷- اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در ناحیه دوم باشد و تساوی $4\sin^2\alpha - \cos^2\alpha + \sin\alpha \cos\alpha = 2$ برقرار باشد، مقدار

$\tan(\frac{3\pi}{4}+\alpha)$ کدام است؟

- ۱ (۱) -۱ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{2}{3}$ (۴)

۵۱۸- مقدار $\sin \frac{\pi}{24} \cos \frac{\pi}{24} \cos \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

- $\frac{1}{4}$ (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ (۴)

۵۱۹- مجموع جواب‌های معادله $\cos x + 2\sin^2 x - 1 = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ چقدر است؟

- 2π (۱) 3π (۲) 4π (۳) 5π (۴)

۵۲۰- اگر $|x| \leq x^2$ ، کمترین مقدار عبارت $A = |x^2-1| - |x|$ کدام است؟

- ۱ (۱) -۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴)

۵۲۱- دامنه تابع $f(x) = \sqrt{4x-x^2} - 3$ بازه $[a, b]$ است. مقدار $2a+b$ کدام است؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

۵۲۲- اگر $(fog)(x) = \frac{3x-2}{2x-1}$ و $g(x) = \frac{3}{2x}$ ، ضابطه تابع $f+g$ کدام است؟

- $\frac{4x^2-9}{6x-x^2}$ (۱) $\frac{4x^2-6x-9}{2x^2-6x}$ (۲) $\frac{6x-9}{2x^2-6x}$ (۳) $\frac{4x^2+6x-9}{2x^2-6x}$ (۴)

۵۲۳- نمودار تابع $f(x)=\sqrt{-x}$ را دو واحد به چپ منتقل می‌کنیم. سپس این نمودار را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم و مجدداً دو واحد به چپ منتقل می‌کنیم. ضابطه تابعی که نمودار آن به دست آمده کدام است؟

(۱) $y=\sqrt{x+4}$ (۲) $y=\sqrt{x}$ (۳) $y=\sqrt{-x+4}$ (۴) $y=\sqrt{x-4}$

۵۲۴- قرینه نمودار تابع $f(x)=\sqrt[3]{a+bx^3}$ نسبت به خط $y=x$ بر نمودار تابع f منطبق است. مقدار b کدام است؟ ($a, b \neq 0$)

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۵۲۵- اگر $2^a=3$ و $3^b=8$ ، مقدار $3^{b+\frac{1}{a}}$ کدام است؟

(۱) ۸ (۲) ۱۲ (۳) ۱۶ (۴) ۲۴

۵۲۶- جواب معادله $\log_2 x + \log_5 x = 2$ کدام است؟

(۱) $4^{\log 5}$ (۲) $5^{\log 2}$ (۳) $2^{\log 5}$ (۴) $4^{\log 2}$

۵۲۷- به ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{x-1} & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases}$ در نقطه $x=1$ پیوسته است؟

(۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) هیچ مقدار a

۵۲۸- اگر $f(x)=\frac{ax^2+x+4}{(a+2)x^2-3x-2}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=3$ ، آن گاه $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ کدام است؟

(۱) -۴ (۲) -۵ (۳) -۷ (۴) -۸

۵۲۹- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=x^3-x$ در بازه $[-1, 2]$ با آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در کدام نقطه از این بازه برابر است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) صفر

۵۳۰- مقدار مشتق تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x^3+1}}{\sqrt[3]{x^2+1}}$ در نقطه $x=0$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) صفر

۵۳۱- کمترین مقدار تابع $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3-2x^2$ کدام است؟

(۱) -۳۶ (۲) -۳۲ (۳) -۲۴ (۴) -۱۸

۵۳۲- بیشترین مساحت مستطیلی که به وسیله یک طناب به طول ۴۸ متر در حاشیه یک رودخانه می‌توان محصور کرد، چند مترمربع است؟

(۱) ۲۴۴ (۲) ۲۸۸ (۳) ۲۹۶ (۴) ۳۱۶

۵۳۳- اگر $\frac{P(n+2, 4)}{P(n+1, 3) - nP(n-1, 2)} = 24$ ، مقدار n کدام است؟

(۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۵۳۴- سمانه و سمیرا می‌خواهند در یک آزمایشگاه استخدام شوند. احتمال اینکه سمانه استخدام شود $\frac{1}{5}$ است و احتمال اینکه سمیرا

استخدام شود $\frac{1}{6}$ است. احتمال اینکه دقیقاً یکی از آن‌ها استخدام شود چقدر است؟

(۱) $\frac{9}{10}$ (۲) $\frac{7}{10}$ (۳) $\frac{3}{10}$ (۴) $\frac{1}{10}$

۵۳۵- دو قطر از دایره‌ای روی خطوط $y=2x-1$ و $y=x+2$ قرار دارند. اگر این دایره از نقطه $(0, 1)$ بگذرد، شعاع آن چقدر است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۵

۵۳۶- نقطه‌های $A(2b, 3a)$ و $B(a, 3b-1)$ دو انتهای قطر دایره‌ای به مرکز $O(1, -2)$ هستند. شعاع این دایره چقدر است؟

- (۱) $4\sqrt{5}$ (۲) $5\sqrt{5}$ (۳) $6\sqrt{5}$ (۴) $8\sqrt{5}$

۵۳۷- نقطه‌های $F(-3, 0)$ و $F'(3, 0)$ کانون‌های یک بیضی هستند و نقطه $(3, \frac{16}{5})$ روی این بیضی است. خروج از مرکز این بیضی چقدر است؟

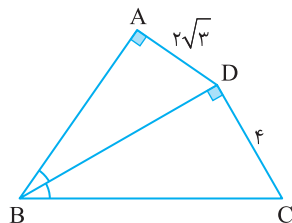
- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{4}{5}$

۵۳۸- درون مثلثی به اضلاع ۹، ۷ و ۵ واحد، مثلث دیگری طوری رسم می‌کنیم که اضلاع آن موازی اضلاع مثلث اصلی باشد. اگر بزرگ‌ترین ضلع این مثلث ۶ واحد باشد، مساحت محدود به این دو مثلث، چند برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است؟

- (۱) $0/75$ (۲) ۱ (۳) $1/25$ (۴) $1/5$

۵۳۹- در شکل مقابل $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$ و BD نیمساز زاویه ABC است. طول پاره خط

BD چقدر است؟



(۱) $2\sqrt{6}$

(۲) $3\sqrt{3}$

(۳) $4\sqrt{2}$

(۴) $4\sqrt{3}$

۵۴۰- در ۲۵ داده آماری میانگین و انحراف معیار به ترتیب 30° و ۸ است. اگر داده‌های 10° ، 15° ، 45° و 50° از بین آن‌ها حذف شوند،

واریانس داده‌های باقی‌مانده کدام است؟

- (۱) $14/72$ (۲) $14/81$ (۳) $15/33$ (۴) $16/66$

آزمون جامع (۵)

آزمون ۴۷

۵۴۱- نسبت واسطه حسابی دو عدد مثبت به واسطه هندسی آن‌ها برابر $\frac{3}{\sqrt{8}}$ است. نسبت عدد بزرگ‌تر به عدد کوچک‌تر کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{3}$

۵۴۲- حاصل $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۴ (۳) $2\sqrt{5}$ (۴) $\frac{4-\sqrt{5}}{2}$

۵۴۳- خط‌های $(5-k)y+2x=3$ و $mx-y=-2$ بر هم عمودند و یکدیگر را روی محور x قطع می‌کنند. مقدار $k-m$ کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۵۴۴- به ازای مقداری از a چندجمله‌ای $P(x)=x^4+ax^3-8x$ بر $x+2$ بخش‌پذیر است. کوچک‌ترین جواب معادله $P(x)=0$ کدام است؟

- (۱) $1-\sqrt{3}$ (۲) $1-\sqrt{5}$ (۳) $-1-\sqrt{3}$ (۴) $-1-\sqrt{5}$

۵۴۵- اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادله $x^2-5x+1=0$ باشند، معادله درجه دومی که جواب‌هایش $\frac{1}{2x_1-1}$ و $\frac{1}{2x_2-1}$ باشد، کدام است؟

- (۱) $\Delta x^2+8x-1=0$ (۲) $\Delta x^2-8x+1=0$ (۳) $x^2-5x-1=0$ (۴) $x^2+5x-1=0$

۵۴۶- معادله $x^3+mx-m-1=0$ سه جواب متمایز دارد. حدود m کدام است؟

- (۱) $m \in (-\infty, -\frac{3}{4})$ (۲) $m \in (-\frac{3}{4}, +\infty)$

- (۳) $m \in (-\frac{3}{4}, +\infty) - \{3\}$ (۴) $m \in (-\infty, -\frac{3}{4}) - \{-3\}$

۵۴۷- مقادیر عبارت $\frac{2}{x}+x$ به ازای هر x از مجموعه $(a, 1) \cup (b, +\infty)$ بیشتر از ۳ هستند. مقدار $a+b$ کدام است؟

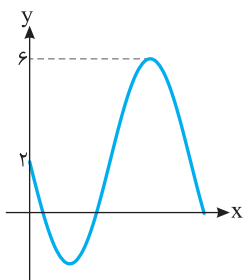
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۴۸- ساده شده عبارت $\frac{7+5\sin^2 10^\circ - \cos^2 10^\circ}{3\sin^2 10^\circ + 2\cos^2 10^\circ - 1}$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۵۴۹- قسمتی از نمودار تابع $f(x)=4a-2b\sin x$ به شکل مقابل است. مقدار ab کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) -۲



۵۵۰- اگر $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{4}{5}$ ، مقدار $\cos 4x$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{8}{15}$ (۲) $\frac{8}{15}$ (۳) $\frac{7}{15}$ (۴) $-\frac{7}{15}$

۵۵۱- اگر $|x+1| \leq 7$ ، مجموع بیشترین و کمترین مقدار عبارت $A=x|x|-4x$ کدام است؟

- (۱) -۱۰ (۲) -۱۶ (۳) -۲۰ (۴) -۲۴

۵۵۲- اگر تابع f با ضابطه $f(x)=\frac{x^2+3ax+6a-4}{x+2}$ و دامنه $\mathbb{R}-\{-2\}$ یک تابع همانی باشد، مقدار $f(3a)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۵۳- دو تابع $f(x)=[x]+[-x]$ و $g(x)=x^2+x-2$ مفروض اند. اگر $g(f(x))=-2$ ، مجموعه مقادیر x کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ (۲) $\mathbb{Z}$ (۳) $\mathbb{R}$ (۴) $\emptyset$

۵۵۴- تابع $f(x)=-2x^2+kx$ با دامنه $(-\infty, 3]$ یک به یک است. حداقل مقدار k کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) ۱۶

۵۵۵- نمودار توابع $f(x)=\sqrt{2x+3}$ و $g(x)=|x^3|$ در چند نقطه متقاطع اند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۵۶- اگر $f(x)=3^{2-x}$ ، ضابطه تابع f^{-1} کدام است؟

- (۱) $f^{-1}(x)=\log_3\left(\frac{3}{x+1}\right)$ (۲) $f^{-1}(x)=\log_3\left(\frac{x+1}{3}\right)$

- (۳) $f^{-1}(x)=\log_3\left(\frac{3}{x+1}\right)^2$ (۴) $f^{-1}(x)=\log_3\left(\frac{x+1}{3}\right)^2$

۵۵۷- حاصل $4^{1+\log_8 9}$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt[3]{3}$ (۲) $12\sqrt[3]{3}$ (۳) $24\sqrt[3]{3}$ (۴) $6\sqrt[3]{3}$

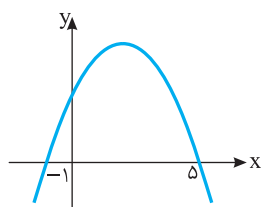
۵۵۸- اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+a+1}}{x^2-4} = \frac{1}{b}$ ، حاصل $b-a$ کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۴۱ (۴) ۴۸

۵۵۹- تابع $f(x)=\begin{cases} ax-a+2 & x \leq 1 \\ \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} & x > 1 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطه $x=1$ پیوسته است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) هر مقدار a (۴) هیچ مقدار a

۵۶۰- نمودار تابع درجه دوم f در شکل مقابل رسم شده است. اگر $f'(1)f'(-3)=5f(1)$ ،



مقدار $f(2)$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۹ (۳) ۱۲ (۴) ۱۸

۵۶۱- اگر $g(x)=x+f(x^3)$ و $f'(8)=2$ ، مقدار $g'(2)$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۱۳ (۳) ۲۵ (۴) ۳۱

۵۶۲- اگر $f(x)=x\sqrt[3]{x}$ ، دامنه تابع f' کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R}$ (۲) $\mathbb{R}-\{0\}$ (۳) $(0, +\infty)$ (۴) $[0, +\infty)$

۵۶۳- طول قطر کوچک و قطر بزرگ یک بیضی به ترتیب ۸ و ۱۰ است. اگر F و F' کانون‌های این بیضی باشند و K نقطه‌ای از این

بیضی باشد، محیط مثلث KFF' چقدر است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۶

۵۶۴- اگر $3x^2+ay^2+6x-by+3=0$ معادله یک دایره به شعاع ۲ باشد، مقدار $|b|$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

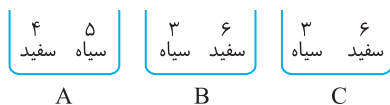
۵۶۵- از نقطه‌های مشخص شده روی مثلث شکل مقابل چهار نقطه انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه دست کم دو تا از آن‌ها از رأس‌های

مثلث باشند چقدر است؟



- (۱) $\frac{11}{42}$ (۲) $\frac{13}{42}$ (۳) $\frac{15}{42}$ (۴) $\frac{17}{42}$

۵۶۶- ظرف A دارای ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه است و هر یک از دو ظرف یکسان B و C دارای ۶ مهره سفید و ۳ مهره سیاه هستند. به تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره از مهره‌های خارج شده سفید است؟



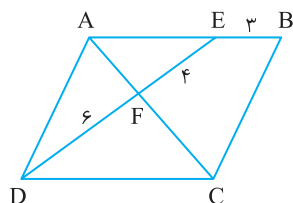
$$\frac{26}{63} \quad (2)$$

$$\frac{11}{21} \quad (4)$$

$$\frac{25}{63} \quad (1)$$

$$\frac{10}{21} \quad (3)$$

۵۶۷- در شکل مقابل ABCD متوازی‌الاضلاع است. طول پاره خط AE چقدر است؟



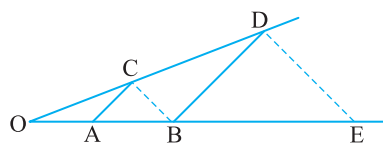
$$3 \quad (1)$$

$$4 \quad (2)$$

$$6 \quad (3)$$

$$8 \quad (4)$$

۵۶۸- در شکل روبه‌رو دو جفت پاره خط موازی‌اند. $OA=3$ و $AB=5$ ، اندازه



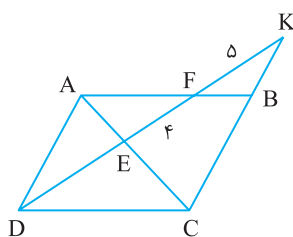
$$12\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$10\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$13\frac{1}{3} \quad (1)$$

$$11\frac{1}{3} \quad (3)$$

۵۶۹- در شکل مقابل ABCD متوازی‌الاضلاع است. طول پاره خط DE چقدر است؟



$$3 \quad (1)$$

$$4 \quad (2)$$

$$5 \quad (3)$$

$$6 \quad (4)$$

۵۷۰- واریانس ۱۱ داده آماری صفر است. اگر داده‌های ۲۴، ۱۶ و ۲۶ به آن‌ها اضافه شود، میانگین داده‌ها تغییر نمی‌کند. انحراف

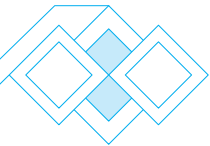
معیار ۱۴ داده حاصل کدام است؟

$$2 \quad (4)$$

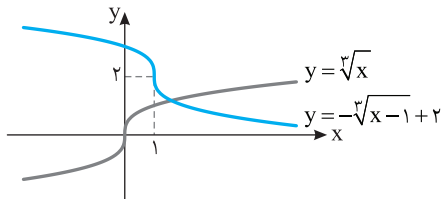
$$1/5 \quad (3)$$

$$1/25 \quad (2)$$

$$0/75 \quad (1)$$



۵- گزینه ۱ اگر نمودار تابع $y = \sqrt[3]{x}$ را یک واحد به راست و دو واحد به پایین انتقال دهیم، نمودار تابع $y = \sqrt[3]{x-1}-2$ به دست می‌آید. اگر این نمودار را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y = -\sqrt[3]{x-1}+2$ به دست می‌آید. دو نمودار مطابق شکل زیر در یک نقطه متقاطع‌اند.



۶- گزینه ۱ توجه کنید که $D_f = \{x | x^2 - 4x \geq 0\}$ ، یعنی $D_g = \{-1, 0, 1, 3, 4\}$ و $D_f = (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$ بنابراین $D_{fg+f} = D_g \cap D_f = \{-1, 0, 4\}$ بنابراین a باید -1 یا صفر یا 4 باشد:

$$(2g+f)(-1) = 2g(-1) + f(-1) = 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

$$(2g+f)(0) = 2g(0) + f(0) = 2 + 0 = 2$$

$$(2g+f)(4) = 2g(4) + f(4) = 6 + 0 = 6$$

بنابراین $a = 4$ و در نتیجه $f(-4) = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

۷- گزینه ۲ ابتدا $(f \circ f)(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = a(ax^2 + b)^2 + b$$

$$= a(a^2x^4 + 2abx^2 + b^2) + b$$

$$= a^3x^4 + 2a^2bx^2 + ab^2 + b$$

بنابراین تساوی زیر به ازای هر مقدار x برقرار است:

$$a^3x^4 + 2a^2bx^2 + ab^2 + b = 27x^4 - 18x^2 + 2$$

پس باید تساوی‌های زیر درست باشند:

$$a^3 = 27, \quad 2a^2b = -18, \quad ab^2 + b = 2$$

از $a^3 = 27$ نتیجه می‌شود $a = 3$ ، در نتیجه از $2a^2b = -18$ ، $18b = -18$ به دست می‌آید که یعنی $b = -1$ مقادیر $a = 3$ و $b = -1$ در تساوی $ab^2 + b = 2$ هم صدق می‌کنند. پس $a + b = 2$

۸- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = 3x + |k||x| = \begin{cases} (3+|k|)x & x \geq 0 \\ (3-|k|)x & x < 0 \end{cases}$$

برای اینکه تابع f صعودی باشد، باید خطوط $y = (3+|k|)x$ و $y = (3-|k|)x$ شیب نامنفی داشته باشند. شیب خط $y = (3-|k|)x$ همواره مثبت است، پس باید شیب خط $y = (3+|k|)x$ همواره نامنفی باشد.

یعنی

$$3-|k| \geq 0 \Rightarrow |k| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq k \leq 3$$

۱- گزینه ۱ با توجه به زوج مرتب‌های $(1, 0)$ و $(1, 4m^3 - m)$ باید تساوی $4m^3 - m = 0$ برقرار باشد. پس

$$m(4m^2 - 1) = 0 \Rightarrow m = 0, \quad m = \pm \frac{1}{2}$$

به ازای $m = 0$ رابطه به شکل زیر درمی‌آید که تابع نیست.

$$f = \{(1, 0), (0, 2), (0, 4)\}$$

به ازای $m = \frac{1}{2}$ رابطه به شکل زیر درمی‌آید که تابع نیست.

$$f = \{(1, 0), (1, 2), (0, 4), (2, 2)\}$$

به ازای $m = -\frac{1}{2}$ رابطه به شکل زیر درمی‌آید که تابع است.

$$f = \{(1, 0), (-1, 2), (0, 4), (-2, 2)\}$$

پس فقط به ازای $m = -\frac{1}{2}$ رابطه تابع است.

۲- گزینه ۴ **راه حل اول** اگر f تابع ثابت c باشد، آن‌گاه

$$f(x) = \frac{(a+2)x+3}{2x-3} = c$$

بنابراین $(a+2)x+3 = 2cx-3c$ در نتیجه $a+2=2c$ و $3=-3c$ به این ترتیب $c=-1$ و $a=2c-2=-4$

راه حل دوم f تابعی ثابت است، پس $f(1)=f(2)$ بنابراین

$$\frac{a+2+3}{2-3} = \frac{2(a+2)+3}{4-3} \Rightarrow \frac{a+5}{-1} = 2a+7 \Rightarrow a = -4$$

راه حل سوم مشتق تابع ثابت برابر صفر است. پس

$$f'(x) = \frac{(a+2)(2x-3) - 2((a+2)x+3)}{(2x-3)^2} = \frac{-3(a+2)-6}{(2x-3)^2}$$

$$\xrightarrow{f'(x)=0} -3(a+2)-6=0 \Rightarrow a=-4$$

۳- گزینه ۱ اولاً توجه کنید که شرط $x \geq 0$ برای دامنه تابع وجود دارد. عددهای داده شده در گزینه‌ها بزرگ‌تر از صفر هستند. پس ریشه‌های منخرج را به دست می‌آوریم:

$$x-1-\sqrt{x}=0 \Rightarrow x-1=\sqrt{x} \xrightarrow{(x-1 \geq 0)} x^2-2x+1=x$$

$$x^2-3x+1=0 \Rightarrow x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad (\text{غ.ق.})$$

بنابراین دامنه تابع $\left\{ \frac{3+\sqrt{5}}{2}, 0, +\infty \right\}$ است.

۴- گزینه ۱ توجه کنید که $D_f = \{x | 16 - |x^2 - 9| \geq 0\}$ ، یعنی

$$D_f = \{x | |x^2 - 9| \leq 16\}$$
 در نتیجه

$$-16 \leq x^2 - 9 \leq 16 \Rightarrow -7 \leq x^2 \leq 25 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 25 \Rightarrow -5 \leq x \leq 5$$

پس $D_f = [-5, 5]$ و در نتیجه $a = -5$ ، $b = 5$ و $b-a = 10$

۱۳- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

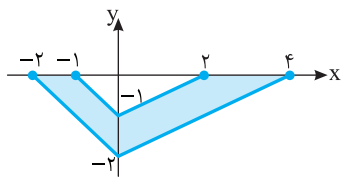
$$f(x) = \left[\frac{x+1}{x}\right] + \left[-\frac{1}{x}\right] = \left[1 + \frac{1}{x}\right] + \left[-\frac{1}{x}\right] = 1 + \left[\frac{1}{x}\right] + \left[-\frac{1}{x}\right]$$

$$f(-x) = 1 + \left[-\frac{1}{x}\right] + \left[\frac{1}{-x}\right] = 1 + \left[-\frac{1}{x}\right] + \left[-\frac{1}{x}\right] = f(x) \quad \text{بنابراین}$$

۱۴- گزینه ۱ برای رسم نمودار تابع $y = 2f\left(\frac{x}{2}\right)$ باید در نمودار تابع f

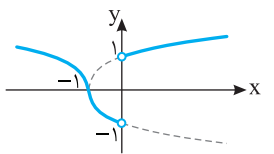
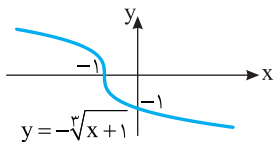
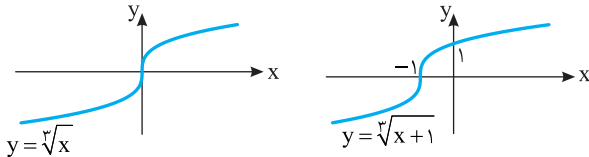
طول نقاط را در ۲ ضرب کنیم تا نمودار تابع $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$ به دست آید. همچنین در نمودار به دست آمده باید عرض نقاط را در ۲ ضرب کنیم تا نمودار تابع $y = 2f\left(\frac{x}{2}\right)$ به دست آید. بنابراین مساحت قسمت رنگی در شکل زیر

$$\text{مورد سؤال است که برابر است با } \frac{1}{2} \times 6 \times 2 - \frac{1}{2} \times 3 \times 1 = \frac{9}{2}$$



$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{x+1} & x < 0 \end{cases} \quad \text{۱۵- گزینه ۳} \quad \text{ضابطه تابع به شکل}$$

است. اکنون توجه کنید که نمودار توابع $y = \sqrt[3]{x+1}$ و $y = -\sqrt[3]{x+1}$ به صورت زیر است:



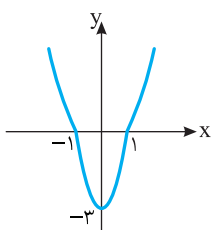
بنابراین نمودار تابع f به شکل روبه‌رو است:

۱۶- گزینه ۴ توجه کنید که

$$g(x) = -2f(x) - |f(x)| = \begin{cases} -2f(x) - f(x) & f(x) \geq 0 \\ -2f(x) - (-f(x)) & f(x) < 0 \end{cases} = \begin{cases} -3f(x) & f(x) \geq 0 \\ -f(x) & f(x) < 0 \end{cases}$$

بنابراین کافی است در جاهایی که مقدار f نامنفی است،

در بازه $[-1, 1]$ ، عرض نقاط روی نمودار f را ۳ برابر کنیم و نمودار را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم. در بقیه جاها نمودار g قرینه نمودار f نسبت به محور طول‌ها است.

**۹- گزینه ۳** اگر (m, n) نقطه برخورد نمودار تابع‌های f و f^{-1}

باشد، نتیجه می‌شود $f(m) = n$ و $f(n) = m$. بنابراین

$$f(-1) = \frac{1}{3} \Rightarrow -a + \frac{2}{9} + b = \frac{1}{3}, \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = -1 \Rightarrow \frac{a}{27} - \frac{2}{27} + b = -1$$

در نتیجه

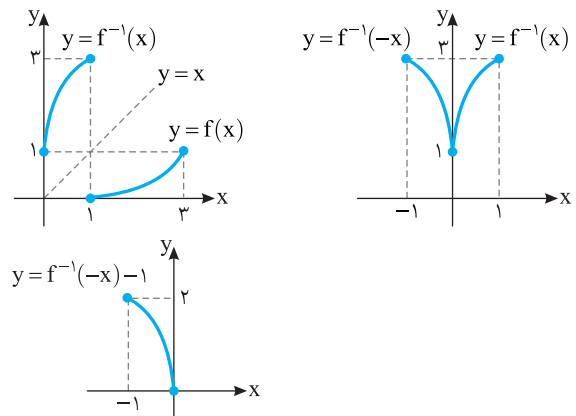
$$\begin{cases} -a + b = \frac{1}{9} \\ a + 27b = -25 \end{cases} \Rightarrow a = -1, b = -\frac{8}{9}$$

$$\text{پس } a + b = -\frac{17}{9}$$

۱۰- گزینه ۴ ابتدا قرینه نمودار تابع f را نسبت به خط $y = x$ رسم

می‌کنیم تا نمودار تابع f^{-1} به دست بیاید. سپس قرینه نمودار تابع f^{-1} را نسبت به محور y پیدا می‌کنیم تا نمودار تابع $y = f^{-1}(-x)$ به دست بیاید.

در آخر نمودار تابع $y = f^{-1}(-x)$ را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y = f^{-1}(-x) - 1$ به دست بیاید.

**۱۱- گزینه ۲** اگر ضابطه داده شده متعلق به یک تابع باشد، باید در

$x = 2$ مقدار $f(x)$ منحصر به فرد باشد، یعنی مقدار $f(2)$ در ضابطه اول با مقدار آن در ضابطه دوم برابر باشد. اگر $f(x) = \sqrt{x+2} + a$ ، آن‌گاه $f(2) = 2 + a$ اگر $f(x) = ax^3 + 16$ ، آن‌گاه $f(2) = 8a + 16$.

بنابراین

$$2 + a = 8a + 16 \Rightarrow a = -2$$

$$\text{و در نتیجه پس } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} - 2 & x \geq 2 \\ -2x^3 + 16 & x \leq 2 \end{cases}$$

$$f(a) = f(-2) = -2(-2)^3 + 16 = 32$$

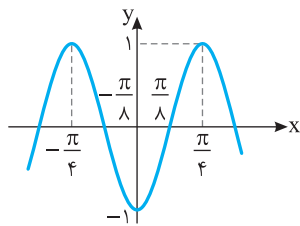
۱۲- گزینه ۳ ضابطه تابع را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = 2mx - mx^2 + x^2 + 4x + m = (1-m)x^2 + (2m+4)x + m$$

ضابطه توابع خطی به شکل $y = ax + b$ است، یعنی یک چندجمله‌ای درجه اول است. بنابراین باید $m = 1$ تا ضابطه تابع یک چندجمله‌ای درجه اول شود، یعنی

$$m = 1 \Rightarrow f(x) = 6x + 1$$

$$\text{بنابراین } f(m) = f(1) = 7$$



۲- گزینۀ ۲ ضابطۀ تابع همانی به صورت $f(x) = x$ است. بنابراین

$$a=0, \quad b=-1, \quad b+c=0 \Rightarrow c=1$$

بنابراین $g(x) = x^2 - x + 1 = -x + 2$ و در نتیجه g یک تابع خطی است.

۲- گزینۀ ۱ کافی است در تساوی داده شده به جای x قرار دهیم $\frac{1}{x}$:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x} + 2}{\frac{1}{x^2} + 1} = \frac{1 + 2x}{1 + x^2} = \frac{x(1+2x)}{1+x^2} \Rightarrow f(x) = \frac{x+2x^2}{1+x^2}$$

۲- گزینۀ ۴ توجه کنید که $D_f = \{x | x-3 \neq 0, \frac{x-7}{2-x} \geq 0\}$ از

طرف دیگر، $\frac{x-7}{2-x} \geq 0 \Rightarrow x \in (2, 7]$ اگر $x-3=0$ ، آن گاه $x=3$. بنابراین

$$D_f = (2, 3) \cup (3, 7] = (2, 7] - \{3\}$$

پس $a=2, b=7, c=3$ و در نتیجه $a+b+c=12$.

۲- گزینۀ ۲ چون فقط یک عدد حقیقی در دامنه تابع قرار ندارد، پس

معادله $m^2x^2 + 3x + 1 = 0$ باید فقط یک جواب داشته باشد. در دو حالت این اتفاق می افتد.

حالت اول این معادله ریشه مضاعف داشته باشد:

$$\Delta = 9 - 4m^2 = 0 \Rightarrow m = \pm \frac{3}{2}$$

در این حالت $x = -\frac{2}{3}$ ریشه مخرج است، در نتیجه $n = -\frac{2}{3}$.

حالت دوم این معادله یک معادله درجه اول باشد، یعنی ضریب x^2 برابر صفر

باشد: $m=0$. در این حالت $x = -\frac{1}{3}$ ریشه مخرج است. در نتیجه

$n = -\frac{1}{3}$ پس دو مقدار مختلف برای n وجود دارد.

۲- گزینۀ ۲ دامنه تابع f به صورت $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$ است، پس باید

دامنه g هم به همین صورت باشد، یعنی $x = -2$ ریشه مضاعف مخرج $g(x)$ باشد:

$$x^2 + cx + 4 = (x+2)^2 \Rightarrow x^2 + cx + 4 = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow c=4$$

از طرف دیگر ضابطۀ f و g باید برابر باشند، پس باید صورت $g(x)$ یک عامل 5 و یک عامل $x+2$ داشته باشد:

$$g(x) = f(x) \Rightarrow \frac{ax+b}{(x+2)^2} = \frac{5}{x+2} \Rightarrow ax+b=5(x+2) \Rightarrow a=5, b=10$$

بنابراین $abc = 5(10)(4) = 200$.

۲- گزینۀ ۲ دامنه تابع g به صورت زیر است:

$$D_g = D_f - \{x | f(x) = 2\} = \{1, 4, 3, 5\} - \{4, 3\} = \{1, 5\}$$

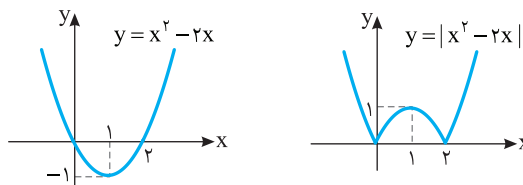
از طرف دیگر.

$$g(1) = \frac{3f(1)}{2-f(1)} = \frac{-3}{2-(-1)} = -1, \quad g(5) = \frac{3f(5)}{2-f(5)} = \frac{3}{2-1} = 3$$

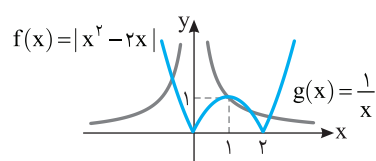
۱۷- گزینۀ ۴ توجه کنید که

$$f(x) = |x||x-2| = |x(x-2)| = |x^2 - 2x|$$

بنابراین، ابتدا نمودار تابع $y = x^2 - 2x$ را رسم می کنیم. سپس، قرینه قسمتی از این نمودار را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می کنیم.



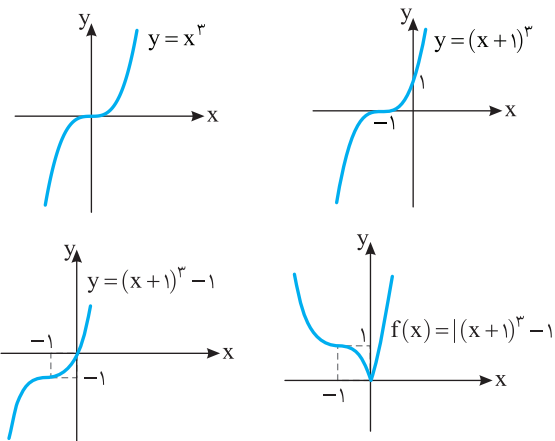
مطابق شکل زیر، نمودار توابع f و g در چهار نقطه متقاطع اند.



۱۸- گزینۀ ۱ ضابطۀ تابع را به صورت زیر می نویسیم:

$$f(x) = |x^3 + 3x^2 + 3x| = |(x+1)^3 - 1|$$

بنابراین کافی است نمودار تابع $y = x^3$ را یک واحد به سمت چپ و یک واحد به سمت پایین منتقل کنیم، سپس قرینه قسمتی از نمودار را که پایین محور طولها قرار دارد نسبت به این محور رسم کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف کنیم.



۱۹- گزینۀ ۲ از تساوی $y = \sqrt[3]{2-3x}$ مقدار x را برحسب y

به دست می آوریم:

$$y^3 = 2 - 3x \Rightarrow x = \frac{2-y^3}{3}$$

بنابراین $f^{-1}(x) = \frac{-x^3 + 2}{3}$ و در نتیجه $a=-1$ و $b=2$ و $ab=-2$.

۲۰- گزینۀ ۱ توجه کنید که $f(x) = -\cos 4x$. اگر نمودار تابع

$y = \cos x$ را رسم کنیم و نسبت به محور طولها قرینه کنیم، نمودار تابع

$y = -\cos x$ به دست می آید. اگر طول هر نقطه از این نمودار را یک چهارم

کنیم، نمودار تابع $y = -\cos 4x$ به دست می آید با توجه به شکل، تابع f روی

بازه $[-\frac{\pi}{4}, 0]$ اکیداً نزولی است، پس حداقل مقدار a برابر $-\frac{\pi}{4}$ است.

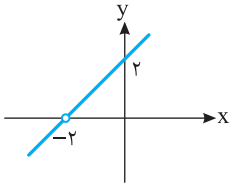
بنابراین، اگر x عددی باشد که $x + \frac{1}{x} = 5$ (چنین عددی وجود دارد، زیرا معادله $x + \frac{1}{x} = 5$ معادل است با $x^2 - 5x + 1 = 0$ ، که دلتای آن مثبت است)، آن‌گاه $5^2 - 1 = 24 = f(5)$.

۳۲- گزینه ۴ چون تابع خطی است، باید ضابطه آن یک چندجمله‌ای درجه اول باشد. پس باید صورت و مخرج کسر در ضابطه داده شده ساده شوند، یعنی صورت باید به شکل ضرب دو عبارت باشد که یکی از آن‌ها $x+2$ است، یعنی $x^2 + mx + 4 = (x+2)(x+a) \Rightarrow x^2 + mx + 4 = x^2 + (a+2)x + 2a$ برای اینکه تساوی فوق برقرار باشد باید داشته باشیم $a=2, m=a+2 \Rightarrow m=4$

پس ضابطه تابع به صورت زیر است:

$$f(x) = \frac{(x+2)(x+2)}{x+2} = x+2, \quad x \neq -2$$

پس نمودار تابع به شکل روبه‌رو است:



۳۳- گزینه ۴ شرط محاسبه دامنه به صورت $(a+3)x^2 - ax + b \geq 0$ است. مجموعه جواب‌های نامعادله فوق نمی‌تواند به صورت $[4, +\infty)$ باشد، مگر اینکه عبارت $(a+3)x^2 - ax + b$ چندجمله‌ای از درجه اول باشد، یعنی $a+3=0$ و در نتیجه $a=-3$. پس نامعادله به صورت $3x + b \geq 0$ درمی‌آید: $3x + b \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{b}{3} \Rightarrow D_f = [-\frac{b}{3}, +\infty)$ بنابراین $-\frac{b}{3} = 4$ و در نتیجه $b = -12$.

۳۴- گزینه ۲ دامنه تابع f برابر $D_f = \{x | \sin x > 0, \pi^2 - x^2 \geq 0\}$ است. مجموعه جواب‌های نامعادله $\pi^2 - x^2 \geq 0$ به صورت $-\pi \leq x \leq \pi$ است. بنابراین باید به دنبال x هایی در بازه $[-\pi, \pi]$ باشیم که در نابرابری $\sin x > 0$ صدق می‌کنند. بنابراین دامنه تابع f به صورت $(0, \pi)$ است و تنها عددهای صحیح ۱ و ۲ در آن قرار دارند.

۳۵- گزینه ۱ توجه کنید که

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = |x-1| - |x| = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ -2x+1 & 0 \leq x \leq 1 \\ -1 & x \geq 1 \end{cases}$$

در بازه $[0, 1]$ تابع $f-g$ ثابت نیست. در این بازه،

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = |x-1| + |x| = -x+1+x=1$$

۳۶- گزینه ۳ توجه کنید که $f(4)=2$. بنابراین

$$(f \circ f)(4) = k \Rightarrow f(f(4)) = k \Rightarrow f(2) = k$$

همچنین، از روی شکل معلوم است که $f(2)$ عددی در بازه $(0, 2)$ است، پس $0 < k < 2$ و در نتیجه $0 < \frac{k}{y} < 1$ ، بنابراین چون تابع f روی بازه $(0, 1)$ صعودی است، پس $f(\frac{k}{y})$ عددی بین $f(0)$ و $f(1)$ است، یعنی $-1 < f(\frac{k}{y}) < 0$.

بنابراین $g = \{(1, -1), (5, 3)\}$ و $R_g = \{-1, 3\}$. پس مجموع اعضای برد تابع g برابر ۲ است.

۳۷- گزینه ۳ توجه کنید

$$D_{f \circ g} = \{x | x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x | -5 \leq x \leq 4, 1 \leq |x-1| \leq 4\}$$

بنابراین

$$1 \leq |x-1| \leq 4 \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x-1 \leq 4 \Rightarrow 2 \leq x \leq 5 \\ \text{یا} \\ -4 \leq x-1 \leq -1 \Rightarrow -3 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

$$D_{f \circ g} = [-5, 4] \cap ([-3, 0] \cup [2, 5]) = [-3, 0] \cup [2, 4]$$

پس اعداد صحیح $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ در دامنه تابع $f \circ g$ قرار دارند که تعداد آن‌ها هفت‌تاست.

۳۸- گزینه ۳ تابع $y = ax^2 + bx + c$ با شرط $a < 0$ روی بازه $(-\infty, -\frac{b}{2a})$ صعودی و روی بازه $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$ نزولی است. بنابراین باید

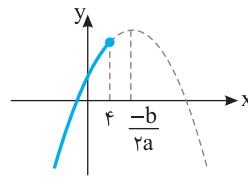
شرایط زیر برقرار باشند تا تابع f صعودی باشد:

$$k+2 < 0 \Rightarrow k < -2$$

$$4 \leq \frac{-2}{2(k+2)} \Rightarrow 4 + \frac{2}{2(k+2)} \leq 0 \Rightarrow \frac{4k+9}{k+2} \leq 0 \Rightarrow -\frac{9}{4} \leq k < -2$$

بنابراین اگر $-\frac{9}{4} \leq k < -2$ ، آن‌گاه تابع

f روی بازه $(-\infty, 4]$ صعودی است.



۳۹- گزینه ۴ نمودار تابع f^{-1} از نقطه $(4, 8)$ عبور می‌کند، پس

نمودار تابع f از نقطه $(8, 4)$ عبور می‌کند. بنابراین

$$f(8) = 4 \Rightarrow \frac{1}{16} \times 8^3 + \sqrt[3]{8} + 2a = 4 \Rightarrow 2a = -3 \Rightarrow a = -1.5$$

در نتیجه

$$f(x) = \frac{1}{16}x^3 + \sqrt[3]{x} - 3 \Rightarrow f(0) = -3.$$

۳۰- گزینه ۳ در تساوی $f(2x+1) = 2g(3x) - 1$ قرار می‌دهیم

$$x=2$$

$$f(5) = 2g(6) - 1 \Rightarrow g(6) = \frac{f(5)+1}{2}$$

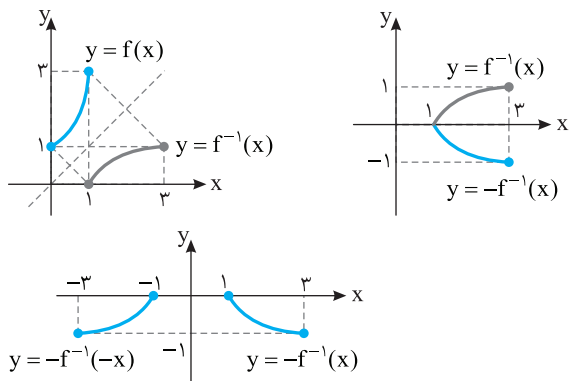
از طرف دیگر،

$$f^{-1}(2) = 5 \Rightarrow f(5) = 2$$

$$g(6) = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$

۳۱- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x^2+1}{x}\right) &= 3x^2 + \frac{3}{x^2} - 4 \Rightarrow f\left(x + \frac{1}{x}\right) = 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4 \\ &= 3\left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right) - 4 = 3\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 10 \end{aligned}$$



بنابراین نمودار توابع $y = -f^{-1}(-x)$ و $y = f^{-1}(x)$ مطابق شکل مقابل دو نقطه مشترک دارند.

۴۱- گزینه ۲ ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم الزاویه ABH .

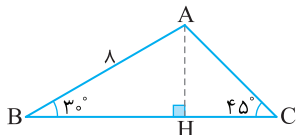
$$\sin 30^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AH}{8}$$

پس $AH=4$. در همین مثلث،

$$\cos 30^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BH}{8}$$

پس $BH=4\sqrt{3}$. اکنون توجه کنید که چون مثلث AHC قائم الزاویه است و زاویه 45° دارد، پس زاویه حاده دیگر آن نیز 45° است. در نتیجه، مثلث AHC متساوی الساقین است، پس $HC=AH=4$. به این ترتیب،

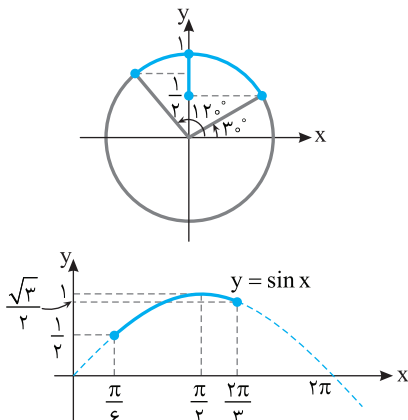
$$BC=BH+HC=4\sqrt{3}+4=4(\sqrt{3}+1)$$



۴۲- گزینه ۲ وقتی چرخ و فلک 180° (۳ دقیقه) می‌چرخد، ۶ دور چرخیده و کابین‌ها در محل اولیه خود قرار گرفته‌اند. باید ببینیم در ۴ ثانیه هر کابین چقدر جابه‌جا می‌شود. چون در هر ۶۰ ثانیه ۲ دور می‌چرخد، پس در ۴ ثانیه $\frac{4}{60} \times 2 = \frac{2}{15}$ دور، یعنی $\frac{2}{15}$ دور معادل $\frac{2}{15} \times \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{45}$ رادیان می‌چرخد. چون زاویه بین دو کابین متوالی $\frac{2\pi}{3}$ رادیان است، پس هر کابین به ۴ کابین جلوتر منتقل می‌شود. یعنی کابین شماره یک به محل کابین شماره پنج منتقل می‌شود.

۴۳- گزینه ۳ باتوجه به شکل‌های زیر واضح است که وقتی $30^\circ \leq \alpha \leq 120^\circ$

مقدار $\sin \alpha$ در بازه $[\frac{1}{2}, 1]$ قرار دارد، پس $a = \frac{1}{2}$ ، $b = 1$ و در نتیجه $a+b = \frac{3}{2}$.



۳۷- گزینه ۳ راه‌حل اول توجه کنید که

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 8(x^2 - 4x + 5) \Rightarrow f(2x+1) = 8(x-2)^2 + 8 \quad (*)$$

اگر فرض کنیم $t = 2x+1$ ، آن‌گاه $x = \frac{t-1}{2}$. اکنون در تساوی (*) به جای x

مقدار $\frac{t-1}{2}$ را قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} f(t) &= 8\left(\frac{t-1}{2}\right)^2 + 8 = 2(t-5)^2 + 8 = 2(t^2 - 10t + 25) + 8 \\ &= 2t^2 - 20t + 58 \end{aligned}$$

بنابراین $f(x) = 2x^2 - 20x + 58$.

راه‌حل دوم توجه کنید که $(f \circ g)(x) = 8(x^2 - 4x + 5)$ ، در نتیجه

$$(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(1) = 40. \quad (f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(1) = 40.$$

شرط $f(1) = 40$ برقرار است.

۳۸- گزینه ۲ اگر $a=0$ ، آن‌گاه $f(x) = [x]$ و می‌دانیم f یک‌به‌یک

نیست. اگر $a=-1$ ، آن‌گاه $f(x) = -x + [x]$ واضح است که f یک‌به‌یک

نیست، مثلاً $f(0) = f(1) = 0$. اگر $a=-2$ ، آن‌گاه $f(x) = -2x + [x]$ و

یک‌به‌یک نیست، مثلاً $f(0) = f(-\frac{1}{2}) = 0$. اگر $a=1$ ، آن‌گاه $f(x) = x + [x]$

که یک تابع اکیداً صعودی و یک‌به‌یک است.

۳۹- گزینه ۲ راه‌حل اول ابتدا ضابطه تابع وارون تابع f را به دست

می‌آوریم:

$$y = \frac{x+4}{x+2} \Rightarrow xy + 2y = x + 4 \Rightarrow x(y-1) = -2y + 4 \Rightarrow x = \frac{-2y+4}{y-1}$$

$$f(x) = f^{-1}(x) \quad \text{اکنون با حل معادله} \quad f^{-1}(x) = \frac{-2x+4}{x-1}$$

نقطه‌های برخورد نمودار دو تابع را می‌یابیم:

$$\frac{x+4}{x+2} = \frac{-2x+4}{x-1} \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = -2x^2 + 8 \Rightarrow x^2 + x - 4 = 0.$$

جواب‌های معادله بالا طول نقاط برخورد هستند که حاصل ضرب آن‌ها برابر -4 است.

راه‌حل دوم در تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ که $a \neq -d$ اگر نمودار تابع‌های f و

f^{-1} نقطه‌های مشترکی داشته باشند، طول این نقطه‌ها از معادله $f(x) = x$

به دست می‌آید. پس

$$\frac{x+4}{x+2} = x \Rightarrow x^2 + 2x = x + 4 \Rightarrow x^2 + x - 4 = 0.$$

بنابراین حاصل ضرب جواب‌ها برابر -4 است.

۴۰- گزینه ۲ ابتدا قرینه نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ رسم

می‌کنیم تا نمودار تابع f^{-1} به دست بیاید. سپس قرینه این نمودار را نسبت به محور x

رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $-f^{-1}$ به دست بیاید. در آخر، قرینه تابع $-f^{-1}$ را

نسبت به محور y رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y = -f^{-1}(-x)$ به دست بیاید.

۴۴- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\cot \alpha - \cos \alpha < 0 \Rightarrow \cot \alpha (1 - \sin \alpha) < 0$$

چون $1 - \sin \alpha$ نمی‌تواند منفی باشد، پس $\cot \alpha < 0$. از طرف دیگر $\cos \alpha \cot \alpha > 0$ و چون $\cot \alpha < 0$ ، پس $\cos \alpha < 0$. بنابراین انتهای کمان نظیر زاویه α در ناحیه دوم قرار دارد.

