

جلد اول: درس‌نامه + آزمون‌های مبحثی و جامع

جامع ریاضی + موج آزمون

رشته ریاضی

کاظم اجلالی، ارشک حمیدی



انتشرالگو

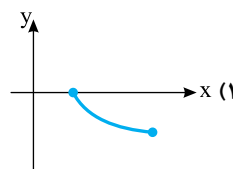
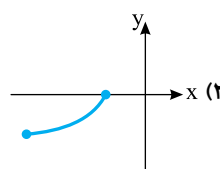
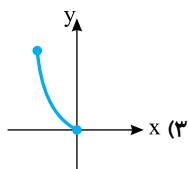
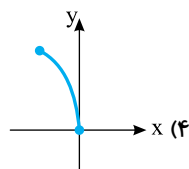
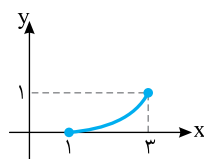
فصل اول: تابع (آزمون‌های ۱ تا ۴)	۱
فصل دوم: مثلثات (آزمون‌های ۵ تا ۹)	۵
فصل سوم: حد و پیوستگی (آزمون‌های ۱۰ تا ۱۴)	۱۰
فصل چهارم: مشتق (آزمون‌های ۱۵ تا ۱۸)	۱۵
فصل پنجم: کاربردهای مشتق (آزمون‌های ۱۹ تا ۲۳)	۱۹
فصل ششم: بازه و مجموعه (آزمون ۲۴)	۲۴
فصل هفتم: الگو و دنباله (آزمون‌های ۲۵ و ۲۶)	۲۵
فصل هشتم: توان، ریشه، اتحاد، تجزیه و تقسیم (آزمون‌های ۲۷ تا ۳۰)	۲۷
فصل نهم: معادله، تعیین علامت و نامعادله (آزمون‌های ۳۱ و ۳۲)	۳۱
فصل دهم: قدرمطلق و جزء صحیح (آزمون‌های ۳۳ و ۳۴)	۳۳
فصل یازدهم: توابع نمایی و لگاریتمی (آزمون‌های ۳۵ و ۳۶)	۳۵
فصل دوازدهم: آزمون‌های جامع (آزمون‌های ۳۷ تا ۴۱)	۳۷
فصل سیزدهم: پاسخ تشریحی آزمون‌ها	۴۷

آزمون فصل تابع (۱)

آزمون ۱

سؤال	گام
۱	۲
۲	۹
۳	۲۲ ۳۱۹
۴	۲۲ ۳۲۷
۵	۳۰ ۳۱ ۳۲ ۳۳
۶	۲۲ ۲۶
۷	۲۷
۸	۵۴ ۳۳۱
۹	۶۳
۱۰	۳۵ ۶۳

- ۱- به ازای چند مقدار مختلف m رابطه $f = \{(1, 4m^3 - m), (2m, 2), (1, 0), (0, 4), (4m, 2)\}$ تابع است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ صفر
- ۲- اگر تابع $f(x) = \frac{(a+2)x+3}{2x-3}$ تابعی ثابت باشد، مقدار a کدام است؟
 (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) -۳ (۴) -۴
- ۳- کدام عدد در دامنه تابع $f(x) = \frac{1}{x-1-\sqrt{x}}$ قرار ندارد؟
 (۱) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ (۲) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ (۳) $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ (۴) $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$
- ۴- دامنه تابع $f(x) = \sqrt{16-x^2-9}$ به صورت $[a, b]$ است. مقدار $b-a$ کدام است؟
 (۱) ۱۰ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۸
- ۵- اگر نمودار تابع $y = \sqrt[3]{x}$ را یک واحد به سمت راست و دو واحد به پایین انتقال دهیم، سپس نسبت به محور طولها قرینه کنیم، نمودار به دست آمده نمودار اولیه را در چند نقطه قطع می‌کند؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ صفر
- ۶- اگر $f(x) = \sqrt{x^2-4x}$ ، $g = \{(-1, \sqrt{5}), (0, 1), (1, 4), (3, 5), (4, 3)\}$ و $(2g+f)(a) = 6$ ، مقدار $f(-a)$ کدام است؟
 (۱) $4\sqrt{2}$ (۲) $3\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $4\sqrt{3}$
- ۷- اگر $f(x) = ax^2 + b$ و $(f \circ f)(x) = 27x^4 - 18x^2 + 2$ ، مقدار $a+b$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲
- ۸- تابع $f(x) = 3x + |kx|$ صعودی است. حدود k کدام است؟
 (۱) $-1 \leq k \leq 1$ (۲) $k \geq -3$ (۳) $-3 \leq k \leq 3$ (۴) $k \leq 1$
- ۹- نمودار تابع $f(x) = ax^3 - \frac{1}{9}x + b$ در نقطه $(-1, \frac{1}{3})$ نمودار تابع وارونش را قطع می‌کند. مقدار $a+b$ کدام است؟
 (۱) $-\frac{1}{9}$ (۲) $-\frac{10}{9}$ (۳) $-\frac{17}{9}$ (۴) $-\frac{23}{9}$
- ۱۰- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y = f^{-1}(-x) - 1$ کدام گزینه است؟



آزمون فصل تابع (۲)

آزمون ۲

۱۱- اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2}+a & x \geq 2 \\ ax^3+16 & x \leq 2 \end{cases}$ ضابطه تابع f باشد، مقدار $f(a)$ کدام است؟

- ۱) ۱۶ (۲) ۳۲ (۳) -۳۲ (۴) -۱۶

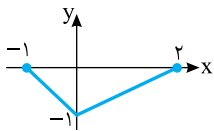
۱۲- اگر $f(x) = mx(2-x) + x^2 + 4x + m$ ضابطه یک تابع خطی باشد، مقدار $f(m)$ کدام است؟

- ۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۱۳- اگر $f(x) = \left[\frac{x+1}{x}\right] + \left[-\frac{1}{x}\right]$ آن گاه $f(-x)$ کدام است؟

- ۱) $f(x)$ (۲) $-f(x)$ (۳) $1-f(x)$ (۴) $f(x)-1$

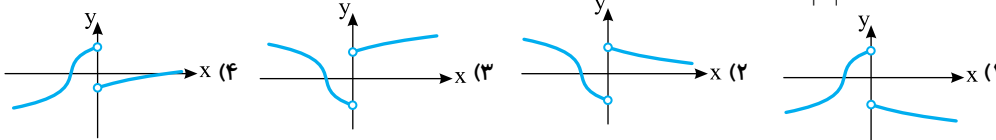
۱۴- نمودار تابع f به شکل مقابل است. نمودار تابع $y = 2f\left(\frac{x}{2}\right)$ را رسم می کنیم. مساحت ناحیه محصور بین دو نمودار و محور طول ها کدام است؟



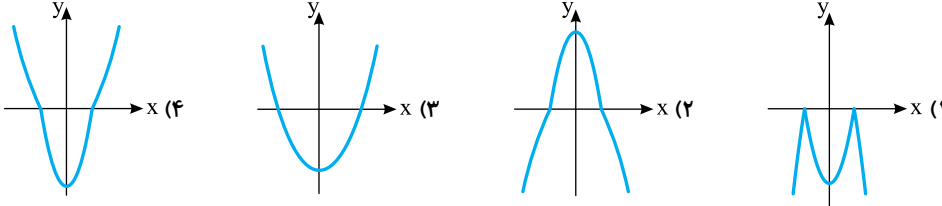
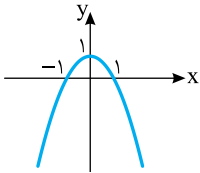
- ۱) $\frac{9}{2}$ (۲) ۵

- ۳) ۳ (۴) $\frac{7}{2}$

۱۵- نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{|x|} \sqrt[3]{x+1}$ کدام است؟



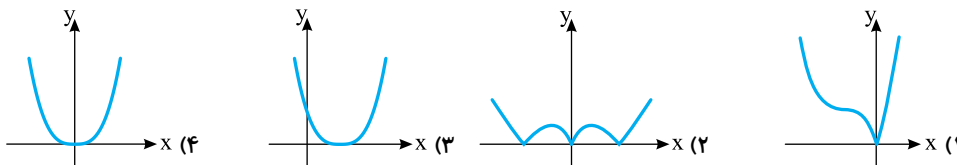
۱۶- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = -2f(x) - |f(x)|$ کدام گزینه است؟



۱۷- نمودار تابع $f(x) = |x||x-2|$ در چند نقطه نمودار تابع $g(x) = \left|\frac{1}{x}\right|$ را قطع می کند؟

- ۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۸- نمودار تابع $f(x) = |x^2(x+3) + 3x|$ کدام است؟



۱۹- ضابطه تابع وارون تابع $f(x) = \sqrt[3]{2-3x}$ به صورت $f^{-1}(x) = \frac{ax^3+b}{3}$ است. مقدار ab کدام است؟

- ۱) -۴ (۲) -۲ (۳) ۴ (۴) ۶

۲۰- تابع $f(x) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 4x\right)$ روی بازه $[a, 0]$ اکیداً نزولی است. حداقل مقدار a کدام است؟

- ۱) $-\frac{\pi}{4}$ (۲) $-\frac{\pi}{3}$ (۳) $-\frac{\pi}{2}$ (۴) $-\pi$

سؤال	گام
۱۱	۷
۱۲	۱۰
۱۳	۵ ۳۳۳
۱۴	۳۴ ۳۶
۱۵	۳۰ ۳۲ ۳۳
۱۶	۳۳ ۳۴ ۳۲۴
۱۷	۱۱ ۱۲ ۳۸ ۳۲۴
۱۸	۳۰ ۳۱ ۳۲ ۳۸ ۲۷۹
۱۹	۶۴
۲۰	۳۳ ۳۶ ۵۲ ۵۴ ۹۲

آزمون فصل تابع (۳)

آزمون ۳

سؤال	گام
۲۱	۹ ۱۰
۲۲	۵ ۲۸۴
۲۳	۲۲ ۳۱۸
۲۴	۲۲ ۲۹۴
۲۵	۲۲ ۲۴ ۲۹۴
۲۶	۲۶
۲۷	۲۹ ۳۲۷
۲۸	۵۳
۲۹	۶۲
۳۰	۶۲

- ۲۱- اگر تابع $f(x) = ax^2 - bx + b + c$ تابع همانی باشد، تابع $g(x) = 2^{ax} + bx + c$ چگونه است؟
 (۱) ثابت (۲) خطی (۳) همانی (۴) نمایی
- ۲۲- اگر $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x+2}{2x^2+1}$ ، ضابطه تابع f برای هر $x \neq 0$ کدام است؟
 (۱) $f(x) = \frac{2x^2+x}{x^2+2}$ (۲) $f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$ (۳) $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2+1}$ (۴) $f(x) = \frac{x^2+2x}{x^2+2}$
- ۲۳- دامنه تابع $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x-3}} - \sqrt{\frac{x-7}{2-x}}$ به صورت $(a, b] - \{c\}$ است. مقدار $a+b+c$ کدام است؟
 (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲
- ۲۴- دامنه تابع $f(x) = \frac{x+1}{m^2x^2+3x+1}$ به صورت $\mathbb{R} - \{n\}$ است. چند مقدار مختلف برای n وجود دارد؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۲۵- دو تابع $f(x) = \frac{5}{x+2}$ و $g(x) = \frac{ax+b}{x^2+cx+f}$ با هم برابرند. مقدار abc کدام است؟
 (۱) ۱۰۰ (۲) ۲۰۰ (۳) -۱۰۰ (۴) -۲۰۰
- ۲۶- اگر $f = \{(1, -1), (4, 2), (3, 2), (5, 1)\}$ ، مجموع اعضای برد تابع $g(x) = \frac{3f(x)}{2-f(x)}$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۲۷- اگر $D_f = [1, 4]$ ، $f(x) = x^2 + x$ و $D_g = [-5, 4]$ ، $g(x) = |x-1|$ ، چند عدد صحیح در دامنه تابع $f \circ g$ قرار دارد؟
 (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸
- ۲۸- تابع درجه دوم $f(x) = (k+2)x^2 + 2x + 1$ با دامنه $(-\infty, 4]$ صعودی است. حدود k کدام است؟
 (۱) $k < -2$ (۲) $k \geq -\frac{9}{4}$ (۳) $-\frac{9}{4} \leq k < -2$ (۴) $-2 < k < -1$
- ۲۹- اگر نمودار تابع وارون تابع $f(x) = \frac{1}{16}x^3 + \sqrt[3]{x} + 2a$ از نقطه $(4, 8)$ عبور کند، مقدار $f(0)$ کدام است؟
 (۱) -۱۲ (۲) -۱۵ (۳) -۲۰ (۴) -۳۰
- ۳۰- اگر تابع‌های f و g با دامنه $\mathbb{R}$ ، وارون‌پذیر باشند، $f(2x+1) = 2g(3x) - 1$ و $f^{-1}(2) = 5$ ، مقدار $g(6)$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