۴۵- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sin \frac{49\pi}{10} = \sin(\Delta\pi - \frac{\pi}{10}) = \sin \frac{\pi}{10}, \sin \frac{7\pi}{5} = \sin(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{10}) = -\cos \frac{\pi}{10}$$

$$\sin \frac{18\pi}{5} = \sin(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{5}) = -\sin \frac{\pi}{5} = -\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}) = -\cos \frac{\pi}{10}$$

$$\cos \frac{8\pi}{5} = \cos(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{5}) = \sin \frac{\pi}{10}$$

$$A = \sin \frac{\pi}{10} + (-\cos \frac{\pi}{10}) - (-\cos \frac{\pi}{10}) + \sin \frac{\pi}{10} = 2 \sin \frac{\pi}{10}$$

۴۶- گزینه ۲ توجه کنید که $\alpha = \frac{\Delta\pi}{2} + \beta$ و در نتیجه

$$\sin \alpha = \sin(\frac{\Delta\pi}{2} + \beta) = \cos \beta, \quad \cos \alpha = \cos(\frac{\Delta\pi}{2} + \beta) = -\sin \beta$$

$$A = \frac{3 \cos^3 \beta + \cos^3 \beta}{-\sin^3 \beta + 2 \sin^3 \beta} = \frac{4 \cos^3 \beta}{\sin^3 \beta} = 4 \cot^3 \beta$$

۴۷- گزینه ۳ به کمک اتحادهای $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ و

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$A = \sin x \cos x (1 - 2 \sin^2 x) = \frac{1}{2} \sin 2x \times \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x$$

$$A = \frac{1}{4} \sin(\frac{4\pi}{16}) = \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{8} \quad x = \frac{\pi}{16} \text{ به دست می‌آید}$$

۴۸- گزینه ۲ از اتحاد مزدوج و اتحاد

استفاده می‌کنیم:

$$\cos^4 \frac{\pi}{12} - \sin^4 \frac{\pi}{12} = (\cos^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{\pi}{12})(\cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12})$$

$$= 1 \times \cos(\frac{2\pi}{12}) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۴۹- گزینه ۳ ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos(\frac{2\pi}{9} - \frac{\pi}{9}) = -\sin 2x \Rightarrow \cos(\frac{2\pi}{9} - \frac{\pi}{9}) = \cos(\frac{\pi}{9} + 2x)$$

پس جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است:

$$\frac{2\pi}{9} - \frac{\pi}{9} = 2k\pi + \frac{\pi}{9} + 2x \Rightarrow 2k\pi = -\frac{11\pi}{18} \quad (\text{غ.ق.})$$

$$\frac{2\pi}{9} - \frac{\pi}{9} = 2k\pi - \frac{\pi}{9} - 2x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{7\pi}{18}, k \in \mathbb{Z}$$

۵۰- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$2 \cos^2 2x + 3 \cos 2x + 1 = 0 \Rightarrow (2 \cos 2x + 1)(\cos 2x + 1) = 0$$

بنابراین

$$\cos 2x = -1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازه $[0, \pi]$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{2\pi}{3}$ که مجموع آن‌ها برابر $\frac{3\pi}{2}$ است.

۵۱- گزینه ۳ در صورت کسر از $\sin 25^\circ$ و در مخرج کسر از $\cos 25^\circ$ فاکتور می‌گیریم:

$$A = \frac{\sin 25^\circ (1 - \sin^2 25^\circ)}{\cos 25^\circ (1 - \cos^2 25^\circ)} = \frac{\sin 25^\circ \times \cos^2 25^\circ}{\cos 25^\circ \times \sin^2 25^\circ} = \frac{\cos 25^\circ}{\sin 25^\circ} = \cot 25^\circ$$

۵۲- گزینه ۱ دو طرف تساوی $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{3}$ را به توان دو می‌رسانیم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{9}$$

$$1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{9} \Rightarrow 2 \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{8}{9}$$

اگر فرض کنیم $A = \sin \alpha - \cos \alpha$ ، آنگاه

$$A^2 = (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$= 1 - (-\frac{8}{9}) = \frac{17}{9} \Rightarrow A = \pm \frac{\sqrt{17}}{3}$$

چون انتهای کمان نظیر زاویه α در ناحیه چهارم قرار دارد، $\sin \alpha < 0$ و $\cos \alpha > 0$. پس مقدار $\sin \alpha - \cos \alpha$ منفی است و در نتیجه $A = -\frac{\sqrt{17}}{3}$.

۵۳- گزینه ۳ فرض می‌کنیم اندازه این زاویه برحسب درجه برابر D و

برحسب رادیان برابر R باشد. بنابراین $D = \frac{R}{\pi} \times 180^\circ$. از تساوی

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$$

$$\frac{200^\circ}{180^\circ} R - \Delta = \frac{R}{\pi} \Rightarrow 180^\circ R = 200^\circ R - \Delta\pi \Rightarrow 20^\circ R = \Delta\pi \Rightarrow R = \frac{\pi}{4}$$

۵۴- گزینه ۳ از نمودار داده شده مشخص است که سه برابر دوره تناوب

برابر ۶ است، پس دوره تناوب تابع $f(x) = a \sin(b\pi x)$ برابر ۲ است:

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = 2 \Rightarrow \frac{1}{|b|} = 1 \Rightarrow b = \pm 1$$

از طرف دیگر حداکثر مقدار تابع برابر ۴ است. پس $|a| = 4$. در نتیجه $a = \pm 4$.

با توجه به نمودار که در شروع به صورت نزولی است، دو حالت زیر قابل قبول است:

$$\begin{cases} a=4 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 4 \sin(-\pi x), \quad \begin{cases} a=-4 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -4 \sin(\pi x)$$

در هر دو حالت مقدار ab برابر -4 است.

۵۵- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\cot 38^\circ = \cot(27^\circ + 11^\circ) = -\tan 11^\circ$$

بنابراین

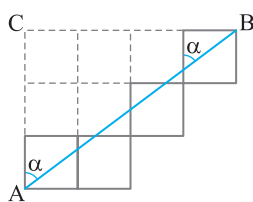
$$\frac{1}{1 - \cot 38^\circ} + \frac{1}{1 + \cot 11^\circ} = \frac{1}{1 + \tan 11^\circ} + \frac{1}{1 + \cot 11^\circ}$$

$$= \frac{1 + \cot 11^\circ + 1 + \tan 11^\circ}{(1 + \tan 11^\circ)(1 + \cot 11^\circ)}$$

$$= \frac{2 + \tan 11^\circ + \cot 11^\circ}{1 + \cot 11^\circ + \tan 11^\circ + \tan 11^\circ \cot 11^\circ}$$

$$= \frac{2 + \tan 11^\circ + \cot 11^\circ}{2 + \tan 11^\circ + \cot 11^\circ} = 1$$

بنابراین جواب‌های واقع در بازه $(0, 2\pi)$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{7\pi}{4}$.



۶۱- گزینه ۳ از نمادگذاری شکل

مقابل استفاده می‌کنیم. توجه کنید که بنابر

قضیه خطوط موازی و مورب، $\alpha = \hat{BAC}$.

در نتیجه $\sin \alpha = \sin \hat{BAC} = \frac{BC}{AB}$

از طرف دیگر، بنابر قضیه فیثاغورس، $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. بنابراین

$$\sin \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5} \quad \text{همچنین} \quad \tan \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{4} \quad \text{بنابراین}$$

$$\sin \alpha - \tan \alpha = \frac{3}{5} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{20}$$

۶۲- گزینه ۳ با استفاده از اتحاد $\tan \alpha \cot \alpha = 1$ مقدار m را

حساب می‌کنیم:

$$\frac{1}{2m}(m+2)=1 \Rightarrow m+2=2m \Rightarrow m=2$$

بنابراین $\cot \alpha = 4$ و به کمک اتحاد $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{17} \quad \text{پس} \quad 1 + 4^2 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

۶۳- گزینه ۲ راه‌حل اول توجه کنید که

$$\tan^2 x + 9 \cot^2 x = (\tan x - 3 \cot x)^2 + 6$$

در نتیجه $\tan^2 x + 9 \cot^2 x = (2)^2 + 6 = 10$. بنابراین

$$(\tan^2 x + 9 \cot^2 x)^2 = 100$$

$$\tan^4 x + 81 \cot^4 x + 18 \tan^2 x \cot^2 x = 100$$

$$\tan^4 x + 81 \cot^4 x + 18 = 100 \Rightarrow \tan^4 x + 81 \cot^4 x = 82$$

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$\tan x - 3 \cot x = 2 \Rightarrow \tan x - \frac{3}{\tan x} = 2$$

$$\tan^2 x - 2 \tan x - 3 = 0 \Rightarrow (\tan x + 1)(\tan x - 3) = 0$$

$$\tan x = -1, \quad \tan x = 3$$

اگر $\tan x = -1$ ، آن‌گاه $\cot x = -1$ و

$$\tan^4 x + 81 \cot^4 x = 1 + 81 = 82$$

اگر $\tan x = 3$ ، آن‌گاه $\cot x = \frac{1}{3}$ و

$$\tan^4 x + 81 \cot^4 x = 81 + 1 = 82$$

پس در هر دو حالت مقدار عبارت مورد نظر برابر ۸۲ است.

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \text{چون} \quad \text{۶۴- گزینه ۳}$$

$$f(x) = 3 - 4x \times \frac{1 - \cos 2(2+ax)}{2} = 1 + 2 \cos(4+2ax)$$

۵۶- گزینه ۳ توجه کنید که

$$7a + 9a = \frac{7\pi}{32} + \frac{9\pi}{32} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 9a = \frac{\pi}{2} - 7a \Rightarrow \cos 9a = \sin 7a$$

به همین ترتیب

$$21a + 27a = \frac{21\pi}{32} + \frac{27\pi}{32} = \frac{48\pi}{32} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow 27a = \frac{3\pi}{2} - 21a$$

$$\cos 27a = -\sin 21a$$

$$\frac{\sin 7a \cos 27a}{\sin 21a \cos 9a} = -\frac{\sin 7a \sin 21a}{\sin 21a \sin 7a} = -1 \quad \text{بنابراین}$$

۵۷- گزینه ۳ دو طرف تساوی داده شده را به توان دومی رسانیم و از اتحادهای

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \quad \text{و} \quad \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = \frac{1}{4}$$

$$1 + \sin 2x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2x = -\frac{3}{4}$$

$$\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x = 1 - 2\left(-\frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{1}{8} \quad \text{بنابراین}$$

۵۸- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$A = \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$$

$$A = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \quad \text{بنابراین}$$

۵۹- گزینه ۱ معادله را به صورت $\cos 2x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ می‌نویسیم.

بنابراین جواب‌ها به صورت زیر هستند: $(k \in \mathbb{Z})$

$$2x = 2k\pi + x + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad 2x = 2k\pi - x - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{2k\pi - \pi}{3}$$

جواب‌های واقع در بازه $[0, \pi]$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{7\pi}{12}$ که مجموع آن‌ها برابر

$$\frac{5\pi}{6} \quad \text{است.}$$

۶۰- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$1 + \sin 2x = (\cos x + \sin x)^2$$

بنابراین معادله به صورت زیر ساده می‌شود:

$$(\cos x + \sin x)^2 = \cos x + \sin x$$

$$(\cos x + \sin x)(\cos x + \sin x - 1) = 0$$

اگر $\cos x + \sin x = 0$ ، آن‌گاه $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$. اگر $\cos x + \sin x = 1$ ، آن‌گاه

$$1 - \cos x = \sin x$$

از اتحادهای $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$ و $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2 \alpha$ به ازای

$$\alpha = \frac{x}{2} \quad \text{استفاده می‌کنیم:}$$

$$2\sin^2 \frac{x}{2} = 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi \Rightarrow x = 2k\pi \\ \sin \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

اکنون جواب‌های واقع در بازه $(0, \frac{3\pi}{4})$ را مشخص می‌کنیم:

k	۰	۱	۲
$x = k\pi + \frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{12}$	$\pi + \frac{\pi}{12}$	$2\pi + \frac{\pi}{12}$

(غ.ق.)

k	۰	۱	۲
$x = k\pi + \frac{5\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\pi + \frac{5\pi}{12}$	$2\pi + \frac{5\pi}{12}$

(غ.ق.)

۷۰- گزینه ۱ در نقاطی که $\cos 4x = 1$ ، تابع f به حداقل مقدار خود

می‌رسد. پس

$$4x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

k	۰	۱	۲
x	۰	$\frac{\pi}{2}$	π

بنابراین نمودار تابع در بازه مورد نظر سه بار به حداقل مقدار خود می‌رسد.

۷۱- گزینه ۴ می‌دانیم $\tan \alpha \cot \alpha = 1$ ، بنابراین

$$A = \frac{1 - \tan \frac{\pi}{5} + \cot \frac{\pi}{5} - \tan \frac{\pi}{5} \cot \frac{\pi}{5}}{1 + \tan \frac{\pi}{5} - \cot \frac{\pi}{5} - \tan \frac{\pi}{5} \cot \frac{\pi}{5}}$$

$$= \frac{1 - \tan \frac{\pi}{5} + \cot \frac{\pi}{5} - 1}{1 + \tan \frac{\pi}{5} - \cot \frac{\pi}{5} - 1} = \frac{-(\tan \frac{\pi}{5} - \cot \frac{\pi}{5})}{\tan \frac{\pi}{5} - \cot \frac{\pi}{5}} = -1$$

۷۲- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ ، بنابراین از فرض مسئله نتیجه می‌شود

$$\frac{\tan x - \frac{1}{\tan x}}{\tan x + \frac{1}{\tan x}} = \frac{7}{25} \Rightarrow \frac{\tan^2 x - 1}{\tan^2 x + 1} = \frac{7}{25}$$

$$25 \tan^2 x - 25 = 7 \tan^2 x + 7 \Rightarrow \tan^2 x = \frac{16}{9}$$

از اتحاد $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + \frac{16}{9}} = \frac{9}{25}$$

چون x زاویه‌ای حاده است، پس $\cos x > 0$ ، در نتیجه $\cos x = \frac{3}{5}$.

۷۳- گزینه ۳ فرض می‌کنیم $\sin x + \cos x = y$ ، در نتیجه

$$y^2 = (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{y^2 - 1}{2}$$

بنابراین معادله مورد نظر به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{y^2 - 1}{2} = y \Rightarrow y^2 - 2y - 1 = 0$$

پس $y = 1 \pm \sqrt{2}$ ، ولی چون $1 + \sqrt{2} > 2$ ، پس $\sin x + \cos x$ نمی‌تواند با

این عدد برابر باشد و در نتیجه $\sin x + \cos x = 1 - \sqrt{2}$.

بنابراین دوره تناوب تابع f برابر است با $\frac{2\pi}{|a|} = \frac{\pi}{|a|}$ ، در نتیجه

$$\frac{\pi}{|a|} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow |a| = 6$$

۶۵- گزینه ۲ حداقل مقدار تابع مورد نظر باید ۴- و حداکثر مقدار آن

۲ باشد. حداقل مقدار تابع $y = 3 \cos(2x) - 4$ برابر ۷- و حداقل مقدار تابع

$y = -2 \cos(3x) + 1$ برابر ۱- است. پس این توابع جواب نیستند.

در تابع $y = -3 \sin(3x) - 1$ مقدار تابع در $x = 0$ برابر ۱- است و تابع در

سمت راست $x = 0$ نزولی است. پس $y = -3 \sin(3x) - 1$ جواب نیست.

ولی تابع $y = 3 \sin(2x) - 1$ در سمت راست $x = 0$ صعودی است.

۶۶- گزینه ۳ توجه کنید که $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ ، در نتیجه

$\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ و $\sin^2 \alpha = 1 - (-\frac{1}{3})^2 = \frac{8}{9}$ ، چون $\alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ ، پس

$\sin \alpha < 0$ و در نتیجه $\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ، بنابراین

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

۶۷- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\sin x = 2 \cos x \Rightarrow \sin^2 x = 4 \cos^2 x$$

اگر به طرفین تساوی بالا $\cos^2 x$ را اضافه کنیم، آنگاه از اتحاد

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$4 \cos^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{5}$$

پس $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 2\left(\frac{1}{5}\right) - 1 = -\frac{3}{5}$.

راه حل دوم از فرض مسئله نتیجه می‌گیریم $\tan x = 2$ ، اکنون می‌توانیم از

$$\text{اتحاد } \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \xrightarrow{\tan x = 2} \cos 2x = \frac{1 - 4}{1 + 4} = -\frac{3}{5}$$

۶۸- گزینه ۲ دو طرف تساوی $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{2}{3}$ را به توان دو

می‌رسانیم:

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{4}{9}$$

$$1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{4}{9} \Rightarrow 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{5}{9}$$

بنابراین $\sin 2\alpha = \frac{5}{9}$ و در نتیجه $\sin^2 2\alpha = \frac{25}{81}$.

۶۹- گزینه ۴ معادله را به صورت $\sin 2x = \frac{1}{2}$ می‌نویسیم. پس

جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}$$

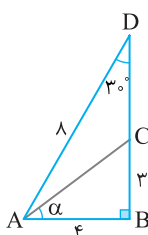
بنابراین $A = \left(\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}\right)^2 = \cos^2 2x = \frac{1+\cos 4x}{2}$ اکنون به ازای $x = \frac{\pi}{16}$ مقدار عبارت A را به دست می آوریم:

$$\frac{1+\cos 4\left(\frac{\pi}{16}\right)}{2} = \frac{1+\cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

۷۸- گزینه ۲ چون $\sin \hat{D} = \sin 3^\circ = \frac{AB}{8} = \frac{1}{8}$ پس $AB = 4$.

بنابراین با استفاده از قضیه فیثاغورس، $AC = 5$ در نتیجه $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ و

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \quad \text{بنابراین} \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$$



۷۹- گزینه ۴ از روی نمودار تابع f در شکل زیر معلوم می شود که وقتی

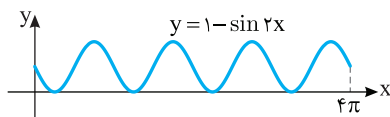
نمودار تابع f بر محور طولها مماس می شود، $f(x) = 0$ پس

$$1 - \sin(2x) = 0 \Rightarrow \sin(2x) = 1$$

$$2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$$0 < x < 4\pi \Rightarrow 0 < k\pi + \frac{\pi}{4} < 4\pi \Rightarrow 0 < k + \frac{1}{4} < 4 \Rightarrow -\frac{1}{4} < k < \frac{15}{4}$$

پس به ازای $k=0, 1, 2, 3$ چهار مقدار برای x به دست می آید که طول نقاط تماس نمودار تابع با محور طولهاست.



۸۰- گزینه ۱ ابتدا دقت کنید که $\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$ در ادامه معادله را

به صورت زیر ساده می کنیم:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{8} - x\right) = -1$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{8}\right)\right) = -1$$

$$2 \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = -1 \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x + \frac{\pi}{8} = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ x + \frac{\pi}{8} = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{7\pi}{24} \\ x = 2k\pi + \frac{25\pi}{24} \end{cases}$$

پس جوابهای معادله در بازه $[0, 2\pi]$ عبارت اند از $\frac{41\pi}{24}$ و $\frac{25\pi}{24}$ که

مجموع آنها برابر $\frac{11\pi}{4}$ است.

توجه کنید که

$$\cos^2 179^\circ = \cos^2 (180^\circ - 1^\circ) = \cos^2 1^\circ$$

$$\cos^2 178^\circ = \cos^2 (180^\circ - 2^\circ) = \cos^2 2^\circ$$

⋮

$$\cos^2 91^\circ = \cos^2 (180^\circ - 89^\circ) = \cos^2 89^\circ$$

بنابراین

$$A = 2(\cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \dots + \cos^2 89^\circ) + \cos^2 90^\circ + \cos^2 180^\circ$$

از طرف دیگر $\cos^2 90^\circ = 0$ و همچنین

$$\cos^2 89^\circ = \sin^2 1^\circ, \cos^2 88^\circ = \sin^2 2^\circ, \dots, \cos^2 46^\circ = \sin^2 44^\circ$$

بنابراین

$$\begin{aligned} A &= 2(\sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ + \dots \\ &\quad + \sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ + \cos^2 45^\circ) + \cos^2 180^\circ \\ &\xrightarrow[\cos^2 180^\circ = 1]{\cos^2 45^\circ = \frac{1}{2}} A = 2\left(\underbrace{(1+1+\dots+1)}_{44} + \frac{1}{2}\right) + 1 = 90 \end{aligned}$$

۷۵- گزینه ۱ توجه کنید که اگر $-\frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2}$ ، آن گاه

$$\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \tan x \geq \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

اگرچه صعودی است و در نتیجه $\tan x \geq -\sqrt{3}$ بنابراین

$$m + 2\sqrt{3} \geq -\sqrt{3} \Rightarrow m \geq -3\sqrt{3}$$

پس حداقل مقدار m برابر $-3\sqrt{3}$ است.

۷۶- گزینه ۴ بیشترین و کمترین مقدار تابع به ترتیب برابر ۲ و -۲

هستند. پس $|a| = 2$. نمودار تابع از نقطه $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ عبور می کند، بنابراین

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow a \sin\left(\pi\left(b - \frac{\pi}{3}\right)\right) = 0 \Rightarrow \sin\left(\pi\left(b - \frac{\pi}{3}\right)\right) = 0$$

$$\pi\left(b - \frac{\pi}{3}\right) = k\pi \Rightarrow b = k + \frac{\pi}{3}$$

چون $2 < b < 3$ ، پس $b = \frac{7}{3}$. بنابراین ضابطه تابع به صورت

$$f(x) = 2 \sin\left(\frac{7\pi}{3} - \pi x\right) \quad \text{یا} \quad f(x) = -2 \sin\left(\frac{7\pi}{3} - \pi x\right) \quad \text{است. چون}$$

$f(0) > 0$ ، پس ضابطه تابع به صورت $f(x) = 2 \sin\left(\frac{7\pi}{3} - \pi x\right)$ است. در

$$\text{نتیجه } a = 2, b = \frac{7}{3}, a + b = \frac{13}{3}$$

۷۷- گزینه ۲ از اتحادهای $\cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ و

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \tan^2 x} &= \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} \\ &= \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x) \cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \end{aligned}$$

برای اینکه تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، باید حدهای چپ و راست تابع در نقطه ۲ با مقدار تابع در نقطه ۲ برابر باشند، بنابراین

$$fa+1=b-1, \quad 8a+21=b-1$$

از حل دستگاه معادلات بالا به دست می‌آید $a=-5$ و $b=-18$.

۸۸- گزینه ۲ راه حل اول برای اینکه حد کسر برابر $+\infty$ شود، باید

حد مخرج صفر باشد. پس

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + ax^2 + 3x + b) = 1 + a + 3 + b = 0 \Rightarrow b = -a - 4$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^3 + ax^2 + 3x + b} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{x^3 + ax^2 + 3x - a - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x^2 + (a+1)x + a+4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2 + (a+1)x + a+4} \end{aligned}$$

برای اینکه حد کسر فوق $+\infty$ شود، باید حد مخرج صفر باشد و علامت مخرج در دو طرف $x=1$ مثبت باشد، یعنی $x=1$ ریشه مضاعف آن باشد.

پس

$$1 + a + 1 + a + 4 = 0 \Rightarrow a = -3$$

بنابراین $b = -1$ و $a - b = -2$.

راه حل دوم از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم: (به درس آخر فصل چهارم مراجعه کنید.)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^3 + ax^2 + 3x + b} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 1}{3x^2 + 2ax + 3}$$

با توجه به اینکه حاصل حد $+\infty$ شده است، بنابراین حد مخرج در نقطه $x=1$ باید صفر باشد. پس

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + 2ax + 3) = 0 \Rightarrow 3 + 2a + 3 = 0 \Rightarrow a = -3$$

توجه کنید که در ابتدا در نقطه $x=1$ هم، حد صورت و هم حد مخرج برابر صفر بود، پس

$$1 + a + 3 + b = 0 \xrightarrow{a=-3} b = -1$$

بنابراین $a - b = -2$.

۸۹- گزینه ۴ توجه کنید که بزرگ‌ترین جمله در صورت کسر مورد نظر

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 \circ x^2}{\Delta x^2} = 2 \text{ در نتیجه حد مورد نظر برابر است با } 2 \circ x^2.$$

۹۰- گزینه ۱ توجه کنید که $m \neq 6$ ، در غیر این صورت حد مورد نظر

برابر صفر می‌شود. اکنون توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 - 5x + 1 - mx^2}{(3x - 2)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(6-m)x^2 - 5x + 1}{9x^2 - 12x + 4} = \frac{6-m}{9}$$

$$\text{بنابراین } \frac{6-m}{9} = \frac{1}{2} \text{ پس } m = \frac{3}{2}.$$

۹۱- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $x \rightarrow 0^+$ یا $x \rightarrow 0^-$ ، آن‌گاه

$$x^3 - x^2 = x^2(x-1) \rightarrow 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x^3 - x^2) = \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = -1$$

۸۱- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که اگر $x \rightarrow 1^+$ ، آن‌گاه $(1-x^2) \rightarrow 0^-$

و اگر $x \rightarrow 1^-$ ، آن‌گاه $(1-x^2) \rightarrow 0^+$. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(1-x^2) = \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(1-x^2) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = -2$$

$$\text{در نتیجه } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(1-x^2) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(1-x^2) = 1 - (-2) = 3.$$

۸۲- گزینه ۱ وقتی که x از سمت چپ به ۲ نزدیک می‌شود، $f(x)$ از سمت راست به ۲ نزدیک می‌شود. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 2^+} f(t) = -1$$

۸۳- گزینه ۳ فرض می‌کنیم $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = b$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = a$ در

این صورت

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (f - 2g)(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} f(x) - 2 \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = a - 2b = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1} (2f + 3g)(x) &= 2 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + 3 \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2a + 3b = 18 \end{aligned}$$

از حل دستگاه معادلات بالا نتیجه می‌شود $a=6$ و $b=2$ ، پس

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} g(x)} = \frac{a}{b} = \frac{6}{2} = 3$$

۸۴- گزینه ۲ ابتدا توجه که در یک همسایگی چپ نقطه $x=1$

تساوی‌های $[2x]=1$ ، $[-x]=-1$ و $|1-x|=1-x$ برقرار هستند. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[2x](x+2)}{x[-x]+|1-x|} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+2}{-x+1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+2}{-2x+1} = -3$$

۸۵- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{\lambda})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{\lambda})^-} (\sqrt{2} \sin 2x) = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{\lambda})^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{\lambda})^+} (a \cos 2x + 2) = a \cos \frac{\pi}{4} + 2 = \frac{a\sqrt{2}}{2} + 2$$

اگر تابع f در نقطه $x = \frac{\pi}{\lambda}$ حد داشته باشد، دو حد بالا باید برابر باشند:

$$1 = \frac{a\sqrt{2}}{2} + 2 \Rightarrow a = -\sqrt{2}$$

۸۶- گزینه ۳ **راه حل اول** توجه کنید که

$$\frac{2x^2 - 8}{x^2 + 3x + 2} = \frac{2(x^2 - 4)}{x^2 + 3x + 2} = \frac{2(x-2)(x+2)}{(x+2)(x+1)} = \frac{2(x-2)}{x+1}, \quad x \neq -2$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - 8}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x-2)}{x+1} = \frac{-8}{-1} = 8$$

راه حل دوم از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم: (به درس آخر فصل چهارم مراجعه کنید.)

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - 8}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x}{2x+3} = \frac{-8}{-1} = 8$$

۸۷- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax^2 + 1) = 4a + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (8ax + 21) = 16a + 21$$

۹۶- گزینه ۴ راه حل اول چون حد صورت کسر در نقطه $x=2$ صفر است، پس باید حد مخرج کسر هم در آن صفر باشد، زیرا در غیر این صورت حد کسر برابر صفر خواهد شد. پس

$$\lim_{x \rightarrow 2} (ax^2 + bx + 2) = 4a + 2b + 2 = 0 \Rightarrow b = -1 - 2a$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{ax^2+bx+2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{ax^2+(-1-2a)x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2-4}{(x-2)(ax-1)(\sqrt{x+2}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(ax-1)(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{1}{4(2a-1)} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\frac{1}{4(2a-1)} = \frac{3}{4} \Rightarrow 2a-1 = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$\text{در نتیجه } a+b = -\frac{5}{3} \text{ و } b = -\frac{7}{3}$$

راه حل دوم توجه کنید که حد صورت در نقطه $x=2$ برابر صفر است و چون مقدار حد عبارت صفر نشده، پس حد مخرج در این نقطه هم باید صفر باشد: $4a+2b+2=0$. اکنون از قاعده هوییتال استفاده می کنیم (به درس آخر فصل چهارم مراجعه کنید):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{ax^2+bx+2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+2}}}{2ax+b} = \frac{1}{4a+b} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4a+b = \frac{1}{3} \\ \text{از حل دستگاه معادلات} \quad &\begin{cases} 4a+2b=-2 \\ 4a+b=\frac{1}{3} \end{cases} \text{ به دست می آید } a = \frac{2}{3} \text{ و } b = -\frac{7}{3}. \text{ پس} \end{aligned}$$

$$a+b = -\frac{5}{3}$$

۹۷- گزینه ۱ توجه کنید که

$$f(12) = [6] - [4] = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 12^-} f(x) = 5 - 3 = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 12^+} f(x) = 6 - 4 = 2$$

بنابراین تابع f در $x=12$ پیوسته است.

۹۸- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $x \rightarrow +\infty$ ، آن گاه $-\frac{1}{x} \rightarrow 0^-$ و

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2-1}{4x^2+x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{4x^2} = -\frac{1}{4} \text{، بنابراین } [-\frac{1}{4}] = -\frac{1}{4}$$

۹۹- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+3}{4x^3+ax^2+bx} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+3}{x(4x^2+ax+b)} = -\infty$$

$$\text{چون } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{4x^2+ax+b} = +\infty \text{، پس باید } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+3}{x} = \frac{1}{-2}$$

نتیجه $x=-2$ باید ریشه مضاعف مخرج باشد و در اطراف آن مخرج مثبت باشد. بنابراین

$$4x^2+ax+b = 4(x+2)^2 \Rightarrow 4x^2+ax+b = 4x^2+16x+16$$

$$\text{پس } a=16, b=16, a+b=32$$

۹۲- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(f(x-3)) = \lim_{t \rightarrow 0} f(f(t)) = \lim_{s \rightarrow -1} f(s) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (xf(x-1)) = \lim_{x \rightarrow 3} x \times \lim_{x \rightarrow 3} f(x-1) = 3 \lim_{t \rightarrow 2} f(t) = 0$$

$$\text{بنابراین } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(f(x-3))+1}{xf(x-1)+2} = \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2}$$

۹۳- گزینه ۱ با فرض $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = L_g$ و $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = L_f$ معلوم می شود که

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f(x)+g(x)) = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3 \Rightarrow L_f + L_g = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f^2(x)-g^2(x)) = 21 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f^2(x) - \lim_{x \rightarrow 2} g^2(x) = 21$$

$$L_f^2 - L_g^2 = 21 \Rightarrow (L_f - L_g)(L_f + L_g) = 21$$

$$3(L_f - L_g) = 21 \Rightarrow L_f - L_g = 7$$

از حل دستگاه معادله های $\begin{cases} L_f - L_g = 7 \\ L_f + L_g = 3 \end{cases}$ به دست می آید $L_f = 5$ و

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2x^2)}{g(x+1)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} f(2x^2)}{\lim_{x \rightarrow 1} g(x+1)} = \frac{\lim_{t \rightarrow 2} f(t)}{\lim_{k \rightarrow 2} g(k)} = \frac{5}{-2} \text{، بنابراین } L_g = -2$$

۹۴- گزینه ۳ ابتدا حد چپ و حد راست تابع را در نقطه $x=3$

حساب می کنیم. توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} [-x] = -3, \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} [x^2] = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} [-x] = -4, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} [x^2] = 9$$

پس

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (-3x+8m) = 8m-9$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (-4x+9m) = -12+9m$$

برای اینکه تابع در نقطه $x=3$ حد داشته باشد، باید حد چپ و حد راست تابع در آن با هم برابر باشند. پس

$$8m-9 = 9m-12 \Rightarrow m=3$$

۹۵- گزینه ۲ با توجه به اینکه تابع $y=[x]$ فقط در نقاط صحیح حد

ندارد، پس تابع f هم فقط در این نقاط ممکن است حد نداشته باشد. به دلیل حضور عامل صفر کننده x^2-1 که در $[x]$ ضرب شده است، تابع f در اعداد صحیح $x=1$ و $x=-1$ حد دارد و در بقیه نقاط صحیح بازه $(-2, 3)$ یعنی

نقاط $x=0$ و $x=2$ حد ندارد. توجه کنید که اگر k عددی صحیح باشد، آن گاه

$$\lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^+} k(x^2-1) = k(k^2-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^-} (k-1)(x^2-1) = (k-1)(k^2-1)$$

از تساوی $k(k^2-1) = (k-1)(k^2-1)$ نتیجه می شود $k = \pm 1$ ، یعنی تابع f فقط در دو تا نقطه از نقاط صحیح ($x=1$ و $x=-1$) حد دارد و در بقیه نقاط صحیح حد ندارد.

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x^2 + x + a - 2}) = 0 \Rightarrow \sqrt{2^2 + 2 + a - 2} = 0 \Rightarrow a = -2$$

اگر $a = -2$ ، حد مورد نظر می‌شود

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2} - 2}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2 + x - 2} - 2)(\sqrt{x^2 + x - 2} + 2)}{(x+2)(x-2)(\sqrt{x^2 + x - 2} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 4}{(x-2)} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x+2)(\sqrt{x^2 + x - 2} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{(x-2)} \times \frac{1}{16} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{16} \lim_{x \rightarrow 2} (x+3) = \frac{5}{16} \end{aligned}$$

در نتیجه $b = \frac{5}{16}$.

راه‌حل دوم چون حد مخرج صفر است و حد مورد نظر وجود دارد، پس حد صورت هم باید صفر باشد، تا حد به صورت $\frac{0}{0}$ در بیاید. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x^2 + x + a - 2}) = 0 \Rightarrow \sqrt{2^2 + 2 + a - 2} = 0 \Rightarrow a = -2$$

اکنون برای به دست آوردن مقدار حد می‌توانیم از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم (به درس آخر فصل چهارم مراجعه کنید):

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2} - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2 + x - 2}}}{2x} = \frac{5}{4} = \frac{5}{16}$$

۱۰۷- گزینه ۴ توجه کنید که $D_f = \mathbb{R}$ ، بنابراین تابع f فقط در نقطه $x=1$ ممکن است ناپیوسته باشد. در این نقطه حد چپ، حد راست و مقدار تابع را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+3}{2x^2+1} = \frac{4}{3} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{x^3-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+x+1}{x^2+x+1} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

بنابراین تابع f در $x=1$ پیوسته است و نقطه ناپیوستگی ندارد.

۱۰۸- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$. بنابراین

$$\begin{aligned} [\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)] &= [3] = 3 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 = 2 \text{ در نتیجه } [f(x)] = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] - 2 [\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)] &= 2 - 2 \times 3 = -4 \end{aligned}$$

۱۰۹- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5 &= 2(x^2 - 2.5) = 2(x-5)(x+5) \\ x^3 - 1 &= (x-1)(x^2+x+1) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2x^2 - 5}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2(x-5)(x+5)}{x(x-5)^2} = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2(x+5)}{x(x-5)} = -\infty$$

۱۱۰- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\begin{aligned} f(2x) - 1 &= 3(2x)^2 - 2x - 1 = 12x^2 - 2x - 1 \\ f(x) + 3x^2 - 1 &= 3x^2 - x + 3x^2 - 1 = 6x^2 - x - 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x^2 - 2x - 1}{6x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x^2}{6x^2} = 2$$

۱۰۰- گزینه ۴ چون حاصل حد $-\infty$ شده است، پس باید درجه

صورت کسر بیشتر از درجه مخرج آن شود. بنابراین

$$a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3, \quad b^2 - 3a = 0 \xrightarrow{a=3} b^2 = 9 \Rightarrow b = \pm 3$$

از طرف دیگر حد مورد نظر به صورت زیر است:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(b-2)x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((b-2)x) = -\infty$$

پس $b-2$ باید منفی باشد و در نتیجه $b = -3$ و $ab = -9$.

۱۰۱- گزینه ۱ اگر $x \rightarrow 2^+$ ، آن‌گاه $f(x) \rightarrow (-1)^-$ و در نتیجه

$$f(f(x)) \rightarrow 2^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} [(f \circ f)(x)] = \lim_{x \rightarrow 2^+} [f(f(x))] = \lim_{t \rightarrow 2^-} [t] = 1$$

۱۰۲- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f(x+1) = a(x+1)^2 + b(x+1) - c, \quad f(3x) = 9ax^2 + 3bx - c$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x+1) = a(0+1)^2 + b(0+1) - c = a + b - c$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(3x) = 9a \times 1^2 + 3b \times 1 - c = 9a + 3b - c$$

بنابراین از شرط مسئله نتیجه می‌شود $a + b - c = 9a + 3b - c$ یعنی

$$\frac{a}{b} = -\frac{1}{4}, \quad 8a = -2b$$

۱۰۳- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که اگر $x \rightarrow 3^-$ ، آن‌گاه

$$-x \rightarrow (-3)^+, \quad [x] = 2 \text{ و } [-x] = -3 \text{ پس}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{x^2}{[x]} - \frac{[-x]}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{-3}{x} \right) = \frac{9}{2} + \frac{3}{3} = \frac{11}{2} = 5.5$$

۱۰۴- گزینه ۳ حد چپ و حد راست تابع در $x=1$ را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 5x^2 + 4}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 4) = -3 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{a}{x - 2} = -a$$

چون حد تابع در $x=1$ وجود دارد، پس حد چپ و حد راست آن در این نقطه برابرند:

$$-a = -3 \Rightarrow a = 3$$

۱۰۵- گزینه ۳ چون حد صورت کسر وقتی $x \rightarrow 3$ صفر است، باید حد

مخرج آن هم صفر باشد، زیرا در غیر این صورت حد کسر برابر صفر خواهد شد. پس

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + ax + 3) = 9 + 3a + 3 = 12 + 3a = 0 \Rightarrow a = -4$$

بنابراین

$$b = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{ax - 3a}{x^2 + ax + 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-4x + 12}{x^2 - 4x + 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-4(x-3)}{(x-3)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-4}{x-1} = -2$$

بنابراین $a + b = -6$.

۱۰۶- گزینه ۴ **راه‌حل اول** چون حد مخرج صفر است و حد مورد نظر وجود

دارد، پس حد صورت هم باید صفر باشد، تا حد به صورت $\frac{0}{0}$ در بیاید.

۱۱۴- گزینه ۲ توجه کنید که

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=ab-1, \quad \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} (a \sin x) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} (\cos 2x + b) = -1 + b$$

بنابراین $\begin{cases} ab-1=a \\ a=b-1 \end{cases}$ برای اینکه تابع f در نقطه $x = \frac{\pi}{2}$ پیوسته باشد باید

$$ab-1=a \xrightarrow{b=a+1} a(a+1)-1=a$$

$$a^2+a-1=a \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=\pm 1$$

اگر $a=1$ ، آن گاه $b=2$ و $a+b=3$.

اگر $a=-1$ ، آن گاه $b=0$ و $a+b=-1$.

۱۱۵- گزینه ۴ توجه کنید که $(f+2g)-(f-g)=3g$ ، پس تابع g

در نقطه $x=a$ پیوسته است. به این ترتیب چون $(f-g)+g=f$ ، پس تابع f هم در نقطه $x=a$ پیوسته است. چون برد تابع‌های f و g مجموعه اعداد

حقیقی مثبت است، پس مخرج کسره‌های $\frac{1}{f}$ ، $\frac{1}{g}$ و $\frac{1}{f+g}$ هیچ گاه صفر

نمی‌شود و دامنه این توابع مجموعه اعداد حقیقی است و چون f و g در $x=a$

پیوسته‌اند، این توابع هم در $x=a$ پیوسته‌اند. ولی دامنه تابع $\frac{1}{f-g}$ ممکن

است $\mathbb{R}$ نباشد و این تابع ممکن است در $x=a$ تعریف نشود. (کافی است

$(f(a)=g(a))$ ، پس تابع $\frac{1}{f-g}$ ممکن است در $x=a$ پیوسته نباشد.

۱۱۶- گزینه ۴ ابتدا حد تابع در $x=0$ را پیدا می‌کنیم. توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (\sqrt[3]{x+27}-3) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+27}-3}{x}$$

فرض می‌کنیم $\sqrt[3]{x+27}=t$ ، پس $x+27=t^3$ ، در نتیجه $x=t^3-27$

همچنین اگر $x \rightarrow 0$ ، آن گاه $t \rightarrow 3$. بنابراین حد مورد نظر می‌شود

$$\lim_{t \rightarrow 3} \frac{t-3}{t^3-27} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{t-3}{(t-3)(t^2+3t+9)} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{1}{t^2+3t+9} = \frac{1}{27}$$

در نتیجه $a=27$.

۱۱۷- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$ ، بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 1$$

همچنین مقادیر $f(x)$ در مثبت بی‌نهایت بزرگ‌تر از یک هستند. پس

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-1-(f \circ f)(x)} = -\infty \text{، در نتیجه } (f \circ f)(x) \rightarrow 1^+$$

۱۱۸- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

بنابراین $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

پس نمودار تابع f در اطراف خط $x=1$ به صورت مقابل است.

۱۱۱- گزینه ۲ اگر $x \rightarrow \left(\frac{5\pi}{4}\right)^+$ ، آن گاه $\sin x \rightarrow \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^-$ ، بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{5\pi}{4}\right)^+} [\sqrt{2} \sin x] = \lim_{t \rightarrow (-1)^-} [t] = -2 \text{ پس } \sqrt{2} \sin x \rightarrow (-1)^-$$

۱۱۲- گزینه ۴ راه حل اول ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}-2}{x^2-25} &= \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{\sqrt{x+4}-3}{x^2-25} - \frac{\sqrt{x-4}-1}{x^2-25} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4}-3}{x^2-25} - \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-4}-1}{x^2-25} \end{aligned}$$

اکنون از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{\sqrt{x+4}-3}{x^2-25} \times \frac{\sqrt{x+4}+3}{\sqrt{x+4}+3} \right) - \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{\sqrt{x-4}-1}{x^2-25} \times \frac{\sqrt{x-4}+1}{\sqrt{x-4}+1} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{x+4-9}{(x-5)(x+5)} \times \frac{1}{\sqrt{x+4}+3} \right) - \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{x-4-1}{(x-5)(x+5)} \times \frac{1}{\sqrt{x-4}+1} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(\sqrt{x+4}+3)(x+5)} - \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(\sqrt{x-4}+1)(x+5)} = \frac{1}{60} - \frac{1}{20} = -\frac{1}{30} \end{aligned}$$

راه حل دوم از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم (به درس آخر فصل چهارم مراجعه کنید):

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}-2}{x^2-25} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+4}} - \frac{1}{2\sqrt{x-4}}}{2x} = \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{2}}{10} = -\frac{1}{30}$$

۱۱۳- گزینه ۳ راه حل اول فرض می‌کنیم $\sqrt{x}=t$. در این صورت وقتی $x \rightarrow 8$ ، $t \rightarrow 2$. بنابراین

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x}-1}{x-8} &= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{\sqrt{t^2+1}-t-1}{t^2-8} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{t^2+1}-(t+1)}{t^2-8} \times \frac{\sqrt{t^2+1}+(t+1)}{\sqrt{t^2+1}+(t+1)} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 2} \left(\frac{t^2+1-t^2-2t-1}{t^2-8} \times \frac{1}{\sqrt{t^2+1}+t+1} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 2} \left(\frac{t(t-2)(t+1)}{(t-2)(t^2+2t+4)} \times \frac{1}{\sqrt{t^2+1}+t+1} \right) = \frac{2 \times (2+1)}{4+4+4} \times \frac{1}{3+2+1} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

راه حل دوم

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x}-1}{x-8} &= \lim_{x \rightarrow 8} \left(\frac{\sqrt{x+1}-3}{x-8} - \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \left(\frac{\sqrt{x+1}-3}{x-8} \times \frac{\sqrt{x+1}+3}{\sqrt{x+1}+3} \right) - \lim_{x \rightarrow 8} \left(\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8} \times \frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \left(\frac{x+1-9}{x-8} \times \frac{1}{\sqrt{x+1}+3} \right) - \lim_{x \rightarrow 8} \left(\frac{x-8}{x-8} \times \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{\sqrt{x+1}+3} - \lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4} \\ &= \frac{1}{3+3} - \frac{1}{4+4+4} = \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

راه حل سوم از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم (به درس آخر فصل چهارم مراجعه کنید):

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x}-1}{x-8} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{1} = \frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{12}$$

۱۱۹- گزینه ۲

اگر m عددی مثبت باشد، وقتی که $x \rightarrow +\infty$ ، مقادیر $3-mx$ منفی‌اند و حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(mx-3)+x-1}{3x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(m+1)x-4}{3x+1} = \frac{m+1}{3}$$

بنابراین $\frac{m+1}{3} = \frac{2}{3}$ ، پس $m=1$. اگر m عددی منفی باشد، وقتی که

$x \rightarrow +\infty$ ، مقادیر $3-mx$ مثبت‌اند و حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3-mx)+x-1}{3x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-m)x+2}{3x+1} = \frac{1-m}{3}$$

بنابراین $\frac{1-m}{3} = \frac{2}{3}$ ، پس $m=-1$. اگر $m=0$ ، حد مورد نظر برابر $\frac{1}{3}$

می‌شود و قابل قبول نیست. بنابراین مقادیر m عددهای ۱ و -۱ هستند. پس m دو مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد.

۱۲۰- گزینه ۴

توجه کنید که اگر $f(x)=ax+b$ ، آن‌گاه

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f^{-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax+b}{\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}} = \frac{a}{\frac{1}{a}} = a^2$$

بنابراین $a^2=9$ ، و چون شیب خط مثبت است، بنابراین a مثبت است، پس $a=3$. به این ترتیب $f(x)=3x+b$ و

$$f(3)=10 \Rightarrow 9+b=10 \Rightarrow b=1$$

بنابراین $f(x)=3x+1$ ، پس $f(1)=4$.

۱۲۱- گزینه ۲

ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2f(x)-6}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(f(x)-3)}{x+2} = 2 \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} = 2f'(-2)$$

از طرف دیگر، مقدار $f'(-2)$ برابر شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $A(-2, 3)$ ، یعنی شیب خط d است. اکنون توجه کنید که چون خط d از

نقطه‌های $A(-2, 3)$ و $(1, 0)$ می‌گذرد، شیب آن برابر است با $\frac{3-0}{-2-1} = -1$.

بنابراین $f'(-2)=-1$ و حد مورد نظر برابر است با $2f'(-2)=-2$.

۱۲۲- گزینه ۱

راه‌حل اول توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f^3(x)-f^3(-2)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f^3(x)-f^3(-2)}{x-(-2)}$$

$$=(f^3)'(-2)=3f'(-2)f^2(-2)$$

از طرف دیگر، $f(-2)=3$ و $f'(x)=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+3}}$ ، پس

$$f'(-2)=\frac{-5}{2\sqrt{9}}=-\frac{5}{6}$$

به این ترتیب، مقدار حد مورد نظر برابر است با $3(-\frac{5}{6}) \times 3^2 = -\frac{45}{2}$.

راه‌حل دوم از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم (به درس آخر این فصل مراجعه کنید):

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f^3(x)-f^3(-2)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3f'(x)f^2(x)}{1}$$

از طرف دیگر، $f(-2)=3$ و $f'(x)=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+3}}$ ، پس

$$f'(-2)=\frac{-5}{2\sqrt{9}}=-\frac{5}{6}$$

پس $\lim_{x \rightarrow -2} (3f'(x)f^2(x))=3f'(-2)f^2(-2)=-\frac{45}{2}$

۱۲۳- گزینه ۴ **راه‌حل اول** اگر فرض کنیم $H=-h^2$ ، آن‌گاه $H \rightarrow 0^-$ و در نتیجه

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h^2)-f(h^2)}{h^2-h^2} &= \lim_{H \rightarrow 0^-} \frac{f(H)-f(H)}{-H-H^2} \\ &= \lim_{H \rightarrow 0^-} \frac{f(H)-f(H)}{H} \times \lim_{H \rightarrow 0^-} \frac{-1}{1+H} = -f'(2) = 6 \end{aligned}$$

راه‌حل دوم از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم (به درس آخر این فصل مراجعه کنید):

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h^2)-f(h^2)}{h^2-h^2} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-2hf'(h^2)}{2h-4h^3} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(-f'(h^2))}{1-2h^2} \\ &= \lim_{H \rightarrow 0^+} \frac{(-f'(H))}{1-H} = -f'(2) = 6 \end{aligned}$$

توجه کنید که $H=h^2$.

۱۲۴- گزینه ۱ **توجه کنید که** $f'(x) = \begin{cases} 2x+4 & x > 2 \\ 3x^2+2x & x < 2 \end{cases}$ بنابراین

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x+4) = 4+4=8$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x^2+2x) = 12+4=16$$

و در نتیجه $f'_+(2)-f'_-(2)=8-16=-8$.

۱۲۵- گزینه ۱ **توجه کنید که** بنابر اتحاد چاق و لاغر،

$$f(x) = \frac{x^5+1}{x^4-x^3+x^2-x+1} = \frac{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)}{x^4-x^3+x^2-x+1} = x+1$$

بنابراین $f'(x)=1$ و $f'(1000)=1$.

۱۲۶- گزینه ۱ **توجه کنید که**

$$f'(x) = \frac{(2ax)\sqrt{3x+1} - \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}(ax^2+2)}{3x+1}$$

بنابراین

$$f'(1) = \frac{7}{16} \Rightarrow \frac{(2a)(1) - \frac{3}{2\sqrt{2}}(a+2)}{4} = \frac{7}{16}$$

$$16a - 3(a+2) = 7 \Rightarrow 13a = 13 \Rightarrow a=1$$

۱۲۷- گزینه ۴ **ابتدا توجه کنید که**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{1-x^2} - \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{(\sqrt{1-x^2})^2} = \frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{g^3(x)} \end{aligned}$$

راه حل دوم از قاعده هوییتال استفاده می کنیم (به درس آخر این فصل مراجعه کنید):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^3(1+h) - 27}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3f'(1+h)f^2(1+h)}{1} \\ = 3f'(1)f^2(1) = 3 \times 3 \times 3^2 = 81$$

۱۳۳- گزینه ۱ توجه کنید که $f(0) = 0$ و در نتیجه

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + 2\sqrt{4x^2 - x^4}}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + 2|x|\sqrt{4 - x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + 2|x|\sqrt{4 - x^2}}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + 2\sqrt{4 - x^2}) = 1 + 4 = 5$$

به همین ترتیب،

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + 2|x|\sqrt{4 - x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + 2\sqrt{4 - x^2}) = 1 + 4 = 5$$

پس $f'_+(0) = f'_-(0) = 2$

۱۳۴- گزینه ۳ ابتدا تابع مشتق تابع f را به دست می آوریم:

$$f'(x) = \frac{1 + 2x + 3x^2 + \dots + 24x^{23}}{2\sqrt{1 + x + x^2 + \dots + x^{24}}} \\ f'(1) = \frac{1 + 2 + 3 + \dots + 24}{2\sqrt{1 + 1 + \dots + 1}} = \frac{24 \times 25}{2\sqrt{25}} = 30$$

۱۳۵- گزینه ۳ توجه کنید که در یک همسایگی نقطه $x = 4$ تساوی $|x - 3| = x - 3$ برقرار است، پس

$$f(x) = x^2(x - 3)\sqrt{x^2 - 3x} = x(x^2 - 3x)\sqrt{x^2 - 3x} = x(x^2 - 3x)^{\frac{3}{2}} \\ \text{بنابراین } f'(x) = (x^2 - 3x)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}x(x^2 - 3x)^{\frac{1}{2}} \\ f'(4) = 8 + \frac{3}{2} \times 4 \times 5 \times 2 = 68$$

۱۳۶- گزینه ۳ **راه حل اول** توجه کنید که ضابطه تابع به صورت زیر است:

$$f(x) = |x||x - 3| - |x||x + 3| = |x|(|x - 3| - |x + 3|)$$

بنابراین

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|(|x - 3| - |x + 3|)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (|x - 3| - |x + 3|) = 3 - 3 = 0 \\ f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|(|x - 3| - |x + 3|)}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-(|x - 3| - |x + 3|)) = -(3 - 3) = 0$$

پس $f'(0) = 0$

راه حل دوم در یک همسایگی راست $x = 0$ مقدار $x^2 - 3x$ منفی و مقدار $x^2 + 3x$ مثبت است. پس در این همسایگی

$$f(x) = -x^2 + 3x - x^2 - 3x = -2x^2 \Rightarrow f'(x) = -4x \Rightarrow f'_+(0) = 0$$

در یک همسایگی چپ $x = 0$ مقدار $x^2 - 3x$ مثبت و مقدار $x^2 + 3x$ منفی است. پس در این همسایگی

$$f(x) = x^2 - 3x + x^2 + 3x = 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 4x \Rightarrow f'_-(0) = 0$$

پس $f'(0) = 0$

$$\text{از طرف دیگر } g'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = -f(x)$$

بنابراین

$$f'(x)g'(x) = \left(\frac{1}{g^2(x)}\right)(-f(x)) = -\frac{f(x)}{g^2(x)}$$

۱۲۸- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f(x^2 + x) = g\left(\frac{f}{x}\right) \Rightarrow (x^2 + 1)f'(x^2 + x) = -\frac{f}{x^2}g'\left(\frac{f}{x}\right)$$

اگر در تساوی فوق قرار دهیم $x = 1$ ، نتیجه می شود

$$4f'(2) = -4g'(f) \Rightarrow f'(2) = -g'(f) = 4$$

۱۲۹- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{a(x^2 + 1) - 2x(ax - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-ax^2 + 2x + a}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(-2ax + 2)(x^2 + 1)^2 - 2x(x^2 + 1)(-ax^2 + 2x + a)}{(x^2 + 1)^4} \\ = \frac{(-2ax + 2)(x^2 + 1) - 2x(-ax^2 + 2x + a)}{(x^2 + 1)^3}$$

$$\text{بنابراین } f''(1) = \frac{(-2a + 2)(2) - 2(-a + 2 + a)}{2^3} = \frac{-a - 1}{2} = 4$$

$$a = -9$$

۱۳۰- گزینه ۲ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[a, 0]$ برابر است با

$$\frac{f(0) - f(a)}{0 - a} = \frac{a^2 - 2a}{-a} = -a + 2$$

آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[0, a + 1]$ برابر است با

$$\frac{f(a + 1) - f(0)}{a + 1 - 0} = \frac{-(a + 1)^2 + 2(a + 1)}{a + 1} = \frac{-a^2 + 1}{a + 1} = -a + 1$$

بنابراین

$$(-a + 2) + (-a + 1) = 4 \Rightarrow -2a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

۱۳۱- گزینه ۱ توجه کنید که

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4 + h) - f(4)}{h} = \frac{4 + 2 \times 2}{16 - 4 \times 2} = 1$$

۱۳۲- گزینه ۴ **راه حل اول** به جای ۲۷ قرار می دهیم $f^2(1)$ و از تعریف مشتق در نقطه $x = 1$ استفاده می کنیم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(1 + h) - 27}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(1 + h) - f^2(1)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(1 + h) - f(1))(f^2(1 + h) + f(1)f(1 + h) + f^2(1))}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} (f^2(1 + h) + 3f(1 + h) + 9) \\ = f'(1) \times (f^2(1) + 3f(1) + 9) = 3(9 + 9 + 9) = 81$$

$$\text{زیرا } f'(1) = \frac{6 \times 1}{1 + 1} = 3$$

۱۴۱- گزینه ۱ راه حل اول توجه کنید که $f(1)=1$ پس

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-1}{h^2-4h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h(h-4)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h-4} = f'(1) \times \frac{1}{-4}\end{aligned}$$

از طرف دیگر

$$\begin{aligned}f(x) = \frac{x^2+1}{x^4+1} \Rightarrow f'(x) &= \frac{2x(x^4+1)-4x^3(x^2+1)}{(x^4+1)^2} \\ f'(1) &= \frac{2 \times 2 - 4 \times 2}{4} = -1\end{aligned}$$

بنابراین مقدار حد مورد نظر برابر $\frac{1}{4}$ است.

راه حل دوم از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم (به درس آخر این فصل مراجعه کنید):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-1}{h^2-4h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(1+h)}{2h-4} = \frac{f'(1)}{-4} = \frac{1}{4}$$

توجه کنید که

$$\begin{aligned}f(x) = \frac{x^2+1}{x^4+1} \Rightarrow f'(x) &= \frac{2x(x^4+1)-4x^3(x^2+1)}{(x^4+1)^2} \\ f'(1) &= \frac{2 \times 2 - 4 \times 2}{4} = -1\end{aligned}$$

۱۴۲- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{(2x+a)(x+1)-(1)(x^2+ax)}{(x+1)^2}$$

بنابراین

$$f'(2) = \frac{11}{9} \Rightarrow \frac{(4+a)(3)-(4+2a)}{9} = \frac{11}{9} \Rightarrow a=3$$

۱۴۳- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-\sqrt{x+5}} = \frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-\sqrt{x+5}} = \frac{|x-3|}{x-\sqrt{x+5}}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}f'_-(3) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\frac{|x-3|}{x-\sqrt{x+5}} - \frac{0}{3-\sqrt{8}}}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-(x-3)}{(x-3)(x-\sqrt{x+5})} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-1}{x-\sqrt{x+5}} = -\frac{1}{3-2} = -1\end{aligned}$$

۱۴۴- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f(1)=3, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2+1)=2, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x)=2$$

پس تابع در $x=1$ پیوسته نیست و در نتیجه مشتق پذیر نیست.

۱۴۵- گزینه ۲ اگر از دو طرف تساوی داده شده مشتق بگیریم، به دست می‌آید:

$$(3x^2-1)f'(x^3-x) = 4\sqrt{x+1} + (4x) \times \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=3$ ، به دست می‌آید:

$$26f'(24) = 4 \times 2 + 4 \times 3 \times \frac{1}{2 \times 2} \Rightarrow f'(24) = \frac{11}{26}$$

۱۳۷- گزینه ۱ راه حل اول توجه کنید که $x=0$ و $x=1$ ریشه‌های

عبارت داخل قدرمطلق هستند. مشتق پذیری را در این نقاط بررسی می‌کنیم. تابع در نقطه $x=1$ مشتق چپ و راست نابرابر دارد:

$$x \geq 1 \Rightarrow f(x) = x(x^2-x) = x^3-x^2$$

$$f'(x) = 3x^2-2x \Rightarrow f'_+(1) = 3-2=1$$

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(x) = x(x-x^2) = x^2-x^3$$

$$f'(x) = 2x-3x^2 \Rightarrow f'_-(1) = 2-3=-1$$

ولی تابع در نقطه $x=0$ مشتق پذیر است:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x|x^2-x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} |x^2-x| = 0$$

راه حل دوم تابع $y=|g(x)|$ در ریشه‌های ساده $g(x)=0$ مشتق ندارد. پس

$y=|x^2-x|$ در $x=0$ و $x=1$ مشتق ندارد ولی تابع $y=x|x^2-x|$ به دلیل وجود عامل صفر کننده x که در قدرمطلق ضرب شده است در $x=0$ مشتق پذیر است.

۱۳۸- گزینه ۲ به جای اینکه حاصل $(g'(x)f'(g(x)))$ را بیابیم، مشتق

تابع $f \circ g$ را به دست می‌آوریم. پس ابتدا ضابطه تابع $f \circ g$ را به دست می‌آوریم:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$$

بنابراین $(f \circ g)'(x) = 1$.

۱۳۹- گزینه ۱ اگر S و P به ترتیب مساحت و محیط مربعی با طول ضلع

x باشند، آن‌گاه

$$S = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{S}, \quad P = 4x \Rightarrow P(S) = 4\sqrt{S}$$

بنابراین

$$P'(S) = \frac{4}{2\sqrt{S}} = \frac{2}{\sqrt{S}} = 4 \Rightarrow \sqrt{S} = \frac{1}{2} \Rightarrow S = \frac{1}{4}$$

۱۴۰- گزینه ۴ در نقطه‌ای که نمودار تابع بر محور طول‌ها مماس است،

مقدار تابع و مقدار مشتق تابع برابر صفر است، پس ابتدا نقطه‌ای را که مشتق تابع در آن صفر است، پیدا می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{(2x-a)(x^2+9)-2x(x^2-ax+9)}{(x^2+9)^2} = 0$$

$$2x^3+18x-ax^2-9a-2x^3+2ax^2-18x=0$$

$$a(x^2-9)=0 \xrightarrow{a \neq 0} x=3, x=-3$$

اگر $x=-3$ ، آن‌گاه

$$f(-3)=0 \Rightarrow 9+3a+9=0 \Rightarrow a=-6$$

اگر $x=3$ ، آن‌گاه

$$f(3)=0 \Rightarrow 9-3a+9=0 \Rightarrow a=6$$

پس حاصل ضرب مقادیر ممکن برای a برابر -36 است.

راه حل دوم چون تابع f بر محور طول‌ها مماس است، پس معادله $f(x)=0$

ریشه مضاعف دارد. بنابراین

$$\frac{x^2-ax+9}{x^2+9} = 0 \Rightarrow x^2-ax+9=0 \Rightarrow \Delta = a^2-36=0 \Rightarrow a=\pm 6$$

پس حاصل ضرب مقادیر ممکن برای a برابر -36 است.

همچنین در این نقطه،

$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} \Rightarrow -x^2 - bx = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} \\ -x^2 + x\left(\frac{1}{4} - b\right) &= -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{3}{4} \\ \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow b = -\sqrt{3} + \frac{1}{4} \\ x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow b = \sqrt{3} + \frac{1}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

پس مجموع مقادیر ممکن برای b برابر است با $\frac{1}{2}$.

راه حل دوم چون تابع g بر خط داده شده مماس است، پس معادله

$$-x^2 - bx = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} \quad \text{ریشه مضاعف دارد. بنابراین}$$

$$4x^2 + (4b-1)x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = (4b-1)^2 - 48 = 0 \Rightarrow 16b^2 - 8b - 47 = 0.$$

$$\text{معادله بالا دو جواب دارد که مجموع آنها برابر است با } -\frac{-8}{16} = \frac{1}{2}.$$

۱۵۱- گزینه ۳ **راه حل اول** توجه کنید که $f(1) = 0$ ، پس

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x(2x-1)(2x-2) \cdots (2x-12) - 0}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (2x(2x-1)(2x-3)(2x-4) \cdots (2x-12)) \\ &= 4 \times 1 \times (-1) \times (-2) \times (-3) \cdots (-10) = 4 \times 10! \end{aligned}$$

راه حل دوم با توجه به اینکه مقدار $2x-2$ به ازای $x=1$ برابر صفر است،

کافی است مشتق این عبارت یعنی ۲ را در مقدار عبارت $2x(2x-1)(2x-3)(2x-4) \cdots (2x-12)$ به ازای $x=1$ ضرب کنیم.

$$f'(1) = 2 \times 2 \times 1 \times (-1) \times (-2) \cdots (-10) = 4 \times 10!$$

۱۵۲- گزینه ۳ ابتدا مشتق تابع f را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3 + \sqrt{x}}{x^2 + \sqrt[3]{x}} \\ f'(x) &= \frac{(x^3 + \sqrt{x})'(x^2 + \sqrt[3]{x}) - (x^2 + \sqrt[3]{x})'(x^3 + \sqrt{x})}{(x^2 + \sqrt[3]{x})^2} \\ &= \frac{(3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}})(x^2 + \sqrt[3]{x}) - (2x + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}})(x^3 + \sqrt{x})}{(x^2 + \sqrt[3]{x})^2} \end{aligned}$$

اگر در تساوی فوق قرار دهیم $x=1$ ، نتیجه می شود:

$$f'(1) = \frac{(3 + \frac{1}{2})(1+1) - (2 + \frac{1}{3})(1+1)}{(1+1)^2} = \frac{7}{12}$$

۱۵۳- گزینه ۲ در نزدیکی نقطه $\frac{1}{2}$ ، علامت عبارت $x^2 - x$ منفی

است و $1 < 3x < 2$ ، پس در نزدیکی نقطه $\frac{1}{2}$ تساوی های $|x^2 - x| = x - x^2$

و $[3x] = 1$ برقرارند و

$$f(x) = \frac{x - x^2}{x^3 - 1} = \frac{-x(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{-x}{x^2+x+1} \quad (x \neq 1)$$

۱۴۶- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^5 + 1}{x+1} = \frac{(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)}{x+1} \\ &= x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \quad (x \neq -1) \end{aligned}$$

پس $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ بنابراین $f'(x) = 12x^2 - 6x + 2$ در $f''(x)$.
نتیجه $f''(2) = 38$.

۱۴۷- گزینه ۴ نمودار تابع های f و g از نقطه $(2, 3)$ عبور می کنند،

پس $f(2) = g(2) = 3$. شیب خط مماس در نقطه $(2, 3)$ بر نمودار تابع های f و g به ترتیب برابر ۱ و ۲ است، پس $f'(2) = 1$ و $g'(2) = 2$.

اکنون توجه کنید که

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{f(x) + x}{g(x) - x} \\ h'(x) &= \frac{(f'(x) + 1)(g(x) - x) - (g'(x) - 1)(f(x) + x)}{(g(x) - x)^2} \end{aligned}$$

بنابراین

$$h'(2) = \frac{(f'(2) + 1)(g(2) - 2) - (g'(2) - 1)(f(2) + 2)}{(g(2) - 2)^2} = \frac{2 \times 1 - 1 \times 5}{(3 - 2)^2} = -3$$

۱۴۸- گزینه ۲ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[a, 1]$ برابر

$$\frac{f(1) - f(a)}{1 - a} \text{ است}$$

$$\frac{f(1) - f(a)}{1 - a} = \frac{0 - \sqrt{1-a}}{1-a} = \frac{-1}{\sqrt{1-a}}$$

بنابراین

$$\frac{-1}{\sqrt{1-a}} = -\frac{1}{4} \Rightarrow 1-a = 16 \Rightarrow a = -15$$

آهنگ تغییر لحظه ای تابع f در $x=a$ را می خواهیم که برابر $f'(a)$ است:

$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} \Rightarrow f'(a) = f'(-15) = \frac{-1}{2\sqrt{1+15}} = -\frac{1}{8}$$

۱۴۹- گزینه ۳ در نقاطی که خط مماس بر نمودار موازی محور

طول هاست، مقدار مشتق تابع برابر صفر است. بنابراین

$$f(x) = x^2 - 4\sqrt{x^2 + 3}$$

$$f'(x) = 2x - \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 3}} = 0 \Rightarrow 2x(1 - \frac{2}{\sqrt{x^2 + 3}}) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{x^2 + 3} = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

پس در سه نقطه خط مماس بر نمودار تابع f موازی محور طول هاست.

۱۵۰- گزینه ۱ **راه حل اول** در نقطه ای که خط بر تابع g مماس است،

مشتق تابع g برابر شیب خط است:

$$g'(x) = -2x - b = -\frac{1}{4} \Rightarrow b = -2x + \frac{1}{4}$$

در نتیجه

$$f'(x) = -\frac{x^2 + x + 1 - (2x + 1)x}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{4} - 1}{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1\right)^2} = -\frac{12}{49}$$

۱۵۴- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که تابع در نقطه $x=1$ پیوسته و مشتق پذیر است:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 4$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 3 & x > 1 \\ 6x & x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x^2 + 3) = 6 \\ f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (6x) = 6 \end{cases}$$

بنابراین $f'(1) = 6$ ، از طرف دیگر

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 4}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x(x+1)} = f'(1) \times \frac{1}{2} = 6 \times \frac{1}{2} = 3$$

۱۵۵- گزینه ۳ به کمک تعریف مشتق می‌دانیم:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = f'(4)$$

پس

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) + 5}{x - 4} = 5 \Rightarrow f(4) = -5, f'(4) = 5$$

از طرف دیگر،

$$g(x) = \frac{x}{f(2x)} \Rightarrow g'(x) = \frac{f(2x) - 2xf'(2x)}{f^2(2x)}$$

$$g'(2) = \frac{f(4) - 4f'(4)}{f^2(4)} = \frac{-5 - 4 \times 5}{(-5)^2} = -1$$

۱۵۶- گزینه ۳ ضابطه تابع gof را به دست می‌آوریم. اگر $x \geq 0$ ، آن‌گاه

$$f(x) = 4x + x = 5x$$

$$(gof)(x) = g(5x) = 4(5x) - |5x| = 20x - 5x = 15x$$

اگر $x < 0$ ، آن‌گاه $f(x) = 4x - x = 3x$ و

$$(gof)(x) = g(3x) = 4(3x) - |3x| = 12x - 3x = 9x$$

بنابراین $(gof)(x) = 15x$ و در نتیجه $(gof)'(x) = 15$ و $(gof)'(0) = 15$.

۱۵۷- گزینه ۳ برای اینکه تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق پذیر باشد، باید تابع

$$y = x^2 - 6x + m$$

این تابع دو ریشه متمایز داشته باشد، آن‌گاه تابع f در این دو ریشه مشتق پذیر

نیست. بنابراین

$$\Delta = 36 - 4m \leq 0 \Rightarrow m \geq 9$$

پس m مقادیر طبیعی ۱ تا ۸ را نمی‌تواند داشته باشد.

۱۵۸- گزینه ۴ آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطه a همان

است: $f'(a)$

$$f'(x) = -\frac{k}{x^2} \Rightarrow f'(a) = -\frac{k}{a^2}$$

آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[3, 6]$ برابر است با

$$\frac{f(6) - f(3)}{6 - 3} = \frac{\frac{k}{6} - \frac{k}{3}}{3} = -\frac{k}{18}$$

بنابراین $-\frac{k}{a^2} = -\frac{k}{18}$ پس $a^2 = 18$ و با توجه به اینکه $a \in [3, 6]$ ، در

نتیجه $a = \sqrt{18}$.

۱۵۹- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $y = 4x + 2$ در نقطه $A(1, 6)$ بر

نمودار تابع f مماس است. از طرف دیگر $f'(x) = 3x^2 - 3a$ ، بنابراین

$$f'(1) = 4 \text{ و } f(1) = 6$$

$$\begin{cases} 1 - 3a + b = 6 \\ 3 - 3a = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = 4 \end{cases}$$

۱۶۰- گزینه ۳ خط d از نقطه‌های $(0, 4)$ و $(2, 0)$ گذشته است، پس

معادله آن به صورت $y = -2x + 4$ است. چون خط d در نقطه‌ای به طول ۱ برسهمی مماس است، پس مقدار $f'(x)$ به ازای $x=1$ برابر با شیب خط d است:

$$f(x) = ax^2 + c \Rightarrow f'(x) = 2ax \Rightarrow f'(1) = 2a = -2 \Rightarrow a = -1$$

چون نقطه A روی خط $y = -2x + 4$ است، پس عرض آن برابر است با

$$y = 2. \text{ چون نقطه } A(1, 2) \text{ روی سهمی } f(x) = -x^2 + c \text{ است، پس}$$

$$f(1) = 2, \text{ بنابراین } 2 = -1 + c, \text{ یعنی } c = 3.$$

۱۶۱- گزینه ۲ چون تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق پذیر و صعودی است، پس

$$\text{مشتق آن همواره نامنفی است. بنابراین } f'(x) = 3ax^2 - 18x + 3a \geq 0.$$

نتیجه

$$ax^2 - 6x + a \geq 0 \Rightarrow a > 0, \Delta = 6^2 - 4a^2 \leq 0 \Rightarrow a \geq 3 \text{ یا } a \leq -3$$

پس $a \geq 3$.

۱۶۲- گزینه ۴ از روی نمودار تابع f معلوم است که این تابع روی بازه

$$(-3, -1) \text{ مشتق پذیر و اکیداً نزولی است. بنابراین } f'(x) < 0. \text{ اکنون توجه}$$

کنید که چون مقادیر تابع f منفی اند، پس

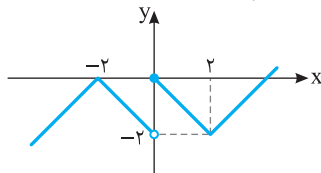
$$y = \frac{f(x)}{x} \Rightarrow y' = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} > 0, x \in (-3, -1)$$

بنابراین تابع گزینه (۴) اکیداً صعودی است.

مثال نقض برای گزینه‌های دیگر تابع $f(x) = -x^3 - 100$ است.

۱۶۳- گزینه ۳ نمودار تابع f به شکل زیر است. این تابع در نقطه‌های

$$x = -2 \text{ و } x = 0 \text{ ماکزیمم نسبی دارد و در نقطه } x = 2 \text{ مینیمم نسبی دارد.}$$



۱۶۴- گزینه ۱ توجه کنید که

$$f'(x) = x(x^2 + 5x + 4) = x(x+1)(x+4)$$

x	$-\infty$	-4	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$ min $\nearrow$

پس تابع f در نقطه‌های $x = 0$ و $x = -4$ مینیمم نسبی دارد و در نقطه $x = -1$ ماکزیمم نسبی دارد.

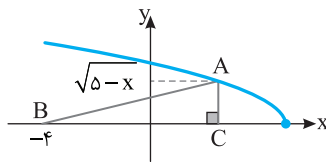
۱۷۰- گزینه ۲ فرض کنید طول نقطه C برابر x باشد. در این صورت، طول نقطه A هم برابر x است و چون نقطه A روی نمودار تابع $y = \sqrt{5-x}$ است، پس عرض نقطه A برابر با $\sqrt{5-x}$ است. بنابراین $AC = \sqrt{5-x}$. از طرف دیگر $BC = x+4$. به این ترتیب

$$مساحت مثلث ABC = \frac{1}{2}(x+4)\sqrt{5-x}$$

بنابراین باید x ای را پیدا کنیم که تابع $f(x) = \frac{1}{2}(x+4)\sqrt{5-x}$ به ازای آن بیشترین مقدار ممکن است. توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{5-x} + \frac{1}{2}(x+4) \cdot \frac{-1}{2\sqrt{5-x}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{5-x} = \frac{1}{4} \cdot \frac{x+4}{\sqrt{5-x}} \Rightarrow 10-2x = x+4 \Rightarrow x=2$$



۱۷۱- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{x^2 + x + 1 - (2x+1)(x+k)}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{-x^2 - 2kx + 1 - k}{(x^2 + x + 1)^2}$$

مخرج کسر فوق همواره مثبت است. پس باید صورت این کسر فقط روی بازه $[-\frac{4}{5}, 2]$ نامنفی باشد تا $f'(x)$ نامنفی و تابع f صعودی شود. بدین منظور

باید ۲ و $-\frac{4}{5}$ جوابهای معادله $f'(x) = 0$ باشند:

$$-x^2 - 2kx + 1 - k = 0 \xrightarrow{x=2} -4 - 4k + 1 - k = 0 \Rightarrow k = -\frac{3}{5}$$

توجه کنید که اگر $k = -\frac{3}{5}$ ، آن گاه $x=2$ و $x = -\frac{4}{5}$ جوابهای معادله $f'(x) = 0$ هستند.

۱۷۲- گزینه ۳ توجه کنید که $D_f = [2, +\infty)$ و

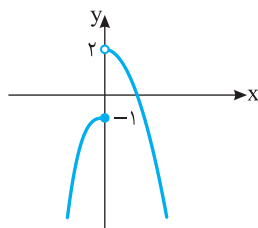
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+4}} - \frac{1}{2\sqrt{x-2}} = \frac{2\sqrt{x-2} - \sqrt{x+4}}{2\sqrt{x+4}\sqrt{x-2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2\sqrt{x-2} = \sqrt{x+4} \Rightarrow 4x-8 = x+4 \Rightarrow x=4$$

بنابراین جدول تعیین علامت تابع f' به صورت زیر است: (برای تعیین علامت می‌توانید از عددگذاری استفاده کنید. مثلاً $f'(3) < 0$ و $f'(1) > 0$)

x	۲	۴	$+\infty$
$f'(x)$	$\frac{+}{-}$	-	+

پس تابع f روی بازه $[2, 4]$ نزولی و روی بازه $[4, +\infty)$ صعودی است، یعنی حداکثر مقدار b-a وقتی به دست می‌آید که $a=2$ و $b=4$ و برابر ۲ است.



۱۷۳- گزینه ۴ نمودار تابع f

به صورت مقابل است. این تابع نه ماکزیمم نسبی دارد و نه مینیمم نسبی.

۱۶۵- گزینه ۱ چون تابع f همه جا مشتق پذیر است، پس نقاط اکسترمم نسبی آن جوابهای معادله $f'(x) = 0$ هستند. از طرف دیگر،

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

چون $f'(1) = 0$ و $f'(3) = 0$ از نقطه $x=1$ مثبت به منفی تغییر علامت می‌دهد، پس تابع f در نقطه $x=1$ ماکزیمم نسبی دارد. طبق فرض $f(1) = -4$ ، پس

$$1 - 6 + 9 + a = -4 \Rightarrow a = -8$$

x	$-\infty$	۱	۳	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		max	min	

۱۶۶- گزینه ۲ توجه کنید که $D_f = (-5, +\infty)$ و

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x+5} - \frac{x^2-17}{2\sqrt{x+5}}}{x+5} = \frac{3x^2 + 20x + 17}{2(x+5)\sqrt{x+5}}$$

تابع f در تمام نقاط دامنه‌اش مشتق پذیر است. پس نقاط اکسترمم نسبی آن جوابهای معادله $f'(x) = 0$ است. پس

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 20x + 17 = 0 \Rightarrow x = -1, \quad x = -\frac{17}{3} \text{ (غ.ق.)}$$

پس $x = -1$ طول تنها نقطه بحرانی تابع f است و عرض این نقطه برابر است با $f(-1) = -8$.

۱۶۷- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f'(x) = 3(x-2)^2(x+2) + (x-2)^3 = (x-2)^2(4x+4)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2, \quad x = -1$$

اکنون مقادیر $f(-1)$ ، $f(2)$ و $f(-2)$ را مقایسه می‌کنیم:

$$f(-1) = -27, \quad f(2) = 0, \quad f(-2) = 0$$

بنابراین -۲۷ مقدار مینیمم مطلق تابع f در بازه $[-2, 2]$ است.

۱۶۸- گزینه ۳ توجه کنید که $x = 4 - 2y$ و باید کمترین مقدار ممکن

تابع $f(y) = 4 - 2y + y^2$ را پیدا کنیم. از طرف دیگر،

$$f'(y) = -2 + 2y, \quad f'(y) = 0 \Rightarrow y = 1$$

چون تابع f فقط یک نقطه بحرانی دارد و

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} f(y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = +\infty$$

پس کمترین مقدار تابع f به ازای $y=1$ به دست می‌آید و برابر است با $f(1) = 3$.

۱۶۹- گزینه ۳ فاصله نقطه‌های مورد نظر برابر است با

$$\sqrt{(3x-x)^2 + (x+6-4)^2} = \sqrt{4x^2 + 4x + 4}$$

بنابراین باید کمترین مقدار تابع $f(x) = \sqrt{4x^2 + 4x + 4}$ را پیدا کنیم.

توجه کنید که $D_f = \mathbb{R}$ و

$$f'(x) = \frac{10x+4}{2\sqrt{4x^2+4x+4}}, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{5}$$

چون تابع f فقط یک نقطه بحرانی دارد، پس کمترین مقدار آن به ازای $x = -\frac{2}{5}$

به دست می‌آید که برابر است با

$$f(-\frac{2}{5}) = \sqrt{4(-\frac{2}{5})^2 + 4(-\frac{2}{5}) + 4} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

۱۷۴- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x^2+1) - 2x(x^2+x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -x^2+2x+1=0 \Rightarrow x=1+\sqrt{2}, x=1-\sqrt{2}$$

x	$-\infty$	$1-\sqrt{2}$	$1+\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	-
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

بنابراین تابع f در نقطه‌ای به طول $x=1+\sqrt{2}$ ماکزیمم نسبی دارد. اکنون توجه کنید که اگر $a=1+\sqrt{2}$ ، آن‌گاه $a>0$ و $f(a) = \frac{a(a+1)}{a^2+1} > 0$ پس نقطه ماکزیمم نسبی تابع f در ناحیه اول است.

۱۷۵- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $f'(x) = 6x^2 + 2ax + 1$ برای اینکه تابع f اکسترمم نسبی نداشته باشد باید معادله $f'(x) = 0$ ، یعنی

$$6x^2 + 2ax + 1 = 0 \text{ جواب نداشته باشد یا ریشه مضاعف داشته باشد. پس}$$

$$\Delta = 4a^2 - 24 \leq 0 \Rightarrow a^2 \leq 6 \Rightarrow |a| \leq \sqrt{6}$$

۱۷۶- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} x^4 - 4x & x \geq 0 \\ -x^4 + 4x & x < 0 \end{cases}, \quad f'(x) = \begin{cases} 4x^3 - 4 & x > 0 \\ -4x^3 + 4 & x < 0 \end{cases}$$

پس تابع f در $x=0$ مشتق پذیر نیست زیرا $f'_+(0) = -4$ و $f'_-(0) = 4$. همچنین

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 4 = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$$

یعنی $(0,0)$ و $(1,-3)$ نقاط بحرانی تابع هستند که فاصله آن‌ها برابر است با $\sqrt{10}$.

۱۷۷- گزینه ۱ توجه کنید که تابع f در نقطه $x=1$ مشتق پذیر نیست. از طرف دیگر،

$$f(x) = \begin{cases} -5x^3 - x(x-1) & 0 \leq x < 1 \\ -5x^3 - x^2 + x & 0 \leq x < 1 \\ -5x^3 + x(x-1) & 1 \leq x \leq 2 \\ -5x^3 + x^2 - x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

بنابراین

$$f'(x) = \begin{cases} -15x^2 - 2x + 1 & 0 < x < 1 \\ -15x^2 + 2x - 1 & 1 < x < 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -15x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{5}, x = -\frac{1}{3} \text{ (غ.ق.ق.)} \\ -15x^2 + 2x - 1 = 0 \text{ جواب ندارد} \end{cases}$$

اکنون توجه کنید که $f(0) = 0$ ، $f(1) = -5$ ، $f(\frac{1}{5}) = \frac{3}{25}$ و $f(2) = -38$.

بنابراین مقدار مینیمم مطلق تابع f برابر -38 است.

۱۷۸- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $D_f = [-2, 2]$ و تابع f روی بازه $(-2, 2)$ مشتق پذیر است و

$$f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2} - x}{\sqrt{4-x^2}}, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{4-x^2} = x$$

$$\xrightarrow{x \geq 0} 4 - x^2 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{2}, \quad x = -\sqrt{2} \text{ (غ.ق.ق.)}$$

بنابراین باید $f(-2)$ ، $f(\sqrt{2})$ و $f(2)$ را مقایسه کنیم تا بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع f روی بازه $[-2, 2]$ پیدا شود: $f(-2) = -2$ ، $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$ و $f(2) = 2$. بنابراین بیشترین مقدار تابع برابر $2\sqrt{2}$ و کمترین مقدار آن برابر -2 است و نسبت بیشترین مقدار به کمترین مقدار تابع برابر $-\sqrt{2}$ است.

۱۷۹- گزینه ۱ اگر B نقطه‌ای روی نمودار تابع $y = \sqrt{x+1}$ باشد، مختصات آن به صورت $(x, \sqrt{x+1})$ است. بنابراین

$$AB = \sqrt{(x - \frac{3}{2})^2 + (\sqrt{x+1} - 0)^2} = \sqrt{x^2 - 6x + \frac{53}{4}}$$

اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + \frac{53}{4}}$ ، آن‌گاه $f'(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2 - 6x + \frac{53}{4}}}$ و در نتیجه $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 3$

بنابراین کمترین مقدار تابع f ، یعنی کمترین مقدار طول پاره خط AB ، به ازای $x = 3$ به دست می‌آید. پس نقطه B نقطه $(3, \sqrt{3+1})$ ، یعنی $(3, 2)$ است.

۱۸۰- گزینه ۲ فرض کنید طول نقطه C برابر $-x$ باشد، در این صورت طول نقطه B هم برابر $-x$ است. نقطه B روی خطی است که از نقطه‌های $(0, -6)$ و $(-4, 0)$ می‌گذرد. معادله این خط $y = -\frac{3}{2}x - 6$

است. بنابراین عرض نقطه B برابر $\frac{3}{2}x - 6$ است. توجه کنید که چون $x < 4$ ، پس $\frac{3}{2}x - 6 < 0$ ، در نتیجه $x(-\frac{3}{2}x - 6) = \text{مساحت مستطیل } OABC$.

پس باید بیشترین مقدار تابع

$$f(x) = x(-\frac{3}{2}x - 6) \text{ را پیدا کنیم. چون } f'(x) = -3x - 6 \text{، اگر}$$

$f'(x) = 0$ ، آن‌گاه $x = -2$. بنابراین بیشترین مقدار تابع f ، یعنی بیشترین مقدار مساحت مستطیل $OABC$ به ازای $x = -2$ به دست می‌آید و برابر است با $2 \times 3 = 6$.

۱۸۱- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$ و

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1 - 2x(x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2}$$

به جدول زیر توجه کنید:

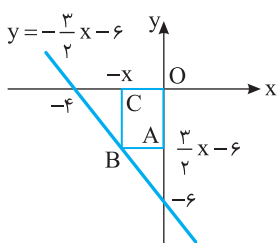
x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	-	-
$f(x)$		$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$

همچنین

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

بنابراین جدول تعیین جدول تغییرات تابع f به شکل بالاست و این تابع روی بازه‌های $(-\infty, -1)$ ، $(-1, 1)$ و $(1, +\infty)$ نزولی است ولی روی دامنه‌اش غیر یکنواست.



پس باید بین مقادیر $f(1)$ و $f(4)$ دنبال ماکزیمم مطلق تابع بگردیم:

$f(1)=1+a$ و $f(4)=2+\frac{a}{4}$. چون a عددی از بازه $(0,1)$ است، مقدار

$2+\frac{a}{4}$ از مقدار $1+a$ بزرگتر است، پس مقدار ماکزیمم مطلق تابع $2+\frac{a}{4}$

است. بنابراین $2+\frac{a}{4}=\frac{9}{4}$ ، در نتیجه $a=\frac{1}{4}$.

۱۸۸- گزینه ۴ ارتفاع مکعب حاصل مساوی x است. طول و عرض

قاعده آن را با l نمایش می‌دهیم. در این صورت $xl^2 = \text{حجم}$. توجه کنید که

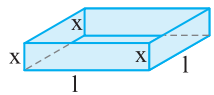
$$2x+l=3 \Rightarrow l=3-2x \Rightarrow \text{حجم} = x(3-2x)^2$$

بنابراین باید ماکزیمم مطلق تابع $f(x)=x(3-2x)^2$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f(x)=4x^3-12x^2+9x \Rightarrow f'(x)=12x^2-24x+9=0$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 12x^2-24x+9=0 \Rightarrow x^2-2x+\frac{3}{4}=0$$

$$(x-5)(x-15)=0 \Rightarrow x=5, x=15$$



توجه کنید که به ازای $x=15$ حجم جعبه

برابر صفر می‌شود، در نتیجه بیشترین مقدار

تابع f به ازای $x=5$ به دست می‌آید.

۱۸۹- گزینه ۳ فرض کنید طول نقطه A برابر $-x$ باشد. چون نقطه A

روی نمودار تابع $y=x^2+1$ است، پس عرض نقطه A برابر x^2+1 است. به

این ترتیب، عرض نقطه D هم برابر x^2+1 است و در نتیجه

$$CD=7-(x^2+1)=6-x^2$$

بنابراین $x(6-x^2) = \text{مساحت مستطیل } ABCD$.

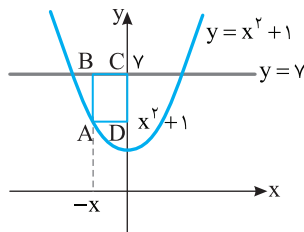
اگر $f(x)=x(6-x^2)$ ، آن گاه $f(x)=6x-x^3$ ، در نتیجه

$$\text{پس } f'(x)=6-3x^2$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x=\sqrt{2} \quad (x>0 \text{ توجه کنید که})$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع f ، یعنی بیشترین مقدار مساحت مستطیل $ABCD$

به ازای $x=\sqrt{2}$ به دست می‌آید و برابر است با $\sqrt{2} \times 4 = 4\sqrt{2}$.



۱۹۰- گزینه ۱ فرض کنید نقطه‌ای روی نمودار تابع

$y=x^3$ باشد. فاصله این نقطه تا خط $y-3x+6=0$ برابر است با

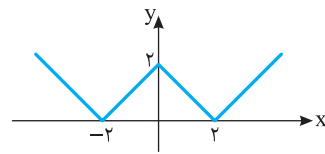
$$\frac{|x^3-3x+6|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{|x^3-3x+6|}{\sqrt{10}} = \frac{x^3-3x+6}{\sqrt{10}}$$

بنابراین طول نقطه مورد نظر جایی است که کمترین مقدار تابع

$d=x^3-3x+6$ به دست می‌آید. توجه کنید که

$$d'=3x^2-3, \quad d'=0 \Rightarrow x=1, x=-1 \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

۱۸۲- گزینه ۲ نمودار



تابع f به شکل مقابل است. از

روی این شکل معلوم است که

تابع f دو نقطه مینیمم نسبی و

یک نقطه ماکزیمم نسبی دارد.

۱۸۳- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=x^5-5x^4+1 \Rightarrow f'(x)=5x^4-20x^3=5x^3(x-4)$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x=0, x=4$$

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		max	min	

بنابراین تابع f در نقطه $x=0$ ماکزیمم نسبی و در نقطه $x=4$ مینیمم نسبی دارد.

۱۸۴- گزینه ۳ چون تابع f همه‌جا مشتق پذیر است، پس مشتق آن در

نقطه اکسترمم نسبی‌اش برابر صفر است:

$$f(x)=\frac{a}{3}x^3+2bx^2+cx-\frac{4}{3} \Rightarrow f'(x)=ax^2+4bx+c$$

$$f'(-1)=0 \Rightarrow a-4b+c=0$$

از طرف دیگر، مختصات نقطه اکسترمم نسبی در معادله تابع صدق می‌کنند:

$$f(-1)=2 \Rightarrow -\frac{a}{3}+2b-c-\frac{4}{3}=2 \Rightarrow -a+6b-3c=22$$

$$\begin{cases} a-4b+c=0 \\ -a+6b-3c=22 \end{cases} \quad \text{نتیجه می‌شود } a=32 \text{ و } b=9$$

در نتیجه $a-b=23$.

۱۸۵- گزینه ۴ توجه کنید که $f'(x)=\frac{3-3x^2}{3\sqrt{3-x^2}}$ ، تابع f در

نقطه‌های $x=0$ و $x=\pm\sqrt{3}$ مشتق ندارد و در نقطه‌های $x=1$ و $x=-1$

مشتق آن صفر است. جدول تغییرات تابع f به صورت زیر است:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	+	-	-	
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	
			min		max		

پس $x=1$ طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع است و عرض این نقطه برابر $\sqrt{2}$ است.

۱۸۶- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=2x\sqrt{x^2+1}+\frac{2(x^2-1)}{3\sqrt{x^2+1}}=\frac{8x^2-2}{3\sqrt{x^2+1}}$$

تابع f در نقطه $x=0$ مشتق پذیر نیست و $f'(-\frac{1}{2})=0$ و $f'(\frac{1}{2})=0$ ، پس

تابع f سه نقطه بحرانی دارد.

۱۸۷- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که تابع f در تمام نقاط دامنه‌اش

مشتق پذیر است و

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x-\frac{1}{x}}(x+a)}{x}=\frac{x-a}{2x\sqrt{x}}, \quad f'(x)=0 \Rightarrow x=a \notin [1,4] \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

چون تابع f همه جا مشتق پذیر است، برای اینکه دو نقطه اکسترم نسبی داشته باشد، باید معادله $x^2 - ax - a = 0$ دو جواب متمایز داشته باشد:

$$\Delta > 0 \Rightarrow a^2 + 4a > 0.$$

که چون $a > 0$ ، همواره درست است.

۱۹۵- گزینۀ ۱ توجه کنید که $x = 0$ طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع مشتق پذیر f است. پس $f'(0) = 0$:

$$f'(x) = 4x^3 + 2ax + b \Rightarrow f'(0) = 0 + 0 + b = 0 \Rightarrow b = 0.$$

بنابراین $f(x) = x^4 + ax^2 + 1$. از طرف دیگر، عرض نقاط مینیمم نسبی تابع f برابر -3 است. ابتدا طول این نقاط را به دست می آوریم:

$$f'(x) = 4x^3 + 2ax = 0.$$

$$2x(2x^2 + a) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = \pm \sqrt{\frac{-a}{2}}, \quad a < 0.$$

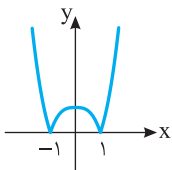
بنابراین

$$f\left(\pm \sqrt{\frac{-a}{2}}\right) = -3 \Rightarrow \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + 1 = -3 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = -4$$

پس طول نقاط مینیمم نسبی تابع $\pm \sqrt{2}$ است.

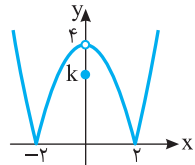
۱۹۶- گزینۀ ۳ ابتدا توجه کنید که اگر $x \geq 0$ ، آن گاه $f(x) = |x^3 - 1|$

و اگر $x < 0$ ، آن گاه $f(x) = |-x^3 - 1| = |x^3 + 1|$. بنابراین نمودار تابع f



به صورت مقابل است. پس در نقطه های $x = 1$ و $x = -1$ تابع f مشتق ندارد (نقطه گوشه ای) و در نقطه $x = 0$ مشتق تابع f برابر صفر است. پس این تابع سه نقطه بحرانی دارد.

۱۹۷- گزینۀ ۱ به نمودار تابع f توجه



کنید. واضح است که اگر تابع f در $x = 0$ مینیمم نسبی داشته باشد ولی مینیمم مطلق نداشته باشد، باید $0 < k < 4$ دقت کنید که اگر $k \leq 0$ ، آن گاه تابع f در $x = 0$ مینیمم مطلق دارد و اگر $k \geq 4$ ، آن گاه تابع f در $x = 0$ ماکزیمم نسبی دارد.

۱۹۸- گزینۀ ۲ چون $x + y = 2$ ، پس $y = 2 - x$ ، در نتیجه

$$x^3 + y^3 = x^3 + (2 - x)^3 = 2(3x^2 - 6x + 4)$$

بنابراین باید کمترین مقدار تابع $f(x) = 2(3x^2 - 6x + 4)$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x) = 2(6x - 6) = 12(x - 1), \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

چون تابع f فقط یک نقطه بحرانی دارد و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

پس کمترین مقدار تابع f به ازای $x = 1$ به دست می آید و برابر است با $f(1) = 2$.

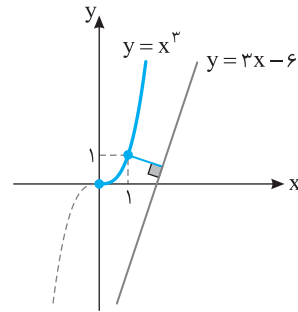
۱۹۹- گزینۀ ۱ توجه کنید که طول نقطه های A و B صفرهای تابع f هستند، در نتیجه $x_A + x_B$ برابر مجموع صفرهای تابع درجه دوم f است:

$$g(x) = \frac{2m-3}{m^2-2}, \quad \text{اگر } x_A + x_B = -\frac{3-2m}{m^2-2} = \frac{2m-3}{m^2-2}$$

$$g'(x) = \frac{2(m^2-2) - 2m(2m-3)}{(m^2-2)^2} = \frac{-2m^2 + 6m - 4}{(m^2-2)^2}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Rightarrow m = 1, m = 2$$

پس باید مقادیر $d(0)$ و $d(1)$ را مقایسه کنیم: $d(0) = 6$ و $d(1) = 4$. بنابراین طول نزدیک ترین نقطه برابر ۱ است.



۱۹۱- گزینۀ ۲ به جدول تعیین علامت تابع f' توجه کنید.

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x(x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2+1)^2}$$

x	$-\infty$	$-1-\sqrt{2}$	$-1+\sqrt{2}$	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$		$\searrow$

بنابراین تابع f روی بازه $[-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}]$ صعودی است و حداکثر مقدار

$b - a$ برابر $2\sqrt{2}$ است.