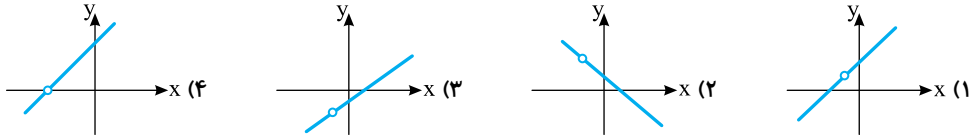
آزمون فصل تابع (۴)

آزمون ۴

۳۱- اگر $f\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = 3x^2 + \frac{3}{x^2} - 4$ مقدار $f(5)$ کدام است؟

- (۱) ۷۱ (۲) ۷۰ (۳) ۶۵ (۴) ۶۰

۳۲- اگر $f(x) = \frac{x^2 + mx + 4}{x+2}$ ضابطه تابع خطی f باشد، نمودار این تابع کدام است؟



۳۳- اگر دامنه تابع $f(x) = \sqrt{(a+3)x^2 - ax + b}$ بازه $[4, +\infty)$ باشد، مقدار b کدام است؟

- (۱) -۶ (۲) ۶ (۳) ۱۲ (۴) -۱۲

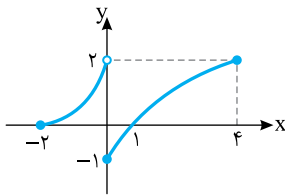
۳۴- دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{\pi^2 - x^2}}{\sqrt{\sin x}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۳۵- اگر $f(x) = |x-1|$ و $g(x) = |x|$ ، در بازه‌ای که تابع $f-g$ ثابت نیست ضابطه تابع $f+g$ کدام است؟

- (۱) $y=1$ (۲) $y=-1$ (۳) $y=2x-1$ (۴) $y=-2x+1$

۳۶- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. اگر $(f \circ f)(4) = k$ ، آن گاه $f\left(\frac{k}{4}\right)$ در



- (۱) $(0, 2)$ (۲) $(0, 1)$ (۳) $(-1, 0)$ (۴) $(1, 2)$

۳۷- اگر $g(x) = 2x+1$ و $(f \circ g)(x) = 8(x^2 - 4x + 5)$ ، ضابطه تابع f کدام است؟

- (۱) $f(x) = 2x^2 + 10x + 58$ (۲) $f(x) = 2x^2 - 10x + 58$ (۳) $f(x) = 2x^2 - 20x + 58$ (۴) $f(x) = 2x^2 + 20x + 58$

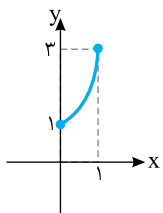
۳۸- تابع $f(x) = ax + [x]$ یک به یک است. a کدام عدد می‌تواند باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) -۲

۳۹- نمودار تابع $f(x) = \frac{x+4}{x+2}$ نمودار وارون خود را در دو نقطه قطع می‌کند. حاصل ضرب طول این نقطه‌ها کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) -۴ (۳) ۴ (۴) ۱

۴۰- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y = -f^{-1}(-x)$ چند



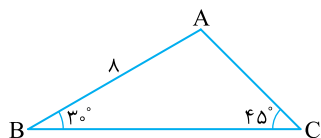
نقطه مشترک با نمودار تابع $g(x) = \frac{x+1}{2}$ دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

سؤال	گام
۳۱	۵
۳۲	۱۰ ۲۲
۳۳	۲۲ ۳۱۱ ۳۱۲
۳۴	۲۲ ۷۵
۳۵	۸ ۲۶ ۳۳۲
۳۶	۲۷
۳۷	۲۸
۳۸	۴۳ ۳۳۸
۳۹	۶۴ ۳۰۶
۴۰	۳۳ ۳۵ ۶۳

آزمون فصل مثلثات (۱)

آزمون ۵



۴۱- در شکل مقابل طول ضلع BC چقدر است؟

(۱) $4(\sqrt{3}-1)$

(۲) $4(\sqrt{3}+1)$

(۳) $4\sqrt{3}$

(۴) $8\sqrt{3}$

۴۲- اگر $30^\circ \leq \alpha \leq 120^\circ$ ، آن گاه $\sin \alpha$ در بازه $[a, b]$ است، مقدار $a+b$ کدام است؟

(۱) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۱

۴۳- اگر $\cot \alpha - \cos \alpha < 0$ و $\cos \alpha \cot \alpha > 0$ ، انتهای کمان نظیر زاویه α در کدام ناحیه مثلثاتی قرار دارد؟

(۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۴۴- مقدار عبارت $A = \sin \frac{49\pi}{10} + \sin \frac{7\pi}{5} - \sin \frac{18\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5}$ کدام است؟

(۱) $2 \sin \frac{\pi}{10}$ (۲) $2 \cos \frac{\pi}{10}$ (۳) $-2 \sin \frac{\pi}{10}$ (۴) $-2 \cos \frac{\pi}{10}$

۴۵- اگر $\alpha - \beta = \frac{5\pi}{2}$ ، حاصل عبارت $A = \frac{r \sin^3 \alpha + \cos^3 \beta}{\cos^3 \alpha + 2 \sin^3 \beta}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{4} \cot^3 \beta$ (۲) $4 \cot^3 \beta$ (۳) $4 \tan^3 \alpha$ (۴) $\frac{1}{4} \tan^3 \alpha$

۴۶- اگر $\frac{\sin(x+y) \sin(x-y)}{\cos^2 x + \cos^2 y} = \frac{1}{2}$ ، مقدار $\frac{\cos^2 x}{\cos^2 y}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) ۳ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۲

۴۷- مقدار عبارت $A = \sin x \cos x (1 - 2 \sin^2 x)$ به ازای $x = \frac{\pi}{16}$ کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{6}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{8}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{16}$

۴۸- مقدار $\cos^4 \frac{\pi}{12} - \sin^4 \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۴۹- اگر $\alpha + \beta = \frac{5\pi}{4}$ ، مقدار عبارت $A = (1 + \tan \alpha)(1 + \tan \beta)$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بستگی به مقادیر α و β دارد.

۵۰- جوابهای کلی معادله $\cos(2x - \frac{\pi}{9}) = \sin(\pi + 2x)$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

(۱) $\frac{k\pi}{2} + \frac{7\pi}{36}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} - \frac{7\pi}{36}$ (۳) $\frac{k\pi}{2} - \frac{7\pi}{72}$ (۴) $\frac{k\pi}{2} + \frac{7\pi}{72}$

سؤال	گام
۴۱	۷۰
۴۲	۷۹ ۱۰۶
۴۳	۷۵ ۷۶
۴۴	۹۲
۴۵	۹۲
۴۶	۹۵
۴۷	۹۷
۴۸	۹۷ ۲۷۶
۴۹	۱۰۴
۵۰	۱۱۲ ۱۱۵

آزمون فصل مثلثات (۲)

آزمون ۶

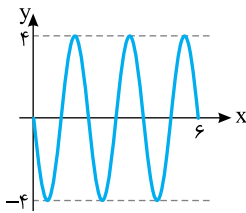
۵۱- اگر انتهای کمان نظیر زاویه α در ناحیه چهارم باشد و $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{3}$ ، مقدار $\sin \alpha - \cos \alpha$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{\sqrt{17}}{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{17}}{3}$ (۳) $\frac{8}{9}$ (۴) $-\frac{8}{9}$

۵۲- اندازه یک زاویه برحسب درجه از $\frac{200}{\pi}$ برابر اندازه آن برحسب رادیان δ واحد کمتر است. اندازه این زاویه برحسب رادیان کدام است؟

- (۱) $\frac{3\pi}{4}$ (۲) $\frac{\pi}{8}$ (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{3\pi}{8}$

۵۳- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \sin(b\pi x)$ است. مقدار ab کدام است؟



- (۱) -۶ (۲) ۴ (۳) -۴ (۴) ۶

۵۴- حاصل $\frac{1}{1 - \cot 38^\circ} + \frac{1}{1 + \cot 11^\circ}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\tan 2^\circ$ (۴) $\cot 10^\circ$

۵۵- حاصل $\frac{1}{\sin 15^\circ} + \frac{1}{\cos 15^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{3}$ (۲) $3\sqrt{3}$ (۳) $2\sqrt{6}$ (۴) $4\sqrt{6}$

۵۶- اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ ، مقدار $\cos 4x$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{1}{8}$ (۴) $-\frac{1}{16}$

۵۷- اگر $\cos 4x = \frac{1}{3}$ ، مقدار $\sin^4 x + \cos^4 x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{9}$ (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{8}{9}$ (۴) $\frac{17}{18}$

۵۸- مجموع جواب‌های معادله $\cos 2x - \cos(x + \frac{\pi}{4}) = 0$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5\pi}{6}$ (۲) $\frac{5\pi}{3}$ (۳) $\frac{5\pi}{4}$ (۴) $\frac{5\pi}{2}$

۵۹- معادله $1 + \sin 2x = \cos x + \sin x$ چند جواب در بازه $(0, 2\pi)$ دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

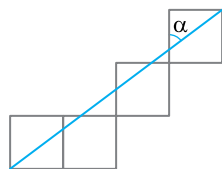
۶۰- معادله $\tan(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} \tan x - 3}$ چند جواب در بازه $(0, \frac{\pi}{4})$ دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

سؤال	گام
۵۱	۷۵ ۸۲ ۲۷۵
۵۲	۸۸
۵۳	۱۰۶ ۱۰۹
۵۴	۸۲ ۹۲
۵۵	۹۵ ۹۷
۵۶	۹۷ ۲۷۵
۵۷	۱۰۳
۵۸	۱۱۲ ۱۱۳
۵۹	۱۰۰ ۱۱۳ ۱۱۹ ۱۲۱
۶۰	۱۰۴ ۱۱۲ ۱۲۱ ۲۹۳

آزمون فصل مثلثات (۳)

آزمون ۷



۶۱- در شکل روبه‌رو طول ضلع مربع‌های کوچک برابر ۱ است. مقدار $\sin \alpha - \tan \alpha$ کدام است؟

(۱) $-\frac{7}{4}$ (۲) $-\frac{13}{6}$

(۳) $-\frac{8}{15}$ (۴) $-\frac{9}{14}$

۶۲- اگر $\tan \alpha = \frac{1}{2m}$ و $\cot \alpha = m+2$ ، مقدار $\sin^2 \alpha$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{16}{17}$ (۳) $\frac{1}{17}$ (۴) $\frac{2}{5}$

۶۳- اگر $\tan x - 3 \cot x = 2$ ، حاصل $\tan^4 x + 8 \cot^4 x$ کدام است؟

(۱) ۱۰۰ (۲) ۸۲ (۳) ۹۲ (۴) ۷۰

۶۴- اگر دوره تناوب تابع $f(x) = 3 - 4 \sin^2(2+ax)$ برابر $\frac{\pi}{6}$ باشد، مقدار $|a|$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۸

۶۵- اگر $\cos(7\pi + \alpha) = \frac{1}{3}$ و $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ ، مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟

(۱) $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$ (۲) $\frac{2\sqrt{2}}{9}$ (۳) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ (۴) $-\frac{2\sqrt{2}}{9}$