۱۹۲- گزینۀ ۱ ابتدا توجه کنید که $D_f = (-\infty, k]$ و

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{k-x}} = \frac{2\sqrt{k-x} - 1}{2\sqrt{k-x}}$$

$$f'(x) \leq 0 \Rightarrow 2\sqrt{k-x} \leq 1 \Rightarrow x \geq k - \frac{1}{4}$$

بنابراین تابع f روی بازه $[k - \frac{1}{4}, k]$ نزولی است و بیشترین مقدار $b - a$ برابر

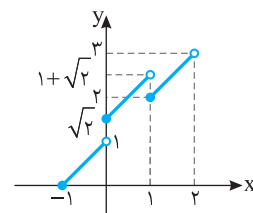
با $\frac{1}{4}$ است.

۱۹۳- گزینۀ ۱ ابتدا دامنه تابع f را به دست می آوریم:

$$2 - [x]^2 \geq 0 \Rightarrow [x]^2 \leq 2 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq [x] \leq \sqrt{2} \Rightarrow -1 \leq [x] \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x < 2$$

بنابراین ضابطه تابع f به صورت $f(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \leq x < 0 \\ x+\sqrt{2} & 0 \leq x < 1 \\ x+1 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$ است.

نمودار تابع f به شکل زیر است و مشخص است که این تابع فقط در نقطه $x = 1$ مینیمم نسبی دارد.



۱۹۴- گزینۀ ۱ توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(x^2+a) - 2x(x^2+2x)}{(x^2+a)^2} = \frac{-2(x^2-ax-a)}{(x^2+a)^2}$$

۲۰۵- گزینه ۳ مجموع فاصله‌های هر نقطه روی بیضی تا کانون‌های بیضی برابر است با $2a$. بنابراین $MF+MF'=2a$ و $NF+NF'=2a$. اگر این تساوی‌ها را با هم جمع کنیم معلوم می‌شود که محیط چهارضلعی $MFNF'$ برابر است با $4a$. اکنون توجه کنید که $c=OF=6$ و $2b=BB'=16$ بنابراین

$$a^2 = b^2 + c^2 = 64 + 36 = 100 \Rightarrow a = 10$$

پس محیط چهارضلعی $MFNF'$ برابر است با $4a = 40$.

۲۰۶- گزینه ۱ توجه کنید که $2c = FF' = 8$ پس $c = 4$. همچنین $\frac{c}{a} = \frac{2}{3}$ پس $\frac{3}{4}c = 6$ و $a = 9$ بنابراین

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 6^2 = b^2 + 4^2 \Rightarrow b = 2\sqrt{5}$$

بنابراین طول قطر کوچک بیضی برابر است با $2b = 4\sqrt{5}$.

۲۰۷- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$(3x-1)^2 + (3y-2)^2 = 4 \Rightarrow 9(x-\frac{1}{3})^2 + 9(y-\frac{2}{3})^2 = 4$$

$$(x-\frac{1}{3})^2 + (y-\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$$

بنابراین شعاع این دایره برابر $\frac{2}{3}$ است.

۲۰۸- گزینه ۲ مرکز دایره داده شده نقطه $(-\frac{6}{2}, -\frac{10}{2})$ ، یعنی

$(-3, -5)$ است. بنابراین مرکز دایره مورد نظر هم $(-3, -5)$ است. شعاع این دایره برابر فاصله نقطه‌های $(8, 7)$ و $(-3, -5)$ است که می‌شود

$$\sqrt{(8+3)^2 + (7+5)^2} = \sqrt{169} = 13$$

۲۰۹- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که در دایره $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$

نقطه $O(1, 3)$ مرکز دایره است و شعاع آن برابر است با

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{4+36-4(5)} = \sqrt{5}$$

در دایره $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$ نقطه $O'(-1, 3)$ مرکز دایره است و

$$\text{شعاع آن برابر است با } r' = \frac{1}{2}\sqrt{4+36-4(-15)} = 5$$

$$r' - r = 5 - \sqrt{5}, \quad OO' = \sqrt{(1+1)^2 + (3-3)^2} = 2$$

پس $OO' < r' - r$ و در نتیجه دو دایره متداخل اند.

۲۱۰- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که نقطه $O(-1, -2)$ مرکز دایره و

$$\text{شعاع دایره برابر } \frac{1}{2}\sqrt{4+16+12} = 2\sqrt{2}$$

$$AH = \frac{AB}{2} = 2 \Rightarrow OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{8-4} = 2$$

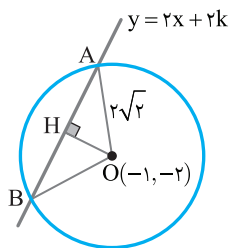
از طرف دیگر فاصله نقطه O از خط

$$2x - y + 2k = 0$$

$$OH = \frac{|-2+2+2k|}{\sqrt{4+1}}$$

بنابراین

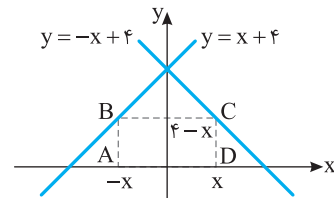
$$\frac{|2k|}{\sqrt{5}} = 2 \Rightarrow |k| = \sqrt{5} \Rightarrow k = \pm\sqrt{5}$$



اگر $m=2$ ، آن‌گاه ضریب x^2 در ضابطه تابع f مثبت می‌شود و در نتیجه نمودار تابع f پایین‌ترین نقطه دارد که چنین نیست. بنابراین $m=1$ و کمترین مقدار تابع g به‌ازای $m=1$ به‌دست می‌آید و برابر است با ۱.

۲۰۰- گزینه ۳ فرض کنید طول نقطه D برابر x باشد. در این صورت، طول نقطه C هم برابر x است و چون نقطه C روی خط $y = -x + 4$ است، پس عرض نقطه C برابر $-x + 4$ است. اکنون توجه کنید که عرض نقطه B هم برابر $-x + 4$ است، و چون نقطه B روی خط $y = x + 4$ است، پس طول نقطه B برابر $-x$ است. به این ترتیب طول نقطه A نیز برابر $-x$ است. در نتیجه $AD = 2x$. بنابراین $ABCD$ مساحت مستطیل $ABCD = 2x(4-x)$

بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $f(x) = 2x(4-x)$ را به‌دست آوریم. چون $f'(x) = 8 - 4x$ ، پس اگر $f'(x) = 0$ ، آن‌گاه $x = 2$. بنابراین بیشترین مقدار تابع f ، یعنی بیشترین مقدار مساحت مستطیل $ABCD$ به‌ازای $x = 2$ به‌دست می‌آید و برابر است با $2 \times 2 \times 2 = 8$.



۲۰۱- گزینه ۱ دو سر وتر مثلث مورد نظر نقطه‌های برخورد خط

$x - 2y = 8$ با محورهای مختصات هستند. این نقطه‌ها $(8, 0)$ و $(0, -4)$

هستند. وسط باره‌خط میان این دو نقطه، نقطه $(\frac{0+8}{2}, \frac{-4+0}{2})$ یعنی $(4, -2)$

است. معادله خطی که از مبدأ و این نقطه می‌گذرد $y = -\frac{1}{2}x$ یا $x + 2y = 0$ است.

۲۰۲- گزینه ۳ معادله خط را به‌صورت $x - ky + 1 = 0$ می‌نویسیم. پس

$$\text{فاصله نقطه } A \text{ از خط} = \frac{|3k - k(1) + 1|}{\sqrt{1^2 + (-k)^2}} = 2 \Rightarrow \frac{|2k + 1|}{\sqrt{1 + k^2}} = 2$$

$$|2k + 1| = 2\sqrt{1 + k^2} \Rightarrow 4k^2 + 4k + 1 = 4 + 4k^2 \Rightarrow k = \frac{3}{4}$$

۲۰۳- گزینه ۱ حاصل ضرب شیب‌های دو خط عمود بر هم برابر -1

است. بنابراین شیب خطی که بر خط $2y = -3x$ ، یعنی $y = -\frac{3}{2}x$ عمود

است، برابر $\frac{2}{3}$ است. معادله خطی که شیب آن $\frac{2}{3}$ است و از نقطه $(0, -1)$

می‌گذرد به‌صورت زیر است:

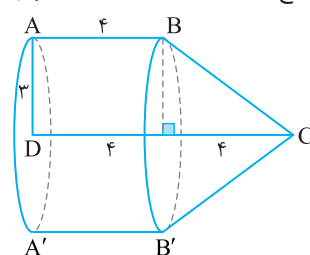
$$y + 1 = \frac{2}{3}(x - 0) \Rightarrow 3y - 2x + 3 = 0$$

۲۰۴- گزینه ۴ جسم حاصل استوانه‌ای به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۴

است که مخروطی به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۴ به آن اضافه شده است. بنابراین

حجم جسم حاصل برابر است با

$$\pi \times 3^2 \times 4 + \frac{\pi \times 3^2 \times 4}{3} = 48\pi$$



۲۱۱- گزینه ۱ اندازه AB، قاعده متوازی الاضلاع، برابر است با

$$AB = \sqrt{(1+1)^2 + (2+2)^2} = 2\sqrt{5}$$

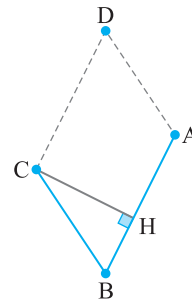
معادله خطی را که ضلع AB روی آن قرار دارد می‌نویسیم:

$$m_{AB} = \frac{-2-2}{-1-1} = 2 \Rightarrow y-2 = 2(x-1) \Rightarrow y-2x = 0$$

فاصله C از این خط را به دست می‌آوریم که اندازه ارتفاع CH است:

$$\frac{|1-2(-3)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

بنابراین مساحت متوازی الاضلاع برابر است با $2\sqrt{5} \times \frac{7}{\sqrt{5}} = 14$



۲۱۲- گزینه ۲ توجه کنید نقطه C روی عمود منصف پاره خط AB قرار دارد. وسط پاره خط AB نقطه $(-1, -2)$ است. معادله عمود منصف پاره خط

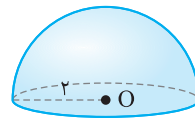
AB به شکل $y = -2$ است. بنابراین عرض نقطه C هم برابر -۲ است.

۲۱۳- گزینه ۳ معادله خط اول را در ۲ ضرب می‌کنیم و به شکل $6x - 4y - 10 = 0$ می‌نویسیم. طول ضلع مربع برابر فاصله دو خط موازی $6x - 4y + 3 = 0$ و $6x - 4y - 10 = 0$ است.

در نتیجه

$$\text{طول ضلع مربع} = \frac{|-10-3|}{\sqrt{6^2 + (-4)^2}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

بنابراین مساحت مربع برابر است با $(\frac{\sqrt{13}}{2})^2 = \frac{13}{4}$



۲۱۴- گزینه ۲ جسم حاصل یک نیم کره

به شعاع ۲ است که روی سطحی دایره‌ای به شعاع ۲ قرار دارد. بنابراین مساحت جانبی این

$$\text{جسم برابر است با } \frac{4\pi \times 2^2}{2} + \pi \times 2^2 = 12\pi$$

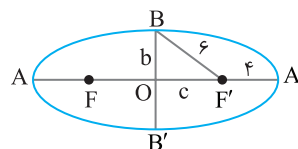
۲۱۵- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که $a = BF' = 6$. از طرف دیگر

$$OA' = OF' + F'A' \Rightarrow a = c + 4 \Rightarrow 6 = c + 4 \Rightarrow c = 2$$

اکنون توجه کنید که

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 6^2 = b^2 + 2^2 \Rightarrow b = 4\sqrt{2}$$

بنابراین طول قطر کوچک بیضی برابر است با $2b = 8\sqrt{2}$



۲۱۶- گزینه ۴ بنابر فرض مسئله، $2a - 2b = 4$ ، پس $a - b = 2$. در

نتیجه $a = 2 + b$. از طرف دیگر، $\frac{c}{a} = \frac{3}{5}$. پس $\frac{c}{2+b} = \frac{3}{5}$. بنابراین

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow (2+b)^2 = b^2 + (\frac{3}{5}(2+b))^2 \Rightarrow b = 8$$

بنابراین $a = 2 + b = 10$ و طول قطر بزرگ بیضی برابر است با $2a = 20$.

۲۱۷- گزینه ۴ مرکز دایره وسط پاره خط میان دو سر قطر است. مرکز دایره

مورد نظر نقطه $(-\frac{2}{2}, -\frac{6}{2})$ ، یعنی $(-1, -3)$ است. اگر سر دیگر قطر مورد نظر

نقطه (x, y) باشد، آنگاه وسط این قطر، نقطه $(\frac{x-2}{2}, \frac{y+1}{2})$ است. بنابراین

$$(\frac{x-2}{2}, \frac{y+1}{2}) = (-1, -3) \Rightarrow \frac{x-2}{2} = -1, \frac{y+1}{2} = -3$$

بنابراین $x = 0$ و $y = -7$. پس نقطه مورد نظر $(0, -7)$ است.

۲۱۸- گزینه ۳ راه حل اول اگر معادله دایره به صورت

$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$ باشد، آنگاه $|\beta| = r$ ، پس معادله دایره می‌شود $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \beta^2$. چون نقطه‌های $(0, 1)$ و $(0, 9)$ روی این دایره

هستند، پس

$$\begin{cases} \alpha^2 + (1-\beta)^2 = \beta^2 \\ \alpha^2 + (9-\beta)^2 = \beta^2 \end{cases} \Rightarrow (1-\beta)^2 = (9-\beta)^2 \Rightarrow \beta = 5 \Rightarrow \alpha = 3$$

بنابراین معادله دایره به صورت $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$ است.

راه حل دوم فرض کنید مرکز دایره مورد نظر نقطه M و دایره در نقطه T بر محور x مماس باشد. با نمادگذاری شکل زیر $AB = 9 - 1 = 8$ ، پس $AH = \frac{AB}{2} = 4$. در

نتیجه $TM = OH = 5$ ، یعنی شعاع دایره مورد نظر برابر ۵ است.

به این ترتیب $AM = 5$ و بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه AHM،

$$AM^2 = AH^2 + MH^2 \Rightarrow 5^2 = 4^2 + MH^2 \Rightarrow MH = 3$$

به این ترتیب، مرکز دایره مورد نظر،

نقطه $(3, 5)$ و شعاعش برابر ۵ است.

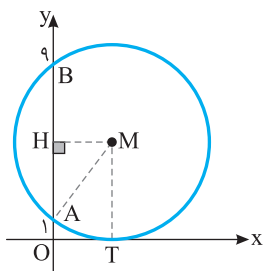
پس معادله اش به صورت زیر است.

$$(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$$

توجه کنید که دایره به معادله

$$(x+3)^2 + (y-5)^2 = 25$$

می‌تواند پاسخ این سؤال باشد.



۲۱۹- گزینه ۴ معادله خط اول را به صورت $9x - 12y + 9 = 0$ می‌نویسیم.

چون خط‌های داده شده موازی‌اند (شیب هر کدام $\frac{3}{4}$ است)، پس شعاع دایره مورد نظر

برابر نصف فاصله این دو خط است. فاصله دو خط برابر است با

$$2r = \frac{|9+1|}{\sqrt{9^2 + (-12)^2}} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

۲۲۰- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که مرکز دایره $x^2 + y^2 + 4x - 2y = k$

نقطه $O(-2, 1)$ و شعاع آن $r = \frac{1}{2}\sqrt{16+4+4k} = \sqrt{5+k}$ است. همچنین

مرکز دایره $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 8$ نقطه $O'(2, -2)$ و شعاع آن برابر است

$$\text{با } r' = \frac{1}{2}\sqrt{16+16+32} = 4$$

۲۲۶- گزینه ۱ توجه کنید که $P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$ از طرف دیگر.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\frac{3}{4} = P(A) + \frac{1}{8} - P(A \cap B)$$

$$P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

۲۲۷- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\begin{cases} P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{P(A|B)}{P(B|A)} = \frac{P(A)}{P(B)}$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{P(B)} \Rightarrow P(B) = \frac{4}{9}$$

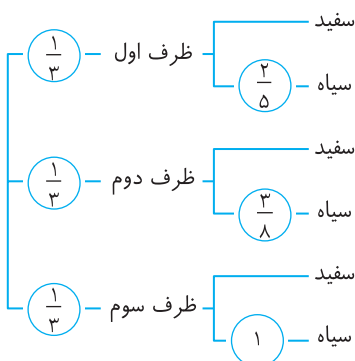
۲۲۸- گزینه ۲ فرض کنید B پیشامد سفید بودن مهره اول و A پیشامد سفید بودن مهره دوم باشد. باید $P(A)$ را حساب کنیم چون B و B' فضای نمونه‌ای را افراز می‌کنند (توجه کنید B' پیشامد سیاه بودن مهره اول است). طبق قانون احتمال کل.

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B') = \frac{2}{5} \times \frac{5}{7} + \frac{3}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{22}{35}$$

توجه کنید که اگر مهره اول سفید باشد، مهره دوم از بین پنج مهره سفید و دو مهره سیاه انتخاب می‌شود، پس $P(A|B) = \frac{5}{7}$ و اگر مهره اول سیاه باشد، مهره دوم از بین چهار مهره سفید و سه مهره سیاه انتخاب می‌شود. پس

$$P(A|B') = \frac{4}{7}$$

۲۲۹- گزینه ۱ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{71}{120}$$

۲۳۰- گزینه ۴ می‌دانیم اگر از هر یک از داده‌ها ۱۰ واحد کم کنیم، واریانس تغییر نمی‌کند، پس باید مقدار a را طوری پیدا کنیم که واریانس داده‌های $-10, a, -1, 2, 1, -2$ برابر ۶ شود.

بنابراین

$$OO' = \sqrt{(2+2)^2 + (-2-1)^2} = 5, \quad r+r' = \sqrt{5+k} + 4$$

برای اینکه دو دایره بر هم مماس بیرونی باشند باید $OO' = r+r'$ پس

$$5 = \sqrt{5+k} + 4 \Rightarrow k+5=1 \Rightarrow k=-4$$

۲۲۱- گزینه ۲ برای پیدا کردن تعداد عددهای مورد نظر می‌توانیم تعداد عددهایی را که در آن‌ها رقم ۵ و ۶ وجود ندارد از تعداد کل عددهای سه‌رقمی کم کنیم. تعداد عددهای سه‌رقمی که در آن‌ها رقم ۵ و ۶ وجود ندارد، برابر است با تعداد عددهای سه‌رقمی که می‌توان با ۸ رقم ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۷، ۸ و ۹ نوشت. تعداد این عددها برابر است با $7 \times 8 \times 8 = 448$. بنابراین تعداد عددهای سه‌رقمی که در آن‌ها ۵ یا ۶ وجود دارد برابر است با $900 - 448 = 452$.

۲۲۲- گزینه ۲ توجه کنید که

$$P(n+1, 3) = \frac{(n+1)!}{(n-2)!} = (n+1)n(n-1)$$

بنابراین

$$\frac{P(n+1, 3)}{n+1} = 56 \Rightarrow \frac{(n+1)n(n-1)}{n+1} = 56$$

$$n^2 - n - 56 = 0 \Rightarrow (n-8)(n+7) = 0 \Rightarrow n=8$$

۲۲۳- گزینه ۳ تعداد زیرمجموعه‌های k عضو یک مجموعه

n عضو برابر $\binom{n}{k}$ است. بنابراین

$$8 \binom{n}{3} = \binom{n}{4} \Rightarrow \frac{8n!}{3!(n-3)!} = \frac{n!}{4!(n-4)!}$$

$$\frac{8n!}{3!(n-3)!(n-4)!} = \frac{n!}{3! \times 4(n-4)!} \Rightarrow n-3=32 \Rightarrow n=35$$

بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های دو عضو این مجموعه برابر است با

$$\binom{35}{2} = 595$$

۲۲۴- گزینه ۱ فضای نمونه‌ای این آزمایش 6×6 عضو دارد. فرض

کنید A پیشامد این باشد که عدد پرتاب اول دو برابر عدد پرتاب دوم باشد. در این صورت $A = \{(2, 1), (4, 2), (6, 3)\}$ بنابراین

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

بنابراین بنابر اصل متمم، احتمال مورد نظر برابر است با $P(A') = 1 - P(A) = \frac{11}{12}$.

۲۲۵- گزینه ۳ در اینجا $n(S) = \binom{10}{3}$ برای اینکه هیچ دو مهره‌ای

هم‌رنگ نباشند، باید از هر رنگ یک مهره خارج شود، یعنی

$$P(A) = \frac{\binom{3}{1} \binom{2}{1} \binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{4}$$

بنابراین $n(A) = \binom{3}{1} \binom{2}{1} \binom{5}{1}$

توجه کنید که

بنابراین

$$P(A \cup B) + P(A \cup C) = P(A) + P(B) + P(A) + P(C)$$

$$= 2P(A) + P(B) + P(C) = 4x + 3x + 4x = 11x = \frac{11}{10} = 1/1$$

۲۳۶- گزینه ۴ با هر دو خط افقی و هر دو خط عمودی می‌توان یک

$$n(S) = \binom{4}{2} \binom{5}{2} = 60 \text{ بنابراین } n(S) = 60 \text{ از طرف دیگر،}$$

$$1 \times 1 = 12 \text{ تعداد مربع‌های } 1 \times 1$$

$$2 \times 2 = 6 \text{ تعداد مربع‌های } 2 \times 2$$

$$3 \times 3 = 2 \text{ تعداد مربع‌های } 3 \times 3$$

پس تعداد مربع‌های روی شکل برابر است با $12 + 6 + 2 = 20$. در نتیجه

$$\text{احتمال مورد نظر برابر است با } \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$$

۲۳۷- گزینه ۱ اگر A و B مستقل از هم باشند، آن‌گاه A و B' و

همچنین A' و B نیز مستقل از هم هستند. بنابراین

$$P(A \cap B') = P(A)P(B') = P(A)(1 - P(B)) = \frac{1}{4}$$

$$P(A' \cap B) = P(A')P(B) = (1 - P(A))P(B) = \frac{1}{6}$$

بنابراین

$$P(A) - P(A)P(B) = \frac{1}{4}, \quad P(B) - P(A)P(B) = \frac{1}{6}$$

چون A و B مستقل اند، پس $P(A)P(B) = P(A \cap B)$ ، در نتیجه

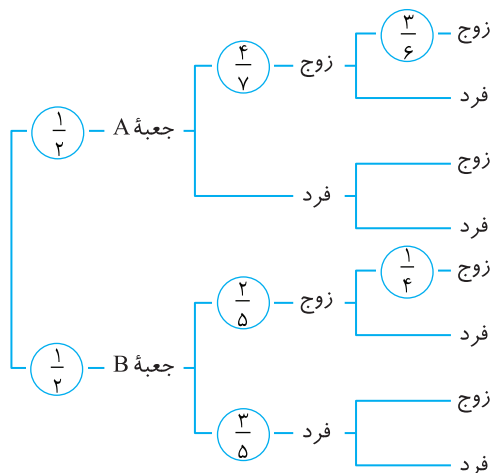
$$P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{4}, \quad P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

اگر این تساوی‌ها را با هم جمع کنیم به دست می‌آید

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(A \cap B) = \frac{5}{12}$$

$$P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{5}{12}$$

۲۳۸- گزینه ۴ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم است که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{1}{2} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{27}{140}$$

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{5} \left((-2)^2 + 1^2 + 2^2 + (-1)^2 + (a-1)^2 \right) - \left(\frac{(-2)+1+2+(-1)+(a-1)}{5} \right)^2$$

$$\sigma^2 = \frac{10 + (a-1)^2}{5} - \frac{(a-1)^2}{25} \Rightarrow \sigma^2 = 2 + \frac{4(a-1)^2}{25}$$

$$\sigma^2 = \frac{4(a-1)^2}{25} \Rightarrow (a-1)^2 = 25 \Rightarrow a-1 = \pm 5 \Rightarrow a = 15 \text{ یا } a = -4$$

۲۳۱- گزینه ۳ سه حالت وجود دارد:

حالت اول رقم هزارگان ۳ باشد. در این صورت رقم صدگان فقط باید یکی از

رقم‌های ۴ یا ۵ باشد و برای رقم‌های دیگر محدودیتی نداریم. بنابراین تعداد

$$\text{عددهای مورد نظر در این حالت برابر است با } 1 \times 2 \times 4 \times 3 = 24$$

حالت دوم رقم هزارگان ۴ باشد. در این صورت برای رقم‌های دیگر محدودیتی

$$\text{نداریم و تعداد عددها در این حالت برابر است با } 1 \times 5 \times 4 \times 3 = 60$$

حالت سوم رقم هزارگان ۵ باشد. در این صورت برای رقم‌های دیگر محدودیتی

$$\text{نداریم و تعداد عددها در این حالت برابر است با } 1 \times 5 \times 4 \times 3 = 60$$

$$\text{بنابراین تعداد کل عددهای مورد نظر برابر است با } 24 + 60 + 60 = 144$$

۲۳۲- گزینه ۲ هر یک از رقم‌های ۳، ۴، ۵ و ۶ را می‌توان به جای رقم

یکان نوشت. چون رقم‌ها تکراری نیستند، تعداد عددهایی که رقم یکانش یکی

از این عددهاست برابر است با تعداد جایگشت‌های سه رقم دیگر. مثلاً تعداد

عددهایی که رقم یکان آن‌ها ۳ است برابر با ۳! است:



۳ جایگشتی از رقم‌های ۴، ۵ و ۶

بنابراین مجموع رقم‌های یکان این عددها برابر است با $3! \times 3$. همین مطلب

در مورد رقم‌های دیگر نیز درست است. بنابراین مجموع رقم‌های یکان

عددهای مورد نظر برابر است با

$$3! \times 3 + 3! \times 4 + 3! \times 5 + 3! \times 6 = 3! \times 18 = 108$$

۲۳۳- گزینه ۱ پنج مکان برای پنج حرف جایگشت در نظر می‌گیریم.

حرف سمت چپ t و حرف سمت راست g است. بنابراین سه مکان دیگر باید

با هفت حرف دیگر پر شوند که تعداد حالت‌ها برابر است با $P(7, 3)$. بنابراین

تعداد جایگشت‌های مورد نظر مسئله برابر است با

$$P(7, 3) = \frac{7!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 = 210$$

۲۳۴- گزینه ۳ در اینجا $n(S) = 2^6$. فرض کنید A پیشامد مورد نظر

باشد. در این صورت باید از شش جای زیر حداکثر سه جا رو باشد. بنابراین

$$n(A) = \binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3}$$

سه جا رو نباید دو جا رو نباید یک جا رو نباید هیچ جا رو نباید

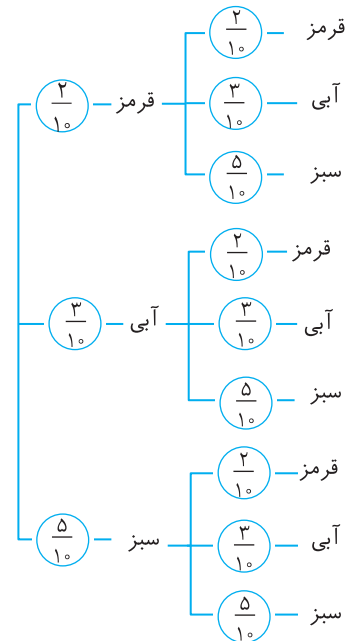
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{42}{2^6} = \frac{21}{32}$$

۲۳۵- گزینه ۳ چون A ، B و C دویه دو ناسازگارند، پس

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

$$1 - x = 2x + 3x + 4x \Rightarrow 1 = 10x \Rightarrow x = \frac{1}{10}$$

۲۳۹- گزینه ۱ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



راه حل اول از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{2}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{2}{10} \times \frac{5}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{2}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{5}{10} + \frac{5}{10} \times \frac{2}{10} + \frac{5}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{62}{100}$$

راه حل دوم فرض کنید A پیشامد آن باشد که هر دو مهره هم‌رنگ باشند. در این صورت $P(A')$ را می‌خواهیم. با توجه به نمودار درختی بالا

$$P(A) = \frac{2}{10} \times \frac{2}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{5}{10} \times \frac{5}{10} = \frac{38}{100}$$

بنابراین $P(A') = 1 - \frac{38}{100} = \frac{62}{100}$

۲۴۰- گزینه ۱ فرض کنید $u_i = \delta x_i + 1$ در این صورت $\bar{u} = \delta \bar{x} + 1$

و $\sigma_u = \delta \sigma_x$ در نتیجه $CV_u = \frac{\sigma_u}{\bar{u}} = \frac{\delta \sigma_x}{\delta \bar{x} + 1}$ چون $CV_x = \frac{\sigma_x}{\bar{x}}$

در نتیجه

$$\frac{\sigma_x}{\bar{x}} = \frac{2 \times \delta \sigma_x}{\delta \bar{x} + 1} \Rightarrow \delta \bar{x} + 1 = 1 \Rightarrow \delta \bar{x} = 0 \Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{\delta} = \frac{1}{0.2} = 5$$

۲۴۱- گزینه ۲ هر تابع به صورت

$$f = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d)\}$$

مطلوب مسئله است که در آن $a \neq 1$, $b \neq 2$, $c \neq 3$ و $d \neq 4$. در نتیجه برای a, b, c و d هر کدام سه انتخاب داریم و تعداد توابع مورد برابر با $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ است.

۲۴۲- گزینه ۲ این دانش آموز یا باید چهار تا از پنج سؤال نخست را

انتخاب کند و شش سؤال از هشت سؤال آخر، یا پنج سؤال نخست را انتخاب کند و پنج تا از هشت سؤال آخر. بنابراین تعداد انتخاب‌های او برابر است با

$$\binom{5}{4} \binom{8}{1} + \binom{5}{1} \binom{8}{4} = 196$$

۲۴۳- گزینه ۲ هرطور که دو نقطه از یک خط و دو نقطه از خط دیگر

انتخاب کنیم، می‌توانیم یک چهارضلعی که رأس‌هایش این نقطه‌ها هستند رسم

کنیم. بنابراین تعداد چهارضلعی‌های مورد نظر برابر است با $\binom{5}{2} \binom{4}{2} = 60$

۲۴۴- گزینه ۲ چون می‌دانیم حاصل جمع عددهای ظاهر شده عددی

اول است، پس فضای نمونه‌ای آزمایش به صورت زیر است $S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3), (5, 2), (5, 6), (6, 1), (6, 5)\}$

پیشامد مطلوب که در آن مجموع عددهای ظاهر شده ۷ است به شکل $A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$ است. بنابراین

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

۲۴۵- گزینه ۴ در اینجا $n(S) = 2^5$. فرض کنید A پیشامد مورد نظر باشد. در این صورت باید از پنج جای زیر حداکثر دو جا را برای نوشتن «ر» انتخاب کنیم. مثلاً

$$\overline{P} \overline{P} \overline{P} \overline{P} \overline{P} \text{ یا } \overline{P} \overline{P} \overline{P} \overline{P} P \text{ یا } \overline{P} \overline{P} \overline{P} P \overline{P} \text{ یا } \overline{P} \overline{P} P \overline{P} \overline{P} \text{ یا } \overline{P} P \overline{P} \overline{P} \overline{P} \text{ یا } P \overline{P} \overline{P} \overline{P} \overline{P}$$

$$n(A) = \binom{5}{2} + \binom{5}{1} + \binom{5}{0} = 10 + 5 + 1 = 16$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{16}{2^5} = \frac{1}{2}$$

۲۴۶- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$A' \cap B' \subseteq A' \cup B' \Rightarrow (A' \cup B') \cap (A' \cap B') = A' \cap B'$$

بنابراین

$$P(A' \cup B' | A' \cap B') = \frac{P((A' \cup B') \cap (A' \cap B'))}{P(A' \cap B')} = \frac{P(A' \cap B')}{P(A' \cap B')} = 1$$

۲۴۷- گزینه ۴ از تساوی $P(B') = 3P(A')$ نتیجه می‌شود

$$1 - P(B) = 3(1 - P(A)) \Rightarrow 1 - P(B) = 3 - 3P(A) \Rightarrow P(B) = 3P(A) - 2$$

در تساوی فوق به جای $P(A)$ قرار می‌دهیم $2P(B)$ و نتیجه می‌شود

$$P(B) = 6P(B) - 2 \Rightarrow P(B) = \frac{2}{5}$$

پس $P(A) = \frac{4}{5}$ و چون A و B مستقل از هم هستند، در نتیجه

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{4}{25}$$

۲۴۸- گزینه ۴ فرض کنید A_1, A_2, A_3 به ترتیب پیشامد این

باشند که دانش آموز انتخاب شده در پایه دهم، یازدهم یا دوازدهم است و A پیشامد این باشد که این دانش آموز به کارهای هنری علاقه‌مند است. در این صورت، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + P(A_3)P(A|A_3) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{13}{40}$$

۲۴۹- گزینه ۲ فرض کنید A پیشامد معیوب بودن لامپ انتخابی باشد و

B پیشامد آن باشد که لامپ انتخابی به جعبه اول تعلق داشته باشد. در این صورت B' پیشامد تعلق این لامپ به جعبه دوم است. باید $P(A)$ را حساب کنیم.

طبق قانون احتمال کل، $P(A) = P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B')$ چون در جعبه جدید ۸ لامپ از جعبه اول و ۶ لامپ از جعبه دوم است، پس

$$P(B) = \frac{8}{14} \text{ و } P(B') = \frac{6}{14} \text{ همچنین احتمال معیوب بودن یک لامپ}$$

انتخابی از جعبه اول برابر $\frac{4}{24}$ و احتمال معیوب بودن یک لامپ انتخابی از جعبه

$$\frac{2}{24} \text{ است، پس } P(A|B) = \frac{4}{24} \text{ و } P(A|B') = \frac{2}{24} \text{ در نتیجه}$$

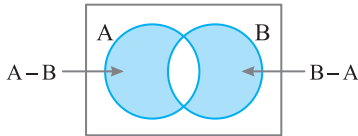
$$P(A) = \frac{8}{14} \times \frac{4}{24} + \frac{6}{14} \times \frac{2}{24} = \frac{2}{21} + \frac{1}{35} = \frac{10}{105} + \frac{3}{105} = \frac{13}{105}$$

۲۵۴- گزینه ۱ چون $A-B$ و $B-A$ اشتراک ندارند، پس ناسازگارند (نمودار ون زیر را ببینید).

همچنین $A-B$ و B ناسازگارند. $A \cap B$ و $A' \cap B$ هیچ اشتراکی ندارند، پس ناسازگارند. ولی A' و B' لزوماً ناسازگار نیستند. مثلاً اگر $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، $A = \{1, 2\}$ و $B = \{3, 4\}$ ، آن‌گاه

$$A' = \{3, 4, 5, 6\}, \quad B' = \{1, 2, 5, 6\}$$

در نتیجه $A' \cap B' = \{5, 6\} \neq \emptyset$ پس A' و B' ناسازگار نیستند.



۲۵۵- گزینه ۱ راه‌حل اول تعداد کل مهره‌ها در کیسه ۹ تاست. تعداد

$$n(S) = \binom{9}{3} = 84 \text{ با مهره برابر است با } 84$$

برای اینکه حداقل دو تا از مهره‌ها قرمز باشند، باید یکی از حالت‌های زیر پیش بیاید:

$$1: \text{قرمز و ۲ آبی} : \binom{5}{1} \binom{4}{2} = 5 \times 6 = 30$$

$$2: \text{قرمز و ۱ آبی} : \binom{5}{2} \binom{4}{1} = 10 \times 4 = 40$$

بنابراین اگر A پیشامد مورد نظر باشد، $n(A) = 40 + 30 + 4 = 74$. در نتیجه

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{74}{84} = \frac{37}{42}$$

راه‌حل دوم فرض کنید A پیشامد آن باشد که هر سه مهره قرمز باشند. در این

$$\text{صورت } P(A') \text{ مطلوب مسئله است. توجه کنید که } n(A) = \binom{5}{3} = 10$$

$$\text{بنابراین } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{84} = \frac{5}{42} \text{ در نتیجه}$$

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{5}{42} = \frac{37}{42}$$

۲۵۶- گزینه ۱ تعداد راه‌های انتخاب زیرمجموعه‌ای سه عضوی از مجموعه

$$\text{شش عضوی داده شده برابر است با } n(S) = \binom{6}{3} = 20$$

عضوهای زیرمجموعه انتخاب شده فرد باشد، یا باید یک عضو فرد و دو عضو زوج باشد، یا باید هر سه عضو فرد باشند. بنابراین اگر A پیشامد مورد نظر باشد،

$$n(A) = \binom{3}{1} \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 3 \times 3 + 1 = 10$$

$$\text{در نتیجه } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

۲۵۷- گزینه ۲ اگر A و B مستقل از هم باشند، A' و B هم مستقل

از هم هستند. بنابراین

$$\begin{aligned} P(A' \cup B) &= P(A') + P(B) - P(A')P(B) \\ &= 1 - P(A) + 1 - P(B) - (1 - P(A))(1 - P(B)) \\ &= 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{6} - \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{17}{18} \end{aligned}$$

۲۵۸- گزینه ۱ چون میانگین ۹ داده آماری برابر ۸ است و داده جدید نیز

برابر ۸ است، پس میانگین کل ۱۰ داده نیز برابر ۸ است (زیرا مجموع ۹ داده برابر $9 \times 8 = 72$ است، پس مجموع آن‌ها به همراه داده جدید برابر ۸۰ می‌شود،

بنابراین میانگین کل ۱۰ داده برابر $\frac{80}{10} = 8$ است). چون انحراف معیار ۹ داده

برابر ۲ است، پس واریانس این داده‌ها برابر $2^2 = 4$ است. از فرمول

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} ((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2)$$

$$4 = \frac{1}{9} ((x_1 - 8)^2 + (x_2 - 8)^2 + \dots + (x_9 - 8)^2)$$

$$(x_1 - 8)^2 + (x_2 - 8)^2 + \dots + (x_9 - 8)^2 = 4 \times 9 = 36$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{10} ((x_1 - 8)^2 + (x_2 - 8)^2 + \dots + (x_{10} - 8)^2)$$

$$= \frac{1}{10} (36 + ((x_1 - 8)^2 + (x_2 - 8)^2 + \dots + (x_9 - 8)^2) + (x_{10} - 8)^2)$$

$$= \frac{1}{10} (36 + (8 - 8)^2) = \frac{36}{10} = 3.6$$

۲۵۹- گزینه ۳ هر مستطیل از برخورد دو خط افقی و دو خط عمودی از

۹ خط افقی و ۹ خط عمودی شکل زیر به وجود می‌آید. برای اینکه مستطیل‌ها

2×4 یا 4×2 باشند، باید فاصله دو خط موازی ۲ واحد و فاصله دو خط موازی

دیگر ۴ واحد باشد. برای رسم مستطیل‌های 2×4 یکی از خطوط ۱ تا ۷ افقی را

می‌توانیم انتخاب کنیم و خط موازی آن خودبه‌خود به فاصله ۲ واحد رسم

می‌شود. همچنین یکی از خطوط عمودی ۱ تا ۵ را می‌توانیم انتخاب کنیم و خط

موازی آن خودبه‌خود به فاصله ۴ واحد رسم می‌شود.

بنابراین تعداد مستطیل‌های 2×4

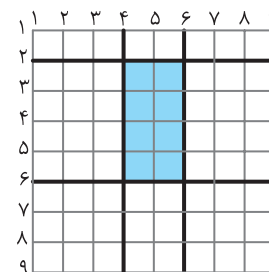
برابر است با

$$\binom{7}{1} \times \binom{5}{1} = 7 \times 5 = 35$$

به همین ترتیب ۳۵ مستطیل 4×2

وجود دارد. پس جمعاً ۷۰ مستطیل با

ابعاد ۲ و ۴ وجود دارد.



۲۵۲- گزینه ۴ حروف صدادار a, o, i هستند که به ۳! حالت کنار هم قرار

می‌گیرند. حروف بی‌صدا h, t, r, g, m هستند که به ۶! حالت کنار هم قرار

می‌گیرند. دو دسته حرف صدادار و بی‌صدا هم به ۲! حالت می‌توانند کنار هم قرار

بگیرند. بنابراین تعداد کل جایگشت‌های مورد نظر برابر است با $3! \times 6! \times 2! = 12 \times 6! = 3.!$

۲۵۳- گزینه ۱ از تساوی داده شده نتیجه می‌شود

$$\frac{(5-n)!n!}{5!} + \frac{(6-n)!n!}{6!} = \frac{(4-n)!n!}{4!}$$

$$\frac{(5-n)!}{5!} + \frac{(6-n)!}{6!} = \frac{(4-n)!}{4!}$$

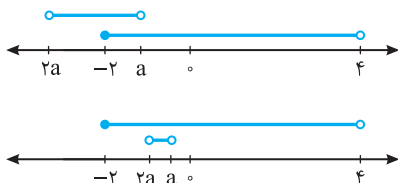
$$\frac{(5-n)(4-n)!}{5 \times 4!} + \frac{(6-n)(5-n)(4-n)!}{6 \times 5 \times 4!} = \frac{(4-n)!}{4!}$$

$$\frac{5-n}{5} + \frac{(6-n)(5-n)}{30} = 1 \Rightarrow 30 - 6n + 30 - 10n + n^2 = 30$$

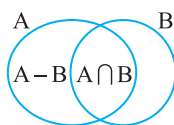
$$n^2 - 17n + 30 = 0 \Rightarrow (n-15)(n-2) = 0 \Rightarrow n=2, \quad n=15 \text{ (غ.ق.)}$$

$$\cdot \binom{n+3}{2} = \binom{5}{2} = 10 \text{ بنابراین}$$

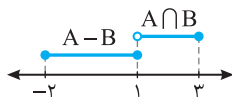
بنابراین $a > -2$. از روی شکل‌های زیر معلوم است که اگر $-2 < a < 0$ ، اشتراک بازه‌های $[-2, 4]$ و $(2a, a)$ تهی نیست.



گزینه ۲۶۳ - ۴ ابتدا توجه کنید که $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ (شکل زیر را ببینید).



از روی شکل زیر معلوم می‌شود که $A = [-2, 3]$.



گزینه ۲۶۴ - ۳ اگر از مجموعه‌ای نامتناهی تعدادی متناهی عضو حذف کنیم، مجموعه‌ای که به دست می‌آید نامتناهی است. پس $B - A$ نامتناهی است. بقیه گزینه‌ها ممکن است متناهی باشند.

گزینه ۱) ۱ اگر $U = \mathbb{N}$ ، $A = \{1\}$ و $B = \{2, 3, 4, \dots\}$ ، آن‌گاه

$$A' - B = \emptyset$$

گزینه ۲) ۲ چون A متناهی است، پس $A - B'$ نیز متناهی است.

گزینه ۴) ۴ اگر $U = \mathbb{N}$ ، $A = \{1\}$ و $B = \mathbb{N}$ ، آن‌گاه $B' - A' = \emptyset$.

گزینه ۲۶۵ - ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{cases} n(A) = 3n(A') \\ n(A) = 12 \end{cases} \Rightarrow n(A') = 4$$

در نتیجه،

$$n(U) = n(A) + n(A') = 12 + 4 = 16$$

اکنون توجه کنید که

$$n(U) = n(B) + n(B') \Rightarrow 16 = n(B) + 7 \Rightarrow n(B) = 9$$

گزینه ۲۶۶ - ۱ ابتدا توجه کنید که

$$n(A) + n(A') = n(U) \xrightarrow{n(A) = n(A')} 2n(A) = 26 \Rightarrow n(A) = 13$$

از طرف دیگر،

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 14 = 13 + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(B) - n(A \cap B) = 1 \Rightarrow n(B - A) = 1$$

گزینه ۲۶۷ - ۲ توجه کنید که

$$n(A - B) = 2n(B - A) \Rightarrow n(A) - n(A \cap B) = 2n(B) - 2n(A \cap B)$$

$$n(A) = 2n(B) - n(A \cap B) = 2n(B) - 5$$

بنابراین

$$\begin{cases} n(A) = 2n(B) - 5 \\ n(A) = n(B) + 3 \end{cases} \Rightarrow n(A) = 11, n(B) = 8$$

در نتیجه $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 11 + 8 - 5 = 14$

گزینه ۲۵۸ - ۴ فرض کنید A پیشامد قبول شدن پگاه در رشته پزشکی و

B پیشامد قبول شدن او در رشته دندانپزشکی باشد. در این صورت بنابر فرض،

$P(A) = 0.75$ و $P(B \cap A') = 0.24$. چون پیشامدهای A و B مستقل از

یکدیگرند، پس پیشامدهای A' و B نیز مستقل از یکدیگرند. بنابراین

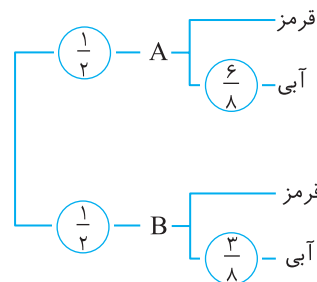
$$P(B \cap A') = P(B) \times P(A') = P(B)(1 - P(A))$$

$$0.24 = P(B)(1 - 0.75) \Rightarrow P(B) = 0.96$$

پس $P(B') = 1 - P(B) = 0.04$.

گزینه ۲۵۹ - ۴ جعبه‌ها را A و B می‌نامیم. نمودار درختی زیر را

در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم است که احتمال آبی بودن مهره برابر است با

$$\frac{1}{2} \times \frac{6}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} = \frac{9}{16}$$

گزینه ۲۶۰ - ۴ چون میانگین ۱۰ داده اولیه برابر ۱۷/۵ است، پس

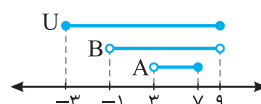
مجموع این ۱۰ داده برابر $10 \times 17.5 = 175$ است. در نتیجه مجموع ۱۴ داده

برابر $266 = 175 + 13 + 19 + 29 + 30$ است. بنابراین میانگین کل ۱۴ داده

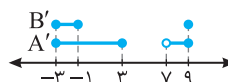
$$\text{برابر } \frac{266}{14} = 19 \text{ است.}$$

گزینه ۲۶۱ - ۲ از روی شکل زیر معلوم می‌شود که

$$A' = [-3, 3] \cup (7, 9], \quad B' = [-3, -1] \cup \{9\}$$



بنابراین از روی شکل زیر معلوم می‌شود که $A' - B' = (-1, 3] \cup (7, 9)$.



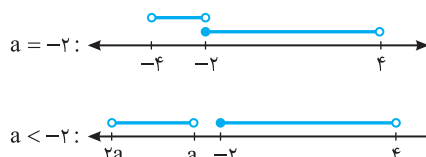
بنابراین، عددهای صحیح در مجموعه $A' - B'$ عبارت‌اند از صفر، ۱، ۲، ۳ و ۸.

که مجموعشان می‌شود ۱۴.

گزینه ۲۶۲ - ۲ چون $(2a, a)$ یک بازه است، پس $2a < a$ و در نتیجه

$a < 0$. از روی شکل‌های زیر معلوم است که اگر $a \leq -2$ اشتراک بازه‌های

$[-2, 4]$ و $(2a, a)$ تهی است:



۲۶۸- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$n(A') = n(U) - n(A) = 23 - 10 = 13$$

$$n(B') = n(U) - n(B) = 23 - 7 = 16$$

اکنون توجه کنید که $n(A' \cap B') \leq n(A') = 13$

۲۶۹- گزینه ۳ فرض می‌کنیم تعداد دانش‌آموزان کلاس برابر x باشد.

همچنین، فرض می‌کنیم A و B به ترتیب مجموعه کسانی باشند که به فیزیک و ریاضیات علاقه دارند. در این صورت $n(A) = \frac{1}{6}x$ و $n(B) = \frac{1}{7}x$ از

طرف دیگر، چون هر دانش‌آموز کلاس حداقل به یکی از درس‌های فیزیک یا ریاضی علاقه‌مند است، پس مجموعه دانش‌آموزان کلاس برابر $A \cup B$ است، در نتیجه، $n(A \cup B) = x$ به این ترتیب،

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$x = \frac{1}{6}x + \frac{1}{7}x - 6 \Rightarrow x = 20$$

۲۷۰- گزینه ۳ فرض کنید A مجموعه علاقه‌مندان به ریاضی و

B مجموعه علاقه‌مندان به فیزیک باشد. اگر تعداد کسانی که به این دو درس علاقه‌مند نیستند x باشد، آن‌گاه

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$120 - x = 105 + 95 - n(A \cap B) \Rightarrow 120 - x = 200 - n(A \cap B)$$

پس $n(A \cap B) = 80 + x$ برای اینکه $n(A \cap B)$ حداقل باشد و با توجه به اینکه $x \geq 0$ است، باید $x = 0$ ؛ پس حداقل مقدار $n(A \cap B)$ برابر با ۸۰ است.