۶۶- اگر $\sin x = 2 \cos x$ ، حاصل $\cos 2x$ کدام است؟

(۱) $-\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $-\frac{2}{5}$

۶۷- اگر $\tan(\frac{\pi}{4} + \alpha) = \frac{1}{2}$ ، مقدار $\tan 2\alpha$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $-\frac{3}{4}$

۶۸- معادله $2 \sin 2x - 1 = 0$ چند جواب در بازه $(0, \frac{3\pi}{2})$ دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶۹- تابع $f(x) = -2 \cos 4x + 3$ در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ چند بار به حداقل مقدار خود می‌رسد؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۷۰- معادله $\sin(x + \frac{\pi}{12}) = 3 \sin(x - \frac{\pi}{12})$ چند جواب در بازه $(0, 2\pi)$ دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

سؤال	گام
۶۱	۷۰
۶۲	۸۲
۶۳	۸۲ ۲۷۵
۶۴	۹۷ ۱۰۹
۶۵	۷۵ ۹۲ ۹۷
۶۶	۸۲ ۹۷ ۱۰۲
۶۷	۱۰۴ ۱۰۵
۶۸	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۶
۶۹	۱۰۷ ۱۱۳ ۱۱۹
۷۰	۱۱۲ ۱۱۵

آزمون فصل مثلثات (۴)

آزمون ۸

۷۱- مقدار عبارت $A = \frac{(1 + \cot \frac{\pi}{5})(1 - \tan \frac{\pi}{5})}{(1 - \cot \frac{\pi}{5})(1 + \tan \frac{\pi}{5})}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) -۱

۷۲- اگر x زاویه‌ای حاده باشد و $\frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x} = \frac{7}{25}$ ، مقدار $\cos x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۷۳- اگر $\sin x \cos x = \sin x + \cos x$ ، حاصل $\sin x + \cos x$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}-1$ (۲) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ (۳) $1-\sqrt{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

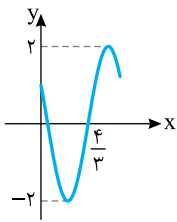
۷۴- حاصل عبارت $A = \cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \cos^2 3^\circ + \dots + \cos^2 180^\circ$ کدام است؟

- (۱) ۴۵ (۲) ۴۵/۵ (۳) ۸۹ (۴) ۹۰

۷۵- اگر $-\frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2}$ و $\tan x = m + 2\sqrt{3}$ ، حداقل مقدار m کدام است؟

- (۱) $-3\sqrt{3}$ (۲) $-4\sqrt{3}$ (۳) $-2\sqrt{3}$ (۴) $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$

۷۶- بخشی از نمودار تابع $f(x) = a \sin(\pi(b-x))$ به شکل مقابل است. مقدار $a+b$ کدام است؟ ($2 < b < 3$)



- (۱) $\frac{7}{3}$ (۲) $-\frac{4}{3}$

- (۳) $-\frac{7}{3}$ (۴) $\frac{13}{3}$

۷۷- در شکل روبه‌رو $BC=3$ و $AD=8$. مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{12}{25}$ (۲) $\frac{24}{25}$

- (۳) $\frac{7}{15}$ (۴) $\frac{14}{15}$

۷۸- اگر $\cos 2\alpha = \frac{1}{3}$ ، مقدار $\tan(\frac{\pi}{4} + \alpha) + \tan(\frac{\pi}{4} - \alpha)$ کدام است؟

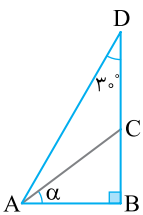
- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۷۹- مجموع جواب‌های معادله $\sin(x + \frac{\pi}{8}) + \cos(x - \frac{3\pi}{8}) = -1$ در بازه $[0, 2\pi]$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{11\pi}{4}$ (۲) $\frac{21\pi}{8}$ (۳) $\frac{23\pi}{16}$ (۴) $\frac{21\pi}{16}$

۸۰- مجموع جواب‌های معادله $1 + 2 \sin 3x \cos 4x = 2 \sin 4x \cos 3x$ در بازه $(0, \pi)$ کدام است؟

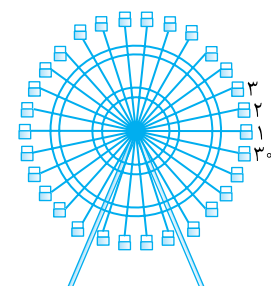
- (۱) π (۲) $\frac{5\pi}{3}$ (۳) $\frac{5\pi}{6}$ (۴) $\frac{3\pi}{2}$



سؤال	گام
۷۱	۸۲
۷۲	۷۵ ۸۲
۷۳	۷۷ ۸۲ ۲۷۵
۷۴	۸۲ ۹۳
۷۵	۱۱۱
۷۶	۱۰۶ ۱۰۹
۷۷	۷۰ ۹۷
۷۸	۹۷ ۱۰۵
۷۹	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۵
۸۰	۹۵ ۱۱۲

آزمون فصل مثلثات (۵)

آزمون ۹



۸۱- چرخ و فلکی مطابق شکل ۳۰ کابین دارد که از شماره ۱ تا ۳۰ شماره گذاری شده‌اند. این چرخ و فلک در هر دقیقه ۲ دور می‌چرخد. اگر چرخ و فلک ۱۸۴ ثانیه بچرخد، کابین شماره یک به محل کدام کابین منتقل می‌شود؟

- (۱) کابین سوم
- (۲) کابین پنجم
- (۳) کابین هفتم
- (۴) کابین نهم

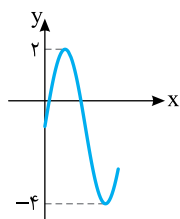
۸۲- حاصل عبارت $A = \frac{\sin 25^\circ - \sin^2 25^\circ}{\cos 25^\circ - \cos^2 25^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $\tan^2 25^\circ$
- (۲) $\tan 25^\circ$
- (۳) $\cot 25^\circ$
- (۴) $\cot^2 25^\circ$

۸۳- اگر $a = \frac{\pi}{32}$ ، مقدار $\frac{\sin 7a \cos 27a}{\sin 21a \cos 9a}$ کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) -۱
- (۴) -۲

۸۴- در شکل مقابل، قسمتی از نمودار کدام تابع رسم شده است؟



(۱) $y = 3 \cos(2x) - 4$

(۲) $y = 3 \sin(2x) - 1$

(۳) $y = -3 \sin(3x) - 1$

(۴) $y = -2 \cos(3x) + 1$

۸۵- اگر $\tan(x+10^\circ) = \frac{2}{3}$ و $\tan(y+35^\circ) = \frac{1}{3}$ ، مقدار $\tan(x+y)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$
- (۲) $\frac{1}{6}$
- (۳) $\frac{1}{8}$
- (۴) $\frac{1}{12}$

۸۶- اگر $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{2}{3}$ ، مقدار $\sin^2 2\alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{16}{25}$
- (۲) $\frac{25}{81}$
- (۳) $\frac{9}{16}$
- (۴) $\frac{49}{81}$

۸۷- مقدار عبارت $A = \left(\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \right)^2$ به ازای $x = \frac{\pi}{16}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2 - \sqrt{2}}{4}$
- (۲) $\frac{2 + \sqrt{2}}{4}$
- (۳) $\frac{\sqrt{2} - 1}{4}$
- (۴) $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$

۸۸- نمودار تابع $f(x) = 1 - \sin(2x)$ در بازه $(0, 4\pi)$ چندبار بر محور طول‌ها مماس می‌شود؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴

۸۹- مجموع جواب‌های معادله $2 \cos^2 2x + 3 \cos 2x + 1 = 0$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

- (۱) π
- (۲) $\frac{3\pi}{2}$
- (۳) 2π
- (۴) $\frac{5\pi}{2}$

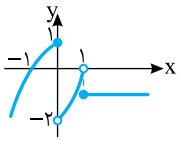
۹۰- معادله $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$ چند جواب در بازه $(0, 2\pi)$ دارد؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴

سؤال	گام
۸۱	۸۷
۸۲	۵۲
۸۳	۹۲
۸۴	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۰۹
۸۵	۱۰۴
۸۶	۹۷ ۲۷۵
۸۷	۸۲ ۹۷ ۹۹
۸۸	۱۰۶ ۱۱۷ ۱۱۹
۸۹	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۶ ۱۱۹ ۱۲۱
۹۰	۱۱۲ ۱۲۱

آزمون فصل حد و پیوستگی (۱)

آزمون ۱۰



۹۱- نمودار تابع f در شکل مقابل آمده است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(1-x^2) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(1-x^2)$ کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

۹۲- اگر حد تابع‌های f و g در نقطه $x=1$ وجود داشته باشد، $\lim_{x \rightarrow 1} (f-2g)(x)=2$ و $\lim_{x \rightarrow 1} (2f+3g)(x)=18$ ،

مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۹۳- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2} \sin 2x & x \leq \frac{\pi}{8} \\ a \cos 2x + 2 & x > \frac{\pi}{8} \end{cases}$ در نقطه $x = \frac{\pi}{8}$ حد داشته باشد، مقدار a کدام است؟

۱ (۱) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $-\sqrt{2}$

۹۴- مقدار $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - 8}{x^2 + 3x + 2}$ کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۸ (۵) ۱۶ (۶)

۹۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 6x}{x^2}$ کدام است؟

۱ (۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۱۶ (۴) ۱۸ (۵)

۹۶- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & x < 2 \\ b - 1 & x = 2 \\ 4ax + 21 & x > 2 \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، مقدار b کدام است؟

۱ (۱) -۱۲ (۲) -۱۴ (۳) -۱۶ (۴) -۱۸ (۵)

۹۷- اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^3 + ax^2 + 3x + b} = +\infty$ ، مقدار $a-b$ کدام است؟

۱ (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) -۴ (۵)

۹۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + (x-1)^2 + \dots + (x-9)^2}{5x^2 - 6x + 1}$ کدام است؟

۱ (۱) صفر (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲ (۵)

۹۹- اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 - 5x + 1 - mx^2}{(3x-2)^2} = \frac{1}{2}$ ، مقدار m کدام است؟

۱ (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{7}{2}$ (۴) $\frac{9}{2}$ (۵)

۱۰۰- نمودار تابع $f(x) = \frac{1 - \cos 4x}{\sin 4x}$ در بازه $(0, \pi)$ چند مجانب قائم دارد؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

سؤال گام

۹۱ ۱۲۵ ۱۲۷

۹۲ ۱۲۷

۹۳ ۱۲۴ ۱۲۶ ۱۲۷

۹۴ ۱۳۲

۹۵ ۱۳۷ ۱۳۹ ۲۰۷

۹۶ ۱۴۱ ۱۴۲

۹۷ ۱۳۲ ۱۵۰ ۳۱۲

۹۸ ۱۶۳

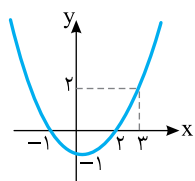
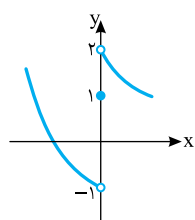
۹۹ ۱۶۳

۱۰۰ ۹۷ ۹۹ ۱۵۷

آزمون فصل حد و پیوستگی (۲)

آزمون ۱۱

سؤال	گام
۱۰۱	۱۲۵ ۱۲۷
۱۰۲	۱۲۵ ۱۲۷
۱۰۳	۱۲۴ ۱۲۶ ۱۲۷
۱۰۴	۱۲۹
۱۰۵	۱۳۴ ۲۰۷
۱۰۶	۱۳۴ ۱۳۷ ۱۳۹ ۲۰۷
۱۰۷	۱۲۶ ۱۴۱
۱۰۸	۱۴۹ ۳۱۲
۱۰۹	۱۶۳
۱۱۰	۱۶۵ ۳۵۲



۱۰۱- نمودار تابع f به شکل مقابل است. مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^3 - x^2)$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) -۱
(۳) ۲
(۴) وجود ندارد.