۲۷۱- گزینه ۲ تعداد نقاط روی شکل (۱) برابر ۵ است و در هر مرحله ۴

نقطه به نقاط شکل قبل اضافه می‌شود. پس در مرحله n ام به تعداد $(n-1) \times 4$ نقطه به ۵ نقطه شکل (۱) اضافه شده است: $4(n-1) + 5 = 4n + 1$ ، یعنی شکل n ام $4n + 1$ نقطه دارد. پس شکل پانزدهم ۶۱ نقطه دارد.

۲۷۲- گزینه ۲ از شرط $a_n > 0$ مقادیری از n را پیدا می‌کنیم که به ازای

آن‌ها a_n مثبت است:

$$a_n > 0 \Rightarrow 95n - n^2 > 0 \Rightarrow n(95 - n) > 0$$

چون $n > 0$ ، پس $95 - n > 0$ ، در نتیجه $n < 95$ ، یعنی $n \leq 94$. بنابراین ۹۴ جمله دنباله مثبت هستند.

۲۷۳- گزینه ۴ فرض کنید قدرنسبت این دنباله d باشد. بنابراین

$$a_5 = 2a_1 \Rightarrow a_1 + 4d = 2(a_1 + d) \Rightarrow a_1 + 4d = 0 \Rightarrow a_1 = -4d$$

۲۷۴- گزینه ۳ جمله وسط، واسطه حسابی دو جمله دیگر است:

$$\log_p a + \log_p (16a) = 2 \log_p (3a + 4) \Rightarrow \log_p (a(16a)) = \log_p (3a + 4)^2$$

$$16a^2 = (3a + 4)^2 \Rightarrow 16a^2 = 9a^2 + 24a + 16$$

$$7a^2 - 24a - 16 = 0 \Rightarrow a = 4, a = -\frac{4}{7} \text{ (غ.ق.)}$$

۲۷۵- گزینه ۳ جمله‌های اول و دوم دنباله $a_n = 2 - 3n$ به ترتیب برابر

-1 و -4 است. پس قدرنسبت آن برابر $3 - (-1) = 4$ است. اگر جمله

اول را 4 واحد کاهش دهیم، به -5 تبدیل می‌شود و اگر قدرنسبت را 6 واحد

افزایش دهیم، به 3 تبدیل می‌شود. پس دنباله حسابی جدید $-5, -2, 1, \dots$

است که جمله عمومی آن به صورت $b_n = -5 + 3(n-1) = 3n - 8$ است،

پس جمله بیست‌ویکم دنباله جدید $b_{21} = 3 \times 21 - 8 = 55$ است.

۲۷۶- گزینه ۲ مجموع سه جمله اول و سه جمله آخر را حساب می‌کنیم:

$$(a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) = 6 - \sqrt{2} + 6 + \sqrt{2} = 12$$

چون $a_3 + a_{n-2} = a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n$ پس

$$3(a_1 + a_n) = 12 \Rightarrow a_1 + a_n = 4$$

۲۷۷- گزینه ۴ چون $a_1 = \frac{1}{2}$ و $r = 1 \div \frac{1}{2} = 2$ ، حاصل ضرب پانزده

جمله اول دنباله برابر است با

$$P = a_1 \times a_1 r \times \dots \times a_1 r^{14} = a_1^{15} \times r^{1+2+\dots+14} = a_1^{15} r^{\frac{14 \times 15}{2}} = a_1^{15} r^{105} \\ = \left(\frac{1}{2}\right)^{15} 2^{105} = \left(\frac{1}{2}\right)^{15} \times 2^{105} = 2^{90}$$

۲۷۸- گزینه ۴ می‌دانیم اگر دنباله‌ای هم حسابی و هم هندسی باشد

جمله‌های آن با هم برابرند، پس هر سه جمله باید برابر باشند. در نتیجه

$$y - 9 = 2x + 3 = 3x - 1$$

بنابراین $x = 4$ و $y = 20$ ، پس $x + y = 24$.

۲۷۹- گزینه ۳ توجه کنید که $z = r^2 x$ ، $y = rx$ و $t = r^3 x$ به شرط

آنکه r قدرنسبت دنباله باشد. پس

$$x + z = 20 \Rightarrow x + r^2 x = 20 \Rightarrow x(1 + r^2) = 20 \quad (1)$$

$$y + t = 60 \Rightarrow rx + r^3 x = 60 \Rightarrow rx(1 + r^2) = 60 \quad (2)$$

از تقسیم طرفین تساوی (۲) بر طرفین تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$\frac{rx(1+r^2)}{x(1+r^2)} = \frac{60}{20} \Rightarrow r = 3$$

۲۸۰- گزینه ۳ توجه کنید که اگر قدرنسبت دنباله r و جمله اول آن a_1

باشد، آن‌گاه

$$a_5 - a_3 = 96 \Rightarrow a_1 r^4 - a_1 r^2 = 96 \Rightarrow a_1 r^2 (r^2 - 1) = 96 \quad (1)$$

$$a_8 - a_6 = 12 \Rightarrow a_1 r^7 - a_1 r^5 = 12 \Rightarrow a_1 r^5 (r^2 - 1) = 12 \quad (2)$$

طرفین تساوی (۲) را بر طرفین تساوی (۱) تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{a_1 r^5 (r^2 - 1)}{a_1 r^2 (r^2 - 1)} = \frac{12}{96} \Rightarrow r^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

پس

$$a_1 r^2 (r^2 - 1) = 96 \Rightarrow a_1 \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{4} - 1\right) = 96 \Rightarrow a_1 = -512$$

بنابراین

$$a_5 = a_1 r^4 = -512 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = -32$$

۲۸۱- گزینه ۳ اگر 4 مربع 1×1 را که در چهار گوشه شکل‌ها حذف شده

است به شکل‌ها اضافه کنیم، در مرحله n ام یک مربع بزرگ داریم که $(n+2)$ مربع 1×1 در هر سطر و $(n+2)$ مربع 1×1 در هر ستون دارد. پس مساحت

آن $(n+2)^2$ است. بنابراین مساحت شکل n ام برابر است با

$$(n+2)^2 - 4 = n^2 + 4n$$

پس مساحت شکل هشتم برابر است با

$$8^2 + 4 \times 8 = 96$$

۲۸۷- گزینه ۱ اگر قدرنسبت دنباله را با r نشان دهیم، آن گاه

$$r^3 = \frac{32}{1} = 64 \Rightarrow r = 4$$

در نتیجه $x = \frac{1}{8}$ ، $y = 2$ و $z = 8$. بنابراین $xyz = 2$.

۲۸۸- گزینه ۱ فرض کنید قدرنسبت دنباله حسابی سطر B برابر d

باشد. در این صورت $4 + 4d = 20$ پس $d = 4$. بنابراین $b = 20 + 4 = 24$.
در سطر B ، جمله کنار جمله نخست برابر ۸ است. اگر قدرنسبت دنباله هندسی ستون A برابر r باشد، آن گاه $8 = 0.125r^3$ بنابراین $r^3 = 64$ ، در نتیجه $r = 4$. بنابراین $a = 8 \times r = 8 \times 4 = 32$. به این ترتیب $a + b = 56$.

۲۸۹- گزینه ۱ فرض کنید قدرنسبت دنباله هندسی r و جمله اول آن a_1

باشند. در این صورت جمله‌های اول، دوم و چهارم آن به ترتیب a_1 ، $a_1 r$ و $a_1 r^3$ هستند. چون این اعداد جمله‌های متوالی یک دنباله حسابی هستند، پس جمله $a_1 r$ واسطه حسابی دو جمله دیگر است:

$$2a_1 r = a_1 + a_1 r^3 \Rightarrow r^3 + 1 = 2r \Rightarrow r^3 - 2r + 1 = 0$$

$$r^3 - r - r + 1 = r(r^2 - 1) - (r - 1) = 0 \Rightarrow (r - 1)(r^2 + r - 1) = 0$$

چون دنباله هندسی غیر ثابت است، پس $r \neq 1$ ، در نتیجه

$$r^2 + r - 1 = 0 \Rightarrow r = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, r = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad (\text{غ.ق.})$$

توجه کنید که قدرنسبت دنباله هندسی عددی مثبت است، پس $r = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ قابل قبول نیست.

۲۹۰- گزینه ۳ اگر قدرنسبت دنباله حسابی برابر d باشد، آن گاه

$$a = b - d \text{ و } c = b + d \text{ در نتیجه}$$

$$a + b + c = 15 \Rightarrow b - d + b + b + d = 15 \Rightarrow b = 5$$

از طرف دیگر، چون $c + 4$ ، $b + 6$ ، $a + 8$ دنباله‌ای هندسی است، پس

$$(b + 6)^2 = (a + 8)(c + 4) \Rightarrow 11^2 = (5 - d + 8)(5 + d + 4)$$

$$121 = (13 - d)(9 + d) \Rightarrow d^2 - 4d + 4 = 0 \Rightarrow (d - 2)^2 = 0 \Rightarrow d = 2$$

بنابراین $a = 3$ و $c = 7$ و $ac = 21$.

۲۹۱- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\frac{\sqrt[3]{x} \sqrt[3]{x} \sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x} \sqrt{x}} = \frac{x^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{6}} x^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{\frac{1}{3} - \frac{2}{3}} = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

۲۹۲- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\sqrt{2} \sqrt[3]{2} \sqrt[4]{2} \sqrt[5]{2} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}} = 2^{\frac{12}{12} + \frac{8}{12} + \frac{10}{12} + \frac{6}{12}} = 2^{\frac{36}{12}} = 2^3 = 8$$

بنابراین

$$\frac{5}{28} = \sqrt[4]{x^5} \Rightarrow \frac{5}{28} = x^{\frac{5}{4}} \Rightarrow x = \frac{5}{28}$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان $\frac{4}{5}$ برسانیم، به دست می‌آید

$$\left(\frac{5}{28}\right)^{\frac{4}{5}} = x \Rightarrow \frac{1}{28} = x \Rightarrow x = \frac{1}{28}$$

۲۹۳- گزینه ۴ توجه کنید که

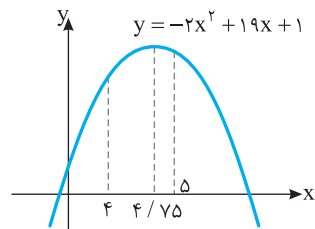
$$\frac{(a^2 - 4)(a^2 - 1)}{a^2} = \frac{a^4 - 5a^2 + 4}{a^2} = a^2 - 5 + \frac{4}{a^2}$$

۲۸۲- گزینه ۲ بیشترین مقدار تابع درجه دوم $y = -2x^2 + 19x + 1$

به ازای $x = \frac{19}{4} = 4.75$ به دست می‌آید. چون $\frac{19}{4}$ عددی طبیعی نیست،

بزرگ‌ترین مقدار در میان a_n ها، a_5 است، که برابر است با

$$a_5 = -50 + 95 + 1 = 46$$



۲۸۳- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\frac{9}{10} < a_n < \frac{11}{10} \Rightarrow \frac{9}{10} < \frac{2n-1}{n+2} < \frac{11}{10}$$

اکنون توجه کنید که

$$\frac{9}{10} < \frac{2n-1}{n+2} \Rightarrow 9n + 18 < 20n - 10 \Rightarrow n > \frac{28}{11} \quad (1)$$

$$\frac{2n-1}{n+2} < \frac{11}{10} \Rightarrow 20n - 10 < 11n + 22 \Rightarrow n < \frac{32}{9} \quad (2)$$

تنها عدد طبیعی که در شرط‌های (۱) و (۲) صدق می‌کند، ۳ است.

۲۸۴- گزینه ۳ چون $a_3 + a_4 = 0$ ، پس $a_4 = -a_3$. بنابراین از رابطه

$$a_4^2 + a_3^2 = 128 \text{ به دست می‌آید}$$

$$a_4^2 + (-a_3)^2 = 128 \Rightarrow a_4^2 + a_3^2 = 128 \Rightarrow a_3^2 = 64 \Rightarrow a_3 = \pm 8$$

$$d = \frac{a_4 - a_3}{4} = \frac{-8 - 8}{4} = -4 \text{ اگر } a_4 = -8 \text{ و } a_3 = 8 \text{ آن گاه}$$

$$d = \frac{a_4 - a_3}{4} = \frac{8 - (-8)}{4} = 4 \text{ اگر } a_4 = 8 \text{ و } a_3 = -8 \text{ آن گاه}$$

۲۸۵- گزینه ۴ راه حل اول بنابر فرض مسئله،

$$a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 10$$

$$a_1 + 2d + a_1 + 6d + a_1 + 10d + a_1 + 14d = 10$$

$$4a_1 + 32d = 10 \Rightarrow 2a_1 + 16d = 5$$

بنابراین $a_1 + a_{16} = 5$ در نتیجه $a_1 + a_{16} = 5$.

راه حل دوم توجه کنید که

$$a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 10 \Rightarrow (a_3 + a_6) + (a_4 + a_5) = 10$$

چون $3 + 18 = 7 + 14 = 1 + 20$ ، پس

$$a_3 + a_6 = a_4 + a_5 = a_1 + a_{16}$$

بنابراین

$$2(a_1 + a_{16}) = 10 \Rightarrow a_1 + a_{16} = 5$$

۲۸۶- گزینه ۲ توجه کنید که

$$2x = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$y^2 = \tan^2 \alpha \cot^2 \alpha \Rightarrow y^2 = 1 \xrightarrow{y > 0} y = 1$$

بنابراین $x + y = \frac{3}{2}$.

از طرف دیگر،

$$\begin{cases} a+b=8 \\ b-c=1 \end{cases} \Rightarrow (a+b)-(b-c)=8-1 \Rightarrow a+c=7$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با $8 \times (-3) = -24$.

راه حل دوم فرض کنید $b=0$. در این صورت

$$\begin{cases} a+b=8 \Rightarrow a=8 \\ b-c=1 \Rightarrow c=-1 \end{cases}$$

بنابراین $a^2+ab+bc+ca=64-88=-24$.

۳-۳۴ گزینه ۳ **راه حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned} a-b+\sqrt{c} &= 6 \Rightarrow a-(b-\sqrt{c})=6 \\ (\sqrt{a}-\sqrt{b-\sqrt{c}})(\sqrt{a}+\sqrt{b-\sqrt{c}}) &= 6 \\ (\sqrt{a}-\sqrt{b-\sqrt{c}})(3) &= 6 \Rightarrow \sqrt{a}-\sqrt{b-\sqrt{c}}=2 \end{aligned}$$

به این ترتیب

$$\begin{cases} \sqrt{a}+\sqrt{b-\sqrt{c}}=3 \\ \sqrt{a}-\sqrt{b-\sqrt{c}}=2 \end{cases} \Rightarrow 2\sqrt{a}=5 \Rightarrow a=\frac{25}{4}$$

راه حل دوم توجه کنید که

$$a-b+\sqrt{c}=6 \Rightarrow b-\sqrt{c}=a-6$$

به جای $b-\sqrt{c}$ در معادله دوم قرار می دهیم $a-6$:

$$\begin{aligned} \sqrt{a}+\sqrt{a-6} &= 3 \Rightarrow \sqrt{a-6}=3-\sqrt{a} \\ \xrightarrow{\text{به توان دو می رسانیم}} a-6 &= 9-6\sqrt{a}+a \\ 6\sqrt{a} &= 15 \Rightarrow \sqrt{a}=\frac{5}{2} \Rightarrow a=\frac{25}{4} \end{aligned}$$

۳-۳۵ گزینه ۳ توجه کنید که

$$a^2+\frac{1}{a^2}=(a+\frac{1}{a})^2-2=9-2=7$$

$$a^3+\frac{1}{a^3}=(a+\frac{1}{a})^3-3a(\frac{1}{a})(a+\frac{1}{a})=27-3 \times 3=18$$

اکنون می توان نوشت

$$(a^2+\frac{1}{a^2})(a^3+\frac{1}{a^3})=a^5+\frac{1}{a}+a+\frac{1}{a^5}$$

$$7 \times 18 = a^5 + 3 + \frac{1}{a^5} \Rightarrow a^5 + \frac{1}{a^5} = 123$$

۳-۳۶ گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{a^2}{4} + \frac{4}{a^2} = 23 \Rightarrow (\frac{a}{2} + \frac{2}{a})^2 - 2 = 23$$

$$(\frac{a}{2} + \frac{2}{a})^2 = 25 \xrightarrow{a>0} \frac{a}{2} + \frac{2}{a} = 5$$

اکنون اگر دو طرف این تساوی را به توان سه برسانیم، به دست می آید

$$\frac{a^3}{8} + \frac{8}{a^3} + 3(\frac{a}{2})(\frac{2}{a})(\frac{a}{2} + \frac{2}{a}) = 125$$

$$\frac{a^3}{8} + \frac{8}{a^3} + 3 \times 5 = 125 \Rightarrow \frac{a^3}{8} + \frac{8}{a^3} = 110$$

۳-۳۷ گزینه ۱ اگر فرض کنیم $y=x^2+x+1$ ، آن گاه

$$(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12=y(y+1)-12=y^2+y-12=(y-3)(y+4)$$

از طرف دیگر،

$$y-3=x^2+x-2=(x-1)(x+2), \quad y+4=x^2+x+5$$

چون $y+4$ درجه دوم است و ریشه ای ندارد، پس تجزیه نمی شود. بنابراین

عوامل های عبارت مورد نظر $x-1$ ، $x+2$ و x^2+x+5 هستند.

۳-۳۸ گزینه ۳ فرض می کنیم $A=\frac{1}{3}(\sqrt{y}-1)\sqrt{4+\sqrt{y}}$. در این صورت،

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{1}{9}(\sqrt{y}-1)^2(4+\sqrt{y}) = \frac{1}{9}(y+1-2\sqrt{y})(4+\sqrt{y}) \\ &= \frac{2}{9}(4-\sqrt{y})(4+\sqrt{y}) = \frac{2}{9}(16-y) = 2 \end{aligned}$$

چون A عددی مثبت است، $A=\sqrt{2}$.

۳-۳۹ گزینه ۴ توجه کنید که

$$\begin{aligned} \frac{2}{1-\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{6}} &= \frac{2}{1-\sqrt{3}+\sqrt{2}(1-\sqrt{3})} = \frac{2}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{2})} \\ &= \frac{2(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{2})}{(1-3)(1-2)} = (1+\sqrt{3})(1-\sqrt{2}) \end{aligned}$$

۳-۴۰ گزینه ۱ چون باقی مانده تقسیم چندجمله ای $P(x-1)$ بر $x-2$

برابر ۱۲ است، پس $P(2-1)=12$ ، یعنی $P(1)=12$. در نتیجه

$$P(1)=1+a+6+b+10=12 \Rightarrow a+b=-5$$

از طرف دیگر، باقی مانده تقسیم چندجمله ای $P(x+1)$ بر $x+2$ برابر است

با $P(-2+1)=P(-1)$. اکنون توجه کنید که

$$P(-1)=1-a+6-b+10=17-(a+b)=17-(-5)=22$$

بنابراین باقی مانده مورد نظر برابر ۲۲ است.

۳-۴۱ گزینه ۱ توجه کنید که $x=\sqrt[4]{3^3 \sqrt{3}}=3^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{8}}=3^{\frac{3}{8}}$

بنابراین

$$\sqrt[4]{x^{21}}=x^{\frac{21}{4}}=(3^{\frac{3}{8}})^{\frac{21}{4}}=3^{\frac{63}{16}}$$

۳-۴۲ گزینه ۴ توجه کنید که

$$\sqrt[4]{2^4 \sqrt[4]{4^3 \sqrt[4]{4}}} = 2^{\frac{1}{4}} \times 4^{\frac{1}{8}} \times 4^{\frac{1}{16}} = 2^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{8}} = 2^{\frac{5}{8}}$$

بنابراین

$$\sqrt[4]{2^4 \sqrt[4]{4^3 \sqrt[4]{4}}} \times \sqrt[4]{16} = 2^{\frac{5}{8}} \times 2^{\frac{4}{8}} = 2^{\frac{9}{8}}$$

۳-۴۳ گزینه ۴ توجه کنید که

$$\sqrt{\frac{a}{b^3}} = \sqrt{ab^{-3}} = a^{\frac{1}{2}} b^{-\frac{3}{2}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^5}} = \sqrt[3]{b^2 a^{-5}} = b^{\frac{2}{3}} a^{-\frac{5}{3}}$$

$$\sqrt[12]{a^{14} b^{10}} = a^{\frac{14}{12}} b^{\frac{10}{12}} = a^{\frac{7}{6}} b^{\frac{5}{6}}$$

$$\begin{aligned} x^r y^r - x^r - y^r - rxy + 1 &= x^r y^r - rxy + 1 - (x^r + y^r + rxy) \\ &= (xy - 1)^r - (x + y)^r = (xy - 1 - x - y)(xy - 1 + x + y) \end{aligned}$$
$$P(r) = a(-r)^r - (-r) + ra = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{r}$$
$$\begin{aligned} \sqrt[6]{\sqrt[3]{\gamma^{1^{\circ}}}} \times \sqrt[6]{\sqrt{\gamma^f}} &= (\gamma^{1^{\circ}})^{\frac{1}{6}} \times (\gamma^f)^{\frac{1}{6}} = \gamma^{\frac{1^{\circ}}{6}} \times \gamma^{\frac{f}{6}} \\ &= \gamma^{\frac{1}{6}} \times \gamma^{\frac{1}{6}} = \gamma^{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}} = \gamma^{\frac{1}{3}} = \gamma \end{aligned}$$
$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{2 \times 2 \times 2} = \sqrt[3]{2^3} = 2$$

$$\sqrt[4]{\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{2 \times 2 \times 2 \times 2} = \sqrt[4]{2^4} = 2$$

در نتیجه عبارت مورد نظر برابر است با $\sqrt[3]{2} = 2$

$$\sqrt[3]{3\sqrt{9}} = 3^{\frac{1}{3}} \times 9^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{3}} \times (3^2)^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{6}} = 3^{\frac{1}{3} + \frac{2}{6}} = 3^{\frac{4}{6}} = 3^{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt[5]{r^2 r^3 a} = r^{\frac{2}{5}} r^{\frac{3}{5}} a^{\frac{1}{5}} = (r^5)^{\frac{1}{5}} a^{\frac{1}{5}} = r^1 a^{\frac{1}{5}}$$

$$\frac{y}{r^{10}} = \frac{r}{r^5} \frac{1}{a^{10}} \Rightarrow \frac{1}{a^{10}} = \frac{y}{r^{10}} \quad \frac{y}{5} = \frac{r}{r^{10}} = \frac{y-9}{r^{10}} = \frac{-2}{r^{10}}$$
$$\sqrt[r]{a} = a^{\frac{1}{r}} = (r^{-r})^{\frac{1}{r}} = r^{-\frac{r}{r}} = r^{-1} = \frac{1}{r} = \frac{\sqrt[r]{r}}{r}$$
$$\begin{cases} 2a^r + b^r + 3c^r = 23 \\ 2a^r + 3b^r + c^r = 33 \end{cases} \Rightarrow (a^r + b^r + c^r) = 28 \Rightarrow a^r + b^r + c^r = 14$$

در نتیجه $|a+b+c|=6$.

$$\frac{1}{a^r} - \frac{1}{b^r} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \left(\frac{1}{a^{r-1}} + \frac{1}{a^{r-2}b} + \dots + \frac{1}{b^{r-1}}\right)$$
$$\frac{1}{a^r} + \frac{1}{b^r} = r \Rightarrow \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^r + \frac{r}{ab} = r \Rightarrow 1 + \frac{r}{ab} = r \Rightarrow ab = 1$$

در نتیجه $\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3} = 1(3+1) = 4$

$$\omega^{X-1} + \omega^{-X-1} = 2 \Rightarrow \frac{\omega^X}{\omega} + \frac{\omega^{-X}}{\omega} = 2 \Rightarrow \omega^X + \omega^{-X} = 2$$
$$3^x + 3^{-x} + 2 \times 3^x \times 3^{-x} = 36 \Rightarrow 9^x + 9^{-x} + 2 = 36$$

$$b = (a + b) - a = \sqrt{17} - \frac{\sqrt{17} + 3}{2} = \frac{\sqrt{17} - 3}{2}$$

$$a^r - b^r + 9ab = (a-b)((a-b)^r + rab) + 9ab = r(9+6) + 18 = 6r$$
$$(1+\sqrt[r]{x})(1+\sqrt[r]{x})\dots(1+\sqrt[r]{x})(1-\sqrt[r]{x})=\frac{1-\sqrt[r]{x}}{x-1}$$

$$(1+\sqrt{r})(1+\sqrt[r]{r})(1-\sqrt[r]{r}) = \frac{1-\sqrt[r]{r}}{x^r-1}$$

$$(1+\sqrt{r})(1-\sqrt{r}) = \frac{1-\sqrt[r]{r}}{x^r-1} \Rightarrow 1-r = \frac{1-\sqrt[r]{r}}{x^r-1}$$

$$-1 = \frac{1 - \sqrt[3]{r}}{x^r - 1} \Rightarrow x^r - 1 = \sqrt[3]{r} - 1 \Rightarrow x^r = \sqrt[3]{r}$$

$$(x^{\mathfrak{r}})^{\mathfrak{f}} = (\sqrt[\mathfrak{f}]{x^{\mathfrak{r}}})^{\mathfrak{f}} \Rightarrow x^{\mathfrak{f}\wedge} = x^{\mathfrak{r}} = x$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\sqrt{r+1}} \times \sqrt[3]{\sqrt{r-1}} \times \sqrt[5]{\sqrt{r-1}} = \sqrt{(\sqrt{r+1})^r} \times \sqrt[3]{(\sqrt{r-1})^r} \times \sqrt[5]{\sqrt{r-1}} \\ & = \sqrt[5]{(\sqrt{r+1})^r (\sqrt{r-1})^r (\sqrt{r-1})^r} = \sqrt[5]{(\sqrt{r+1})^r (\sqrt{r-1})^r} \\ & = \sqrt[5]{((\sqrt{r+1})(\sqrt{r-1}))^r} = \sqrt[5]{(r-1)^r} = \sqrt[5]{r-1} \end{aligned}$$

۳۱۸- گزینه ۲ ابتدا مخارج کسر $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1}$ را گویا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1} &= \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1} \times \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-1} \\ &= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{3+2+2\sqrt{6}-1} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{2(\sqrt{6}+2)} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{2(\sqrt{6}+2)} \times \frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{6}-2} \\ &= \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)(\sqrt{6}-2)}{2(\sqrt{6}-4)} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)(\sqrt{6}-2)}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}-2\sqrt{2}-2\sqrt{6}+2}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}+2}{2} \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1} - \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6} + 2}{4} - \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} = \frac{1}{2}$$

بنابراین

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2+\sqrt{6}}{2-\sqrt{6}} = \frac{(2+\sqrt{6})^2}{(2-\sqrt{6})(2+\sqrt{6})} = \frac{10+4\sqrt{6}}{4-6} = -5-2\sqrt{6}$$

۳۳۳- گزینه ۲ توجه کنید که $x_1 + x_2 = -8$ و $x_1 x_2 = -13$ پس

$$\frac{1}{x_1+2} + \frac{1}{x_2+2} = \frac{(x_1+x_2)+4}{x_1 x_2 + 2(x_1+x_2)+4} = \frac{-8+4}{-13-16+4} = \frac{4}{25}$$

۳۳۴- گزینه ۲ اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه $\alpha + \beta = 8$ و

$\alpha = 2\beta + 4$ از حل دستگاه معادله‌های به دست آمده نتیجه می‌شود

$$\alpha = \frac{2}{3} \text{ و } \beta = \frac{4}{3} \text{ پس } m = \frac{8}{9}$$

۳۳۵- گزینه ۱ اگر فرض کنیم $x^2 - 4 = t$ ، آن‌گاه معادله مورد نظر

می‌شود $2 = \frac{4}{t} + \frac{5}{t+1}$. اگر دو طرف این معادله را در $t(t+1)$ ضرب کنیم، آن‌گاه

$$4(t+1) + 5t = 2t(t+1) \Rightarrow 4t + 4 + 5t = 2t^2 + 2t$$

$$2t^2 - 7t - 4 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}, t = 4$$

اگر $t = -\frac{1}{2}$ ، آن‌گاه

$$x^2 - 4 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{7}{2} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{7}{2}}$$

اگر $t = 4$ ، آن‌گاه

$$x^2 - 4 = 4 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm \sqrt{8}$$

بنابراین حاصل ضرب جواب‌های معادله برابر ۲۸ است.

۳۳۶- گزینه ۲ ۲۵ کیلوگرم از محلول اولیه شکر و ۷۵ کیلوگرم آن آب است.

اگر یک سوم از آب را تبخیر کنیم، ۵۰ کیلوگرم آب باقی می‌ماند. اگر x کیلوگرم شکر به آن اضافه کنیم، وزن شکر $25+x$ و وزن محلول $75+x$ می‌شود. پس

$$\frac{25+x}{75+x} = \frac{50}{100} \Rightarrow 50 + 2x = 75 + x \Rightarrow x = 25$$

یعنی باید ۲۵ کیلوگرم شکر به آن اضافه کنیم.

۳۳۷- گزینه ۲ معادله را به صورت $2\sqrt{x-1} = 2 + \sqrt{x-2}$ می‌نویسیم

و دو طرف آن را به توان دو می‌رسانیم:

$$4x - 4 = 4 + x - 2 + 4\sqrt{x-2} \Rightarrow 3x - 6 = 4\sqrt{x-2}$$

دوباره دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$9x^2 + 36 - 36x = 16x - 32 \Rightarrow 9x^2 - 52x + 68 = 0$$

$$(x-2)(9x-34) = 0 \Rightarrow x = 2, x = \frac{34}{9}$$

هر دو جواب به دست آمده در معادله اصلی صدق می‌کنند، پس معادله دو جواب دارد.

۳۳۸- گزینه ۱ طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و ساده می‌کنیم:

$$2x - 1 + x^2 + 2x\sqrt{2x-1} = 3x - 1 \Rightarrow 2x\sqrt{2x-1} = x - x^2$$

چون $x = 0$ جواب معادله اصلی نیست، پس

$$2\sqrt{2x-1} = 1-x \quad (1)$$

دوباره طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$4(2x-1) = 1+x^2 - 2x \Rightarrow x^2 - 10x + 5 = 0 \Rightarrow x = 5 + 2\sqrt{5}, x = 5 - 2\sqrt{5}$$

با توجه به تساوی (۱) باید $1 \leq x \leq \frac{1}{2}$ تا هم عبارت زیر رادیکال منفی نشود و

هم حاصل عبارت رادیکالی منفی نشود. بنابراین $x = 5 + 2\sqrt{5}$ قابل قبول

نیست و $x = 5 - 2\sqrt{5}$ تنها جواب معادله است.

۳۳۹- گزینه ۱ توجه کنید که

$$(a^2 + b^2)^3 = a^6 + b^6 + 3a^2b^2(a^2 + b^2)$$

$$6\sqrt{6} = a^6 + b^6 + 3(1)(\sqrt{6}) \Rightarrow a^6 + b^6 = 3\sqrt{6}$$

در نتیجه

$$(a^6 + b^6)^2 = a^{12} + b^{12} + 2a^6b^6$$

$$9 \times 6 = a^{12} + b^{12} + 2 \Rightarrow a^{12} + b^{12} = 52$$

۳۴۰- گزینه ۳ راه حل اول توجه کنید که

$$15x^{10} + 13x^5 + 2 = 15x^{10} + 3x^5 + 10x^5 + 2$$

$$= 3x^5(\Delta x^5 + 1) + 2(\Delta x^5 + 1) = (\Delta x^5 + 1)(3x^5 + 2)$$

بنابراین $\Delta x^5 + 1$ عامل عبارت مورد نظر است و بقیه نیستند.

راه حل دوم فرض کنید $y = x^5$ ، بنابراین

$$15x^{10} + 13x^5 + 2 = 15y^2 + 13y + 2 = (\Delta y + 1)(3y + 2)$$

در نتیجه عبارت مورد نظر به صورت $(\Delta x^5 + 1)(3x^5 + 2)$ تجزیه می‌شود و

$(\Delta x^5 + 1)$ عاملی از آن است.

۳۴۱- گزینه ۲ فرض کنید $A = (\sqrt{11} + \sqrt{7})\sqrt{9 - \sqrt{77}}$ در این صورت،

$$A^2 = (\sqrt{11} + \sqrt{7})^2(9 - \sqrt{77}) = (11 + 7 + 2\sqrt{77})(9 - \sqrt{77})$$

$$= 2(9 + \sqrt{77})(9 - \sqrt{77}) = 2(81 - 77) = 8$$

پس، چون A مثبت است، $A = 2\sqrt{2}$.

۳۴۲- گزینه ۳ بنابر اتحاد چاق و لاغر،

$$x^{18} - 1 = (x^6)^3 - 1 = (x^6 - 1)(x^{12} + x^6 + 1)$$

از طرف دیگر،

$$x^{12} + x^6 + 1 = (x^{12} + 2x^6 + 1) - x^6 = (x^6 + 1)^2 - (x^3)^2$$

$$= (x^6 + 1 - x^3)(x^6 + 1 + x^3)$$

$$\text{پس } x^{18} - 1 = (x^6 - 1)(x^6 + 1 - x^3)(x^6 + 1 + x^3)$$

۳۴۳- گزینه ۴ چون باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای‌های $1 - P(x)$ و

$Q(x) + x$ بر $x + 1$ به ترتیب برابر ۳ و -۳ است، پس

$$2P(-1) - 1 = 3 \Rightarrow P(-1) = 2, \quad Q(-1) - 1 = -3 \Rightarrow Q(-1) = -2$$

بنابراین باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $Q(3 - 2x) + P(1 - x)$ بر

$x - 2$ برابر است با

$$(2 - 3)P(1 - 2) + Q(3 - 4) = -P(-1) + Q(-1) = -2 - 2 = -4$$

۳۴۴- گزینه ۳ اگر $m = 0$ ، معادله به صورت $-2x = 0$ در می‌آید که

یک جواب دارد. اگر $m \neq 0$ ، باید مقدار دلتای معادله برابر صفر باشد، یعنی

$$\Delta = 4 - 16m^2 = 0 \Rightarrow m^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow m = \pm \frac{1}{2}$$

بنابراین به ازای سه مقدار m ، معادله فقط یک جواب دارد.

۳۴۵- گزینه ۳ فرض کنید α عدد بزرگ‌تر و β عدد کوچک‌تر باشد.

در این صورت $\alpha + \beta = 4$ و $\alpha\beta = -2$. بنابراین α و β جواب‌های معادله

$$x^2 - 4x - 2 = 0 \text{ هستند. در نتیجه } \alpha = 2 + \sqrt{6} \text{ و } \beta = 2 - \sqrt{6}.$$

۳۳۹- گزینه ۲

با توجه به اینکه در $x=1$ و $x=3$ ، $P(x)=0$ ، پس

$$P(1)=0 \Rightarrow m+(m^2-12)-m-2n=0 \Rightarrow m^2-2n-12=0$$

$$P(3)=0 \Rightarrow 9m+3(m^2-12)-m-2n=0 \Rightarrow 3m^2+8m-2n-36=0$$

اگر طرفین معادله (۱) را از معادله (۲) کم کنیم، نتیجه می‌شود

$$2m^2+8m-24=0 \Rightarrow m^2+4m-12=0$$

$$(m+6)(m-2)=0 \Rightarrow m=2, m=-6$$

اگر $m=2$ ، آن‌گاه ضرب x^2 در $P(x)$ مثبت است و جدول تعیین علامت آن نمی‌تواند به‌صورت داده شده باشد. اگر $m=-6$ ، آن‌گاه

$$m^2-2n-12=0 \Rightarrow 36-2n-12=0 \Rightarrow n=12$$

۳۴۰- گزینه ۴

نامعادله داده شده را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{x^2-mx-m}{x^2-x+1}-3 \leq 0 \Rightarrow \frac{x^2-mx-m-3x^2+3x-3}{x^2-x+1} \leq 0$$

$$\frac{2x^2+(m-3)x+m+3}{x^2-x+1} \geq 0$$

برای عبارت x^2-x+1 مقدار Δ منفی است و مقدار عبارت همواره مثبت است. پس برای اینکه مقدار کسر بالا همواره نامنفی باشد، کافی است صورت آن همواره نامنفی باشد. یعنی برای عبارت $2x^2+(m-3)x+m+3$ ضرب

x^2 مثبت باشد (که هست) و Δ نامثبت باشد. پس

$$\Delta=(m-3)^2-8(m+3) \leq 0 \Rightarrow m^2-6m+9-8m-24 \leq 0$$

$$m^2-14m-15 \leq 0 \Rightarrow (m-15)(m+1) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq m \leq 15$$

بنابراین حداکثر مقدار m برابر ۱۵ است.

۳۴۱- گزینه ۳

برای اینکه معادله ریشه مضاعف داشته باشد، باید

دلتای آن صفر باشد:

$$\Delta=(2k-8)^2-4k(k-7)=0 \Rightarrow 4k^2-32k+64-4k^2+28k=0$$

$$k=16$$

بنابراین تعداد جواب‌های معادله $x^2-16x+1=0$ را می‌خواهیم که چون $\Delta=256-4=252>0$ ، این معادله دو جواب دارد.

۳۴۲- گزینه ۲

توجه کنید که $x_1+x_2=6$ و $x_1x_2=4$ ، پس

$x_1, x_2 > 0$ ، از طرف دیگر،

$$A=(x_1\sqrt{x_1}+x_2\sqrt{x_2})^2$$

$$=(x_1\sqrt{x_1})^2+(x_2\sqrt{x_2})^2+2x_1\sqrt{x_1}x_2\sqrt{x_2}$$

$$=x_1^3+x_2^3+2x_1x_2\sqrt{x_1x_2}$$

$$=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)+2x_1x_2\sqrt{x_1x_2}$$

$$A=6^3-3 \times 4 \times 6+2 \times 4 \sqrt{4}=160$$

اکنون توجه کنید که چون جواب‌های معادله عددهایی مثبت‌اند، پس عبارت مورد نظر هم مثبت است. بنابراین

$$x_1\sqrt{x_1}+x_2\sqrt{x_2}=\sqrt{160}=4\sqrt{10}$$

۳۴۳- گزینه ۳

توجه کنید که $x_1+x_2=8$ و $x_1x_2=2$ ، اکنون

مجموع و حاصل ضرب جواب‌های معادله مورد نظر را به‌دست می‌آوریم:

$$S=x_1-\frac{3}{x_2}+x_2-\frac{3}{x_1}=x_1+x_2-\left(\frac{3}{x_1}+\frac{3}{x_2}\right)$$

$$=x_1+x_2-\frac{3(x_1+x_2)}{x_1x_2}=8-\frac{3(8)}{2}=-4$$

$$P=(x_1-\frac{3}{x_2})(x_2-\frac{3}{x_1})=x_1x_2-3-3+\frac{9}{x_1x_2}=2-6+\frac{9}{2}=\frac{1}{2}$$

بنابراین معادله مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$x^2-Sx+P=0 \Rightarrow x^2+4x+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow 2x^2+8x+1=0$$

۳۴۴- گزینه ۳

فرض کنید α جواب دیگر معادله باشد. مجموع

جواب‌ها برابر $-\sqrt{2}m$ و حاصل ضرب آن‌ها برابر m است. پس

$$\begin{cases} \alpha+\sqrt{2}-1=-\sqrt{2}m & (1) \\ \alpha(\sqrt{2}-1)=m & (2) \end{cases}$$

از جای‌گذاری $\alpha(\sqrt{2}-1)$ به جای m در معادله (۱) نتیجه می‌شود

$$\alpha+\sqrt{2}-1=-\sqrt{2}\alpha(\sqrt{2}-1) \Rightarrow \alpha+\sqrt{2}-1=-2\alpha+\sqrt{2}\alpha$$

$$(3-\sqrt{2})\alpha=1-\sqrt{2} \Rightarrow \alpha=\frac{1-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}=\frac{(1-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}{9-2}$$

$$=\frac{3+\sqrt{2}-3\sqrt{2}-2}{7}=\frac{1-2\sqrt{2}}{7}$$

۳۴۵- گزینه ۱

ابتدا دقت کنید که $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$.

اکنون دو طرف معادله را در $(x+1)^2(x^2-x+1)$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}=0$$

$$2(x^2-x+1)-2(x+1)(x^2-x+1)+(x+1)=0 \Rightarrow 2x^3-2x^2+x-1=0$$

واضح است که $x=1$ یک جواب معادله است. پس معادله فوق به‌صورت

$$0=(x-1)(2x^2+1)$$

است. معادله $2x^2+1=0$ جواب ندارد، پس $x=1$ تنها

جواب معادله مورد نظر است.

۳۴۶- گزینه ۳

معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{x+a+3x}{x(x+a)}=\frac{4}{x-1} \Rightarrow 4(x^2+ax)=(4x+a)(x-1)$$

$$4x^2+4ax=4x^2-4x+ax-a \Rightarrow (3a+4)x=-a \Rightarrow x=-\frac{a}{3a+4}$$

واضح است که اگر $a=-\frac{4}{3}$ ، آن‌گاه معادله جواب ندارد. همچنین اگر $a=0$ ،

آن‌گاه $x=0$ که قابل قبول نیست. از طرف دیگر اگر $-\frac{a}{3a+4}$ برابر ۱ یا $-a$

(ریشه‌های مخرج کسر) شود، جواب به‌دست آمده قبول نیست:

$$-\frac{a}{3a+4}=1 \Rightarrow a=-1, \quad -\frac{a}{3a+4}=-a \Rightarrow a=-1, \quad a=0$$

بنابراین به ازای سه مقدار $-\frac{4}{3}$ ، صفر و -1 برای a معادله مورد نظر جواب ندارد.

۳۵۲- گزینه ۱ معادله مورد نظر را می توان این طور نوشت

$$x^2 - 3 = \pm(x - 1)$$

بنابراین

$$x^2 - 3 = x - 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 - 3 = -(x - 1) \Rightarrow x^2 + x - 4 = 0 \quad (2)$$

هر دو معادله دو جواب دارند و دو معادله جواب یکسان ندارند. مجموع

جواب های معادله (۱) برابر ۱ و مجموع جواب های معادله (۲) برابر ۱- است.

بنابراین مجموع جواب های معادله اصلی برابر صفر است.

۳۵۳- گزینه ۳ راه حل اول ابتدا توجه کنید که

$$|4x - \sqrt{x^2 - 8x + 16}| = |4x - \sqrt{(x-4)^2}| = |4x - |x-4||$$

از طرف دیگر،

$$|2x - 5| < 3 \Rightarrow -3 < 2x - 5 < 3 \Rightarrow 2 < 2x < 8 \Rightarrow 1 < x < 4 \quad (1)$$

بنابراین $x - 4 < 0$ ، در نتیجه $|x - 4| = -(x - 4)$. بنابراین عبارت مورد نظر

برابر است با $|4x + x - 4| = |5x - 4|$. از طرف دیگر، بنابر نابرابری های (۱)،

$$x > 1 \Rightarrow 5x > 5 \Rightarrow 5x - 4 > 1$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $5x - 4$.

راه حل دوم توجه کنید که $x = 2$ در نامعادله $|2x - 5| < 3$ صدق می کند.

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر را به ازای $x = 2$ به دست می آوریم:

$$A = |4x - \sqrt{x^2 - 8x + 16}| \xrightarrow{x=2} A = |8 - \sqrt{4 - 16 + 16}| = 6$$

فقط مقدار گزینه (۳) به ازای $x = 2$ برابر ۶ است.

۳۵۴- گزینه ۴ نامعادله مورد نظر را می توان این طور نوشت

$$|x^2 - 3x| < 2x \Rightarrow |x(x-3)| < 2x \Rightarrow |x||x-3| < 2x$$

معلوم است که $x = 0$ جواب این نامعادله نیست و x نمی تواند منفی باشد.

بنابراین $x > 0$ و

$$x|x-3| < 2x \Rightarrow x(|x-3|-2) < 0 \Rightarrow |x-3|-2 < 0 \Rightarrow |x-3| < 2$$

$$-2 < x-3 < 2 \Rightarrow 1 < x < 5$$

بنابراین مجموعه جواب های نامعادله مورد نظر بازه $(1, 5)$ است، یعنی $a = 1$.

$$b = 5 \text{ و } b - a = 4$$

۳۵۵- گزینه ۲ راه حل اول از $-3 \leq x \leq 6$ ، نتیجه می شود

$$-4 \leq x - 1 \leq 5$$

پس $|x-1| \leq 5$. بنابراین

$$-8 \leq |x-1| - 8 \leq -3 \Rightarrow 3 \leq ||x-1| - 8| \leq 8 \Rightarrow 3 \leq f(x) \leq 8$$

پس حداقل مقدار تابع برابر ۳ و حداکثر مقدار آن ۸ است و مجموع آن ها ۱۱ است.

۳۴۷- گزینه ۲ دو طرف معادله داده شده را به توان دو می رسانیم:

$$x^4 + 2x - 5 = (1+x)^2 \Rightarrow x^4 - x^2 - 6 = 0 \Rightarrow (x^2 - 3)(x^2 + 2) = 0$$

چون $x^2 + 2 \neq 0$ ، پس

$$x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$x = \sqrt{3}$ در معادله صدق می کند، اما $x = -\sqrt{3}$ در معادله صدق نمی کند،

زیرا به ازای $x = -\sqrt{3}$ سمت راست معادله منفی است و سمت چپ آن مثبت است. پس معادله فقط یک جواب دارد.

۳۴۸- گزینه ۲ ابتدا معادله را به صورت $\sqrt[3]{x^4} - 4\sqrt[3]{x^2} + 3 = 0$

می نویسیم. اکنون فرض می کنیم $t = \sqrt[3]{x^2}$ و معادله به صورت

$$t^3 - 4t + 3 = 0 \text{ در می آید. جواب های این معادله } t = 1 \text{ و } t = 3 \text{ هستند. پس}$$

$$\sqrt[3]{x^2} = 1 \Rightarrow x = \pm 1, \quad \sqrt[3]{x^2} = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt[3]{27}$$

پس حاصل ضرب جواب های معادله برابر ۲۷ است.

۳۴۹- گزینه ۲ باید دو نامعادله $3x^2 - 18 \leq x^2$ و $x^2 \leq 2x^2 - 4$ را

حل کنیم و مجموعه جواب های آن ها را با هم اشتراک بگیریم

$$3x^2 - 18 \leq x^2 \Rightarrow 2x^2 - 18 \leq 0 \Rightarrow x^2 - 9 \leq 0 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$$

$$x^2 \leq 2x^2 - 4 \Rightarrow x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \text{ یا } x \leq -2$$

بنابراین مجموعه جواب های نامعادله های داده شده به صورت $[-3, -2] \cup [2, 3]$

است که شامل چهار عدد صحیح است.

۳۵۰- گزینه ۲ نامعادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$\frac{x+6}{x-4} - x \geq 0 \Rightarrow \frac{x+6-x^2+4x}{x-4} \geq 0$$

$$\frac{x^2-5x-6}{x-4} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x+1)(x-6)}{x-4} \leq 0$$

اکنون به کمک تعیین علامت، مجموعه جواب های نامعادله را معین می کنیم.

x	$-\infty$	-1	4	6	$+\infty$
$\frac{(x+1)(x-6)}{x-4}$		-	+	-	+

پس مجموعه جواب های نامعادله به صورت $(-\infty, -1] \cup (4, 6]$ است. بنابراین

$$a = -1 \text{ و } b = 6 \text{ و در نتیجه } a + b = 5$$

۳۵۱- گزینه ۲ توجه کنید که $2x^2 + 5x - 3 = (2x-1)(x+3)$

بنابراین معادله مورد نظر می شود

$$|(2x-1)(x+3)| = 2|x+3| \Rightarrow |2x-1||x+3| = 2|x+3|$$

$$|x+3|(|2x-1|-2) = 0$$

به این ترتیب

$$|x+3| = 0 \Rightarrow x = -3$$

$$|2x-1|-2 = 0 \Rightarrow 2x-1 = \pm 2 \Rightarrow -\frac{1}{2}, x = \frac{3}{2}$$

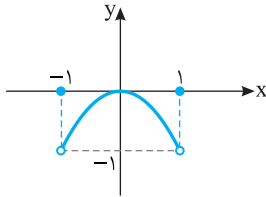
در نتیجه، مجموع جواب ها برابر با -2 است.

۳۵۹- گزینه ۱ راه‌حل اول اگر k عددی صحیح باشد، آن‌گاه
 $[x+k]=[x]+k$ بنابراین

$$[x] \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = x^2([x] + [-x])$$

از طرف دیگر، $[-x] = \begin{cases} -[x] & x \in \mathbb{Z} \\ -[x]-1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ پس می‌توان نوشت

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -x^2 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \quad f(x) \text{ و نمودار تابع } f \text{ به صورت زیر است:}$$



راه‌حل دوم می‌دانیم $[x] \leq x$ ، بنابراین تابع $f(x) = x^2([x] - x)$ همواره نامثبت است. بنابراین گزینه‌های (۳) و (۴) رد می‌شوند. از طرف دیگر $f(0) = 0$ ، پس گزینه (۲) هم رد می‌شود.

۳۶۰- گزینه ۱ به جای x در ضابطه f قرار می‌دهیم $x-1$:

$$f(x-1) = 4(x-1) - [x-1] - [3(x-1)] = 4x - 4 - [x] + 1 - [3x] + 3 \\ = 4x - [x] - [3x] = f(x)$$

۳۶۱- گزینه ۲ راه‌حل اول اگر $x \geq -1$ ، معادله مورد نظر می‌شود

$$||x+1|-2x| = |x+1-2x| = |1-x| = 4$$

بنابراین

$$1-x=4 \Rightarrow x=-3 \quad (\text{غ.ق.ق.}), \quad 1-x=-4 \Rightarrow x=5$$

اگر $x < -1$ ، معادله مورد نظر می‌شود

$$|x+1|-2x = -(x+1)-2x = -3x-1 = 4$$

که چون در این حالت $3x+1 < 0$ ، پس معادله مورد نظر به صورت $-(3x+1)=4$

است، یعنی $x = -\frac{5}{3}$. بنابراین معادله مورد نظر دو جواب دارد.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$|x+1|-2x = 4 \Rightarrow |x+1|-2x = 4 \Rightarrow |x+1| = 4+2x \quad (1)$$

$$x+1=4+2x \Rightarrow x=-3 \quad \checkmark, \quad x+1=-4-2x \Rightarrow x=-\frac{5}{3} \quad \checkmark$$

($x=-3$) غیرقابل قبول است، چون در تساوی (۱) صدق نمی‌کند.)

$$|x+1|-2x = -4 \Rightarrow |x+1| = -4+2x \quad (2)$$

$$x+1=-4+2x \Rightarrow x=5 \quad \checkmark, \quad x+1=4-2x \Rightarrow x=1 \quad \checkmark$$

($x=1$) غیرقابل قبول است، چون در تساوی (۲) صدق نمی‌کند.)

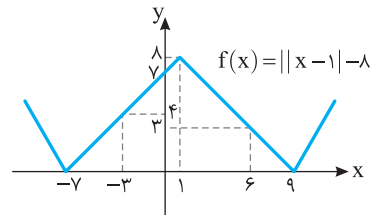
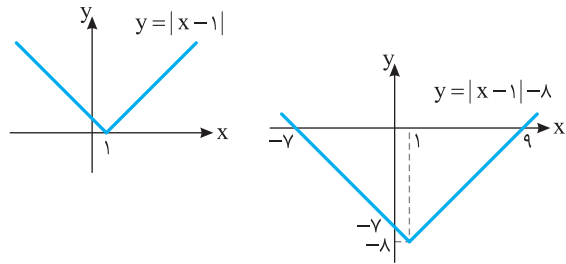
۳۶۲- گزینه ۲ معادله را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$|x|-k=-4 \Rightarrow |x|=k-4 \quad (1)$$

$$|x|-k=4 \Rightarrow |x|=k+4 \quad (2)$$

برای اینکه معادله اصلی جواب نداشته باشد، باید هر کدام از معادله‌های (۱) و (۲) جواب نداشته باشند. بنابراین بایستی $k-4 < 0$ و $k+4 < 0$ ، پس $k < -4$.

راه‌حل دوم نمودار تابع را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل تابع، واضح است که وقتی $-3 \leq x \leq 6$ ، $3 \leq f(x) \leq 8$.

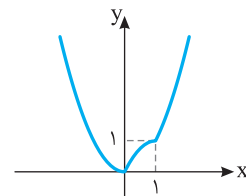


۳۵۶- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + x & x \leq 0 \\ -(x^2 - x) + x & 0 < x \leq 1 \\ x^2 - x + x & x > 1 \end{cases} = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ -x^2 + 2x & 0 < x \leq 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ -(x-1)^2 + 1 & 0 < x \leq 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به شکل زیر است.



۳۵۷- گزینه ۳ توجه کنید که $f(120) = \left[\frac{120}{11}\right] - \left[-\frac{120}{17}\right]$

از طرف دیگر،

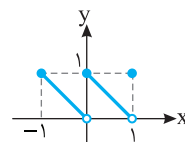
$$10 < \frac{120}{11} < 11 \Rightarrow \left[\frac{120}{11}\right] = 10, \quad -8 < -\frac{120}{17} < -7 \Rightarrow \left[-\frac{120}{17}\right] = -8$$

$$\text{بنابراین } f(120) = 10 - (-8) = 18$$

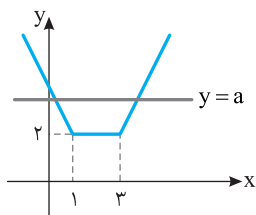
۳۵۸- گزینه ۲ توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} -1-(x-1) & -1 \leq x < 0 \\ 0-(x-1) & 0 \leq x < 1 \\ 1+0 & x=1 \end{cases} = \begin{cases} -x & -1 \leq x < 0 \\ -x+1 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x=1 \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است:



۳۶۶- گزینه ۴ با توجه به نمودار تابع $y = |x-1| + |x-3|$ باید $a \geq 2$.

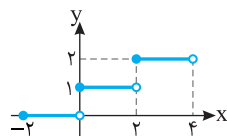


۳۶۷- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که اگر k عددی صحیح باشد، آن گاه

$$[x+k] = [x] + k \quad \text{بنابراین} \quad f(x) = \left[\frac{x}{4}\right] + 1 \quad \text{اکنون توجه کنید که}$$

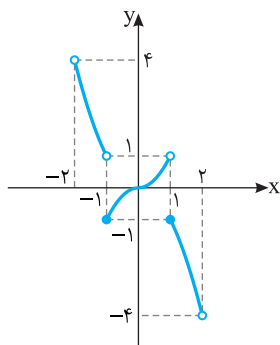
$$f(x) = \begin{cases} -1+1 & -2 \leq x < 0 \\ 0+1 & 0 \leq x < 2 \\ 1+1 & 2 \leq x < 4 \end{cases} = \begin{cases} 0 & -2 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 2 \\ 2 & 2 \leq x < 4 \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است:



۳۶۸- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که اگر $[x]$ عددی زوج باشد، آن گاه

$(-1)^{[x]} = 1$ و در نتیجه $f(x) = x^2$. اگر $[x]$ عددی فرد باشد، آن گاه $(-1)^{[x]} = -1$ و در نتیجه $f(x) = -x^2$. یعنی تابع در بازه های $(-2, -1)$ ، $[0, 1)$ ، $(2, 3)$ و در بازه های $[-1, 0)$ ، $[1, 2)$ ، $[3, 4)$ به صورت $f(x) = -x^2$ است. نمودار تابع به شکل زیر است:



۳۶۹- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $D_f = \{x \mid 1 - |x+3| \geq 0\}$.

طرف دیگر،

$$1 - |x+3| \geq 0 \Rightarrow |x+3| \leq 1$$

چون $|x+3|$ نامنفی است، پس جزء صحیح آن نیز نامنفی است و چون در اینجا جزء صحیح $|x+3|$ از ۱ بیشتر نیست، پس یا صفر است یا ۱. اکنون توجه کنید که

$$[|x+3|] = 0 \Rightarrow 0 \leq |x+3| < 1 \Rightarrow |x+3| < 1 \Rightarrow -1 < x+3 < 1 \Rightarrow -4 < x < -2$$

$$[|x+3|] = 1 \Rightarrow 1 \leq |x+3| < 2$$

$$|x+3| \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} x+3 \geq 1 \\ x+3 \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq -4 \end{cases} \quad (1)$$

$$|x+3| < 2 \Rightarrow -2 < x+3 < 2 \Rightarrow -5 < x < -1 \quad (2)$$

۳۶۳- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$|3 - |x-2|| \leq 4 \Rightarrow -4 \leq 3 - |x-2| \leq 4 \Rightarrow -7 \leq -|x-2| \leq 1$$

نابرابری سمت راست همواره درست است. بنابراین باید

$$-7 \leq -|x-2| \Rightarrow |x-2| \leq 7 \Rightarrow -7 \leq x-2 \leq 7 \Rightarrow -5 \leq x \leq 9$$

بنابراین عددهای صحیح $-5, -4, \dots, 8, 9$ در نامعادله مورد نظر صدق می کنند. تعداد این عددها ۱۵ تا است.

۳۶۴- گزینه ۱ چون در اینجا $|2x-1|$ مثبت است، پس

$$\frac{|x+2|}{2x-1} > 1 \Rightarrow |x+2| > |2x-1| \xrightarrow[\text{می رسانیم}]{\text{به توان دو}} x^2 + 4x + 4 > 4x^2 - 4x + 1$$

$$3x^2 - 8x - 3 < 0 \Rightarrow (3x+1)(x-3) < 0 \Rightarrow -\frac{1}{3} < x < 3$$

البته چون مخرج عبارت سمت چپ نامعادله مورد نظر به ازای $x = \frac{1}{3}$ صفر

می شود، پس $\frac{1}{3}$ در مجموعه جواب های نامعادله مورد نظر نیست. بنابراین

$$\text{مجموعه جواب های نامعادله می شود } \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, 3\right).$$

راحل دوم می توانیم نامعادله مورد نظر را به صورت $|x+2| > |2x-1|$ بنویسیم

که برای به دست آوردن مجموعه جواب های آن به صورت زیر عمل می کنیم:

$$|x+2| > |2x-1| \Rightarrow (x+2)^2 > (2x-1)^2 \Rightarrow (x+2)^2 - (2x-1)^2 > 0$$

$$(x+2+2x-1)(x+2-2x+1) > 0 \Rightarrow (3x+1)(-x+3) > 0$$

$$x \in \left(-\frac{1}{3}, 3\right)$$

چون $x = \frac{1}{3}$ مخرج را صفر می کند، مجموعه جواب های نامعادله مورد نظر

$$\text{به صورت } \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, 3\right) \text{ یا } \left(-\frac{1}{3}, 3\right) - \left\{\frac{1}{3}\right\} \text{ است.}$$

۳۶۵- گزینه ۲ راحل اول نامعادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$x^2 + 2x + 1 < 2 + |x+1|$$

$$(x+1)^2 < 2 + |x+1| \Rightarrow |x+1|^2 < 2 + |x+1|$$

اگر فرض کنیم $t = |x+1|$ ، آن گاه

$$t^2 - t - 2 < 0 \Rightarrow (t+1)(t-2) < 0$$

چون $t \geq 0$ ، بنابراین $t+1 > 0$ و در نتیجه $t < 2$ ، پس باید نامعادله $t < 2$ را حل کنیم که جواب آن به صورت $t < 2$ است، پس $|x+1| < 2$ و در نتیجه

$$-2 < x+1 < 2 \Rightarrow -3 < x < 1$$

پس اعداد صحیح صفر، -1 و -2 در مجموعه جواب های نامعادله قرار دارند.

راحل دوم دو حالت در نظر می گیریم:

حالت اول اگر $x \leq -1$ ، آن گاه

$$x^2 + 2x < 1 - x - 1 \Rightarrow x^2 + 3x < 0 \Rightarrow -3 < x < 0 \xrightarrow{x \leq -1} -3 < x \leq -1$$

حالت دوم اگر $x > -1$ ، آن گاه

$$x^2 + 2x < 1 + x + 1 \Rightarrow x^2 + x - 2 < 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) < 0 \Rightarrow -2 < x < 1$$

$$\xrightarrow{x > -1} -1 < x < 1$$

بنابراین $-3 < x < 1$ ، در نتیجه عددهای صحیحی که در نامعادله مورد نظر

صدق می کنند عبارت اند از $x = -2$ و $x = -1$ ، $x = 0$.

اگر تساوی اول را از تساوی دوم کم کنیم، به دست می‌آید:

$$a^2 - a - 6 = 0 \Rightarrow a = 3, \quad a = -2$$

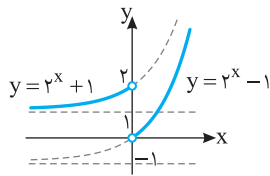
چون a باید مثبت باشد، پس $a = 3$. در نتیجه $b = 1 - a = -2$. به این ترتیب

$$f(x) = 3^x - 2. \quad f^{-1}\left(-\frac{5}{3}\right) = m \quad \text{اگر اکنون توجه کنید که}$$

$$f(m) = -\frac{5}{3} \Rightarrow 3^m - 2 = -\frac{5}{3} \Rightarrow 3^m = -\frac{5}{3} + 2 = \frac{1}{3} \Rightarrow m = -1$$

$$f(x) = \begin{cases} 2^x + 1 & x < 0 \\ 2^x - 1 & x > 0 \end{cases} \quad \text{گزینه ۲} \quad \text{ابتدا توجه کنید که}$$

بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است.



پس برد تابع به صورت $(-\infty, +\infty)$ است.

گزینه ۳ نمودار تابع از نقطه $(5, 0)$ می‌گذرد، پس

$$f(5) = 0 \Rightarrow \log_a(5b - 3) = 0 \Rightarrow 5b - 3 = 1 \Rightarrow b = \frac{4}{5}$$

$$\text{به این ترتیب } f(x) = \log_a\left(\frac{4}{5}x - 3\right). \quad \text{نمودار تابع از نقطه } (15, 2)$$

می‌گذرد، پس

$$f(15) = 2 \Rightarrow \log_a\left(\frac{4}{5} \times 15 - 3\right) = 2 \Rightarrow \log_a 9 = 2 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

$$\text{بنابراین } ab = \frac{12}{5}$$

گزینه ۱ با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \log \sqrt[4]{72} &= \log 72^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \log 72 = \frac{1}{4} \log(2^3 \times 3^2) \\ &= \frac{1}{4} (\log 2^3 + \log 3^2) = \frac{1}{4} (3 \log 2 + 2 \log 3) = \frac{1}{4} (3b + 2a) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\log_a b} = \log_b a \quad \text{چون} \quad \text{گزینه ۱}$$

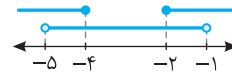
$$\begin{aligned} \frac{1}{\log_2 30} + \frac{1}{\log_3 30} + \frac{1}{\log_5 30} &= \log_{30} 2 + \log_{30} 3 + \log_{30} 5 \\ &= \log_{30} (2 \times 3 \times 5) = \log_{30} 30 = 1 \end{aligned}$$

$$\log \frac{x-1}{x} = \log(\log 2) \quad \text{معادله را به صورت} \quad \text{گزینه ۱}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x} &= \log 2 \Rightarrow x-1 = x \log 2 \Rightarrow x = \frac{1}{1 - \log 2} = \frac{1}{\log 10 - \log 2} \\ &= \frac{1}{\log \frac{10}{2}} = \frac{1}{\log 5} = \frac{\log 10}{\log 5} = \frac{\log 2 + \log 5}{\log 5} = \frac{\log 2}{\log 5} + 1 = \log_5 2 + 1 \end{aligned}$$

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله $|x+3| < 2$ اشتراک جواب‌های (۱) و (۲) است، که می‌شود $(-2, -1) \cup (-5, -4)$.



به این ترتیب، دامنه تابع f برابر است با

$$(-4, -2) \cup (-5, -4) \cup (-2, -1) = (-5, -1)$$

پس $a = -5$ ، $b = -1$ و $b - a = 4$.

گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\left\lfloor \frac{3x-a}{2} \right\rfloor = 3 \Rightarrow 3 \leq \frac{3x-a}{2} < 4 \Rightarrow 6 \leq 3x-a < 8$$

$$6+a \leq 3x < 8+a \Rightarrow \frac{6+a}{3} \leq x < \frac{8+a}{3}$$

بنابراین، مجموعه جواب‌های معادله مورد نظر بازه $\left[\frac{6+a}{3}, \frac{8+a}{3}\right)$ است. در

نتیجه، $\frac{8+a}{3} = 0$ ، یعنی $a = -8$. توجه کنید که اگر $a = -8$ ، آن‌گاه

$$\frac{6+a}{3} = \frac{-2}{3}$$

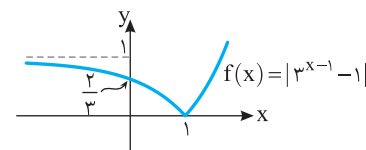
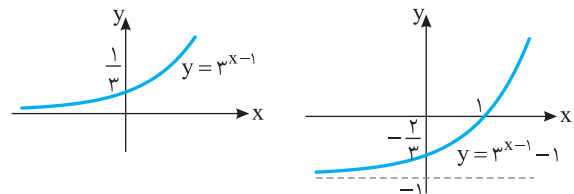
گزینه ۱ ابتدا نمودار تابع $y = 3^x$ را یک واحد به سمت راست

انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y = 3^{x-1}$ به دست بیاید. سپس این نمودار را یک

واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y = 3^{x-1} - 1$ به دست بیاید. سپس

قرینه قسمتی از این نمودار را که پایین محور x است، نسبت به محور x رسم و

قسمتی را که زیر محور x است، حذف می‌کنیم تا نمودار تابع f به دست بیاید.



گزینه ۴ فرض می‌کنیم $2^x = t$. در این صورت معادله مورد نظر

می‌شود

$$\begin{aligned} 4^x - 3 \times 2^{x+2} + 27 &= (2^x)^2 - 12 \times 2^x + 27 \\ &= t^2 - 12t + 27 = (t-3)(t-9) = 0 \end{aligned}$$

بنابراین

$$t = 3 \Rightarrow 2^x = 3 \quad (1), \quad t = 9 \Rightarrow 2^{x+2} = 9 \quad (2)$$

اگر تساوی‌های (۱) و (۲) را در هم ضرب کنیم، به دست می‌آید $2^{x_1+x_2} = 27$.

بنابراین $2^5 < 2^{x_1+x_2} < 2^6$. در نتیجه $4 < x_1 + x_2 < 5$.

گزینه ۳ با توجه به فرض‌های مسئله،

$$f(1) = 1 \Rightarrow a + b = 1, \quad f(2) = 7 \Rightarrow a^2 + b = 7$$

۳۸۴- گزینه ۲ اگر فرض کنیم $(\frac{2}{3})^x = t$ ، نامعادله مورد نظر می شود

$$t^2 + \frac{2}{3}t - \frac{1}{9} > 0 \Rightarrow (t + \frac{1}{3})(t - \frac{1}{3}) > 0$$

چون $t + \frac{1}{3} = (\frac{2}{3})^x + \frac{1}{3} > 0$ پس

$$t - \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow (\frac{2}{3})^x > (\frac{1}{3})^1 \xrightarrow{\frac{2}{3} < 1} x < 1$$

بنابراین مجموعه جواب های نامعادله مورد نظر بازه $(-\infty, 1)$ است، در نتیجه $a=1$.

۳۸۵- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که $f(-1)=0$ و $f(0)=1$ پس

$$f(0) = \log_p b = 1 \Rightarrow b = 3$$

$$f(-1) = \log_p (-a+b) = 0 \Rightarrow \log_p (-a+3) = 0$$

$$-a+3=1 \Rightarrow a=2$$

بنابراین $f(x) = \log_p (2x+3)$ و دامنه تابع $(-\frac{3}{2}, +\infty)$ است. پس

حداقل مقدار c برابر $-\frac{3}{2}$ است.

۳۸۶- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\begin{aligned} \log_{\frac{2}{5}} \frac{2}{5} &= \frac{\log \frac{2}{5}}{\log \frac{2}{5}} = \frac{\log 2 - \log 5}{\log 2 - \log 5} = \frac{\log 2 - \log 5}{2 \log 2 - \log 5} = \frac{\log \frac{1}{5} - \log 5}{2 \log \frac{1}{5} - \log 5} \\ &= \frac{\log 10 - \log 5 - \log 5}{2(\log 10 - \log 5) - \log 5} = \frac{1-2a}{2-3a} \end{aligned}$$

۳۸۷- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\begin{aligned} 2^x = 10 \Rightarrow x = \log_2 10 = \frac{\log 10}{\log 2}, \quad 5^y = 10 \Rightarrow y = \log_5 10 = \frac{\log 10}{\log 5} \\ \therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{\log 2 + \log 5}{\log 10} = \frac{\log(2 \times 5)}{\log 10} = \frac{\log 10}{\log 10} = 1 \end{aligned}$$

۳۸۸- گزینه ۲ توجه کنید که $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$. معادله را به صورت

زیر بازنویسی می کنیم:

$$5^{\log_2 x} + 4 \times 5^{\log_2 x} = 125 \Rightarrow 5 \times 5^{\log_2 x} = 125 \Rightarrow 5^{\log_2 x} = 25 = 5^2$$

بنابراین

$$\log_2 x = 2 \Rightarrow x = 4$$

پس $k=4$ و در نتیجه $\log_p (k+4) = \log_p 8 = 3$.

۳۸۹- گزینه ۲ توجه کنید که تابع لگاریتم در مبنای $\frac{1}{p}$ اکیدا نزولی و

تابع لگاریتم در مبنای ۳ اکیدا صعودی است. بنابراین

$$\log_{\frac{1}{2}} (\log_3 (x+1)) < -1 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$$

$$\log_3 (x+1) > 2 = \log_3 9 \Rightarrow x+1 > 9 \Rightarrow x > 8$$

بنابراین عددهای طبیعی ۱، ۲، ... و ۸ در نامعادله مورد نظر صدق نمی کنند.

۳۹۰- گزینه ۳ برای اینکه لگاریتم ها بامعنی باشند باید $x > 0$ و $x \neq 1$.

اکنون توجه کنید که

$$D_f = \{x | x > 0, x \neq 1, \log_3 x + 2 \log_x 3 - 3 \geq 0\}$$

اگر فرض کنیم $\log_3 x = t$ ، آن گاه $\log_x 3 = \frac{1}{t}$

۳۷۹- گزینه ۱ راه حل اول از دو طرف معادله مورد نظر در مبنای ۱۰

لگاریتم می گیریم:

$$(x+1) \log 2 = (x-1) \log 5 \Rightarrow x(\log 5 - \log 2) = \log 2 + \log 5$$

$$x \log \frac{5}{2} = \log 10 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\log \frac{5}{2}} = \frac{1}{\log 5 - \log 2} = \frac{1}{1 - 2 \log 2}$$

راه حل دوم توجه کنید که

$$2^{x+1} = 5^{x-1} \Rightarrow 2^x \times 2 = 5^x \times 5^{-1} \Rightarrow (\frac{5}{2})^x = 10$$

از دو طرف این معادله در مبنای ۱۰ لگاریتم می گیریم:

$$\begin{aligned} x \log \frac{5}{2} = \log 10 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\log \frac{5}{2}} = \frac{1}{\log 5 - \log 2} \\ = \frac{1}{\log 10 - \log 2} = \frac{1}{1 - 2 \log 2} \end{aligned}$$

۳۸۰- گزینه ۱ باید هر دو عبارت $\log(x+3)$ و $\log(2-x)$ بامعنی

باشند و نیز $\log(2-x) \neq 0$:

$$D_f = \{x | x+3 > 0, 2-x > 0, \log(2-x) \neq 0\}$$

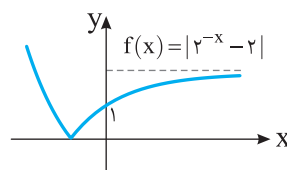
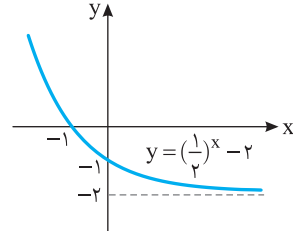
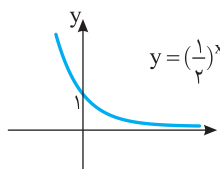
از $x+3 > 0$ نتیجه می شود $x > -3$ و از $2-x > 0$ نتیجه می شود $x < 2$. از

طرف دیگر اگر $\log(2-x) = 0$ ، آن گاه $2-x=1$ ، در نتیجه $x=1$. بنابراین

دامنه تابع f به صورت $\{1\} - (-3, 2)$ است.

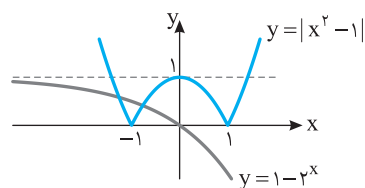
۳۸۱- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $f(x) = |(\frac{1}{2})^x - 2|$. نمودار تابع

به ترتیب زیر رسم می شود:



۳۸۲- گزینه ۴ نمودار تابع های $y = |x^2 - 1|$ و $y = 1 - 2^x$ را رسم

می کنیم. از روی شکل معلوم است دو نقطه تقاطع با طول های منفی وجود دارد.



۳۸۳- گزینه ۱ معادله را به صورت زیر ساده می کنیم:

$$2^{x+2} - 2^{x+1} = 5^{x+2} - 4 \times 5^{x+1} \Rightarrow 2^{x+1}(2-1) = 5^{x+1}(5-4)$$

$$2^{x+1} = 5^{x+1} \Rightarrow (\frac{2}{5})^{x+1} = 1$$

بنابراین $x+1=0$ و در نتیجه $x=-1$. پس معادله فقط یک جواب دارد.

در نتیجه

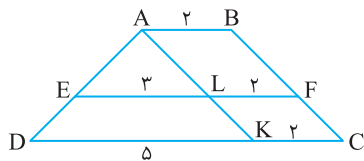
اکنون توجه کنید که

$$AF - FC = \frac{3}{2}, AF = 3FC \Rightarrow AF = \frac{9}{4}, FC = \frac{3}{4}$$

$$\text{بنابراین } AC = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = 3$$

۳۹۵- گزینه ۲ از A خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا پاره‌خط‌های EF و CD را به ترتیب در نقطه‌های L و K قطع کند (شکل زیر را ببینید). چون $KC = LF = AB = 2$ پس $ABFL$ و $LFCK$ متوازی‌الاضلاع هستند. اکنون توجه کنید که چون $EL \parallel DK$ در مثلث ADK از تعمیم قضیه تالس نتیجه می‌شود $\frac{AE}{AD} = \frac{EL}{DK} = \frac{3}{5}$. اگر این تناسب را تفضیل در مخرج کنیم، به دست می‌آید

$$\frac{AE}{AD} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{AE}{AD - AE} = \frac{3}{5-3} \Rightarrow \frac{AE}{ED} = \frac{3}{2}$$



۳۹۶- گزینه ۲ بنابر قضیه تالس در دوزنقه

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{12}{x} \Rightarrow x = 16$$

۳۹۷- گزینه ۲ توجه کنید که $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD} = \frac{5}{6}$. بنابراین مثلث‌های ABC و AED که در زاویه A مشترک‌اند، متشابه‌اند (ض.ض). در نتیجه

$$\frac{BC}{DE} = \frac{5}{6}$$

۳۹۸- گزینه ۲ چون $\frac{AB}{AD} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ و $\frac{AC}{AB} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ پس مثلث‌های

ACB و ABD که در زاویه A مشترک‌اند، متشابه‌اند (ض.ض). بنابراین نسبت تشابه دو مثلث نیز برابر $\frac{2}{3}$ است. در نتیجه $\frac{BD}{BC} = \frac{3}{2}$ ، یعنی $BD = \frac{3}{2}BC$ بنابراین

$$(BCD) \text{ محیط} = BC + CD + DB = BC + 5 + \frac{3}{2}BC = 20 \Rightarrow \frac{5}{2}BC = 15 \Rightarrow BC = 6$$

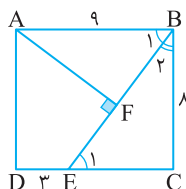
در نتیجه

۳۹۹- گزینه ۴ با توجه به شکل، زاویه‌های B_1 و E_1 هر دو متمم زاویه B هستند، پس برابرند. در نتیجه مثلث‌های قائم‌الزاویه ABF و BEC متشابه‌اند (ز.ز). بنابراین

$$\frac{AB}{BE} = \frac{BF}{EC} \quad (1)$$

از طرف دیگر $EC = 9 - 3 = 6$. در نتیجه بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه BCE، $BE^2 = BC^2 + EC^2 = 100$. پس $BE = 10$. در نتیجه، از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$\frac{9}{10} = \frac{10 - EF}{6} \Rightarrow 54 = 100 - 10EF \Rightarrow EF = 4/6$$



$$\log_3 x + 2 \log_x 3 - 3 \geq 0$$

$$t + \frac{2}{t} - 3 \geq 0 \Rightarrow \frac{t^2 - 3t + 2}{t} \geq 0 \Rightarrow \frac{(t-1)(t-2)}{t} \geq 0$$

t	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$\frac{(t-1)(t-2)}{t}$		-	+	-	+

بنابراین باید $0 < t \leq 1$ یا $t \geq 2$. اکنون توجه کنید که

$$0 < t \leq 1 \Rightarrow 0 < \log_3 x \leq 1 \Rightarrow 1 < x \leq 3, \quad t \geq 2 \Rightarrow \log_3 x \geq 2 \Rightarrow x \geq 9$$

بنابراین $D_f = (1, 3] \cup [9, +\infty)$. پس $a = 1$ ، $b = 3$ و $a + b = 4$.

۳۹۱- گزینه ۲ فرض کنید $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{4x - ky}{7} = t$. در این صورت

$$x = 3t \text{ و } y = 5t \text{ در نتیجه}$$

$$\frac{4x - ky}{7} = t \Rightarrow \frac{12t - 5kt}{7} = t$$

$$12t - 5kt = 7t \Rightarrow 5kt = 5t \Rightarrow k = 1$$

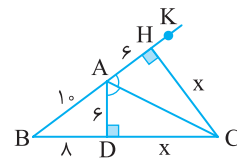
۳۹۲- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه ABD،

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 \Rightarrow 100 = AD^2 + 64 \Rightarrow AD = 6$$

اکنون اگر عمود CH را بر AK رسم کنیم، چون C روی نیمساز زاویه KAD است، پس $HC = CD = x$ و چون مثلث‌های ADC و AHC همنهشت‌اند، پس $AH = AD = 6$. اکنون از قضیه فیثاغورس در مثلث HBC نتیجه می‌شود

$$BC^2 = HB^2 + HC^2 \Rightarrow (x+6)^2 = 16^2 + x^2$$

$$x^2 + 16x + x^2 = 16^2 + x^2 \Rightarrow x = 12$$



۳۹۳- گزینه ۱ از فرض سؤال نتیجه می‌شود $\frac{EF}{BC} = \frac{3}{4}$. چون

بنابر تعمیم قضیه تالس $EF \parallel BC$

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{5}{x+5} = \frac{4}{y+4} = \frac{3}{4}$$

بنابراین

$$\frac{5}{x+5} = \frac{3}{4} \Rightarrow 20 = 3x + 15 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

$$\frac{4}{y+4} = \frac{3}{4} \Rightarrow 16 = 3y + 12 \Rightarrow y = \frac{4}{3}$$

بنابراین $x + y = 3$.

۳۹۴- گزینه ۴ چون $EF \parallel BC$ ، از تعمیم قضیه تالس در مثلث ABC نتیجه می‌شود $\frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} = \frac{3}{4}$. اگر این تناسب را تفضیل در مخرج کنیم، به دست می‌آید:

$$\frac{AF}{AC - AF} = \frac{3}{4 - 3} \Rightarrow \frac{AF}{FC} = 3 \Rightarrow AF = 3FC$$

۴۰۴- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که چون $AB \parallel CD$ ، بنابر قضیه

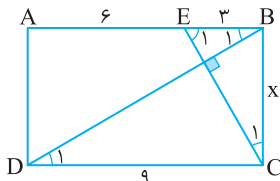
خطوط موازی و مورب، $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$ (شکل را ببینید). از طرف دیگر،

$$\begin{cases} \hat{B}_1 + \hat{E}_1 = 90^\circ \\ \hat{C}_1 + \hat{E}_1 = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1$$

در نتیجه $\hat{C}_1 = \hat{D}_1$. بنابراین مثلث‌های قائم‌الزاویه BEC و CBD که

یک زاویه حاده برابر دارند، متشابه‌اند (ز.ز). در نتیجه

$$\frac{EB}{BC} = \frac{BC}{CD} \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{x}{9} \Rightarrow x^2 = 27 \Rightarrow x = 3\sqrt{3}$$



۴۰۵- گزینه ۲ فرض می‌کنیم $\hat{ACE} = \alpha$ ، $\hat{ECD} = \beta$ و $\hat{ACB} = \gamma$.

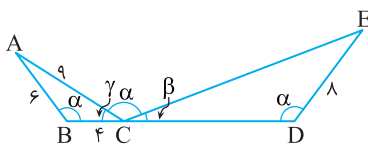
چون $\hat{BCE}$ زاویه خارجی مثلث ECD است، پس $\hat{E} = \gamma$. به طور مشابه

$\hat{A} = \beta$. بنابراین مثلث‌های ABC و CDE متشابه‌اند (ز.ز). در نتیجه

$$\frac{EC}{AC} = \frac{CD}{AB} = \frac{ED}{BC} \Rightarrow \frac{EC}{9} = \frac{CD}{6} = \frac{8}{4} = 2$$

بنابراین

$$EC = 18, CD = 12 \Rightarrow EC \times CD = 216$$



۴۰۶- گزینه ۳ توجه کنید که با نمادگذاری شکل زیر

$$DE \parallel BC \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{C}_1$$

و چون $BKEL$ متوازی‌الاضلاع است، پس $\hat{E} = \hat{B}$. بنابراین مثلث‌های

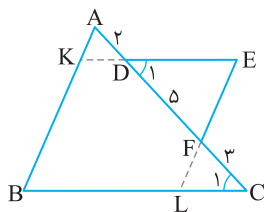
ABC و FED متشابه‌اند (ز.ز) و نیز نسبت محیط‌های این مثلث‌ها برابر

نسبت تشابه آن‌هاست:

$$\frac{\text{محیط } (ABC)}{\text{محیط } (FED)} = \frac{CA}{DF} = \frac{10}{5} = 2$$

از طرف دیگر $\text{محیط } (FED) = DF + DE + EF = 5 + 9 = 14$. در نتیجه

$$\text{محیط } (ABC) = 2 \times 14 = 28$$



۴۰۷- گزینه ۴ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه

$$AH^2 = BH \times CH = 2 \times 6 = 12$$

بنابراین $AH = 2\sqrt{3}$. از طرف دیگر، باز هم بنابر رابطه‌های طولی در مثلث

$$\text{قائم‌الزاویه } AB \times AC = AH \times BC = 2\sqrt{3} \times 8 = 16\sqrt{3}$$

۴۰۰- گزینه ۳ چون $DE \parallel AB$ ، پس بنابر قضیه اساسی تشابه،

مثلث‌های EKD و BKA متشابه‌اند. بنابراین

$$\frac{ED}{BA} = \frac{EK}{BK} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

از طرف دیگر، چون $EF \parallel AB$ ، پس بنابر قضیه اساسی تشابه، مثلث‌های

CEF و CBA متشابه‌اند. بنابراین

$$\frac{EF}{BA} = \frac{CE}{CB} = \frac{x}{x+9} \quad (2)$$

چون $ED = EF$ ، پس نسبت‌های سمت چپ تناسب‌های (۱) و (۲) برابرند، پس

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{x+9} \Rightarrow x+9 = 2x \Rightarrow x = 9$$

بنابراین $BC = 6 + 3 + 9 = 18$.

۴۰۱- گزینه ۱ چون پاره‌خط EF وسط ضلع‌های BA و BC را به هم

وصل کرده است، میان‌خط مثلث BAC است، پس طول آن برابر با نصف

طول ضلع سوم است. بنابراین

$$x + 4 = \frac{1}{2}(4x + 6) \Rightarrow x + 4 = 2x + 3 \Rightarrow x = 1$$

بنابراین $EF = 1 + 4 = 5$.

۴۰۲- گزینه ۲ فرض کنید $EF = x$. چون $DE \parallel AF$ ، بنابر قضیه

تالس در مثلث BAF

$$\frac{BD}{DA} = \frac{BE}{EF} \quad (1)$$

از طرف دیگر، چون $FD \parallel AC$ ، بنابر قضیه تالس در مثلث BAC ،

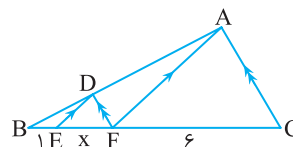
$$\frac{BD}{DA} = \frac{BF}{FC} \quad (2)$$

از مقایسه تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$\frac{BE}{EF} = \frac{BF}{FC} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1+x}{6}$$

بنابراین $x(1+x) = 6$ ، یعنی $x^2 + x - 6 = 0$. این معادله دو جواب دارد:

$x = -3$ و $x = 2$ ، که چون $x > 0$ ، پس $x = 2$.



۴۰۳- گزینه ۲ از نقطه A خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا پاره‌خط‌های

EF و DC را به ترتیب در نقطه‌های L و K قطع کند (شکل زیر را ببینید).

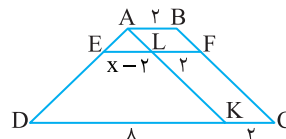
چون $ABFL$ و $LFCK$ متوازی‌الاضلاع‌اند، پس $KC = LF = AB = 2$.

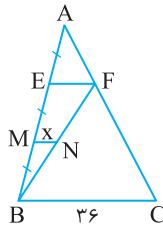
اکنون توجه کنید که چون $EL \parallel DK$ ، پس در مثلث ADK ، بنابر تعمیم

قضیه تالس،

$$\frac{EL}{DK} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow \frac{x-2}{8} = \frac{AE}{AE+ED} = \frac{AE}{AE+2AE} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{x-2}{8} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = 4$$





تذکر: برای به دست آوردن EF، از اینکه $MN \parallel EF$ و M وسط BE نتیجه می‌شود MN در مثلث BEF میان خط است، بنابراین

$$x = MN = \frac{EF}{2} \Rightarrow EF = 2x$$

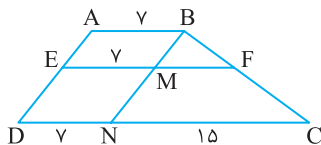
گزینه ۳ - ۴۱۳ از B خطی موازی AD رسم می‌کنیم تا پاره‌خط‌های EF و DC را به ترتیب در نقاط M و N قطع کند. در این صورت، چون چهارضلعی‌های ABND و ABME متوازی‌الاضلاع هستند، پس $DN = EM = AB = 7$. بنابراین $NC = 22 - 7 = 15$. از طرف دیگر،

$$\frac{BF}{FC} = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{BF}{BF+FC} = \frac{2}{2+3} \Rightarrow \frac{BF}{BC} = \frac{2}{5}$$

به این ترتیب، بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث BNC،

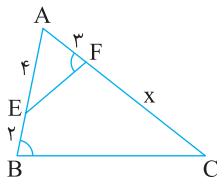
$$\frac{MF}{NC} = \frac{BF}{BC} \Rightarrow \frac{MF}{15} = \frac{2}{5} \Rightarrow MF = 6$$

بنابراین، $EF = 7 + 6 = 13$.



گزینه ۲ - ۴۱۴ ابتدا توجه کنید که مثلث‌های ABC و AFE در زاویه رأس A مشترک‌اند و یک زاویه برابر دارند ($\hat{ABC} = \hat{AFE}$)، پس متشابه‌اند (ز.ز). در نتیجه

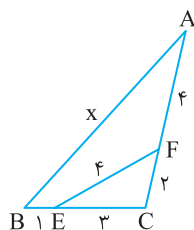
$$\frac{AB}{AF} = \frac{AC}{AE} \Rightarrow \frac{6}{3} = \frac{9+x}{4} \Rightarrow 24 = 9 + 3x \Rightarrow x = 5$$



گزینه ۲ - ۴۱۵ ابتدا توجه کنید که چون $\frac{CE}{CA} = \frac{CF}{CB} = \frac{1}{2}$ و مثلث‌های

CEF و CAB در زاویه رأس C مشترک‌اند، پس این دو مثلث متشابه‌اند (ض.ض.ض). در نتیجه

$$\frac{CE}{CA} = \frac{EF}{AB} \Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = 8$$



گزینه ۱ - ۴۰۸ چون مثلث‌های HKB و HCD متشابه‌اند (ز.ز)، پس

$$\frac{HB}{HD} = \frac{HK}{HC} \Rightarrow \frac{HB}{27} = \frac{8}{HC} \Rightarrow HB \times HC = 8 \times 27 \quad (1)$$

از طرف دیگر، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه BCK،

$$BH^2 = HC \times HK \Rightarrow BH^2 = 8 \times HC$$

اگر دو طرف این تساوی را در HB ضرب و از تساوی (۱) استفاده کنیم، به دست می‌آید

$$BH^3 = 8 \times 8 \times 27 \Rightarrow BH = 2 \times 2 \times 3 = 12$$

گزینه ۱ - ۴۰۹ در لوزی قطرها بر هم عمودند، بنابراین مثلث AFB قائم‌الزاویه است و در این مثلث بنابر رابطه‌های طولی

$$BF^2 = EB \times AB = 3AE(AE + 3AE) = 12AE^2$$

بنابراین $BF = 2\sqrt{3}AE$. همین‌طور

$$AF^2 = AE \times AB = AE(AE + 3AE) = 4AE^2$$

بنابراین $AF = 2AE$. چون در لوزی قطرها یک‌دیگر را نصف می‌کنند، پس

$$\frac{BD}{AC} = \frac{2BF}{2AF} = \frac{BF}{AF} = \frac{2\sqrt{3}AE}{2AE} = \sqrt{3}$$

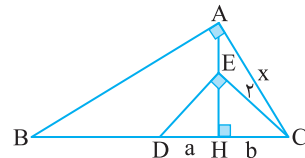
گزینه ۲ - ۴۱۰ فرض می‌کنیم $DH = a$ و $CH = b$. در این صورت $BD = DC = a + b$ مثلث قائم‌الزاویه DEC،

$$EC^2 = CH \times CD \Rightarrow 4 = b(a + b)$$

همین‌طور، در مثلث قائم‌الزاویه ABC،

$$AC^2 = CH \times CB \Rightarrow x^2 = b(2a + 2b) = 2b(a + b) = 2 \times 4 = 8$$

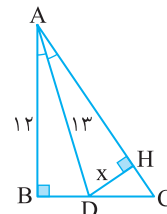
بنابراین $x = 2\sqrt{2}$.



گزینه ۱ - ۴۱۱ چون D روی نیمساز زاویه A قرار دارد، پس $BD = DH = x$. از طرف دیگر، بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث ABD،

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 \Rightarrow 13^2 = 12^2 + x^2$$

$$x^2 = 13^2 - 12^2 = (13 - 12)(13 + 12) = 25 \Rightarrow x = 5$$



گزینه ۲ - ۴۱۲ ابتدا توجه کنید که بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث BEF،

$$MN \parallel EF \Rightarrow \frac{BM}{BE} = \frac{MN}{EF} \Rightarrow \frac{BM}{2BM} = \frac{x}{EF} \Rightarrow EF = 2x$$

از طرف دیگر، بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث ABC،

$$EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{AE}{3AE} = \frac{2x}{36} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{2x}{36} \Rightarrow x = 6$$

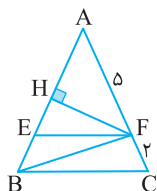
راه حل دوم ارتفاع FH از مثلث AEF را رسم می کنیم (شکل زیر را ببینید).
ارتفاع مثلث BEF نیز هست. بنابراین

$$\frac{S_{AEF}}{S_{BEF}} = \frac{\frac{1}{2} \times FH \times AE}{\frac{1}{2} \times FH \times EB} = \frac{AE}{EB} \quad (1)$$

از طرف دیگر چون $EF \parallel BC$ ، بنابر قضیه تالس در مثلث ABC،

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} = \frac{\delta}{2} \quad (2)$$

$$\frac{S_{AEF}}{S_{BEF}} = \frac{\delta}{2} \quad (1) \text{ و } (2) \text{، بنابر تساوی های}$$

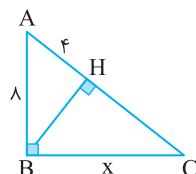


۴۱۹- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که بنابر روابط طولی در مثلث قائم الزاویه

$$AB^2 = AH \times AC \Rightarrow 6^2 = 4 \times AC \Rightarrow AC = 9$$

در نتیجه $HC = 12$ و باز هم بنابر رابطه های طولی در مثلث قائم الزاویه،

$$BC^2 = CH \times CA \Rightarrow x^2 = 12 \times 9 \Rightarrow x = 6\sqrt{3}$$



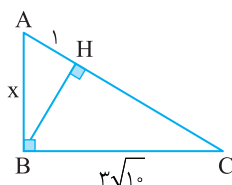
۴۲۰- گزینه ۳ فرض می کنیم $HC = a$. ابتدا توجه کنید که بنابر

رابطه های طولی در مثلث قائم الزاویه،

$$BC^2 = CH \times CA \Rightarrow 9^2 = a(a+1) \Rightarrow a = 9, \quad a = -10 \text{ (غ.ق.)}$$

در نتیجه، بنابر رابطه های طولی در مثلث قائم الزاویه،

$$AB^2 = AH \times AC = 1 \times 10 \Rightarrow x^2 = 10 \Rightarrow x = AB = \sqrt{10}$$



۴۲۱- گزینه ۱ a باید از $-a-2$ کمتر نباشد:

$$a \geq -a-2 \Rightarrow a \geq -1$$

a باید از $-3a+2$ بیشتر نباشد:

$$a \leq -3a+2 \Rightarrow a \leq \frac{1}{4}$$

بنابراین $-1 \leq a \leq \frac{1}{4}$ و در نتیجه بازه $[-1, \frac{1}{4}]$ مجموعه مقادیر ممکن برای a است.