۱۰۲- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(f(x-3))+1}{xf(x-1)+2}$ کدام است؟

- (۱) ۳
(۲) ۲
(۳) $\frac{1}{2}$
(۴) $\frac{1}{3}$

۱۰۳- برای چه مقدار m تابع $f(x) = x[-x] + m[x^2]$ در نقطه $x=3$ حد دارد؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۱۰۴- تابع $f(x) = (x^2 - 1)[x]$ در چند نقطه از بازه $(-2, 3)$ حد ندارد؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) صفر

۱۰۵- اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{ax^2+bx+2} = \frac{3}{4}$ ، مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{11}{3}$
(۲) -۳
(۳) $-\frac{7}{3}$
(۴) $-\frac{5}{3}$

۱۰۶- مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{x^2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$
(۲) $\frac{\sqrt{2}}{8}$
(۳) $\frac{\sqrt{2}}{4}$
(۴) $\frac{1}{4}$

۱۰۷- تابع $f(x) = [\frac{x}{2}] - [\frac{x}{3}]$ در نقطه $x=12$:

- (۱) پیوسته است.
(۲) فقط از چپ پیوسته است.
(۳) فقط از راست پیوسته است.
(۴) نه از چپ پیوسته است و نه از راست.

۱۰۸- اگر $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+3}{4x^3+ax^2+bx} = -\infty$ ، مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) ۱۲
(۲) ۲۴
(۳) ۳۲
(۴) ۴۸

۱۰۹- اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(b-2)x^2+2x+1}{(a-3)x^3+(b^2-3a)x^2+x+2} = -\infty$ ، مقدار ab کدام است؟

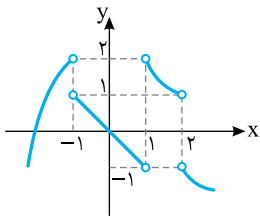
- (۱) ۳
(۲) -۳
(۳) ۹
(۴) -۹

۱۱۰- نمودار تابع $f(x) = \frac{x|x|+1}{x^2-3}$ در دو نقطه مجانب‌های افقی خود را قطع می‌کند. فاصله این دو نقطه کدام است؟

- (۱) $\sqrt{7-2\sqrt{2}}$
(۲) $\sqrt{7+2\sqrt{2}}$
(۳) $\sqrt{5-\sqrt{2}}$
(۴) $\sqrt{5+\sqrt{2}}$

آزمون فصل حد و پیوستگی (۳)

آزمون ۱۲



۱۱۱- نمودار تابع f به شکل مقابل است. مقدار $\lim_{x \rightarrow 2^+} [(f \circ f)(x)]$ کدام است؟

- ۱ (۱)
۲ (۲)
-۱ (۳)
-۲ (۴)

۱۱۲- اگر $f(x) = ax^2 + bx - c$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x+1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(3x)$ ، مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

- ۲ (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) ۲ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴)

۱۱۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{x^2}{[x]} - \frac{[-x]}{x} \right)$ کدام است؟

- ۲/۵ (۱) ۳/۵ (۲) ۴/۵ (۳) ۵/۵ (۴)

۱۱۴- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2 - 1} & x > 1 \\ \frac{a}{x - 2} & x < 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ حد داشته باشد، مقدار a کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۱۵- اگر $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{ax - 3a}{x^2 + ax + 3} = b$ و $b \neq 0$ ، مقدار $a + b$ کدام است؟

- ۲ (۱) -۴ (۲) -۶ (۳) -۸ (۴)

۱۱۶- مقدار $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 + \tan x}{\cos^2 x}$ کدام است؟

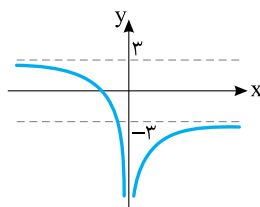
- ۲ (۱) -۱ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴)

۱۱۷- تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1} & x > 1 \\ \frac{x + 3}{2x^2 + 1} & x \leq 1 \end{cases}$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) صفر (۴)

۱۱۸- نمودار تابع f به شکل مقابل است. حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] - 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ کدام است؟

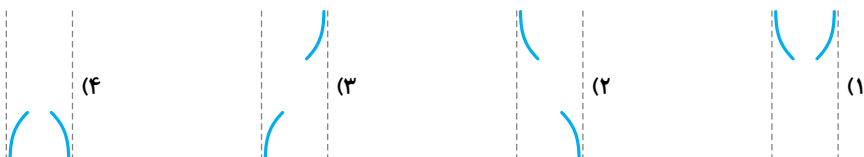
- ۴ (۱)
-۲ (۲)
-۶ (۳)
-۸ (۴)



۱۱۹- اگر $f(x) = 3x^2 - x$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2x) - 1}{f(x) + 3x^2 - 1}$ کدام است؟

- ۴ (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) صفر (۴)

۱۲۰- نمودار تابع $f(x) = \frac{x - 2}{\sqrt{4x - x^2}}$ در اطراف مجانب‌های قائم آن چگونه است؟



سؤال	گام
۱۱۱	۱۲۳ ۱۲۵ ۱۲۶
۱۱۲	۱۲۵ ۱۲۷
۱۱۳	۱۲۶ ۱۲۷
۱۱۴	۱۲۴ ۱۲۶ ۱۲۷ ۱۳۲
۱۱۵	۱۳۲
۱۱۶	۱۰۲ ۱۳۶ ۲۰۷
۱۱۷	۱۳۲ ۱۴۱
۱۱۸	۱۲۶ ۱۴۹
۱۱۹	۱۶۳
۱۲۰	۱۵۳ ۱۵۵ ۱۵۶

آزمون فصل حد و پیوستگی (۴)

آزمون ۱۳

سؤال	گام
۱۲۱	۱۲۶ ۱۳۱
۱۲۲	۱۳۴ ۲۰۷
۱۲۳	۱۳۴ ۲۰۷
۱۲۴	۱۳۶ ۲۰۷
۱۲۵	۱۲۶ ۱۲۷ ۱۴۱ ۱۴۲
۱۲۶	۱۴۶ ۱۴۷
۱۲۷	۱۲۵ ۱۴۹ ۱۵۹
۱۲۸	۱۵۱
۱۲۹	۱۶۳
۱۳۰	۱۵۴ ۲۹۴

۱۲۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow (\frac{\Delta\pi}{\epsilon})^+} [\sqrt{x} \sin x]$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) ۱ (۴) صفر

۱۲۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4} - 2}{x^2 - 25}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{20}$ (۲) $\frac{1}{30}$ (۳) $-\frac{1}{20}$ (۴) $-\frac{1}{30}$

۱۲۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x-1}}{x-8}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{12}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۱۲۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\cos x + \sin x}$ کدام است؟

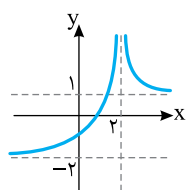
- (۱) $-2\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) صفر

۱۲۵- تابع $f(x) = \begin{cases} a \sin x & x > \frac{\pi}{2} \\ ab-1 & x = \frac{\pi}{2} \\ \cos 2x + b & x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) ۳ یا ۱ (۲) -۱ یا ۳ (۳) ۱ یا -۳ (۴) -۱ یا -۳

۱۲۶- دامنه تابع‌های f و g مجموعه اعداد حقیقی و برد آن‌ها مجموعه اعداد حقیقی مثبت است. تابع‌های $f+2g$ و $f-g$ در نقطه $x=a$ پیوسته‌اند. کدام تابع ممکن است در این نقطه پیوسته نباشد؟

- (۱) $\frac{1}{f}$ (۲) $\frac{1}{g}$ (۳) $\frac{1}{f+g}$ (۴) $\frac{1}{f-g}$



۱۲۷- نمودار تابع f به شکل مقابل است. مقدار $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{1 - (f \circ f)(x)}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۲ (۳) $-\infty$ (۴) $+\infty$

۱۲۸- نمودار تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}$ در اطراف خط $x=1$ چگونه است؟



۱۲۹- اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|3-mx| + x - 1}{3x+1} = \frac{2}{3}$ ، آن‌گاه m چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

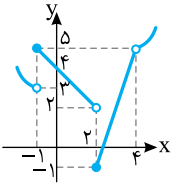
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۳۰- نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 6x + 2m}$ مجانب قائم ندارد. m چند عدد طبیعی نمی‌تواند باشد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

آزمون فصل حد و پیوستگی (۵)

آزمون ۱۴



۱۳۱- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\lim_{x \rightarrow 2^-} (f \circ f)(x)$ کدام است؟

- (۱) -۱
(۲) صفر
(۳) ۲
(۴) ۳

۱۳۲- اگر حد تابع‌های $f+g$ و f^2-g^2 در نقطه $x=2$ به ترتیب برابر ۳ و ۲۱ باشد، مقدار $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(2x^2)}{g(x+1)}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{5}{2}$ (۲) $-\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{5}{2}$

۱۳۳- مقدار $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{[2x](x+2)}{x[-x]+|1-x|}$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۳ (۳) $-\frac{5}{2}$ (۴) $-\frac{3}{2}$

۱۳۴- اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+x+a}-2}{x^2-4} = b$ مقدار b کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{5}{8}$ (۴) $\frac{5}{16}$

۱۳۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos \Delta x}{\pi - 2x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $-\frac{5}{2}$

۱۳۶- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}(\sqrt[3]{x+27}-3) & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ در نقطه $x=0$ پیوسته باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۶ (۴) ۲۷

۱۳۷- حاصل $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2x^2-50}{x^3-10x^2+25x}$ کدام است؟

- (۱) $-\infty$ (۲) $+\infty$ (۳) ۲ (۴) $\frac{4}{3}$

۱۳۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2[-\frac{1}{x}]-1}{4x^2+x+1}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) صفر (۴) $-\infty$

۱۳۹- f تابعی خطی با شیب مثبت است. $f(3)=10$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f^{-1}(x)}=9$ مقدار $f(1)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۴۰- اگر $y=4$ مجانب افقی نمودار تابع $f(x) = \frac{4x+a|x|+3}{3x-|x|+1}$ در $+\infty$ باشد، کدام خط مجانب افقی این نمودار در $-\infty$ است؟

- (۱) $y=\frac{3}{4}$ (۲) $y=-\frac{3}{4}$ (۳) $y=\frac{4}{3}$ (۴) $y=0$

سؤال

گام

۱۳۱
۱۲۳
۱۲۵

۱۳۲
۱۲۵
۱۲۷

۱۳۳
۱۲۶
۱۲۷

۱۳۴
۱۳۴
۲۰۷

۱۳۵
۱۳۷
۱۴۰
۲۰۷

۱۳۶
۱۳۴
۱۴۱

۱۳۷
۱۳۲
۱۵۰

۱۳۸
۱۲۶
۱۶۳

۱۳۹
۶۴
۱۶۳

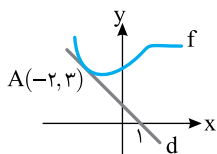
۱۴۰
۱۶۳
۱۶۵

آزمون فصل مشتق (۱)

آزمون ۱۵

سؤال	گام
۱۴۱	۱۷۲ ۱۷۳
۱۴۲	۱۷۲ ۱۷۵ ۱۹۱ ۲۰۷ ۲۸۱
۱۴۳	۱۷۷ ۲۰۷
۱۴۴	۱۷۷ ۱۸۶ ۱۸۷ ۱۹۴
۱۴۵	۱۳۷ ۱۷۲
۱۴۶	۱۸۶ ۱۸۷ ۱۹۱
۱۴۷	۱۸۶ ۱۸۷ ۱۹۱
۱۴۸	۱۸۶ ۱۸۷ ۱۹۰
۱۴۹	۱۸۶ ۱۸۷ ۲۰۶
۱۵۰	۲۰۴

۱۴۱- در شکل زیر خط d بر نمودار تابع f در نقطه $A(-2, 3)$ مماس است. مقدار $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2f(x) - 6}{x + 2}$ کدام است؟



- (۱) -۳
(۲) -۲
(۳) -۱
(۴) $-\frac{1}{2}$

۱۴۲- اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 3}$ ، مقدار $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f^3(x) - f^3(-2)}{x + 2}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{45}{2}$
(۲) -۴۵
(۳) $\frac{45}{2}$
(۴) ۴۵

۱۴۳- اگر $f'_+(2) = 3$ و $f'_-(2) = -6$ ، مقدار $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h^2) - f(2)}{h^2 - h^4}$ کدام است؟

- (۱) -۳
(۲) ۳
(۳) -۶
(۴) ۶

۱۴۴- اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & x \geq 2 \\ x^3 + x^2 & x < 2 \end{cases}$ ، مقدار $f'_+(2) - f'_-(2)$ کدام است؟

- (۱) -۸
(۲) ۸
(۳) ۲۴
(۴) -۲۴

۱۴۵- اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x} & x \neq 0 \\ -1 & x = 0 \end{cases}$ ، مقدار مشتق تابع $g(x) = \frac{x^2 - 2x}{f(x)}$ در نقطه $x = 0$ کدام است؟

- (۱) -۱
(۲) ۲
(۳) $\frac{1}{2}$
(۴) وجود ندارد.

۱۴۶- اگر $f(x) = \frac{ax^2 + 2}{\sqrt{3x + 1}}$ و $f'(1) = \frac{7}{16}$ ، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۱۴۷- اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ و $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ ، عبارت $f'(x)g'(x)$ با کدام یک برابر است؟

- (۱) $-\frac{g^2(x)}{f(x)}$
(۲) $\frac{g^2(x)}{f(x)}$
(۳) $\frac{f(x)}{g^2(x)}$
(۴) $-\frac{f(x)}{g^2(x)}$

۱۴۸- اگر $f(x^2 + x) = g(\frac{f}{x})$ و $g'(4) = -4$ ، مقدار $f'(2)$ کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) -۲
(۳) ۴
(۴) -۴

۱۴۹- اگر $f(x) = \frac{ax - 1}{x^2 + 1}$ و $f''(1) = 4$ ، مقدار a کدام است؟

- (۱) -۳
(۲) -۵
(۳) -۹
(۴) -۱۱

۱۵۰- مجموعه آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = -x^2 + 2x$ در بازه $[a, 0]$ و آهنگ تغییر متوسط این تابع در بازه $[0, a+1]$ برابر ۴ است.

مقدار a کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{3}$
(۲) $-\frac{1}{2}$
(۳) $-\frac{1}{4}$
(۴) $-\frac{1}{5}$

آزمون فصل مشتق (۲)

آزمون ۱۶

۱۵۱- اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{x+2\sqrt{x}}{x^2-4\sqrt{x}}$ ، مقدار $f'(4)$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۵۲- اگر $f(1)=3$ و $f'(x) = \frac{6x}{x+1}$ مقدار $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(1+h)-27}{h}$ کدام است؟

- ۹ (۱) ۲۷ (۲) ۵۴ (۳) ۸۱ (۴)

۱۵۳- اگر $f(x) = x + 2\sqrt{4x^2 - x^4}$ ، مقدار $f'_+(0) + f'_-(0)$ کدام است؟

- ۲ (۱) -۲ (۲) ۴ (۳) -۴ (۴)

۱۵۴- مقدار مشتق راست تابع $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(x - [x])\right)$ در نقطه $x=2$ کدام است؟

- ۱ (۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲ (۲) $-\frac{\pi}{2}$ ۳ (۳) صفر ۴ (۴) وجود ندارد.

۱۵۵- اگر $f(x) = x^2|x-3|\sqrt{x^2-3x}$ ، مقدار $f'(4)$ کدام است؟

- ۱ (۱) -۶۸ ۲ (۲) -۷۲ ۳ (۳) ۶۸ ۴ (۴) ۷۲

۱۵۶- اگر $f(x) = |x^2-3x| - |x^2+3x|$ ، مقدار $f'(0)$ کدام است؟

- ۱ (۱) -۲ ۲ (۲) ۲ ۳ (۳) صفر ۴ (۴) وجود ندارد.

۱۵۷- تابع $f(x) = x|x^2-x|$ در چند نقطه مشتق پذیر نیست؟

- ۱ (۱) ۱ ۲ (۲) ۲ ۳ (۳) ۳ ۴ (۴) صفر

۱۵۸- اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ و $g(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$ ، حاصل $g'(x)f'(g(x))$ کدام است؟

- ۱ (۱) -۱ ۲ (۲) ۱ ۳ (۳) x ۴ (۴) $\frac{1}{2}x$

۱۵۹- محیط هر مربع تابعی از مساحت آن است. آهنگ تغییر لحظه‌ای محیط یک مربع در لحظه‌ای برابر ۴ است. در این لحظه مساحت مربع چقدر است؟

- ۱ (۱) $\frac{1}{4}$ ۲ (۲) $\frac{1}{2}$ ۳ (۳) ۱ ۴ (۴) ۲

۱۶۰- نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2-ax+9}{x^2+9}$ بر محور طول‌ها مماس است. حاصل ضرب مقادیر ممکن برابر a کدام است؟

- ۱ (۱) -۹ ۲ (۲) -۱۲ ۳ (۳) -۱۶ ۴ (۴) -۳۶

سؤال	گام
۱۵۱	۱۸۵
۱۵۲	۱۷۱ ۱۷۵ ۲۰۷ ۲۸۱
۱۵۳	۱۷۷ ۱۸۶ ۱۸۷ ۱۹۱
۱۵۴	۱۳۷ ۱۷۷
۱۵۵	۱۸۶ ۱۸۷ ۱۸۸ ۱۹۱
۱۵۶	۱۷۲ ۱۸۶ ۱۸۷ ۱۸۸
۱۵۷	۱۹۶ ۱۹۸
۱۵۸	۲۷ ۱۸۶ ۱۹۰
۱۵۹	۱۸۶ ۲۰۵
۱۶۰	۱۸۶ ۱۸۷ ۲۰۰

آزمون فصل مشتق (۳)

آزمون ۱۷

سؤال	گام
۱۶۱	۱۷۱ ۱۸۶ ۱۸۷ ۲۰۷
۱۶۲	۱۸۶ ۱۸۷
۱۶۳	۱۷۲
۱۶۴	۱۴۱ ۱۹۴
۱۶۵	۱۸۷ ۱۹۰ ۱۹۱
۱۶۶	۱۸۶ ۱۸۷ ۲۰۶ ۲۸۲
۱۶۷	۱۷۳ ۱۸۶ ۱۸۷
۱۶۸	۱۹۱ ۲۰۴ ۲۰۵
۱۶۹	۱۱۲ ۱۸۷ ۱۹۱ ۲۰۰
۱۷۰	۱۸۶ ۱۸۷ ۲۰۰ ۲۰۳

- ۱۶۱- اگر $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+1}$ مقدار $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-1}{h^2-4h}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$
- ۱۶۲- اگر $f(x) = \frac{x^2+ax}{x+1}$ و $f'(2) = \frac{11}{9}$ مقدار a کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۱۶۳- اگر $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-\sqrt{x+5}}$ مقدار $f'_-(3)$ کدام است؟
 (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) -۲
- ۱۶۴- اگر $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x > 1 \\ 3x & x = 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ آن گاه
 (۱) $f'(1) = 0$ (۲) $f'(1) = 2$ (۳) $f'(1) = 3$ (۴) تابع f در $x=1$ مشتق پذیر نیست.
- ۱۶۵- اگر $f(x^3-x) = 4x\sqrt{x+1}$ مقدار $f'(24)$ کدام است؟
 (۱) $\frac{9}{26}$ (۲) $\frac{11}{26}$ (۳) $\frac{13}{2}$ (۴) $\frac{15}{26}$
- ۱۶۶- اگر $f(x) = \frac{x^5+1}{x+1}$ مقدار $f''(2)$ کدام است؟
 (۱) ۳۲ (۲) ۳۶ (۳) ۳۸ (۴) ۴۰
- ۱۶۷- شیب خط مماس در نقطه $(2, 3)$ روی نمودار تابع های f و g به ترتیب برابر ۱ و ۲ است. اگر $h(x) = \frac{f(x)+x}{g(x)-x}$ مقدار $h'(2)$ کدام است؟
 (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۳ (۴) -۳
- ۱۶۸- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = \sqrt{1-x}$ در بازه $[a, 1]$ برابر $-\frac{1}{4}$ است. آهنگ تغییر لحظه ای تابع f در $x=a$ کدام است؟
 (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{8}$ (۳) $-\frac{1}{16}$ (۴) $-\frac{1}{32}$
- ۱۶۹- به ازای چند مقدار مختلف k نمودار تابع $f(x) = \cos 2x + k \cos x$ بر خط $y = -2$ مماس است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۱۷۰- خط $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$ بر نمودار تابع $g(x) = -x^2 - bx$ مماس است. مجموع مقادیر ممکن برای b کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{1}{16}$

آزمون فصل مشتق (۴)

آزمون ۱۸

۱۷۱- اگر $f(x) = 2x(2x-1)(2x-2)\dots(2x-12)$ مقدار $f'(1)$ کدام است؟

- (۱) $2 \times 10!$ (۲) $-2 \times 10!$ (۳) $4 \times 10!$ (۴) $-4 \times 10!$

۱۷۲- مقدار مشتق تابع $f(x) = \frac{x^3 + \sqrt{x}}{x^2 + \sqrt[3]{x}}$ در نقطه $x=1$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{7}{12}$ (۲) $-\frac{5}{12}$ (۳) $\frac{7}{12}$ (۴) $\frac{5}{12}$

۱۷۳- اگر $f(x) = \frac{|x^2 - x|}{x^3 - [3x]}$ مقدار $f'(\frac{1}{2})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{6}{49}$ (۲) $-\frac{12}{49}$ (۳) $\frac{12}{49}$ (۴) $-\frac{6}{49}$

۱۷۴- اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & x \geq 1 \\ 3x^2 + 1 & x < 1 \end{cases}$ مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 4}{x^2 - x}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) وجود ندارد.

۱۷۵- اگر تابع f در نقطه $x=4$ مشتق پذیر باشد و $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) + 5}{x - 4} = 5$ مقدار مشتق تابع $g(x) = \frac{x}{f(2x)}$ در نقطه $x=2$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) -۱ (۴) ۱

۱۷۶- اگر $f(x) = 4x + |x|$ و $g(x) = 4x - |x|$ مقدار مشتق تابع $g \circ f$ در نقطه $x=0$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۱۵ (۴) وجود ندارد.