۴۲۲- گزینه ۲ تساوی داده را ساده می کنیم:

$$\frac{f(a+d)}{a} = \frac{\delta(a+2d)}{a+d} + 2 \Rightarrow f(a+d)^2 = \delta a(a+2d) + 2a(a+d)$$

$$3a^2 + 4ad - 4d^2 = 0 \Rightarrow \frac{3a^2}{d^2} + \frac{4ad}{d^2} - \frac{4d^2}{d^2} = 0 \Rightarrow 3\left(\frac{a}{d}\right)^2 + 4\left(\frac{a}{d}\right) - 4 = 0$$

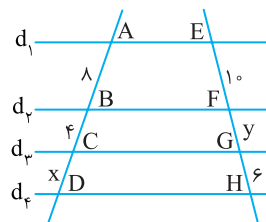
۴۱۶- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که بنابر قضیه تالس در دوزنقه AEGC،

$$\frac{AB}{BC} = \frac{EF}{FG} \Rightarrow \frac{8}{4} = \frac{10}{y} \Rightarrow y = 5$$

همین طور بنابر قضیه تالس در دوزنقه BFHD،

$$\frac{BC}{CD} = \frac{FG}{GH} \Rightarrow \frac{4}{x} = \frac{5}{6} \Rightarrow x = \frac{24}{5}$$

$$\text{پس } x+y = \frac{49}{5}$$



۴۱۷- گزینه ۳ توجه کنید که چون نقطه های E و F به ترتیب وسط

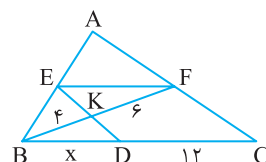
ضلع های AB و AC از مثلث ABC هستند، پس در مثلث ABC، EF،

میان خط است. یعنی $EF \parallel BC$ و $EF = \frac{1}{2} BC$ پس $EF = \frac{1}{2}(x+12)$ از

طرف دیگر، چون $EF \parallel BD$ ، بنابر قضیه اساسی تشابه مثلث های KEF و

KDB متشابه اند. بنابراین

$$\frac{KF}{KB} = \frac{EF}{DB} \Rightarrow \frac{6}{4} = \frac{\frac{1}{2}(x+12)}{x} \Rightarrow 6x = 2x+24 \Rightarrow x = 6$$



۴۱۸- گزینه ۳ **راه حل اول** ابتدا توجه کنید که چون $EF \parallel BC$ ، پس

بنابر قضیه اساسی تشابه مثلث های AEF و ABC متشابه اند. در نتیجه، اگر

ارتفاع AH را در مثلث ABC رسم کنیم، با نمادگذاری شکل زیر، AH' ارتفاع

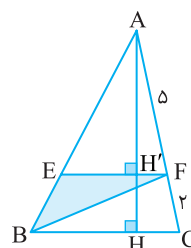
مثلث AEF است. در نتیجه $\frac{AH}{AH'} = \frac{AC}{AF} = \frac{5}{2}$. اگر این تناسب را تقضیل در

صورت کنیم، به دست می آید

$$\frac{AH-AH'}{AH'} = \frac{5-2}{2} \Rightarrow \frac{HH'}{AH'} = \frac{3}{2}$$

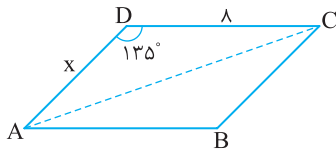
$$\frac{S_{BEF}}{S_{AEF}} = \frac{\frac{1}{2} HH' \times EF}{\frac{1}{2} AH' \times EF} = \frac{HH'}{AH'} = \frac{3}{2} \quad \text{اکنون توجه کنید که}$$

$$\text{پس } \frac{S_{AEF}}{S_{BEF}} = \frac{2}{3}$$



بنابراین

$$4\sqrt{2}x = 24\sqrt{2} \Rightarrow x = 6$$



۴۲۹- گزینه ۳ ابتدا تساوی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) - 2 \sin(2\pi + \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) - 2 \cos(3\pi - \alpha)} = 3 \Rightarrow \frac{\cos \alpha - 2 \sin \alpha}{-\sin \alpha + 2 \cos \alpha} = 3$$

$$\cos \alpha - 2 \sin \alpha = -3 \sin \alpha + 6 \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = 5 \cos \alpha \Rightarrow \tan \alpha = 5$$

$$\tan(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = \cot \alpha = \frac{1}{5} \quad \text{بنابراین}$$

۴۳۰- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\frac{\sin x + 2 \cos x}{\cos x - \sin x} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4 \sin x + 8 \cos x = \cos x - \sin x$$

$$5 \sin x = -7 \cos x \Rightarrow \tan x = -\frac{7}{5}$$

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{2(-\frac{7}{5})}{1 + (-\frac{7}{5})^2} = -\frac{35}{37} \quad \text{بنابراین}$$

۴۳۱- گزینه ۲ در نقاطی نمودار تابع f محور طول‌ها را قطع می‌کند که

$$f(x) = 0 \quad \text{پس}$$

$$\cos 3x = 0 \Rightarrow 3x = \frac{(2k+1)\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

چون جواب‌های واقع در بازه $(\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{2})$ را می‌خواهیم، پس

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{7\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{(2k+1)\pi}{6} < \frac{7\pi}{2} \Rightarrow 3 < 2k+1 < 21 \Rightarrow 1 < k < 10$$

بنابراین به ازای $k=2, 3, \dots, 9$ و $k=9$ برای x هشت مقدار به دست می‌آید که طول نقاط برخورد نمودار تابع با محور طول‌هاست.۴۳۲- گزینه ۲ اگر $x < 0$ ، نامعادله برقرار است و عددهای منفی در آنصدق می‌کنند. اگر $x > 0$ ، آن‌گاه

$$\begin{cases} x^2 - x > 2x \Rightarrow x^2 - 3x > 0 \Rightarrow x(x-3) > 0 \Rightarrow x-3 > 0 \Rightarrow x > 3 \\ \text{یا} \\ x^2 - x < -2x \Rightarrow x^2 + x < 0 \Rightarrow x(x+1) < 0 \Rightarrow x+1 < 0 \Rightarrow x < -1 \end{cases}$$

واضح است که $x=0$ نیز جواب نامعادله نیست. بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله به صورت $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ است که می‌توانیم آن را به صورت

$$[0, 3] \quad \text{بنویسیم. پس } a=0 \text{ و } b=3 \text{ و در نتیجه } a+b=3$$

۴۳۳- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$4x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(4-x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 4 \Rightarrow D_f = [0, 4]$$

بنابراین

$$D_{f \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} = \{x \mid 0 \leq x \leq 4, 0 \leq \sqrt{4x - x^2} + 3 \leq 4\}$$

اگر فرض کنیم $k = \frac{a}{d}$ ، آن‌گاه

$$3k^2 + 4k - 4 = 0 \Rightarrow k = \frac{2}{3} \text{ یا } k = -2$$

۴۲۳- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\sqrt[4]{5^4 \sqrt[3]{5^3}} = 5^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{3}} = 5^{\frac{12+3+4}{24}} = 5^{\frac{19}{24}}$$

$$\sqrt[4]{5^6 \sqrt[3]{5}} = 5^{\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{6+1}{3}} = 5^{\frac{7}{24}}$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{5^{\frac{19}{24}}}{5^{\frac{7}{24}}} = 5^{\frac{19}{24} - \frac{7}{24}} = 5^{\frac{12}{24}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

۴۲۴- گزینه ۱ توجه کنید که

$$a^2 + ab - 6b^2 = 0 \Rightarrow (a-2b)(a+3b) = 0$$

چون $a+3b \neq 0$ ، پس $a-2b=0$ و در نتیجه $a=2b$. پس

$$\frac{a-4b}{a+3b} = \frac{2b-4b}{2b+3b} = \frac{-2}{5}$$

و در نتیجه $a+3b=0$ که تناقض است.۴۲۵- گزینه ۱ طول رأس سهمی برابر $\frac{5}{2}$ است، پس

$$-\frac{a}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow a = -5$$

مقدار $f(0)$ مساوی ۴ است. پس

$$f(0) = -b \Rightarrow -b = 4 \Rightarrow b = -4$$

بنابراین $f(x) = x^2 - 5x + 4$. مجموع و حاصل ضرب جواب‌های معادله $f(x) = 0$ به ترتیب برابر ۵ و ۴ هستند، پس مجموع جواب‌ها یک واحد بیشتر از حاصل ضرب آن‌هاست.۴۲۶- گزینه ۴ فرض می‌کنیم $x^2 + x = t$ و معادله به شکل زیر درمی‌آید

$$t^2 - 5t - 6 = 0 \Rightarrow (t-6)(t+1) = 0 \Rightarrow t = -1, t = 6$$

اگر $t = -1$ ،

$$x^2 + x = -1 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0$$

این معادله جواب حقیقی ندارد. اگر $t = 6$ ،

$$x^2 + x = 6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

معادله بالا یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد. پس معادله مورد نظر هم یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد.

۴۲۷- گزینه ۲ معادله را به صورت $\sqrt{3-x} = 2 - \sqrt{x}$ می‌نویسیم و

طرفین آن را به توان دو می‌رسانیم:

$$3-x = 4 + x - 4\sqrt{x} \Rightarrow 4\sqrt{x} = 1 + 2x$$

مجدداً طرفین را به توان دو می‌رسانیم:

$$16x = 1 + 4x^2 + 4x \Rightarrow 4x^2 - 12x + 1 = 0$$

مجموع جواب‌های معادله بالا مورد نظر است که برابر ۳ است (توجه کنید که معادله درجه دوم فوق دو جواب دارد که در معادله اصلی صدق می‌کنند).

۴۲۸- گزینه ۱ مطابق شکل، مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD

دو برابر مساحت مثلث ADC است.

$$S_{ABCD} = 2S_{ADC} = 2 \times \frac{1}{2} \times 8 \times 8 \sin 135^\circ = 4\sqrt{2}x$$

از طرف دیگر

$$-3 \leq \sqrt{4x-x^2} \leq 1 \Rightarrow 4x-x^2 \leq 1 \Rightarrow x^2-4x+4 \geq 3$$

$$(x-2)^2 \geq 3 \Rightarrow \begin{cases} x-2 \geq \sqrt{3} \\ x-2 \leq -\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2+\sqrt{3} \\ x \leq 2-\sqrt{3} \end{cases}$$

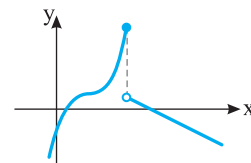
بنابراین

$$D_{f \circ f} = \{x | 0 \leq x \leq 4, x \geq 2+\sqrt{3} \text{ یا } x \leq 2-\sqrt{3}\} \\ = [0, 2-\sqrt{3}] \cup [2+\sqrt{3}, 4]$$

پس $a = 2-\sqrt{3}$ ، $b = 2+\sqrt{3}$ و $ab = 4-3=1$

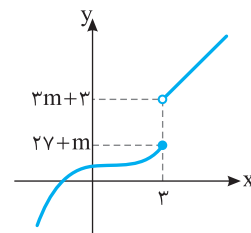
۴۳۴- گزینه ۳ اگر $m \neq 0$ ، هر یک از بخش‌های تابع یک‌به‌یک هستند.

اگر $m < 0$ ، نمودار بخش دوم خطی با شیب منفی می‌شود که در این صورت یک‌به‌یک بودن تابع نقض می‌شود. زیرا شکل کلی آن به صورت زیر می‌شود:



اگر $m > 0$ ، نمودار تابع شبیه شکل زیر می‌شود. برای اینکه تابع یک‌به‌یک باشد، کافی است عرض نقطهٔ توخالی بیشتر یا مساوی عرض نقطهٔ توپر باشد. در نتیجه

$$27+m \leq 3m+3 \Rightarrow m \geq 12$$



۴۳۵- گزینه ۴ ابتدا ضابطهٔ تابع وارون تابع f را پیدا می‌کنیم

$$y = 2 - \sqrt{4-x^2}, \quad -2 \leq x \leq 0$$

$$\sqrt{4-x^2} = 2-y \Rightarrow 4-x^2 = (2-y)^2$$

$$x^2 = 4 - (2-y)^2 \Rightarrow |x| = \sqrt{4 - (2-y)^2} = \sqrt{4y-y^2}$$

چون $-2 \leq x \leq 0$ ، پس $x = -\sqrt{4y-y^2}$ و در نتیجه

$$f^{-1}(x) = -\sqrt{4x-x^2}$$

بنابراین $a = -1$ و $b = 0$ و در نتیجه $a+b = -1$

۴۳۶- گزینه ۳ اگر نمودار تابع $y = 4f(2x)$ را یک واحد به سمت راست

منتقل کنیم، نمودار تابع زیر به دست می‌آید:

$$y = 4f(2(x-1)) = 4f(2x-2)$$

اگر این نمودار را دو واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $y = 4f(2x-2) + 2$ به دست می‌آید. اگر طول نقاط این نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع

$y = 4f(2(2x)-2) + 2$ رسم می‌شود و اگر عرض نقاط این نمودار را نصف

کنیم، نمودار تابع بازهٔ $y = \frac{1}{4}(4f(4x-2) + 2)$ رسم می‌شود. بنابراین ضابطهٔ

تابعی که نمودار آن رسم شده است به صورت $y = 2f(4x-2) + 1$ است.

۴۳۷- گزینه ۴ شرایط زیر باید برقرار باشند:

$$x-3 > 0 \Rightarrow x > 3$$

$$\log_{0.5}(x-3) \geq 1 \Rightarrow \log_{0.5}(x-3) \geq \log_{0.5} 0.5$$

$$x-3 \leq 0.5 \Rightarrow x \leq 3.5$$

بنابراین دامنهٔ تابع بازهٔ $(3, 3.5]$ است. پس $a = 3$ و $b = 3.5$ و در نتیجه

$$b-a = \frac{1}{2}$$

۴۳۸- گزینه ۳ **راه حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x-1) + (x-1) = (x-1)(x^2+1)$$

اکنون اگر صورت و مخرج کسر داده شده را در مزدوج مخرج ضرب کنیم، معلوم می‌شود که حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+1)(2x+\sqrt{3x^2+1})}{(2x-\sqrt{3x^2+1})(2x+\sqrt{3x^2+1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+1)(2x+\sqrt{3x^2+1})}{4x^2-3x^2-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+1)(2x+\sqrt{3x^2+1})}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2+1)(2x+\sqrt{3x^2+1})}{x+1} = \frac{2(2+2)}{2} = 4$$

راه حل دوم از قاعدهٔ هسپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{2x - \sqrt{3x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x + 1}{2 - \frac{6x}{2\sqrt{3x^2+1}}} = \frac{2}{2 - \frac{3}{2}} = 4$$

۴۳۹- گزینه ۴ اگر $x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+$ ، آن گاه $\cos x \rightarrow 0^-$ و در نتیجه

$$[\cos x] = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} \frac{-1}{\sin x - \sin^2 x}$$

حد مخرج کسر صفر است و مقدار عبارت مخرج مثبت است، زیرا در یک

همسایگی راست $\frac{\pi}{4}$ ، نابرابری $0 < \sin x < 1$ برقرار است. بنابراین

$$\sin x - \sin^2 x = \sin x(1 - \sin x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} \frac{-1}{\sin x - \sin^2 x} = -\infty$$

۴۴۰- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $f(2) = a$ و

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - [x]) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - 1) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+2) = 4$$

پس به ازای هیچ مقدار a حد چپ و حد راست تابع نمی‌توانند با مقدار تابع در نقطهٔ $x=2$ برابر باشند.

۴۴۱- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{(\frac{1}{2\sqrt{x+1}})(\sqrt{x+6+1}) - \frac{1}{2\sqrt{x+6}}(\sqrt{x+1+2})}{(\sqrt{x+6+1})^2}$$

$$f'(3) = \frac{\frac{1}{2 \times 2}(3+1) - \frac{1}{2 \times 3}(2+2)}{(3+1)^2} = \frac{1}{48}$$

در نتیجه $f'(3) = \frac{1}{48}$

۴۴۲- گزینه ۴

شرط لازم برای مشتق پذیری تابع در یک نقطه پیوستگی آن است:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 - a\sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (bx^2 + x)$$

$$1 - a = b + 1 \Rightarrow b = -a$$

همچنین باید مشتق چپ و مشتق راست تابع f در نقطه $x=1$ با هم برابر باشند:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{a}{2\sqrt{x}} & x > 1 \\ 2bx + 1 & x < 1 \end{cases}$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = -\frac{a}{2}, \quad f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 2b + 1$$

$$2b + 1 = -\frac{a}{2} \Rightarrow b = -a \Rightarrow -2a + 1 = -\frac{a}{2} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

۴۴۳- گزینه ۳ با توجه به تعریف مشتق، از $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - 9}{h} = \frac{3}{2}$

نتیجه می‌شود $f'(2) = \frac{3}{2}$ و $f(2) = 9$ از طرف دیگر،

$$g'(x) = \sqrt{f(x)} + \frac{xf'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

بنابراین

$$g'(2) = \sqrt{f(2)} + \frac{2f'(2)}{2\sqrt{f(2)}} = 3 + \frac{3}{6} = 3\frac{1}{2}$$

۴۴۴- گزینه ۲ ابتدا مشتق تابع f را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = \frac{2x(x^3 + 4) - 3x^4}{(x^3 + 4)^2} = \frac{x(8 - x^3)}{(x^3 + 4)^2}$$

بنابراین جدول تعیین علامت $f'(x)$ به صورت زیر است:

x	$-\infty$	$-\sqrt[3]{4}$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$	$-$	

بنابراین تابع f روی بازه $[0, 2]$ صعودی است و حداکثر مقدار a برابر ۲ است.

۴۴۵- گزینه ۴ تعداد راه‌های انتخاب سه نقطه از ده نقطه مشخص شده

برابر با $\binom{10}{3}$ است. از این سه تایی‌ها، با آن‌هایی که روی یک خط راست هستند،

نمی‌توان مثلث رسم کرد. بنابراین تعداد مثلث‌های مورد نظر برابر است با

$$\binom{10}{3} - \binom{5}{3} - \binom{6}{3} = 120 - 10 - 20 = 90$$

۴۴۶- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{7} + \frac{3}{7} - \frac{1}{14} = \frac{1}{2}$$

از طرف دیگر،

$$P(B) = P(A' \cap B) + P(A \cap B) \Rightarrow \frac{3}{7} = P(A' \cap B) + \frac{1}{2}$$

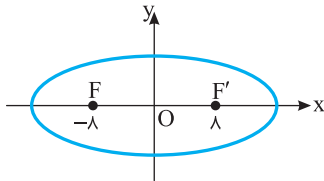
$$P(A' \cap B) = \frac{3}{7} - \frac{1}{2} = \frac{5}{14}$$

۴۴۷- گزینه ۱ فاصله کانونی بیضی مورد نظر برابر است با $FF' = 16$.

پس $2c = 16$ ، یعنی $c = 8$. از طرف دیگر، طول قطر بزرگ بیضی برابر است با $2a$. پس $2a = 20$ ، یعنی $a = 10$ ، اکنون توجه کنید که

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 100 = b^2 + 64 \Rightarrow b = 6$$

بنابراین طول قطر کوچک بیضی مورد نظر برابر است با $2b = 12$.



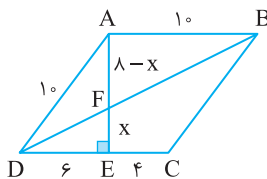
۴۴۸- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که چون طول ضلع‌های لوزی برابرند،

پس $AB = AD = DC = 10$. از طرف دیگر، بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه AED،

$$AD^2 = DE^2 + AE^2 \Rightarrow 100 = 6^2 + AE^2 \Rightarrow AE = 8$$

فرض کنید $EF = x$. در این صورت، از تشابه مثلث‌های AFB و EFD (ز ز) نتیجه می‌شود

$$\frac{AB}{ED} = \frac{AF}{EF} \Rightarrow \frac{10}{6} = \frac{8-x}{x} \Rightarrow 10x = 48 - 6x \Rightarrow 16x = 48 \Rightarrow x = 3$$



۴۴۹- گزینه ۱ بنابر تعمیم قضیه تالس،

$$EX \parallel BM \Rightarrow \frac{EX}{BM} = \frac{AX}{AM} \quad (1)$$

$$XY \parallel MN \Rightarrow \frac{AX}{AM} = \frac{XY}{MN} \quad (2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$\frac{EX}{BM} = \frac{XY}{MN} \Rightarrow \frac{BM}{MN} = \frac{EX}{XY} \Rightarrow \frac{4}{9} = \frac{XY}{9} \Rightarrow XY = 4$$

بنابراین تساوی (۲) می‌شود $\frac{AX}{AM} = \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$. اکنون چون $XF \parallel MC$ ، بنابر

تعمیم قضیه تالس در مثلث AMC،

$$\frac{AX}{AM} = \frac{XF}{MC} \Rightarrow \frac{2}{9} = \frac{8}{9 + NC} \Rightarrow NC = 3$$

۴۵۰- گزینه ۳ طبق فرض

$$\frac{3 + 0 + a + a + 4 + a + 6 + a + 3}{9} = 4 \Rightarrow \frac{16 + 4a}{9} = 4 \Rightarrow 16 + 4a = 36$$

$$4a = 20 \Rightarrow a = 5$$

در نتیجه مرتب شده داده‌ها به صورت ۰، ۳، ۳، ۴، ۵، ۵، ۵، ۵، ۶. چون تعداد داده‌ها برابر ۹ است، پس میانه برابر داده پنجم یعنی برابر ۵ است.

۴۵۱- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $U = \{1, 2, \dots, 8\}$ و $(X')' = X$.

بنابراین

$$A \cap B = ((A \cap B)')' = \{3, 8\}$$

$$A \cup B = ((A \cup B)')' = \{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$$

۴۵۷- گزینه ۱ نامعادله را به صورت زیر می نویسیم

$$\frac{1}{x+3} < \frac{x-5}{9} \Rightarrow \frac{9}{x+3} + 5 - x < 0 \Rightarrow \frac{9+(5-x)(x+3)}{x+3} < 0$$

$$\frac{-x^2+2x+24}{x+3} < 0 \Rightarrow \frac{(x-6)(x+4)}{x+3} > 0$$

با توجه به جدول تعیین علامت زیر، مجموعه جواب های نامعادله به صورت $(-4, -3) \cup (6, +\infty)$ است.

x	$-\infty$	-4	-3	6	$+\infty$
$\frac{(x-6)(x+4)}{x+3}$		-	+	-	+

پس $a = -4$ و $b = 6$ و $ab = -24$.

۴۵۸- گزینه ۳ معادله را به صورت زیر ساده می کنیم:

$$\sin x + 1 - \cos x = 0 \Rightarrow 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 0$$

$$2 \sin \frac{x}{2} (\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}) = 0$$

$$\begin{cases} \sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2\pi \\ \sin \frac{x}{2} = -\cos \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

۴۵۹- گزینه ۱ توجه کنید که

$$x \in [-4, -1] \cup [1, 4] \Rightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq 4 \Rightarrow |x| \leq 4 \\ x \leq -1 \text{ یا } x \geq 1 \Rightarrow |x| \geq 1 \end{cases}$$

پس $|x| \leq 4$.

۴۶۰- گزینه ۱ طول رأس سهمی $y = ax^2 + bx + ab$ برابر $-\frac{b}{2a}$ است.

$$-\frac{b}{2a} = 1 \Rightarrow b = -2a$$

عرض رأس این سهمی برابر $-\frac{\Delta}{4a}$ است. پس

$$\frac{-\Delta}{4a} = -2 \Rightarrow \frac{b^2 - 4a^2b}{4a} = 2 \quad (*)$$

اگر در تساوی (*) به جای b قرار دهیم $-2a$ نتیجه می شود

$$\frac{4a^2 + 8a^3}{4a} = 2 \Rightarrow a + 2a^2 = 2 \Rightarrow 2a^2 + a - 2 = 0$$

$$\begin{cases} a = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}, & b = \frac{1-\sqrt{17}}{2} \\ a = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}, & b = \frac{1+\sqrt{17}}{2} \end{cases} \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

این سهمی در نقطه $(0, ab)$ محور عرض ها را قطع می کند و عرض این نقطه

$$ab = \frac{-(1+\sqrt{17})^2}{8} = -\frac{9+\sqrt{17}}{4}$$

۴۶۱- گزینه ۲ توجه کنید که $D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$ و $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

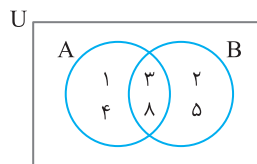
بنابراین

$$D_{f \circ g} = \{x | x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x | x \neq -2, \frac{2x-3}{x+2} \neq 1\}$$

از طرف دیگر

$$\frac{2x-3}{x+2} \neq 1 \Rightarrow 2x-3 \neq x+2 \Rightarrow x \neq 5$$

و چون $B-A = \{2, 5\}$ ، پس نمودار ون زیر به دست می آید. بنابراین $A = \{1, 2, 4, 8\}$ و مجموع اعضای A برابر ۱۶ است.



۴۵۲- گزینه ۱ چون $a+b$ واسطه هندسی $a-b$ و $2a-b$ است، پس

$$(a+b)^2 = (a-b)(2a-b) \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 2a^2 + b^2 - 3ab$$

$$a^2 - 5ab = 0 \Rightarrow a(a-5b) = 0$$

چون $a \neq 0$ ، پس $a-5b=0$ ، در نتیجه $a=5b$ و $r = \frac{a+b}{a-b} = \frac{5b+b}{5b-b} = \frac{3}{2}$

$$\frac{a_4}{a_1} = \frac{a_1 r^3}{a_1} = r^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$$

۴۵۳- گزینه ۴ اعداد را با توان های گویا می نویسیم:

$$\sqrt[4]{12} = 12^{\frac{1}{4}} = (2^2 \times 3)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}}$$

$$\sqrt[4]{54} = 54^{\frac{1}{4}} = (3^3 \times 2)^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{3}{4}} \times 2^{\frac{1}{4}}$$

$$\sqrt[3]{2\sqrt[4]{6}} = (2 \times 6^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} = (2 \times 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{12}}$$

$$\sqrt[4]{12} \times \sqrt[4]{54} \times \sqrt[3]{2\sqrt[4]{6}} = 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{3}{4}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{12}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{12}} = 2^{\frac{3}{2}} \times 3^{\frac{3}{2}} = 6^{\frac{3}{2}} = 6\sqrt{6}$$

بنابراین

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$

۴۵۴- گزینه ۲ توجه کنید که $a-c = (a-b) + (b-c) = 8$ ، همچنین،

$$\frac{ab-ac+bc-b^2}{a-c} = \frac{-ac+b(a+c)-b^2}{a-c} = \frac{-(b^2-b(a+c)+ac)}{a-c} = \frac{-(b-a)(b-c)}{a-c} = \frac{-(-4)(4)}{8} = 2$$

۴۵۵- گزینه ۳ توجه کنید که $x_1 + x_2 = 3$ و $x_1 x_2 = 2m+1$ ، بنابراین

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 3x_1 - x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

در نتیجه

$$x_1 x_2 = 2 \Rightarrow 2m+1 = 2 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

۴۵۶- گزینه ۳ معادله را به صورت زیر می نویسیم

$$(x-1)(x-5)(x-2)(x-4) = 4 \Rightarrow (x^2-6x+5)(x^2-6x+8) = 4$$

اکنون فرض می کنیم $t = x^2 - 6x + 5$ و معادله به صورت $t(t+3) = 4$ درمی آید. بنابراین

$$t^2 + 3t - 4 = 0 \Rightarrow (t+4)(t-1) = 0 \Rightarrow t = -4, t = 1$$

اگر $t = 5$ ، آن گاه

$$x^2 - 6x + 5 = 5 \Rightarrow x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 6$$

اگر $t = -8$ ، آن گاه

$$x^2 - 6x + 5 = -8 \Rightarrow x^2 - 6x + 13 = 0$$

معادله جواب ندارد $\Delta < 0$

بنابراین مجموع جواب های معادله برابر ۶ است.

در نتیجه اگر $f^{-1}(-2) = m$ ، آن‌گاه

$$f(m) = -2 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} \left(-\frac{2}{3}m + 2 \right) = -2$$

$$\left(\frac{1}{2} \right)^{-2} = -\frac{2}{3}m + 2 \Rightarrow 4 = -\frac{2}{3}m + 2 \Rightarrow m = -3$$

بنابراین $f^{-1}(-2) = -3$

۴۶۵- گزینه ۳ از تساوی $\log \sqrt{\lambda} = a$ نتیجه می‌شود

$$\log \sqrt[2]{2} = a \Rightarrow \frac{2}{3} \log 2 = a \Rightarrow \log 2 = \frac{3a}{2}$$

بنابراین

$$\log 125 = \log 5^3 = 3 \log 5 = 3 \log \frac{1}{2}$$

$$= 3(\log 10 - \log 2) = 3\left(1 - \frac{3a}{2}\right) = 3 - \frac{9a}{2}$$

۴۶۶- گزینه ۲ چون حد مخرج صفر است و حد مورد نظر وجود دارد، پس

حد صورت هم باید صفر باشد تا حد مورد نظر به صورت $\frac{0}{0}$ در بیاید. در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - ax + b) = 0 \Rightarrow 1 - a + b = 0 \Rightarrow b = a - 1$$

اکنون باید حد زیر را حساب کنیم

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - ax + a - 1}{2x^2 - 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-a+1)}{(x-1)(2x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-a+1}{2x-1} = 2 - a$$

بنابراین

$$2 - a = a - 4 \Rightarrow a = 3$$

پس $b = 2$ و در نتیجه $a + b = 5$.

۴۶۷- گزینه ۳ اگر در صورت کسر داده شده جمله شامل x^3 وجود

داشته باشد، مقدار حد مورد نظر برابر $-\infty$ یا $+\infty$ است. بنابراین باید

ضریب x^3 در صورت کسر داده شده صفر باشد، یعنی $a + 1 = 0$ ، پس

$a = -1$. در این صورت حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2 + x}{(b+1)x^2 - 4} = \frac{-2}{b+1}$$

بنابراین $\frac{-2}{b+1} = 2$ ، یعنی $b = -2$. به این ترتیب $a + b = -3$.

۴۶۸- گزینه ۲ با توجه به رابطه

$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

تابع g همان تابع ثابت $g(x) = -1$ است که روی بازه $[-4, 4]$ فقط در

نقطه‌های -4 و 4 ناپیوسته است.

۴۶۹- گزینه ۳ شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $x = 1$ همان

$f'(1)$ است. پس،

$$f'(x) = 4x^2 + 2mx + 1 \Rightarrow f'(1) = 4 + 2m + 1 = 2 \Rightarrow m = -\frac{3}{2}$$

۴۷۰- گزینه ۲ تابع در نقطه $x = 3$ پیوسته است و

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x+1}} & x > 3 \\ 1 & x < 3 \end{cases}$$

$$f'_+(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{4}, \quad f'_-(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 1 = 1$$

پس $D_{fog} = \{x | x \neq -2, x \neq 5\} = \mathbb{R} - \{-2, 5\}$ بنابراین -2 و 5 در

دامنه تابع $f \circ g$ قرار ندارند که مجموع آن‌ها برابر ۳ است.

۴۶۲- گزینه ۳ چون این دو نمودار در نقطه $(1, 2)$ برخورد می‌کنند، پس

$$(1, 2) \in f \Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow \sqrt[3]{a+b} = 2 \Rightarrow a+b = 8$$

$$(1, 2) \in f^{-1} \Rightarrow (2, 1) \in f \Rightarrow f(2) = 1$$

$$\sqrt[3]{2a+b} = 1 \Rightarrow 2a+b = 1$$

در نتیجه

$$\begin{cases} a+b=8 \\ 2a+b=1 \end{cases} \Rightarrow a=-7, b=15$$

بنابراین $3a+b = -6$.

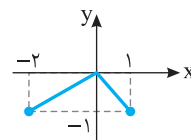
۴۶۳- گزینه ۲ راه حل اول اگر نمودار تابع f را نسبت به محور عرض‌ها

قرینه کنیم، نمودار تابع $y = f(-x)$ به دست می‌آید. اگر عرض نقاط نمودار

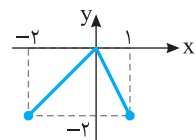
به دست آمده را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y = 2f(-x)$ به دست می‌آید.

نمودار اخیر را یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y = 1 + 2f(-x)$

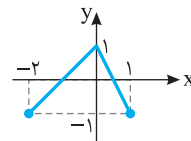
به دست آید که به صورت شکل (۲) خواهد بود.



$y = f(-x)$



$y = 2f(-x)$



$y = 1 + 2f(-x)$

راه حل دوم ابتدا توجه کنید که $f(-1) = f(2) = -1$. اگر شکل (۲) مربوط به

تابع g باشد، آن‌گاه $g(-2) = g(1) = -1$. از طرف دیگر،

$$g(x) = 1 + 2f(-x) \Rightarrow g(-2) = 1 + 2f(2) = 1 - 2 = -1$$

$$g(1) = 1 + 2f(-1) = 1 - 2 = -1$$

بنابراین شکل (۲) متعلق به تابع $g(x) = 1 + 2f(-x)$ است.

۴۶۴- گزینه ۲ با توجه به شکل، دامنه تابع به صورت $(-\infty, 3)$ است.

از طرف دیگر، با توجه به ضابطه تابع، دامنه تابع به صورت $(-\infty, -\frac{b}{a})$ است

که در آن $a < 0$. بنابراین

$$-\frac{b}{a} = 3 \Rightarrow b = -3a$$

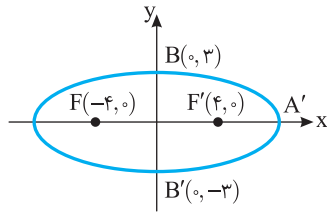
در نتیجه $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(ax - 3a)$. اکنون توجه کنید که نمودار تابع f از

نقطه $(\frac{3}{2}, 0)$ گذشته است. بنابراین

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}a - 3a\right) = 0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}\left(-\frac{3}{2}a\right) = 0$$

در نتیجه $-\frac{3}{2}a = 1$ ، یعنی $a = -\frac{2}{3}$ ، پس $b = 2$. بنابراین

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}}\left(-\frac{2}{3}x + 2\right)$$



۴-۴۷۶ گزینه ۴ فرض کنید تعداد مهره‌های آبی برابر n باشد. در این صورت تعداد مهره‌های قرمز برابر $2n$ است. اکنون توجه کنید که بنابر فرض،

$$\frac{\binom{n}{1} \binom{2n}{1}}{\binom{3n}{2}} = \frac{1}{15} \Rightarrow \frac{n(2n)}{\frac{3n(3n-1)}{2}} = \frac{1}{15} \Rightarrow \frac{4n}{3(3n-1)} = \frac{1}{15} \Rightarrow 20n = 3(3n-1) \Rightarrow n = 1$$

۴-۴۷۷ گزینه ۴ فرض کنید A پیشامد این باشد که شخص سرطان داشته باشد، B پیشامد این باشد که جواب آزمایش مثبت باشد و شخص سرطان نداشته باشد و C پیشامد این باشد که جواب آزمایش مثبت باشد و شخص سرطان نداشته باشد. اگر جواب آزمایش مثبت باشد، یا شخص سرطان دارد یا ندارد. بنابراین پیشامد مورد نظر $(A \cap B) \cup (A' \cap C)$ است. همچنین پیشامدهای $A \cap B$ و $A' \cap C$ ناسازگارند. بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با $P(A \cap B) + P(A' \cap C)$. همچنین، پیشامدهای A و B و نیز A و C ، و در نتیجه A' و C ، مستقل اند. بنابراین

$$P(A \cap B) + P(A' \cap C) = P(A)P(B) + P(A')P(C) = 0.2 \times 0.95 + (1 - 0.2)(0.3) = 0.484$$

۴-۴۷۸ گزینه ۲ چون $EF \parallel AC$ ، بنابر قضیه خطوط موازی و مورب، $\hat{C}_1 = \hat{E}_1$ و $\hat{A}_1 = \hat{F}_1$. بنابراین مثلث‌های AKC و FEK متشابه‌اند (ز.ز). در نتیجه

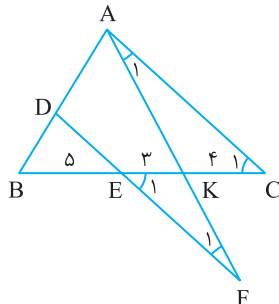
$$\frac{AC}{FE} = \frac{KC}{KE} \quad (1)$$

همچنین، چون $DE \parallel AC$ ، بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث BAC ،

$$\frac{DE}{AC} = \frac{BE}{BC} \quad (2)$$

اگر تساوی‌های (۱) و (۲) را در هم ضرب کنیم به دست می‌آید

$$\frac{AC}{FE} \times \frac{DE}{AC} = \frac{4}{3} \times \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{DE}{FE} = \frac{5}{9}$$



۴-۴۷۹ گزینه ۲ چون $EF \parallel BC$ ، پس بنابر قضیه اساسی تشابه مثلث‌های

AEF و ABC متشابه‌اند. در نتیجه

$$\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AE}{AB}\right)^2 = \left(\frac{1}{AB}\right)^2 = \frac{1}{AB^2}$$

بنابراین

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(3+h) - f(3-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(3-h) - f(3)}{-h} = f'_+(3) + f'_-(3) = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

توجه کنید که می‌توانیم از قاعده هوییتال نیز استفاده کنیم:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(3+h) - f(3-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f'(3+h) + f'(3-h)}{1} = f'_+(3) + f'_-(3) = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

۴-۴۷۱ گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که $f(x) = x^3 x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{7}{2}}$ و

$$f'(x) = \frac{7}{2} x^{\frac{5}{2}} \Rightarrow f''(x) = \frac{7}{4} x^{\frac{3}{2}} = \frac{7}{4} x \sqrt{x}$$

بنابراین

$$f''(4) = \frac{7}{4} \times 4 \times 2 = 14$$

۴-۴۷۲ گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که $y' = x^2 + 2x + k$. برای اینکه تابع اکیداً صعودی باشد باید مشتق آن به ازای هر x نامنفی باشد:

$$x^2 + 2x + k \geq 0$$

بنابراین

$$\Delta = 4 - 4k \leq 0 \Rightarrow k \geq 1$$

۴-۴۷۳ گزینه ۱ مقدار تابع f' در نقطه‌های -1 و 5 برابر صفر است، پس خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌های به طول -1 و 5 موازی محور x است. روی بازه‌های $(-\infty, -1)$ و $(5, +\infty)$ علامت f' منفی است، پس تابع f روی این بازه‌ها اکیداً نزولی است. روی بازه $(-1, 5)$ علامت f' مثبت است، پس تابع f روی این بازه اکیداً صعودی است. توجه کنید که فقط نمودار گزینه (۱) این ویژگی‌ها را دارد.

۴-۴۷۴ گزینه ۳ اگر دایره‌ها بر هم مماس درونی باشند، طول خط‌المركزین آن‌ها برابر با اختلاف شعاع‌های دایره‌هاست. مرکز دایره‌ها، نقطه‌های $(k, 2)$ و $(-1, -3)$ و شعاع‌های آن‌ها 9 و 2 است.

بنابراین

$$\text{طول خط‌المركزین} = \sqrt{(k+1)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{(k+1)^2 + 25}$$

در نتیجه

$$\sqrt{(k+1)^2 + 25} = 9 - 2 = 7 \Rightarrow (k+1)^2 + 25 = 49$$

$$(k+1)^2 = 24 \Rightarrow k = \pm\sqrt{24} - 1$$

بنابراین مجموع مقادیر k برابر -2 است.

۴-۴۷۵ گزینه ۱ چون کانون‌های بیضی روی محور x و دو سر قطر کوچک بیضی روی محور y هستند، پس مبدأ مختصات مرکز بیضی است (شکل رسم شده را ببینید). از طرف دیگر، $a = BF = \sqrt{(0+4)^2 + (3-0)^2} = 5$.

نتیجه، مرکز دایره مورد نظر نقطه $(0, 0)$ و شعاع آن برابر 5 است، پس معادله‌اش $x^2 + y^2 = 25$ است.

همچنین اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادله $x^2 - nx + m + 1 = 0$ باشند، آن‌گاه

$$x_1 + x_2 = n, \quad x_1 x_2 = m + 1$$

با توجه به $\alpha = x_1 + 1$ و $\beta = x_2 + 1$ نتیجه می‌شود

$$\alpha + \beta = x_1 + x_2 + 2$$

$$\alpha\beta = (x_1 + 1)(x_2 + 1) = x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1$$

بنابراین

$$\begin{cases} 2m - 3 = n + 2 \\ 2n + 2 = m + 1 + n + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m - 5 = n \\ m = n \end{cases}$$

پس

$$2m - 5 = m \Rightarrow m = 5, \quad n = 5$$

بنابراین $m + n = 10$.

۴۸۶- گزینه ۱ اگر فرض کنیم $x^2 = t$ ، آن‌گاه $x = \pm\sqrt{t}$ ، $t \geq 0$ و معادله به شکل زیر درمی‌آید

$$t^2 + 2mt + m^2 - 1 = 0 \quad (*)$$

در این معادله

$$\Delta = 4m^2 - 4(m^2 - 1) = 4 > 0$$

بنابراین معادله (*) به ازای هر مقدار m دو جواب دارد. اگر هر دو جواب این معادله منفی باشند، آن‌گاه معادله اولیه جواب نخواهد داشت. بنابراین اگر

t_1 و t_2 جواب‌های معادله (*) باشند، باید

$$t_1 + t_2 < 0 \Rightarrow -2m < 0 \Rightarrow m > 0$$

$$t_1 t_2 > 0 \Rightarrow m^2 - 1 > 0 \Rightarrow m < -1 \text{ یا } m > 1$$

بنابراین اگر $m > 1$ ، آن‌گاه معادله اولیه جواب ندارد.

۴۸۷- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که اگر $x < -\frac{1}{p}$ ، آن‌گاه علامت دو

طرف تساوی یکسان نیست و معادله جواب ندارد. پس با شرط $x \geq -\frac{1}{p}$ ، طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$3x + 2 = 4x^2 + 4x + 1 \Rightarrow 4x^2 + x - 1 = 0$$

پس

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{8}, \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{8}$$

واضح است که $\frac{-1 - \sqrt{17}}{8} < -\frac{1}{2}$ و تنها جواب معادله $\frac{-1 + \sqrt{17}}{8}$ است.

بنابراین $a = -1$ و $b = 1$ و در نتیجه $a + b = 0$.

۴۸۸- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\cos^2 x - \cos^4 x = \cos^2 x (1 - \cos^2 x) = \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{8}$$

بنابراین

$$\tan^2 x + \cot^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

صورت کسر بالا را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \sin^4 x + \cos^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x - 2 \sin^2 x \cos^2 x \\ = (\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x \end{aligned}$$

اگر این تناسب را تفصیل در مخرج کنیم، به دست می‌آید

$$\frac{S_{AEF}}{S_{BEFC}} = \frac{1}{AB^2 - 1} \quad (1)$$

اما طبق فرض، $S_{AEF} = S_{BEFC}$. بنابراین از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{AB^2 - 1} = 1, \quad \text{پس } AB^2 - 1 = 1, \quad \text{یعنی } AB^2 = 2 \text{ و در نتیجه } AB = \sqrt{2}.$$

۴۸۹- گزینه ۳ ابتدا میانگین داده‌های جدید را به دست می‌آوریم

$$\bar{y} = \frac{18 \times 25 + 20 \times 27 + 28}{18 + 3} \Rightarrow \bar{y} = 25$$

برای محاسبه واریانس از فرمول زیر کمک می‌گیریم:

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2 \Rightarrow 9 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{18} - 625$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 18 \times 634 = 11412$$

بنابراین مجموع مربعات داده‌های قبلی برابر ۱۱۴۱۲ است. مجموع مربعات داده‌های جدید برابر است با

$$A = 11412 + 20^2 + 27^2 + 28^2 = 13325$$

$$\text{در نتیجه } \sigma^2 = \frac{A}{21} - (25)^2 = \frac{13325}{21} - 625 = 9/52$$

۴۹۱- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$n(A) + n(A') = n(U) = 56, \quad n(B) + n(B') = n(U) = 56$$

اگر این تساوی‌ها را با هم جمع کنیم به دست می‌آید:

$$n(A) + n(B) + n(A') + n(B') = 112$$

$$62 + n(A') + n(B') = 112 \Rightarrow n(A') + n(B') = 50$$

بنابراین $n(A' \cap B') = n(A') + n(B') - n(A' \cup B') = 50 - 44 = 6$.

۴۹۲- گزینه ۴ اگر a, b, c جمله‌های متوالی دنباله‌ای حسابی باشند،

آنگاه a, b, c هم جملات متوالی دنباله حسابی‌اند و چون a, b, c جملات متوالی دنباله‌ای هندسی هم هستند، پس $a = b = c$. بنابراین

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} = \frac{1}{12} \Rightarrow b = 36$$

۴۹۳- گزینه ۲ ابتدا مخرج کسرها را با استفاده از اتحادهای چاق و لاغر گویا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} &= \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{(\sqrt[3]{2} - 1)(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1)} = \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{2 - 1} = \sqrt[3]{2} - 1 \\ \frac{3}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1} &= \frac{3(\sqrt[3]{2} + 1)}{(\sqrt[3]{2} + 1)(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1)} = \frac{3(\sqrt[3]{2} + 1)}{2 + 1} = \sqrt[3]{2} + 1 \end{aligned}$$

$$A = \sqrt[3]{2} - 1 + \sqrt[3]{2} + 1 = 2\sqrt[3]{2} \quad \text{بنابراین}$$

۴۹۴- گزینه ۱ توجه کنید که

$$a^3 - a - (b^3 - b) = 0 \Rightarrow a^3 - b^3 - (a - b) = 0$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) - (a - b) = 0 \Rightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2 - 1) = 0$$

و چون $a - b \neq 0$ ، پس $a^2 + ab + b^2 = 1$.

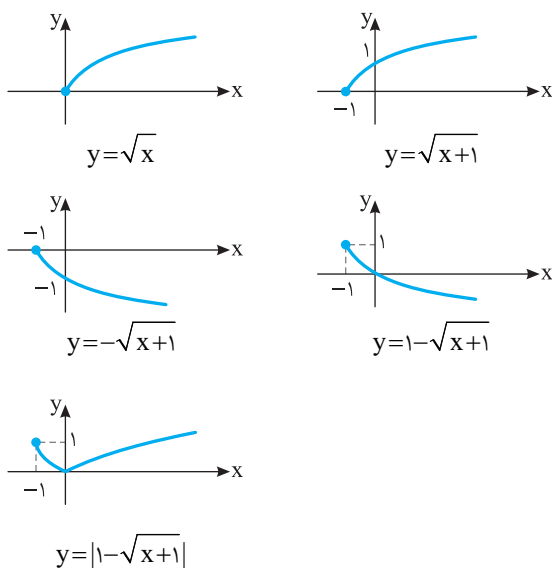
۴۹۵- گزینه ۳ اگر α و β جواب‌های معادله زیر باشند،

$$x^2 - (2m - 3)x + 2n + 2 = 0$$

آن‌گاه

$$\alpha + \beta = 2m - 3, \quad \alpha\beta = 2n + 2$$

۴۹۳- گزینه ۱ مراحل رسم نمودار به صورت زیر است.



۴۹۴- گزینه ۳ اگر $x < 0$ ، باید وارون تابع $g(x) = \frac{2x+x}{2}$ را پیدا کنیم:

$$g(x) = \frac{3x}{2} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{2x}{3}, \quad x < 0$$

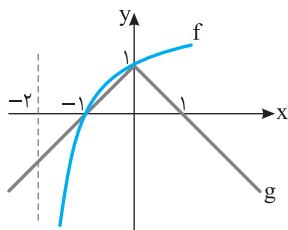
اگر $x \geq 0$ ، باید وارون تابع $h(x) = \frac{2x-x}{2}$ را پیدا کنیم:

$$h(x) = \frac{x}{2} \Rightarrow h^{-1}(x) = 2x, \quad x \geq 0$$

بنابراین تابع وارون تابع f به صورت $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{2x}{3} & x < 0 \\ 2x & x \geq 0 \end{cases}$ است. که

همان $f^{-1}(x) = \frac{4x+2|x|}{3}$ است. بنابراین $a=4$ ، $b=3$ و $a+b=7$.

۴۹۵- گزینه ۴ به نمودار این توابع توجه کنید. نقاط مشترک f و g به صورت $(0,1)$ و $(-1,0)$ هستند که فاصله آنها برابر $\sqrt{2}$ است.



۴۹۶- گزینه ۴ معادله داده شده را به صورت زیر ساده می کنیم:

$$\log_{\frac{1}{2}}(xy) + \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{y} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \log_2(xy) + \frac{1}{3} \log_2 \frac{x}{y} = 0$$

$$3 \log_2(xy) + 2 \log_2 \frac{x}{y} = 0 \Rightarrow \log_2(xy)^3 + \log_2 \left(\frac{x}{y}\right)^2 = 0$$

$$\log_2((x^3 y^3) \left(\frac{x}{y}\right)^2) = 0 \Rightarrow x^5 y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x^5} = x^{-5}$$

بنابراین $\log_x y = \log_x x^{-5} = -5 \log_x x = -5$.

در نتیجه

$$\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

۴۸۹- گزینه ۲ باید ببینیم معادله $3 \cos 4x + 1 = 1$ در بازه $(0, \frac{\pi}{2})$

چند جواب دارد. یعنی $\cos 4x = 0$ چند بار در این بازه اتفاق می افتد.

$$4x = (2k+1) \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = (2k+1) \frac{\pi}{8} \Rightarrow k=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8}$$

$$k=1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{8}, \quad k=2 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{8} > \frac{\pi}{2} \text{ (غ.ق.)}$$

پس دو بار خط $y=1$ نمودار تابع f را در بازه $(0, \frac{\pi}{2})$ قطع می کند.

۴۹۰- گزینه ۴ می دانیم اگر $-1 \leq a \leq 1$ ، آن گاه $|a| \leq 1$. بنابراین

نامعادله را به صورت $|\frac{x-2}{x-3}| \leq 1$ می نویسیم. بنابراین

$$\frac{|x-2|}{|x-3|} \leq 1 \Rightarrow |x-2| \leq |x-3|, \quad x \neq 3$$

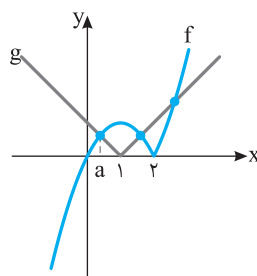
$$|x-2|^2 \leq |x-3|^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 \leq x^2 - 6x + 9 \Rightarrow x \leq \frac{5}{2}$$

بنابراین $(-\infty, \frac{5}{2}]$ مجموعه جواب های نامعادله است و در نتیجه $a=5$.

پس $b=2$. $a+b=7$.

۴۹۱- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 2 \\ -x^2 + 2x & x \leq 2 \end{cases} \text{ که}$$



پس نمودار تابع های f و g به صورت مقابل است. کمترین طول نقطه های برخورد برابر a است. چون $a < 1$ ، پس

$$g(x) = -x+1 \text{ و } f(x) = -x^2+2x$$

مقدار a از حل معادله $-x^2+2x = -x+1$ به دست می آید:

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ (غ.ق.)}, \quad x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

۴۹۲- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که اگر k عددی صحیح باشد، آن گاه

$$[x+k] = [x] + k. \text{ بنابراین } f(x) = [-2x] + 3. \text{ اکنون توجه کنید که}$$

$$f(x) = \begin{cases} 3 & x=0 \\ -1+3 & 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ -2+3 & \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ -3+3 & 1 < x \leq \frac{3}{2} \\ -4+3 & \frac{3}{2} < x \leq 2 \end{cases}$$

بنابراین $R_f = \{3, 2, 1, 0, -1\}$ و برد تابع f پنج عضو دارد.