۱۷۷- اگر تابع $f(x) = |x^2 - 6x + m|$ روی $\mathbb{R}$ مشتق پذیر باشد، m چند مقدار طبیعی نمی تواند داشته باشد؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۹

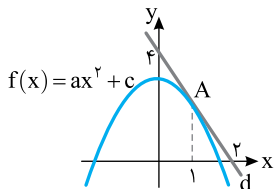
۱۷۸- اگر $f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$ مقدار $f''(\frac{\pi}{4})$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۸

۱۷۹- خط $y = 4x + 2$ در نقطه ای به طول ۱ بر نمودار تابع $f(x) = x^3 - 3ax + b$ مماس است. مقدار b کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۸۰- در شکل زیر خط d در نقطه A به طول ۱ بر نمودار تابع $f(x) = ax^2 + c$ مماس است. مقدار c کدام است؟



- (۱) ۲ (۲) $\frac{5}{2}$

- (۳) ۳ (۴) $\frac{7}{2}$

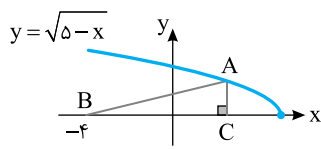
سؤال	گام
۱۷۱	۱۷۲ ۱۸۹
۱۷۲	۱۸۶ ۱۸۷
۱۷۳	۱۸۶ ۱۸۷ ۱۸۸
۱۷۴	۱۷۲ ۱۹۴
۱۷۵	۱۷۲ ۱۸۶ ۱۸۷ ۱۹۰
۱۷۶	۲۷ ۱۸۷ ۱۸۸
۱۷۷	۱۹۶ ۲۹۴
۱۷۸	۱۸۷ ۱۹۱ ۲۰۶
۱۷۹	۱۸۶ ۱۸۷ ۲۰۰
۱۸۰	۱۸۶ ۱۸۷ ۲۰۰

آزمون فصل کاربردهای مشتق (۱)

آزمون ۱۹

سؤال	گام
۱۸۱	۲۰۸ ۲۰۹ ۳۱۳
۱۸۲	۲۱۵
۱۸۳	۲۱۲ ۳۱۶
۱۸۴	۲۱۲ ۳۱۲
۱۸۵	۲۱۰
۱۸۶	۲۱۷
۱۸۷	۲۱۰ ۲۱۸ ۲۱۹
۱۸۸	۲۵ ۲۱۰ ۲۱۹
۱۸۹	۲۱۴ ۲۲۵
۱۹۰	۲۲۷

- ۱۸۱- تابع $f(x) = ax^3 - 9x^2 + 3ax + 3$ روی $\mathbb{R}$ صعودی است. حدود a کدام است؟
 (۱) $a \leq -3$ (۲) $a \geq 3$ (۳) $-3 \leq a \leq 3$ (۴) $a \geq 3$ یا $a \leq -3$
- ۱۸۲- تابع $f(x) = \begin{cases} |x-2|-2 & x \geq 0 \\ -|x+2| & x < 0 \end{cases}$ چند نقطهٔ ماکزیمم نسبی و چند نقطهٔ مینیمم نسبی دارد؟
 (۱) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.
 (۲) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.
 (۳) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.
 (۴) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.
- ۱۸۳- اگر $f'(x) = x^3 + 5x^2 + 4x$ و $D_f = \mathbb{R}$ ، تابع f چند نقطهٔ ماکزیمم نسبی و چند نقطهٔ مینیمم نسبی دارد؟
 (۱) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.
 (۲) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.
 (۳) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.
 (۴) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.
- ۱۸۴- اگر مقدار ماکزیمم نسبی تابع $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + a$ برابر -4 باشد، مقدار a کدام است؟
 (۱) -8 (۲) -6 (۳) -3 (۴) -1
- ۱۸۵- عرض نقطهٔ بحرانی تابع $f(x) = \frac{x^2 - 17}{\sqrt{x+5}}$ کدام است؟
 (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) -8 (۳) $-\sqrt{8}$ (۴) 26
- ۱۸۶- مقدار مینیمم مطلق تابع $f(x) = (x-2)^2(x+2)$ با دامنهٔ $[-2, 2]$ کدام است؟
 (۱) -10 (۲) -12 (۳) -24 (۴) -27
- ۱۸۷- اگر $x+2y=4$ ، کمترین مقدار ممکن $x+y^2$ کدام است؟
 (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4
- ۱۸۸- در شکل مقابل اگر مساحت مثلث ABC بیشترین مقدار ممکن باشد، طول نقطهٔ C کدام است؟
 (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4
- ۱۸۹- اگر نقطه‌های به طول $x=1$ و $x=-1$ نقطه‌های عطف نمودار تابع $f(x) = 2x^4 + ax^3 + bx^2$ باشند، مجموع طول نقاط اکسترمم نسبی تابع f چقدر است؟
 (۱) -6 (۲) -4 (۳) -12 (۴) صفر
- ۱۹۰- نمودار تابع $f(x) = \frac{2x}{|x|+2}$ خط $y=m$ را قطع نمی‌کند. حدود m کدام است؟
 (۱) $|m| \leq 2$ (۲) $1 \leq |m| \leq 2$ (۳) $|m| \geq 2$ (۴) $|m| \leq 1$



آزمون فصل کاربردهای مشتق (۲)

آزمون ۲۰

۱۹۱- به ازای کدام مقدار k تابع $f(x) = \frac{x+k}{x^2+x+1}$ روی بازه $[-\frac{4}{5}, 2]$ صعودی است؟

- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $-\frac{2}{5}$ (۴) $-\frac{3}{5}$

۱۹۲- تابع $f(x) = 2\sqrt{x+4} - \sqrt{x-2}$ روی بازه $[a, b]$ نزولی است. حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{3}$ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) $2\sqrt{5}$

۱۹۳- نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2+1}$ در کدام ناحیهٔ صفحهٔ مختصات قرار دارد؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۱۹۴- تابع $f(x) = 2x^3 + ax^2 + x$ اکسترمم نسبی ندارد. حدود a کدام است؟

- (۱) $|a| > \sqrt{3}$ (۲) $|a| > \sqrt{6}$ (۳) $|a| \leq \sqrt{6}$ (۴) $|a| \leq \sqrt{3}$

۱۹۵- اگر $f(x) = |x|(x^3 - 4)$ ، فاصلهٔ نقاط بحرانی تابع f از یکدیگر کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) ۲ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{10}$

۱۹۶- مقدار مینیمم مطلق تابع $f(x) = -5x^3 + x|x-1|$ با دامنهٔ $[0, 2]$ کدام است؟

- (۱) -۳۸ (۲) -۳۹ (۳) -۴۰ (۴) -۴۱

۱۹۷- نزدیک‌ترین نقطه روی نمودار تابع $y = \sqrt{x+1}$ به نقطهٔ $A(\frac{1}{4}, 0)$ کدام نقطه است؟

- (۱) $(3, 2)$ (۲) $(1, \sqrt{2})$ (۳) $(2, \sqrt{3})$ (۴) $(\frac{1}{3}, \frac{2}{\sqrt{3}})$

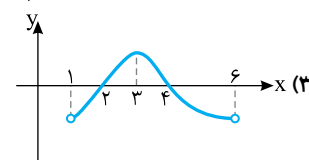
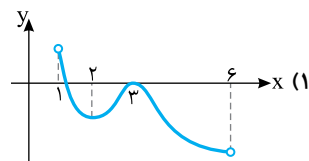
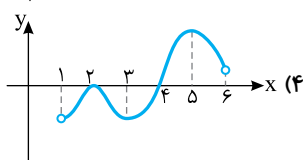
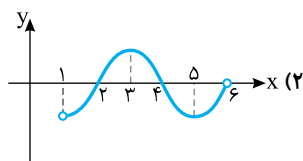
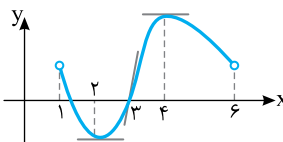
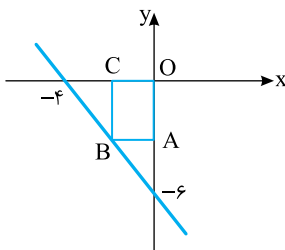
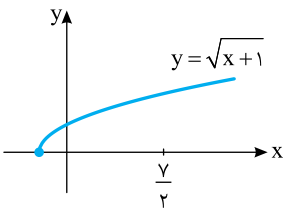
۱۹۸- در شکل مقابل بیشترین مقدار ممکن مساحت مستطیل OABC کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۹

۱۹۹- جهت تقعر نمودار تابع $f(x) = -2x^4 + 4mx^3 - 3x^2 + x + 1$ همواره رو به پایین است. حدود m کدام است؟

- (۱) $|m| \leq 1$ (۲) $|m| \geq 1$ (۳) $|m| \leq 2$ (۴) $|m| \geq 2$

۲۰۰- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع f' به کدام شکل می‌تواند باشد؟



سؤال	گام
۱۹۱	۲۰۸ ۲۰۹ ۳۱۲
۱۹۲	۲۰۸ ۲۰۹ ۳۱۶
۱۹۳	۲۱۲ ۳۱۲
۱۹۴	۲۱۲ ۳۱۳
۱۹۵	۱۹۴ ۲۱۰
۱۹۶	۱۹۴ ۲۱۷
۱۹۷	۲۱۰ ۲۱۹
۱۹۸	۲۵ ۲۱۰ ۲۱۹
۱۹۹	۲۲۳ ۳۱۳
۲۰۰	۲۳۲

آزمون فصل کاربردهای مشتق (۳)

آزمون ۲۱

سؤال	گام
۲۰۱	۲۰۸ ۲۰۹ ۳۱۲
۲۰۲	۲۱۵
۲۰۳	۲۱۲ ۳۱۶
۲۰۴	۲۱۴
۲۰۵	۲۱۰
۲۰۶	۲۱۷
۲۰۷	۲۵ ۲۱۰ ۲۱۹
۲۰۸	۲۱۸ ۲۱۹
۲۰۹	۲۲۲
۲۱۰	۲۲۶ ۲۲۷

۲۰۱- تابع $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

(۱) روی دامنه‌اش صعودی است.

(۲) روی دامنه‌اش نزولی است.

(۳) روی بازه‌های $(-\infty, -1)$ ، $(-1, 1)$ و $(1, +\infty)$ صعودی است.

(۴) روی بازه‌های $(-\infty, -1)$ ، $(-1, 1)$ و $(1, +\infty)$ نزولی است.

۲۰۲- تابع $f(x) = ||x| - 2|$ به ترتیب چند نقطه ماکزیمم نسبی و چند نقطه مینیمم نسبی دارد؟

(۱) ۲ و ۱ (۲) ۱ و ۲ (۳) ۱ و ۱ (۴) ۲ و صفر

۲۰۳- تابع $f(x) = x^5 - 5x^4 + 1$ به ترتیب چند نقطه ماکزیمم نسبی و چند نقطه مینیمم نسبی دارد؟

(۱) ۱ و ۱ (۲) ۲ و صفر (۳) صفر و ۲ (۴) ۱ و صفر

۲۰۴- اگر $(-1, 2)$ نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x) = \frac{a}{3}x^3 + 2bx^2 + 4x - \frac{4}{3}$ باشد، مقدار $a - b$ کدام است؟

(۱) ۱۷ (۲) ۳۲ (۳) ۲۳ (۴) ۳۱

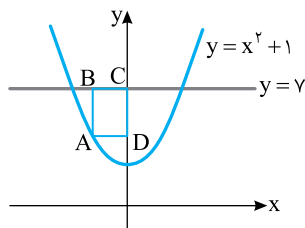
۲۰۵- تابع $f(x) = (x^2 - 1)\sqrt[3]{x^2}$ چند نقطه بحرانی دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۰۶- اگر حداکثر مقدار تابع $f(x) = \frac{x+a}{\sqrt{x}}$ در بازه $[1, 4]$ برابر $\frac{9}{4}$ باشد، مقدار a کدام است؟ ($0 < a < 1$)

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۲۰۷- در شکل مقابل بیشترین مقدار ممکن مساحت مستطیل ABCD کدام است؟



(۱) $2\sqrt{2}$

(۲) $3\sqrt{2}$

(۳) $4\sqrt{2}$

(۴) $6\sqrt{2}$

۲۰۸- تابع f با ضابطه $f(x) = x^3$ و دامنه $[0, +\infty)$ مفروض است. طول نزدیک‌ترین نقطه از نمودار این تابع به خط $y = 3x - 6$ چقدر است؟

(۱) ۱ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۲ (۴) صفر

۲۰۹- بزرگ‌ترین مقدار k به طوری که جهت تقعر نمودار تابع $f(x) = ax^3 - 6x^2 + 3x - 1$ روی بازه $(-\infty, k)$ رو به بالا باشد برابر

۲- است. مقدار a کدام است؟

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۲۱۰- نمودار توابع $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$ و $g(x) = x^3 + 3x$ در چند نقطه متقاطع‌اند؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

آزمون فصل کاربردهای مشتق (۴)

آزمون ۲۲

۲۱۱- تابع $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ روی بازه $[a, b]$ صعودی است. حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) $2\sqrt{5}$

۲۱۲- تابع $f(x) = x + \sqrt{k-x}$ روی بازه $[a, b]$ نزولی است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) ۲

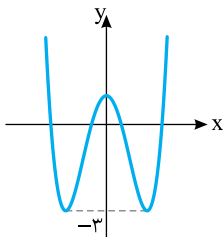
۲۱۳- تابع $f(x) = x + \sqrt{2-[x]^2}$ چند نقطهٔ مینیمم نسبی دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۲۱۴- a عددی مثبت است و تابع $f(x) = \frac{x^2+2x}{x^2+a}$ دو نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد. مجموعهٔ مقادیر a کدام است؟

- (۱) $(0, +\infty)$ (۲) $(0, 2)$ (۳) $(1, +\infty)$ (۴) $(2, +\infty)$

۲۱۵- نمودار تابع $f(x) = x^4 + ax^2 + bx + 1$ به صورت مقابل است. طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f کدام است؟



- (۱) $\pm\sqrt{2}$

- (۲) ± 1

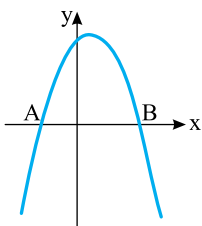
- (۳) ± 2

- (۴) $\pm\sqrt{5}$

۲۱۶- تابع $f(x) = \begin{cases} |x^2-4| & x \neq 0 \\ k & x = 0 \end{cases}$ در نقطهٔ $x=0$ مینیمم نسبی دارد ولی مینیمم مطلق ندارد. حدود k کدام است؟

- (۱) $0 < k < 4$ (۲) $k < 4$ (۳) $0 < k < 2$ (۴) $k < 2$

۲۱۷- نمودار تابع $f(x) = (m^2-2)x^2 + (3-2m)x + 3$ در شکل مقابل رسم شده است. کمترین

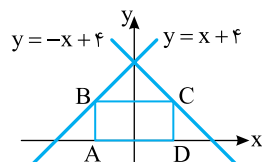


مقدار ممکن $x_A + x_B$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$

- (۳) ۳ (۴) $\frac{1}{4}$

۲۱۸- در شکل مقابل بیشترین مقدار ممکن مساحت مستطیل ABCD کدام است؟



- (۱) ۱۶

- (۲) ۱۲

- (۳) ۸

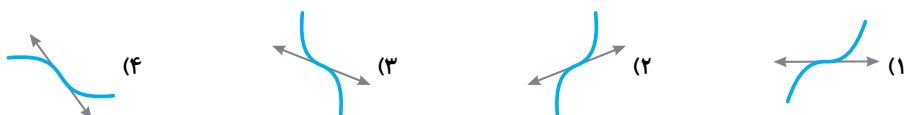
- (۴) ۶

۲۱۹- جهت تقعر نمودار تابع $f(x) = \sin^2 x - 2 \sin x$ روی بازهٔ $(0, \pi)$ چگونه است؟

- (۱) رو به بالاست. (۲) رو به پایین است.

- (۳) ابتدا رو به بالا سپس رو به پایین است. (۴) ابتدا رو به پایین سپس رو به بالاست.

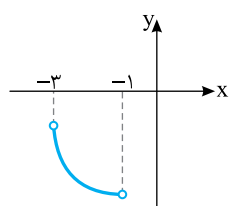
۲۲۰- نمودار تابع $f(x) = x^3 + x^2 + x - 3$ در همسایگی نقطهٔ عطف خود شبیه کدامیک از شکل‌های زیر است؟



سؤال	گام
۲۱۱	۲۰۸ ۲۰۹ ۳۱۲
۲۱۲	۲۰۸ ۲۰۹
۲۱۳	۲۲ ۲۱۵ ۳۳۶
۲۱۴	۲۱۲ ۲۹۴
۲۱۵	۲۱۴
۲۱۶	۲۱۱ ۲۱۵ ۲۱۶
۲۱۷	۲۵ ۲۱۰ ۲۱۹
۲۱۸	۲۵ ۲۱۰ ۲۱۹
۲۱۹	۲۲۲
۲۲۰	۲۲۶

آزمون فصل کاربردهای مشتق (۵)

سؤال	گام
۲۲۱	۱۸۷ ۱۹۱ ۲۰۸
۲۲۲	۲۱۵
۲۲۳	۲۱۲ ۳۱۲
۲۲۴	۲۲ ۲۱۷
۲۲۵	۳۰ ۳۱ ۳۸ ۲۱۰
۲۲۶	۲۱۰ ۲۱۸ ۲۱۹
۲۲۷	۲۱۰ ۲۱۹
۲۲۸	۲۵ ۲۱۰ ۲۱۹
۲۲۹	۲۲۵
۲۳۰	۲۳۲



۲۲۱- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. کدام تابع اکیداً صعودی است؟

(۲) $y = f(x^3)$

(۱) $y = x + f(x)$

(۴) $y = \frac{f(x)}{x}$

(۳) $y = x^2 f(x)$

۲۲۲- تابع $f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & x > 0 \\ x^3-1 & x \leq 0 \end{cases}$ چند نقطهٔ ماکزیمم نسبی و چند نقطهٔ مینیمم نسبی دارد؟

(۲) فقط یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی دارد.

(۱) فقط یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.

(۳) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد. (۴) نه نقطهٔ ماکزیمم نسبی دارد و نه نقطهٔ مینیمم نسبی.

۲۲۳- عرض نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع $f(x) = \sqrt[3]{3x-x^3}$ کدام است؟

(۴) $\sqrt[3]{2}$

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) $\sqrt[3]{3}$

۲۲۴- نسبت بیشترین مقدار به کمترین مقدار تابع $f(x) = x + \sqrt{4-x^2}$ کدام است؟

(۴) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۳) $-\sqrt{2}$

(۲) -۲

(۱) -۱

۲۲۵- تابع $f(x) = |x^2|x| - 1|$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

۲۲۶- اگر $x+y=2$ ، کمترین مقدار ممکن x^3+y^3 کدام است؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

۲۲۷- کمترین فاصلهٔ نقطه‌های $(x, 4)$ و $(3x, x+6)$ چقدر است؟

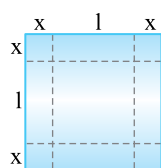
(۴) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

(۳) $\frac{4}{\sqrt{5}}$

(۲) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(۱) $\frac{4}{\sqrt{3}}$

۲۲۸- مطابق شکل می‌خواهیم در چهار گوشهٔ ورق مربعی به طول ضلع ۳۰ سانتی‌متر مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آن‌ها را کنار بگذاریم. سپس با تا کردن ورق در امتداد خط‌چین‌ها یک جعبهٔ بدون در بسازیم. x کدام باشد تا حجم قوطی، حداکثر مقدار ممکن گردد؟



(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵

۲۲۹- عرض نقطهٔ عطف نمودار تابع $f(x) = x + \sqrt[3]{x-1}$ کدام است؟

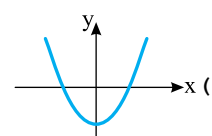
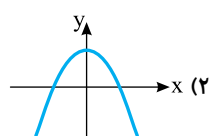
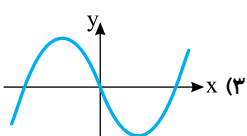
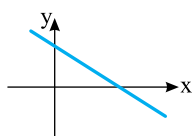
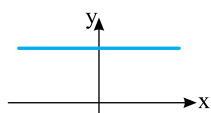
(۴) -۲

(۳) صفر

(۲) -۱

(۱) ۱

۲۳۰- نمودار تابع مشتق دوم تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع f به کدام شکل می‌تواند باشد؟



آزمون فصل بازه و مجموعه

آزمون ۲۴

سؤال	گام
۲۳۱	۲۳۴ ۲۳۷
۲۳۲	۲۳۴
۲۳۳	۲۳۴
۲۳۴	۲۳۴
۲۳۵	۲۴۰
۲۳۶	۲۴۰ ۲۴۱
۲۳۷	۲۴۱ ۲۴۲
۲۳۸	۲۴۰
۲۳۹	۲۴۱
۲۴۰	۲۴۱

۲۳۱- اگر مجموعه مرجع $[-3, 9]$ باشد، $A = (3, 7]$ و $B = (-1, 9)$ ، مجموع عددهای صحیح در مجموعه $A' - B'$ چقدر است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۱۴ (۳) ۱۳ (۴) ۲۱

۲۳۲- اگر اشتراک دو بازه $[-2, 4]$ و $(2a, a)$ تهی نباشد، مجموعه مقادیر ممکن برای a کدام است؟

- (۱) $(-1, 0)$ (۲) $(-2, 0)$ (۳) $(-4, 0)$ (۴) $(-\infty, -2)$

۲۳۳- اگر $A \cap B = (1, 3]$ و $A - B = [-2, 1]$ ، مجموعه A کدام است؟

- (۱) $[-2, 2]$ (۲) $(-2, 2)$ (۳) $(-2, 3]$ (۴) $[-2, 3]$

۲۳۴- مجموعه‌های A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه مرجع U هستند. اگر A مجموعه‌ای متناهی و B مجموعه‌ای نامتناهی باشد، کدام مجموعه حتماً نامتناهی است؟

- (۱) $A' - B$ (۲) $A - B'$ (۳) $B - A$ (۴) $B' - A'$

۲۳۵- مجموعه‌های A و B زیرمجموعه مجموعه مرجع U هستند. اگر $n(A) = 12$ ، $n(B') = 7$ و $n(A) = 3n(A')$ ، مجموعه B چند عضو دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۸ (۴) ۹

۲۳۶- اگر مجموعه مرجع U باشد، $n(U) = 26$ ، $n(A \cup B) = 14$ و $n(A) = n(A')$ ، مقدار $n(B - A)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۳۷- اگر $n(A) = n(B) + 3$ ، $n(A - B) = 2n(B - A)$ و $n(A \cap B) = 5$ ، مقدار $n(A \cup B)$ کدام است؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶

۲۳۸- اگر U مجموعه مرجع باشد، $n(U) = 23$ ، $n(A) = 10$ و $n(B) = 7$ ، بیشترین مقدار ممکن $n(A' \cap B')$ کدام است؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴

۲۳۹- در کلاسی، هر دانش‌آموز دست‌کم به یکی از درس‌های فیزیک یا ریاضی علاقه‌مند است. ۶۰٪ از دانش‌آموزان یک کلاس به فیزیک و ۷۰٪ آن‌ها به ریاضیات علاقه‌مندند. اگر تعداد کسانی که به هر دو درس علاقه‌مندند ۶ نفر باشد، این کلاس چند دانش‌آموز دارد؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴) ۲۲

۲۴۰- از ۱۲۰ دانش‌آموز پایه دهم ۱۰۵ نفر به ریاضیات و ۹۵ نفر به فیزیک علاقه دارند. حداقل چند نفر به هر دو درس علاقه دارند؟

- (۱) ۷۰ (۲) ۷۵ (۳) ۸۰ (۴) ۸۵

آزمون فصل الگو و دنباله (۱)

آزمون ۲۵

سؤال	گام
۲۴۱	۲۴۴
۲۴۲	۲۴۶
۲۴۳	۲۴۸
۲۴۴	۲۵۳ ۳۴۴
۲۴۵	۲۴۸
۲۴۶	۲۵۷ ۲۵۹
۲۴۷	۲۶۳
۲۴۸	۲۵۷
۲۴۹	۲۶۴
۲۵۰	۲۶۷

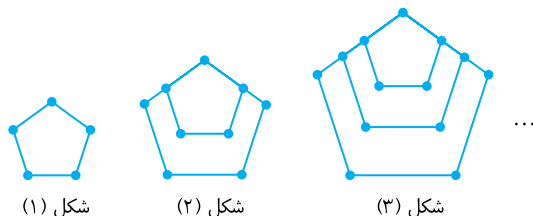
۲۴۱- تعداد نقاط روی شکل چندم از الگوی مقابل برابر ۶۱ است؟

(۱) چهاردهم

(۲) پانزدهم

(۳) شانزدهم

(۴) هفدهم



شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

۲۴۲- در دنباله با جمله عمومی $a_n = 95n - n^2$ چند جمله مثبت وجود دارد؟

(۴) ۸۹

(۳) ۹۰

(۲) ۹۴

(۱) ۹۵

۲۴۳- در دنباله‌ای حسابی $a_8 = 2a_1$. مقدار $15a_{15}$ کدام است؟

(۴) صفر

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

۲۴۴- اگر $\log_2(16a)$ ، $\log_2(3a+4)$ و $\log_2 a$ سه جمله متوالی دنباله‌ای حسابی باشند، مقدار a کدام است؟