همچنین A و B' و A' و B مستقل از هم هستند. بنابراین احتمال پیروزی فقط بر یکی از دو تیم را به این صورت حساب می‌کنیم:

$$P(A \cap B') = P(A)P(B') = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{3}{8}\right) = \frac{5}{32}$$

احتمال پیروزی بر B و شکست از A :

$$P(A' \cap B) = P(A')P(B) = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \frac{3}{8} = \frac{9}{32}$$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با $\frac{5}{32} + \frac{9}{32} = \frac{14}{32} = \frac{7}{16}$. توجه کنید که

$$(A \cap B') \cap (A' \cap B) = \emptyset \text{ زیرا } A \cap B \text{ و } A \cap B' \text{ ناسازگارند،}$$

۵۰۵- گزینه ۱ برحسب اینکه رأس مثلث متساوی الساقین کدام نقطه باشد، سه حالت پیش می‌آید.

حالت اول نقطه $A(\alpha, 6)$ رأس مثلث باشد. در این صورت

$$AB = AC \Rightarrow \sqrt{(\alpha + 5)^2 + (6 - 0)^2} = \sqrt{(\alpha - 5)^2 + (6 - 0)^2}$$

$$(\alpha + 5)^2 + 6^2 = (\alpha - 5)^2 + 6^2 \Rightarrow |\alpha + 5| = |\alpha - 5| \Rightarrow \alpha = 0$$

حالت دوم نقطه $B(-5, 0)$ رأس مثلث باشد. در این صورت

$$BA = BC \Rightarrow \sqrt{(-5 - \alpha)^2 + (0 - 6)^2} = \sqrt{(-5 - 5)^2 + (0 - 0)^2}$$

$$(\alpha + 5)^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow (\alpha + 5)^2 = 8^2 \Rightarrow \alpha = 3, \alpha = -13$$

حالت سوم نقطه $C(5, 0)$ رأس مثلث باشد. در این صورت

$$CA = CB \Rightarrow \sqrt{(5 - \alpha)^2 + (0 - 6)^2} = \sqrt{(5 + 5)^2 + (0 - 0)^2}$$

$$(\alpha - 5)^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow (\alpha - 5)^2 = 8^2 \Rightarrow \alpha = -3, \alpha = 13$$

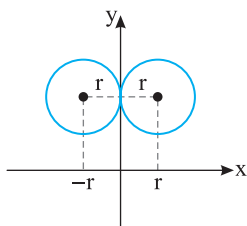
بنابراین مجموع قدرمطلق‌های مقادیر ممکن α برابر است با $0 + 2 \times 3 + 2 \times 13 = 32$

۵۰۶- گزینه ۱ اگر دایره‌ای بر محور y مماس باشد، شعاعش برابر با قدرمطلق طول مرکز آن است (شکل زیر را ببینید). طول مرکز این دایره برابر

است با $-2 = -\frac{4}{2}$ و شعاعش برابر است با

$$\frac{1}{2} \sqrt{16 + 4a^2 - 4(4)} = |a|$$

بنابراین $|a| = 2$.



۵۰۷- گزینه ۱ چون $EK \parallel AB$ ، بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث DAB ،

$$\frac{EK}{AB} = \frac{DK}{DB} \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{DK}{DB} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{DK}{DB} \Rightarrow \frac{3-2}{3} = \frac{DB-DK}{DB} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{BK}{BD}$$

اکنون، چون $KF \parallel DC$ ، بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث BDC ،

$$\frac{KF}{DC} = \frac{BK}{BD} \Rightarrow \frac{5}{DC} = \frac{1}{3} \Rightarrow DC = 15$$

۵۰۸- گزینه ۴ مساحت مثلث قائم الزاویه ABC برابر مجموع مساحت دو مثلث ABD و ADC است. پس

$$S_{ABC} = S_{ADC} + S_{ABD} \Rightarrow \frac{AB \times AC}{2} = \frac{DN \times AC}{2} + \frac{DM \times AB}{2}$$

۴۹۷- گزینه ۳ توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ و حد مورد نظر

به صورت $\frac{0}{0}$ است. اکنون توجه کنید که

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^2(x) - 1}{2f^2(x) - 3f(x) + 1} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(f(x) - 1)(f(x) + 1)}{(f(x) - 1)(2f(x) - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) + 1}{2f(x) - 1} = \frac{1 + 1}{2 - 1} = 2 \end{aligned}$$

۴۹۸- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{x^2 - 1}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x^2 - 3x + 2)} = \frac{x + 1}{(x - 1)(x - 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x + 1}{(x - 1)(x - 2)} = +\infty \text{ پس}$$

۴۹۹- گزینه ۲ تابع f باید در نقطه $x = 6$ پیوسته باشد، پس

$$\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = f(6) = \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$$

$$a + \cos^2 \frac{\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow a + \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

۵۰۰- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که شیب خط d برابر است با -1 .

بنابراین شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $x = 2$ برابر -1 است. یعنی $f'(2) = -1$ بنابرین

$$g(x) = f^2(x) \Rightarrow g'(x) = 2f(x)f'(x)$$

$$g'(2) = 2f(2)f'(2) = 2 \times 3 \times (-1) = -6$$

۵۰۱- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h) - f(2)}{\Delta h} = \frac{3}{\Delta h} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h) - f(2)}{3h} = \frac{3}{\Delta h} f'(2)$$

از طرف دیگر، $f'(x) = 3x^2 - 2$ ، پس $f'(2) = 10$. بنابرین مقدار مورد نظر

$$\frac{3}{\Delta h} \times 10 = 6 \Rightarrow \Delta h = \frac{5}{2}$$

۵۰۲- گزینه ۴ توجه کنید که $D_f = [3, 5]$ و

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}} - \frac{1}{2\sqrt{5-x}} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x-3} = \sqrt{5-x}$$

$$x - 3 = 5 - x \Rightarrow x = 4$$

پس $(4, 2)$ نقطه بحرانی تابع f است و مجموع طول و عرض آن برابر ۶ است.

۵۰۳- گزینه ۳ توجه کنید که $n > 4$ و

$$\binom{n-2}{n-4} < 45 \Rightarrow \frac{(n-2)!}{(n-4)!(n-2-n+4)!} < 45$$

$$\frac{(n-4)!(n-3)(n-2)}{(n-4)!2!} < 45$$

$$(n-3)(n-2) < 90 \Rightarrow n^2 - 5n - 84 < 0$$

$$(n-12)(n+7) < 0 \Rightarrow n-12 < 0 \Rightarrow n < 12$$

بنابراین $4 < n < 12$ ، بنابراین یکی از عددهای ۵، ۶، ...، ۱۱ است، که تعداد آن‌ها ۷ تا است.

۵۰۴- گزینه ۲ اگر پیشامد «پیروزی بر تیم A و پیشامد «پیروزی بر

تیم B را به ترتیب با A و B نشان دهیم، A و B مستقل از هم هستند.

۵۱۳- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\sqrt{5}\sqrt{3} = \sqrt{5 \times 3} \Rightarrow \sqrt{5 \times 3} = \sqrt{5} \times \sqrt{3} \Rightarrow 5^{\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{2}}$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان ۸ برسانیم، معلوم می‌شود که

$$5^4 \times 3^4 = 5^4 \times 3^4 \Rightarrow x = 5^4 \times 3^4 = 75$$

۵۱۴- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\frac{1}{c} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{3}{abc} \xrightarrow{\times abc} ab - bc - ca = 3$$

از طرف دیگر،

$$(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab - bc - ca)$$

بنابراین

$$4^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \times 3 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 10$$

۵۱۵- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $x_1 + x_2 = -6$ و $x_1 x_2 = -3$

بنابراین

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_1}{x_2} + x_2\right) \left(\frac{x_2}{x_1} + x_1\right) &= 1 + \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} + x_1 x_2 = 1 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} + x_1 x_2 \\ &= 1 + \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} + x_1 x_2 \\ &= 1 + \frac{(-6)^2 - 2(-3)}{-3} - 3 = 88 \end{aligned}$$

۵۱۶- گزینه ۲ چون $P(x)$ بر $x-1$ بخش پذیر است پس $P(1)=0$ و

$$\text{در نتیجه } a + 4 + 14 + 10 = 0 \text{ پس } a = -28$$

۵۱۷- گزینه ۳ طرفین تساوی داده شده را بر $\sin^2 \alpha$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{4 \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{2}{\sin^2 \alpha}$$

$$4 - \cot^2 \alpha + \cot \alpha = 2(1 + \cot^2 \alpha)$$

$$3 \cot^2 \alpha - \cot \alpha - 2 = 0 \Rightarrow \cot \alpha = 1 \text{ یا } \cot \alpha = -\frac{2}{3}$$

با توجه به اینکه انتهای کمان نظیر زاویه α در ناحیه دوم قرار دارد، پس

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha = \frac{2}{3} \text{ بنابراین } \cot \alpha = -\frac{2}{3}$$

۵۱۸- گزینه ۲ از اتحاد $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ نتیجه می‌شود

$$\sin \frac{\pi}{24} \cos \frac{\pi}{24} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{12}$$

پس

$$\sin \frac{\pi}{24} \cos \frac{\pi}{24} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

۵۱۹- گزینه ۳ معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$2 \sin^2 x + \cos x - 1 = 0 \Rightarrow 2 - 2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow (\cos x - 1)(2 \cos x + 1) = 0$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازه $[0, 2\pi]$ به صورت زیر هستند

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 0, \quad x = 2\pi$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}, \quad x = \frac{4\pi}{3}$$

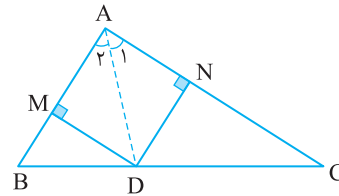
پس مجموع جواب‌های بالا برابر است با 4π .

هر نقطه روی نیمساز، از دو ضلع زاویه، به یک فاصله است، پس $DM = DN = x$ در نتیجه

$$3 \times 7 = x \times 7 + x \times 3 \Rightarrow 10x = 21 \Rightarrow x = 2/1$$

توجه کنید که $\hat{A}_1 = 45^\circ$ ، پس مثلث ADN قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است. بنابراین

$$AD = x\sqrt{2} \Rightarrow AD = 2/1\sqrt{2}$$

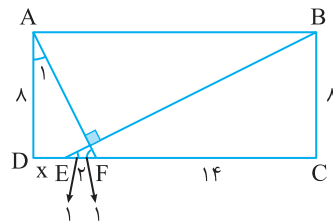


۵۰۹- گزینه ۲ فرض کنید $DE = x$ توجه کنید که زاویه‌های E_1 و

F_1 متمم یکدیگرند، همین‌طور زاویه‌های A_1 و F_1 متمم یکدیگرند. بنابراین $\hat{A}_1 = \hat{E}_1$ در نتیجه، مثلث‌های قائم‌الزاویه ADF و EBC متشابه‌اند (ز).

به این ترتیب،

$$\frac{DF}{CB} = \frac{AD}{EC} \Rightarrow \frac{x+2}{8} = \frac{1}{16} \Rightarrow x = 2$$



۵۱۰- گزینه ۲ با افزودن مقدار ثابتی به هر داده، انحراف معیار تغییری

نمی‌کند ولی میانگین به همان مقدار افزایش پیدا می‌کند.

$$(CV)' = \frac{\sigma'}{\bar{x}'} = \frac{\sigma}{\bar{x} + \Delta \bar{x}} = \frac{\sigma}{6\bar{x}} = \frac{CV}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

۵۱۱- گزینه ۱ تعداد دایره‌های رنگی در شکل‌ها، مطابق جدول زیر است:

شماره شکل	۱	۲	۳	۴
تعداد کل دایره‌ها	۴	۹	۱۶	۲۵
تعداد دایره‌های رنگی	۲	۵	۸	۱۳

تعداد کل دایره‌ها در شکل n برابر $(n+1)^2$ است و اگر n عددی فرد باشد،

تعداد دایره‌های رنگی $\frac{(n+1)^2}{2}$ است. پس در شکل سیزدهم $\frac{14^2}{2}$ یعنی ۹۸

دایره رنگی وجود دارد.

۵۱۲- گزینه ۳ چون تعداد جمله‌های هر دسته برابر شماره آن دسته

است، برای نوشتن ۲۹ دسته نخست از $1+2+3+\dots+29$ عدد استفاده شده

است. چون $\frac{29 \times 30}{2} = 435$ ، پس برای نوشتن ۲۹ دسته نخست، از نخستین ۴۳۵ عدد فرد استفاده شده است. پس جمله اول دسته

سی‌ام، 436 امین عدد فرد و جمله آخر آن $(436+29)$ امین عدد فرد است. از

طرف دیگر، جمله عمومی عددهای فرد به صورت $a_n = 2n-1$ است، پس

$$a_{465} + a_{436} = 2(465) - 1 + 2(436) - 1 = 2(465 + 436 - 1) = 2(900) = 1800$$

۵۲۰- گزینه ۲

ابتدا مجموعه جواب‌های نامعادله داده شده را می‌یابیم

$$x^2 \leq |x| \Rightarrow |x|^2 \leq |x| \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

بنابراین $x^2 - 1 \leq 0$ پس

$$A = -(x^2 - 1) - |x| = -|x|^2 - |x| + 1 = \frac{5}{4} - \left(|x| + \frac{1}{4}\right)^2$$

اکنون محدوده عبارت فوق را می‌یابیم

$$0 \leq |x| \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq |x| + \frac{1}{4} \leq \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} \leq \left(|x| + \frac{1}{4}\right)^2 \leq \frac{9}{4}$$

$$-\frac{9}{4} \leq -\left(|x| + \frac{1}{4}\right)^2 \leq -\frac{1}{4} \Rightarrow -1 \leq \frac{5}{4} - \left(|x| + \frac{1}{4}\right)^2 \leq 1$$

بنابراین $-1 \leq A \leq 1$ و کمترین مقدار A برابر ۱- است.

۵۲۱- گزینه ۳

دامنه تابع مجموعه جواب‌های نامعادله $4x - x^2 - 3 \geq 0$ است:

$$x^2 - 4x + 3 \leq 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) \leq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 3$$

پس $D_f = [1, 3]$. در نتیجه $a=1$ و $b=3$ و $2a+b=5$.

۵۲۲- گزینه ۲

توجه کنید که

$$f(g(x)) = \frac{3x-2}{2x-1} \Rightarrow f\left(\frac{3}{2x}\right) = \frac{3x-2}{2x-1}$$

اگر در این تساوی به جای x قرار دهیم $\frac{3}{2x}$ ، به دست می‌آید

$$f(x) = \frac{3 \times \frac{3}{2x} - 2}{2 \times \frac{3}{2x} - 1} = \frac{9-4x}{6-2x}$$

$$\text{در نتیجه } (f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{9-4x}{6-2x} + \frac{3}{2x} = \frac{4x^2 - 6x - 9}{2x^2 - 6x}$$

۵۲۳- گزینه ۲

اگر نمودار تابع $y = \sqrt{-x}$ را دو واحد به چپ منتقلکنیم، نمودار تابع $y = \sqrt{-(x+2)} = \sqrt{-x-2}$ به دست می‌آید، اگر نموداربه دست آمده را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y = \sqrt{x-2}$

به دست می‌آید و اگر این نمودار را مجدداً دو واحد به چپ منتقل کنیم، نمودار

تابع $y = \sqrt{(x+2)-2} = \sqrt{x}$ به دست می‌آید.

۵۲۴- گزینه ۲

قرینه نمودار تابع f نسبت به خط $y=x$ نمودار تابع f^{-1} است. پس باید f و f^{-1} برابر باشند. ضابطه f^{-1} را به دست می‌آوریم:

$$y = \sqrt[3]{a+bx^3} \Rightarrow y^3 = a+bx^3 \Rightarrow x^3 = \frac{y^3 - a}{b}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{b}y^3 - \frac{a}{b}} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{b}x^3 - \frac{a}{b}}$$

از تساوی $f(x) = f^{-1}(x)$ نتیجه می‌شود $\sqrt[3]{a+bx^3} = \sqrt[3]{-\frac{a}{b} + \frac{1}{b}x^3}$ پس $a = -\frac{a}{b}$ و در نتیجه $b = \pm 1$. اگر $b=1$ ، آن‌گاه $a=0$ کهقابل قبول نیست. پس $b=-1$.

۵۲۵- گزینه ۳

ابتدا توجه کنید که

$$2^a = 3 \Rightarrow a = \log_2 3 \Rightarrow \frac{1}{a} = \log_2 2$$

$$3^b = 8 \Rightarrow b = \log_3 8$$

بنابراین $b + \frac{1}{a} = \log_3 8 + \log_2 2 = \log_2 16$ و در نتیجه

$$3^{b + \frac{1}{a}} = 3^{\log_2 16} = 16$$

۵۲۶- گزینه ۱

با استفاده از خاصیت $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ معادله را

حل می‌کنیم:

$$\frac{\log x}{\log 2} + \frac{\log x}{\log 5} = 2 \Rightarrow \log x \left(\frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log 5} \right) = 2$$

$$\log x \left(\frac{\log 5 + \log 2}{\log 2 \times \log 5} \right) = 2 \Rightarrow \log x \left(\frac{1}{\log 2 \times \log 5} \right) = 2$$

$$\log x = 2 \log 2 \times \log 5 = \log 4 \times \log 5$$

$$x = 10^{\log 4 \times \log 5} = (10^{\log 4})^{\log 5} = 4^{\log 5}$$

۵۲۷- گزینه ۴

برای اینکه تابع f در نقطه $x=1$ پیوسته باشد، باید

حد تابع در این نقطه برابر a باشد، پس

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}}{x-1} \times \frac{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2-x}}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} \sqrt[3]{x-1}}{x-1} \times \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{(x-1)^2}} = +\infty \end{aligned}$$

با توجه به اینکه تابع f در نقطه ۱ حد نامتناهی دارد، پس هیچ مقداری برای a پیدا نمی‌شود.

۵۲۸- گزینه ۳

ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2}{(a+2)x^2} = \frac{a}{a+2}$$

پس

$$\frac{a}{a+2} = 3 \Rightarrow a = -3$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3x^2 + x + 4}{-x^2 - 3x - 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(-3x+4)}{(x+1)(-x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3x+4}{-x-2} = -7 \end{aligned}$$

۵۲۹- گزینه ۲

آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[-1, 2]$ برابر است با

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{f(2) - f(-1)}{3} = \frac{6 - 0}{3} = 2$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطه a برابر $f'(a)$ است.

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow f'(a) = 3a^2 - 1$$

بنابراین

$$3a^2 - 1 = 2 \Rightarrow 3a^2 = 3 \Rightarrow a = \pm 1$$

پس نقطه $x=1$ جواب مسئله است.

۵۳۵- گزینه ۴ نقطه تقاطع دو قطر با معادلات $y=2x-1$ و

$y=x+2$ را از حل دستگاه معادلات $\begin{cases} y=2x-1 \\ y=x+2 \end{cases}$ به دست می آوریم که همان مرکز دایره است:

$$2x-1=x+2 \Rightarrow x=3, y=5$$

پس $O(3,5)$ مرکز دایره و $A(0,1)$ نقطه ای روی دایره است، در نتیجه

$$r=OA=\sqrt{(3-0)^2+(5-1)^2}=5$$

۵۳۶- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که O وسط AB است. بنابراین

$$x_O = \frac{x_A+x_B}{2} \Rightarrow 1 = \frac{r+b+a}{2} \Rightarrow r+b+a=2$$

$$y_O = \frac{y_A+y_B}{2} \Rightarrow -2 = \frac{r+a+3b-1}{2} \Rightarrow r+a+3b=-3$$

در نتیجه $a=-4$ و $b=3$. پس کافی است فاصله نقطه های $O(1,-2)$ و $A(6,-12)$ را حساب کنیم تا طول شعاع دایره به دست آید:

$$OA=\sqrt{(6-1)^2+(-12+2)^2}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$$

۵۳۷- گزینه ۳ مجموع فاصله های هر نقطه روی بیضی تا کانون های بیضی برابر $2a$ است. در نتیجه

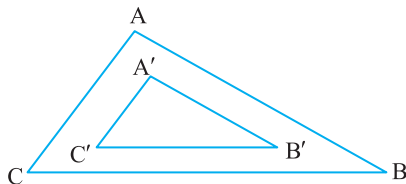
$$\begin{aligned} 2a &= \sqrt{(3+3)^2+(\frac{16}{5}-0)^2} + \sqrt{(3-3)^2+(\frac{16}{5}-0)^2} \\ &= \sqrt{6^2+\frac{16^2}{25}} + \frac{16}{5} = \frac{2}{5}\sqrt{15^2+8^2} + \frac{16}{5} = \frac{2 \times 17}{5} + \frac{16}{5} = 10 \end{aligned}$$

پس $a=5$. از طرف دیگر $c=OF=3$. در نتیجه خروج از مرکز بیضی مورد نظر برابر است با $\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$.

۵۳۸- گزینه ۳ این دو مثلث که اضلاعی موازی دارند، متشابه هستند.

نسبت تشابه آن ها، برابر نسبت دو ضلع بزرگ تر یعنی $\frac{9}{6}$ یا $\frac{3}{2}$ است. اگر مساحت مثلث ABC و $A'B'C'$ را به ترتیب S و S' بنامیم، به دست می آید

$$\frac{S}{S'} = (\frac{3}{2})^2 \Rightarrow \frac{S}{S'} = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{S-S'}{S'} = \frac{9-4}{4} = \frac{5}{4} = 1/25$$



۵۳۹- گزینه ۴ راه حل اول ارتفاع DH را در مثلث BCD رسم

می کنیم. چون D روی نیمساز زاویه ABC است، پس $DH=AD=2\sqrt{3}$. در نتیجه، بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه DHC .

$$DC^2=DH^2+HC^2 \Rightarrow 16=12+HC^2 \Rightarrow HC=2$$

اکنون توجه کنید که بنابر رابطه های طولی در مثلث قائم الزاویه،

$$DH^2=HC \times HB \Rightarrow 12=2 \times HB \Rightarrow HB=6$$

پس $BC=6+2=8$. به این ترتیب، بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه BDC ،

$$BC^2=BD^2+DC^2 \Rightarrow 64=BD^2+16 \Rightarrow BD=4\sqrt{3}$$

۵۳۰- گزینه ۴ با استفاده از قواعد مشتق گیری، مشتق تابع را حساب می کنیم:

$$f'(x) = \frac{\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}} - \frac{2x}{3\sqrt{(x^2+1)^2}}}{\sqrt{(x^2+1)^2}}$$

بنابراین $f'(0) = \frac{0-0}{1} = 0$.

۵۳۱- گزینه ۲ ابتدا نقاط بحرانی تابع f را پیدا می کنیم:

$$f'(x) = x^3 - 3x^2 - 4x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3x - 4) = 0 \Rightarrow x=0, x=-1, x=4$$

بنابراین کمترین مقدار تابع بین مقادیر زیر است:

$$f(0)=0, \quad f(-1)=-\frac{3}{4}, \quad f(4)=-32$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

پس کمترین مقدار تابع برابر -32 است.

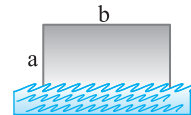
۵۳۲- گزینه ۲ اگر مطابق شکل مستطیل را به ابعاد a و b در نظر

بگیریم، آن گاه $2a+b=48$ و می خواهیم $S=ab$ ماکزیمم شود. توجه کنید که $b=48-2a$ و در نتیجه

$$S=a(48-2a)=48a-2a^2 \Rightarrow S'=48-4a$$

$$S'=0 \Rightarrow a=12$$

بنابراین بیشترین مقدار S به ازای $a=12$ به دست می آید و برابر است با $12 \times 24 = 288$



۵۳۳- گزینه ۲ تساوی داده شده را می توان به شکل زیر نوشت

$$\begin{aligned} \frac{(n+2)!}{(n+2-4)!} &= 24 \Rightarrow \frac{(n+2)!}{(n-2)!} = 24 \\ \frac{(n+1)!}{(n+1-3)!} - n \times \frac{(n-1)!}{(n-1-2)!} &= \frac{(n+1)!}{(n-2)!} - n \frac{(n-1)!}{(n-3)!} \\ \frac{(n+1)!}{(n+1)-(n-1)!(n-2)} &= 24 \Rightarrow \frac{(n-1)!n(n+1)(n+2)}{(n-1)!n(n+1)-n(n-1)!(n-2)} = 24 \\ \frac{(n+1)(n+2)}{n+1-(n-2)} &= 24 \Rightarrow (n+1)(n+2)=72 \end{aligned}$$

$$n^2+3n-70=0 \Rightarrow (n-7)(n+10)=0 \Rightarrow n=7$$

۵۳۴- گزینه ۳ فرض کنید A پیشامد این باشد که سمانه استخدام شود

و B پیشامد این باشد که سمیرا استخدام شود. پیشامد مورد نظر $(A \cap B) \cup (A' \cap B)$ است و چون $A \cap B$ و $A' \cap B$ ناسازگارند، پس

$$P(A \cap B) + P(A' \cap B)$$

احتمال مورد نظر برابر است با $P(A \cap B) + P(A' \cap B)$. از طرف دیگر، چون A و B مستقل اند، پس A و B' و نیز A' و B هم مستقل اند. بنابراین

$$P(A \cap B) + P(A' \cap B) = P(A)P(B) + P(A')P(B)$$

$$= \frac{1}{5} \times \frac{5}{6} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$$

از حل این معادله مقدار x را به دست می‌آوریم.

$$x^3 + 3x - 4 = x^3 - 1 + 3x - 3 = (x-1)(x^2 + x + 1) + 3(x-1)$$

$$(x-1)(\underbrace{x^2 + x + 4}_{\Delta < 0}) = 0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$$

راه‌حل دوم می‌دانیم اگر $a+b+c=0$ آنگاه $a^3+b^3+c^3=3abc$ ، بنابراین

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \Rightarrow \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} + (-x) = 0$$

$$2 + \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} - x^3 = 3\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}(-x)$$

پس از ساده کردن مجدداً به معادله $x^3 + 3x - 4 = 0$ می‌رسیم که در راه‌حل اول آن را حل کرده‌ایم.

۵۴۳- گزینه ۳ خط $(\delta-k)y + 2x = 3$ محور x را در نقطه $(\frac{3}{2}, 0)$ قطع می‌کند. این نقطه روی خط $mx - y = -2$ نیز است. پس

$$m(\frac{3}{2}) - 0 = -2 \Rightarrow m = -\frac{4}{3}$$

چون دو خط بر هم عمودند، حاصل ضرب شیب‌های آن‌ها -1 است، پس

$$m \times (\frac{-2}{\delta-k}) = -1 \Rightarrow \frac{-4}{3} \times \frac{-2}{\delta-k} = -1 \Rightarrow k = \frac{23}{3}$$

بنابراین $k-m=9$.

۵۴۴- گزینه ۴ برای آنکه چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+2$ بخش پذیر باشد، باید $P(-2)=0$ ، بنابراین

$$P(-2) = 16 - 8a + 16 = 0 \Rightarrow a = 4$$

$$P(x) = x^4 + 4x^3 - 8x$$

اکنون جواب‌های معادله $P(x)=0$ را به دست می‌آوریم:

$$x^4 + 4x^3 - 8x = 0 \Rightarrow (x+2)(x^3 + 2x^2 - 4x) = 0$$

$$x(x+2)(x^2 + 2x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \\ x^2 + 2x - 4=0 \end{cases}$$

$$x^2 + 2x - 4 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 5 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{5} - 1 \\ x = -\sqrt{5} - 1 \end{cases}$$

بنابراین کوچک‌ترین جواب $-\sqrt{5}-1$ است.

۵۴۵- گزینه ۱ توجه کنید که

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-5}{1} = 5, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{1} = 1$$

در نتیجه

$$\frac{1}{2x_1-1} + \frac{1}{2x_2-1} = \frac{2x_2-1+2x_1-1}{(2x_1-1)(2x_2-1)} = \frac{2(x_1+x_2)-2}{4x_1x_2-2(x_1+x_2)+1}$$

$$= \frac{2 \times 5 - 2}{4 \times 1 - 2 \times 5 + 1} = -\frac{8}{5}$$

$$\frac{1}{2x_1-1} \times \frac{1}{2x_2-1} = \frac{1}{4x_1x_2-2(x_1+x_2)+1} = -\frac{1}{5}$$

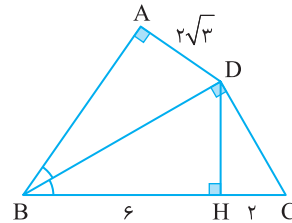
بنابراین معادله مورد نظر $x^2 + \frac{8}{5}x - \frac{1}{5} = 0$ ، یعنی $5x^2 + 8x - 1 = 0$ است.

راه‌حل دوم مثلث‌های ABD و DBC متشابه‌اند (ز.ز). بنابراین

$$\frac{BD}{BC} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BC = \frac{2\sqrt{3}}{3} BD$$

اکنون توجه کنید که بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه BDC ،

$$BC^2 = BD^2 + CD^2 \Rightarrow \frac{4}{3} BD^2 = BD^2 + 16 \Rightarrow BD = 4\sqrt{3}$$



۵۴۰- گزینه ۴ با توجه به $n=25$ ، $\bar{x}=30$ و $\sigma=8$ ،

$$\text{مجموع مربعات اختلاف از میانگین‌ها} = 64 = \frac{\quad}{25}$$

$$\text{مجموع مربعات اختلاف از میانگین‌ها} = 25 \times 64 = 1600$$

از طرفی داده‌های 10 ، 15 ، 45 و 50 دارای میانگین 30 هستند. در نتیجه

x_i	10	15	45	50
$x_i - 30$	-20	-15	15	20

مجموع مربعات اختلاف از میانگین داده‌ها برابر است با

$$400 + 225 + 225 + 400 = 1250$$

حال واریانس 21 داده باقی‌مانده به صورت زیر به دست می‌آید

$$\sigma^2 = \frac{64 \times 25 - 1250}{25 - 4} = \frac{1600 - 1250}{21} = \frac{350}{21} = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$$

۵۴۱- گزینه ۱ اگر دو عدد a و b بنامیم، واسطه حسابی آن‌ها $\frac{a+b}{2}$

و واسطه هندسی آن‌ها $\sqrt{ab}$ است. پس

$$\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} = \frac{3}{\sqrt{8}} \Rightarrow \frac{(a+b)^2}{4ab} = \frac{9}{8} \Rightarrow 8(a+b)^2 = 36ab$$

$$2a^2 + 2b^2 - 5ab = 0 \Rightarrow (2a-b)(a-2b) = 0$$

$$b=2a \Rightarrow \frac{b}{a} = 2, \quad a=2b \Rightarrow \frac{a}{b} = 2$$

بنابراین نسبت عدد بزرگ‌تر به عدد کوچک‌تر برابر با 2 است.

۵۴۲- گزینه ۱ **راه‌حل اول** فرض می‌کنیم $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$

و طرفین تساوی را به توان 3 می‌رسانیم:

$$x^3 = (\sqrt[3]{2+\sqrt{5}})^3 + (\sqrt[3]{2-\sqrt{5}})^3$$

$$+ 3\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}})$$

$$x$$

$$x^3 = 2 + \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} + 3\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}x$$

$$-1$$

بنابراین

$$x^3 = 4 - 3x \Rightarrow x^3 + 3x - 4 = 0$$

۵۵۰- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned} \sin^6 x + \cos^6 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x \Rightarrow 3(\sin x \cos x)^2 = \frac{1}{5} \\ \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 &= \frac{1}{15} \Rightarrow \sin^2 2x = \frac{4}{15} \\ \cos 4x &= 1 - 2 \sin^2 2x = 1 - 2\left(\frac{4}{15}\right) = -\frac{7}{15} \end{aligned}$$

بنابراین

۵۵۱- گزینه ۳ اگر $|x+1| \leq 7$ ، آنگاه $-7 \leq x+1 \leq 7$ ، یعنی

$-8 \leq x \leq 6$. اگر $0 \leq x \leq 6$ ، آنگاه عبارت مورد نظر برابر است با

$A = x^2 - 4x$ که حدود آن به صورت زیر به دست می آید:

$$A = x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$$

$$0 \leq x \leq 6 \Rightarrow -2 \leq x-2 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq (x-2)^2 \leq 16 \Rightarrow -4 \leq A \leq 12$$

اگر $-8 \leq x \leq 0$ ، آنگاه عبارت مورد نظر برابر است با $A = -x^2 - 4x$ که حدود آن به صورت زیر به دست می آید:

$$A = -x^2 - 4x = -(x+2)^2 + 4$$

$$-8 \leq x \leq 0 \Rightarrow -6 \leq x+2 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq (x+2)^2 \leq 36$$

$$-36 \leq -(x+2)^2 \leq 0 \Rightarrow -32 \leq A \leq 4$$

پس بیشترین مقدار A برابر ۱۲ و کمترین مقدار آن برابر -۳۲ است و مجموع این دو مقدار برابر -۲۰ است.

۵۵۲- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x^2-4) + (3ax+6a)}{x+2} = \frac{(x-2)(x+2) + 3a(x+2)}{x+2} \\ &= \frac{(x+2)(x-2+3a)}{x+2} = x+3a-2, \quad x \neq -2 \end{aligned}$$

برای اینکه تابع همانی باشد، باید $f(x) = x$ ، پس $3a-2=0$ و در نتیجه

$$a = \frac{2}{3}, \text{ بنابراین } f(3a) = 3a = 2$$

$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{می دانیم}$$

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow g(f(x)) = g(0) = -2$$

$$x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow g(f(x)) = g(-1) = -2$$

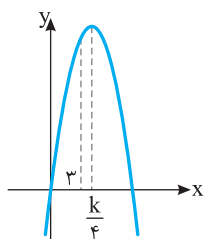
بنابراین به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $g(f(x)) = -2$.

۵۵۴- گزینه ۳ نمودار تابع

$y = -2x^2 + kx$ به شکل مقابل است. اگر

$x=3$ قبل از طول رأس سهمی قرار گیرد یا بر آن منطبق شود، تابع یک به یک است. بنابراین

$$k \geq \frac{9}{4}, \text{ پس } k \geq 12$$



۵۴۶- گزینه ۴ واضح است که $x=1$ جواب معادله است. پس $x-1$ عامل معادله است

$$(x^3-1) + (mx-m) = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2+x+1) + m(x-1) = 0$$

$$(x-1)(x^2+x+1+m) = 0$$

برای اینکه معادله سه جواب متمایز داشته باشد، باید معادله $x^2+x+m+1=0$ دو جواب داشته باشد که برابر ۱ نباشند. بنابراین

$$\Delta = 1-4(m+1) > 0 \Rightarrow -4m-3 > 0 \Rightarrow m < -\frac{3}{4}$$

$$1^2+1+m+1 \neq 0 \Rightarrow m \neq -3$$

پس

$$m \in (-\infty, -\frac{3}{4}) - \{-3\}$$

۵۴۷- گزینه ۲ برای حل این مسئله باید نامعادله زیر را حل کنیم:

$$\frac{2}{x} + x > 3 \Rightarrow \frac{2}{x} + x - 3 > 0$$

عبارت طرف چپ این نامعادله به صورت $\frac{x^2-3x+2}{x}$ درمی آید. چون

$$x^2-3x+2 = (x-1)(x-2), \text{ پس جدول تعیین علامت به شکل زیر است:}$$

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$\frac{x^2-3x+2}{x}$		$-$	$+$	$-$	$+$

بنابراین مجموعه جواب های نامعادله مورد نظر $(0,1) \cup (2,+\infty)$ است. در

نتیجه $a+b=2$ و $b=2$ ، $a=0$.

۵۴۸- گزینه ۳ اگر در صورت و مخرج به جای $\cos^2 10^\circ$ قرار دهیم

$$1 - \sin^2 10^\circ$$

$$\frac{7+5 \sin^2 10^\circ - \cos^2 10^\circ}{3 \sin^2 10^\circ + 2 \cos^2 10^\circ - 1} = \frac{7+5 \sin^2 10^\circ - (1 - \sin^2 10^\circ)}{3 \sin^2 10^\circ + 2(1 - \sin^2 10^\circ) - 1}$$

$$= \frac{6+6 \sin^2 10^\circ}{\sin^2 10^\circ + 1} = \frac{6(1+\sin^2 10^\circ)}{1+\sin^2 10^\circ} = 6$$

۵۴۹- گزینه ۲ نمودار تابع از نقطه $(0,2)$ عبور می کند یعنی $f(0)=2$.

بنابراین

$$f(0) = 4a - 2b \sin 0^\circ = 2 \Rightarrow 4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

پس ضابطه تابع به صورت $f(x) = 2 - 2b \sin x$ است. بیشترین مقدار تابع

برابر ۶ است که یا به ازای $\sin x = 1$ به دست می آید یا به ازای $\sin x = -1$

(بستگی به علامت b دارد). اگر $b > 0$ ، آنگاه بیشترین مقدار تابع به ازای

$$\sin x = -1 \text{ به دست می آید که برابر است با } 2+2b. \text{ بنابراین}$$

$$2+2b=6 \Rightarrow b=2$$

و در نتیجه $f(x) = 2 - 4 \sin x$. اگر $b < 0$ ، آنگاه بیشترین مقدار تابع به

ازای $\sin x = 1$ به دست می آید که برابر است با $2-2b$. بنابراین

$$2-2b=6 \Rightarrow b=-2$$

و در نتیجه $f(x) = 2 + 4 \sin x$. با توجه به اینکه برای x هایی که کمی

بزرگ تر از صفر هستند، مقدار تابع کمتر از ۲ است، ضابطه $f(x) = 2 + 4 \sin x$

قابل قبول نیست. بنابراین $b=2$ و در نتیجه $ab=1$.

اگر $a=7$ ، حد مورد نظر می‌شود

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+7} + 1}{(x-2)(x+2)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2} - \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x-2} \right) \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} \\ &= \frac{1}{4} \left(\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2-4}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+7-9}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)} \right) \\ &= \frac{1}{4} \times \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+2} - \frac{1}{\sqrt{x+7}+3} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{48}\end{aligned}$$

بنابراین $b-a=41$ و $b=48$

راه‌حل دوم توجه کنید که حاصل حد را می‌توانیم به کمک قاعده هسپیتال نیز به دست آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+7} + 1}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+2}} - \frac{1}{2\sqrt{x+7}}}{2x} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}}{4} = \frac{1}{48}$$

۵۵۵- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned}f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax - a + 2) = a - a + 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 2, \text{ بنابراین به ازای هر مقدار } a, \end{aligned}$$

۵۶۰- گزینه ۴ چون -1 و 5 صفرهای تابع درجه دوم f هستند، پس

$$f(x) = a(x+1)(x-5) = ax^2 - 4ax - 5a$$

بنابراین $f'(x) = 2ax - 4a$ ، در نتیجه $f'(-3) = -10a$ و $f'(1) = -2a$

همچنین، $f(1) = -8a$ ، بنابراین

$$f'(-3)f'(1) = \Delta f(1) \Rightarrow (-10a)(-2a) = -4a \Rightarrow a = -2$$

به این ترتیب $f(x) = -2(x+1)(x-5)$ و $f(2) = 18$

۵۶۱- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $g'(x) = 1 + 3x^2 f'(x^3)$

$$\text{بنابراین } g'(2) = 1 + 3 \times 4 f'(8) = 1 + 12 \times 2 = 25$$

۵۶۲- گزینه ۱ در $x=0$ تابع مشتق دارد، زیرا

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$$

اگر $x \neq 0$ ، آن‌گاه مشتق تابع به صورت $f'(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{x}{3\sqrt[3]{x^2}}$ محاسبه می‌شود.

بنابراین مشتق تابع به ازای هر x حقیقی تعریف می‌شود و در نتیجه $D_{f'} = \mathbb{R}$

۵۶۳- گزینه ۴ توجه کنید که

$$2b = 8 \Rightarrow b = 4, \quad 2a = 10 \Rightarrow a = 5$$

بنابراین

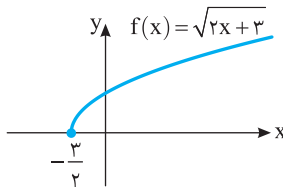
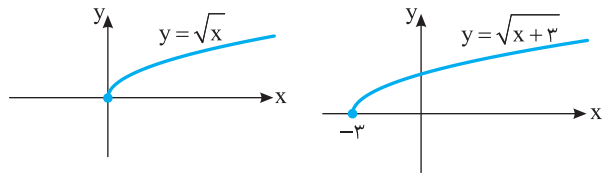
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = 16 + c^2 \Rightarrow c = 3$$

در نتیجه $FF' = 2c = 6$. از طرف دیگر، چون مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر $2a$ است، پس $KF + KF' = 2a = 10$. به این ترتیب،

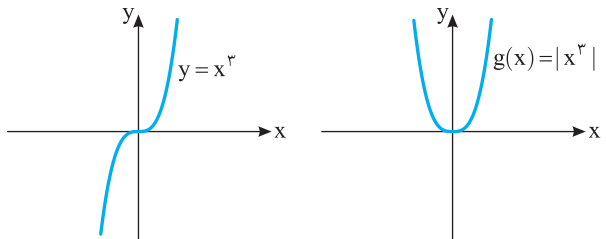
$$KFF' \text{ مثلث } = KF + KF' + FF' = 10 + 6 = 16$$

۵۵۵- گزینه ۲ اگر نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را سه واحد به چپ منتقل

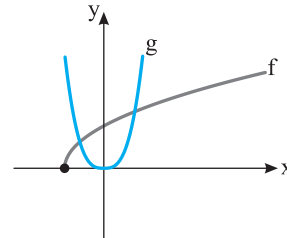
کنیم نمودار تابع $y = \sqrt{x+3}$ به دست می‌آید و اگر طول نقاط این نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع $f(x) = \sqrt{2x+3}$ به دست می‌آید.



برای رسم نمودار تابع $g(x) = |x^3|$ ، کافی است نمودار تابع $y = x^3$ را رسم کنیم و قسمتی از نمودار را که پایین محور طول‌ها قرار دارد، نسبت به این محور قرینه کنیم.



بنابراین نمودار توابع f و g مطابق شکل زیر در دو نقطه متقاطع‌اند.



۵۵۶- گزینه ۳ می‌توان نوشت

$$y = 3^{\frac{2-x}{2}} - 1 \Rightarrow y+1 = 3^{\frac{2-x}{2}} \Rightarrow \log_3(y+1) = \frac{2-x}{2}$$

$$x = 2 - 2 \log_3(y+1) = \log_3 3^2 - \log_3 (y+1)^2 = \log_3 \left(\frac{3}{y+1} \right)^2$$

$$\text{بنابراین } f^{-1}(x) = \log_3 \left(\frac{3}{x+1} \right)^2$$

۵۵۷- گزینه ۲ توجه کنید که $\log_8 9 = \log_3 3^2 = \frac{2}{3} \log_3 3$

پس

$$4^{1+\log_8 9} = 4 \times 4^{\frac{2}{3} \log_3 3} = 4 \times 2^{\frac{4}{3} \log_3 3} = 4 \times (2^{\log_3 3})^{\frac{4}{3}}$$

$$= 4 \times 3^{\frac{4}{3}} = 4 \times \sqrt[3]{3^4} = 12\sqrt[3]{3}$$

۵۵۸- گزینه ۳ **راه‌حل اول** چون حد مورد نظر وجود دارد و حد مخرج

برابر صفر است، باید حد صورت هم صفر باشد. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x+a+1}) = 0 \Rightarrow 2 - \sqrt{2+a+1} = 0 \Rightarrow a = 7$$

۵۶۸- گزینه ۱ طبق تعمیم قضیه تالس در دو مثلث ODE و OBD،

$$\begin{cases} AC \parallel BD \Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} \\ BC \parallel DE \Rightarrow \frac{OB}{OE} = \frac{OC}{OD} \end{cases} \Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OE} \Rightarrow \frac{3}{3+\delta} = \frac{3+\delta}{OE}$$

$$3OE = 64 \Rightarrow OE = \frac{64}{3} \xrightarrow{OE=OB+BE}$$

$$8+BE = \frac{64}{3} \Rightarrow BE = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$$

۵۶۹- گزینه ۴ فرض کنید $DE=x$. مثلث‌های AEF و DEC متشابه‌اند (ز.ز). بنابراین

$$\frac{AF}{DC} = \frac{EF}{ED} \quad (1)$$

چون $FB \parallel DC$ ، بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث KDC،

$$\frac{FB}{DC} = \frac{KF}{KD} \quad (2)$$

اگر تساوی‌های (۱) و (۲) را با هم جمع کنیم به دست می‌آید

$$\frac{AF+FB}{DC} = \frac{4}{x} + \frac{5}{9+x} \Rightarrow \frac{DC}{x} = \frac{4}{x} + \frac{5}{9+x} \Rightarrow 1 = \frac{4}{x} + \frac{5}{9+x}$$

$$x(9+x) = 4(9+x) + 5x \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$$

۵۷۰- گزینه ۴ میانگین ۳ داده ۱۶، ۲۴ و ۲۶ برابر است با

$$\frac{16+24+26}{3} = 22$$

واریانس آن‌ها صفر است پس تمام آن‌ها با هم برابرند و ۲۲ هستند.

بنابراین واریانس این ۱۴ داده برابر است با

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{(22-22)^2 + \dots + (22-22)^2}{14} + \frac{(16-22)^2 + (24-22)^2 + (26-22)^2}{14} \\ &= \frac{36+4+16}{14} = 4 \end{aligned}$$

بنابراین انحراف معیار ۱۴ داده برابر $\sigma=2$ است.

۵۶۴- گزینه ۴ در صورت گسترده دایره، ضرایب x^2 و y^2 برابرند. پس $a=3$. بنابراین معادله دایره به صورت زیر است:

$$3x^2 + 3y^2 + 6x - by + 3 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - \frac{b}{3}y + 1 = 0$$

بنابراین شعاع دایره برابر است با $r = \frac{1}{2} \sqrt{4 + \frac{b^2}{9} - 4(1)} = \frac{|b|}{6}$. طبق فرض

$$r=2, \text{ در نتیجه } \frac{|b|}{6} = 2 \Rightarrow |b| = 12$$

۵۶۵- گزینه ۴ تعداد نقطه‌های مشخص شده ۹ تا است. تعداد راه‌های

انتخاب ۴ نقطه از این ۹ نقطه برابر است با $\binom{9}{4} = 126$. تعداد راه‌های انتخاب

به طوری که دست کم دو تا از آن‌ها از رأس‌های مثلث باشند، برابر است با

$$\binom{3}{2} \binom{6}{2} + \binom{3}{3} \binom{6}{1} = 3 \times 15 + 1 \times 6 = 51$$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با $\frac{51}{126} = \frac{17}{42}$.

۵۶۶- گزینه ۱ چون یکی از سه طرف به تصادف انتخاب می‌شود،

احتمال انتخاب هر یک برابر $\frac{1}{3}$ است. اگر از طرف A، ۴ مهره به تصادف

خارج کنیم، احتمال آنکه ۲ مهره سفید باشد برابر است با

$$\frac{\binom{4}{2} \binom{5}{2}}{\binom{9}{4}} = \frac{6 \times 10}{126} = \frac{60}{126} = \frac{10}{21}$$

اگر از هر یک از دو طرف B یا C، ۴ مهره به تصادف خارج کنیم، احتمال آنکه ۲ مهره سفید باشند برابر است با

$$\frac{\binom{6}{2} \binom{3}{2}}{\binom{9}{4}} = \frac{15 \times 3}{126} = \frac{5}{14}$$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{3} \times \frac{10}{21} \right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{5}{14} \right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{5}{14} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{10}{21} + 2 \times \frac{5}{14} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{10}{21} + \frac{5}{7} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{10+15}{21} \right) = \frac{1}{3} \times \frac{25}{21} = \frac{25}{63} \end{aligned}$$

۵۶۷- گزینه ۳ فرض کنید $AE=x$. چون $AE \parallel DC$ ، بنابر قضیه

خطوط موازی و مورب، $\hat{E}_1 = \hat{D}_1$ و $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$. بنابراین مثلث‌های AEF و

CDF متشابه‌اند (ز.ز). در نتیجه

$$\frac{AE}{CD} = \frac{EF}{DF} \Rightarrow \frac{x}{x+3} = \frac{4}{6} \Rightarrow 6x = 4x + 12 \Rightarrow x = 6$$