(۴) ۸

(۳) ۴

(۲) ۳

(۱) ۲

۲۴۵- جمله اول دنباله حسابی با جمله عمومی $a_n = 2 - 3n$ را ۴ واحد کاهش و قدرنسبت را ۶ واحد افزایش می‌دهیم. جمله

بیست و یکم دنباله حسابی جدید کدام است؟

(۴) ۵۷

(۳) ۵۵

(۲) ۵۲

(۱) ۵۰

۲۴۶- حاصل ضرب پانزده جمله اول دنباله هندسی $\frac{1}{2}, 1, 2, \dots$ کدام است؟

(۴) 2^{90}

(۳) 2^{75}

(۲) 2^{60}

(۱) 2^{30}

۲۴۷- اگر عددهای $3x-1$ ، $2x+3$ و $y-9$ جمله‌های متوالی دنباله‌ای حسابی و هندسی باشند، حاصل $x+y$ کدام است؟

(۴) ۲۴

(۳) ۲۲

(۲) ۲۸

(۱) ۳۲

۲۴۸- در دنباله‌ای هندسی $a_8 - a_6 = 12$ و $a_8 - a_3 = 96$. جمله پنجم این دنباله چقدر است؟

(۴) -۸

(۳) -۳۲

(۲) -۱۶

(۱) -۶۴

۲۴۹- عددهای طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جمله‌های هر دسته برابر شماره آن دسته باشد:

$(1), (3, 5), (7, 9, 11), \dots$

مجموع دو جمله اول و آخر دسته سی‌ام کدام است؟

(۴) ۱۸۵۰

(۳) ۱۸۰۰

(۲) ۱۷۵۰

(۱) ۱۷۰۰

۲۵۰- در دنباله‌ای هندسی مجموع پنج جمله اول برابر ۸ و مجموع ده جمله اول برابر ۲۶۴ است. جمله هفتم دنباله کدام است؟

(۴) $\frac{512}{31}$

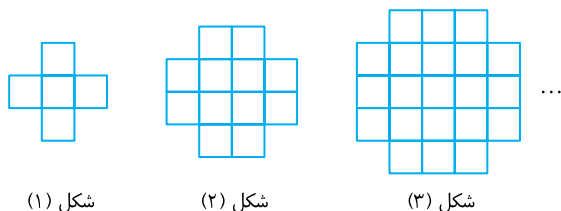
(۳) $\frac{256}{31}$

(۲) $\frac{128}{31}$

(۱) $\frac{32}{31}$

آزمون فصل الگو و دنباله (۲)

آزمون ۲۶



شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

۲۵۱- الگوی مقابل از مربع‌های 1×1 ساخته شده است. مساحت شکل هشتم کدام است؟

(۱) ۶۴

(۲) ۶۰

(۳) ۹۶

(۴) ۱۰۰

۲۵۲- بزرگ‌ترین جمله دنباله با جمله عمومی $a_n = -2n^2 + 19n + 1$ چقدر است؟

(۱) ۴۵

(۲) ۴۶

(۳) ۴۷

(۴) ۴۸

۲۵۳- اگر جمله عمومی دنباله‌ای به صورت $a_n = \frac{2n-1}{n+2}$ باشد، چند جمله این دنباله در بازه $(\frac{9}{10}, \frac{11}{10})$ هستند؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۲۵۴- در دنباله‌ای حسابی $a_p + a_v = 0$ و $a_p + a_v = 128$ ، $a_p + a_v = 0$ قدرنسبت دنباله کدام است؟

(۱) ۳±

(۲) ۲±

(۳) ۴±

(۴) ۶±

۲۵۵- اگر x واسطه حسابی $\sin^2 \alpha$ و $\cos^2 \alpha$ و y واسطه هندسی $\tan^2 \alpha$ و $\cot^2 \alpha$ باشد، مقدار $x+y$ کدام است؟ ($y > 0$)

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$

(۳) ۲

(۴) $\frac{5}{2}$

۲۵۶- اگر عددهای جدول زیر جملات متوالی دنباله‌ای هندسی باشند، مقدار xyz کدام است؟

x	$\frac{1}{y}$	y	z	۳۲
-----	---------------	-----	-----	----

(۱) ۲

(۲) ۴

(۳) ۸

(۴) ۱۶

۲۵۷- جمله‌های اول، دوم و چهارم یک دنباله هندسی غیرثابت جمله‌های متوالی یک دنباله حسابی‌اند. اگر قدرنسبت دنباله هندسی

عددی مثبت باشد، مقدار آن کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

۲۵۸- مجموع جمله‌های دنباله حسابی a, b, c برابر ۱۵ است. اگر $a+8, b+6, c+4$ دنباله‌ای هندسی باشد، مقدار ac کدام است؟

(۱) ۱۵

(۲) ۱۸

(۳) ۲۱

(۴) ۲۴

۲۵۹- مربعی به طول ضلع a مفروض است. ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ می‌کنیم، سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را رنگ

می‌کنیم و به همین ترتیب این کار را ادامه می‌دهیم. حداقل چند مرحله باید رنگ‌آمیزی کنیم تا بیش از $99/9$ درصد مساحت

مربع اولیه رنگ شود؟

(۱) ۹

(۲) ۱۰

(۳) ۱۱

(۴) ۱۲

۲۶۰- مجموع ده جمله اول دنباله حسابی $a, a+2, a+4, \dots$ با مجموع ده جمله اول دنباله هندسی $1, 2, 4, \dots$ برابر است. مقدار a

کدام است؟

(۱) $91/2$ (۲) $92/3$ (۳) $93/3$ (۴) $94/1$

سؤال	گام
۲۵۱	۲۴۴
۲۵۲	۲۴۶
۲۵۳	۲۴۶
۲۵۴	۲۵۱
۲۵۵	۲۵۳
۲۵۶	۲۶۱
۲۵۷	۲۵۳
۲۵۸	۲۴۸
۲۵۹	۲۶۷
۲۶۰	۲۶۴

آزمون فصل توان، ریشه، اتحاد، تجزیه و تقسیم (۱)

آزمون ۲۷

سؤال	گام
۲۶۱	۲۷۲ ۲۷۳
۲۶۲	۲۷۲ ۲۷۳
۲۶۳	۲۷۵ ۲۷۸
۲۶۴	۲۷۵ ۲۷۶ ۲۸۱ ۲۸۵
۲۶۵	۲۷۹
۲۶۶	۲۷۶ ۲۸۲
۲۶۷	۲۷۵ ۲۷۶ ۲۸۳
۲۶۸	۲۷۶ ۲۸۱ ۲۸۵
۲۶۹	۲۸۷
۲۷۰	۲۸۷

۲۶۱- عبارت $\frac{\sqrt[3]{x}\sqrt{x}\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\sqrt{x}$ (۲) $\sqrt[3]{x}$ (۳) $\sqrt[3]{x^2}$ (۴) $\sqrt{x}$

۲۶۲- اگر $\sqrt[4]{x^5} = \sqrt[4]{x^2} \sqrt[4]{x^3} = \sqrt[4]{x^5}$ مقدار x کدام است؟

- (۱) $\sqrt[4]{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt[4]{4}$

۲۶۳- اگر $a + \frac{2}{a} = 25$ مقدار $\frac{(a^2-4)(a^2-1)}{a^2}$ کدام است؟

- (۱) ۶۰۰ (۲) ۶۰۶ (۳) ۶۱۲ (۴) ۶۱۶

۲۶۴- اگر $a = 3 + \sqrt{3}$ و $b = 3 - \sqrt{3}$ مقدار $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}$ کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۶ (۳) ۱۸ (۴) ۲۶

۲۶۵- اگر $\sqrt[3]{a+9} - \sqrt[3]{a-9} = 3$ مقدار a^2 کدام است؟

- (۱) ۵۴ (۲) ۸۰ (۳) ۸۲ (۴) ۹۰

۲۶۶- اگر $f(x) = \frac{x^4-1}{(x^3+x)(x^6-x^4+x^2-1)}$ مقدار $f(-\frac{2}{3})$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{3}{4}$

۲۶۷- کدام عبارت در تجزیه $x^2 - 2x + 4y - y^2 - 3$ وجود دارد؟

- (۱) $x+y+1$ (۲) $x-y-3$ (۳) $x-y+1$ (۴) $x+y+3$

۲۶۸- مقدار $\frac{\sqrt[3]{2+1}}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2+1}}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\sqrt[3]{4}-1$ (۲) $\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}$ (۳) $\sqrt[3]{2}-1$ (۴) $4-\sqrt[3]{2}$

۲۶۹- اگر $P(x+3) = x^3 - mx^2 + mx + 2$ و باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x-3)$ بر $x-4$ برابر ۶ باشد، مقدار m کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۱ (۴) ۲

۲۷۰- $P(x)$ و $Q(x)$ چندجمله‌ای هستند و $P(x-1) = (3-2x)Q(1-x)$. اگر باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+2$ برابر ۱۰ باشد، باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $Q(x)$ بر $x-2$ چقدر است؟

- (۱) ۲ (۲) ۵ (۳) ۱۰ (۴) ۲۰

آزمون فصل توان، ریشه، اتحاد، تجزیه و تقسیم (۲)

آزمون ۲۸

سؤال	گام
۲۷۱	۲۷۰ ۲۷۶
۲۷۲	۲۷۲ ۲۷۳ ۲۷۴
۲۷۳	۲۷۸
۲۷۴	۲۷۵ ۲۷۶
۲۷۵	۲۷۵ ۲۷۹
۲۷۶	۲۷۵ ۲۷۹
۲۷۷	۲۷۸ ۲۸۳
۲۷۸	۲۷۵ ۲۷۶
۲۷۹	۲۷۶ ۲۸۵
۲۸۰	۲۸۷

- ۲۷۱- مقدار $\frac{\sqrt{\sqrt{5}+2} \times \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}}{\sqrt[6]{\sqrt{5}+2}}$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) $\sqrt{5}+2$ (۳) $\sqrt{5}-2$ (۴) ۲
- ۲۷۲- اگر $a=\sqrt{2}$ ، $b=\sqrt[3]{4}$ و $c=\sqrt[3]{2\sqrt{3}}$ ، کدام گزینه درست است؟
 (۱) $a < b < c$ (۲) $c < a < b$ (۳) $a < c < b$ (۴) $c < b < a$
- ۲۷۳- اگر $a+b=8$ و $b-c=11$ ، مقدار $a^2+ab+bc+ca$ کدام است؟
 (۱) -۲۶ (۲) -۲۴ (۳) -۲۰ (۴) -۱۸
- ۲۷۴- اگر $a-b+\sqrt{c}=6$ و $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}=3$ ، مقدار a کدام است؟
 (۱) $\frac{9}{4}$ (۲) $\frac{16}{9}$ (۳) $\frac{25}{4}$ (۴) $\frac{25}{16}$
- ۲۷۵- اگر $a+\frac{1}{a}=3$ ، مقدار $a^5+\frac{1}{a^5}$ کدام است؟
 (۱) ۱۲۱ (۲) ۱۲۲ (۳) ۱۲۳ (۴) ۱۲۴
- ۲۷۶- a عددی مثبت است و $\frac{a^2}{4}+\frac{4}{a^2}=23$ ، مقدار $\frac{a^3}{8}+\frac{8}{a^3}$ کدام است؟
 (۱) ۱۱۰ (۲) ۱۱۵ (۳) ۱۲۰ (۴) ۱۳۰
- ۲۷۷- کدام گزینه عاملی از $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$ نیست؟
 (۱) x^2-x+5 (۲) x^2+x+5 (۳) $x-1$ (۴) $x+2$
- ۲۷۸- مقدار $\frac{1}{3}(\sqrt{7}-1)\sqrt{4+\sqrt{7}}$ برابر کدام است؟
 (۱) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{2}$
- ۲۷۹- مقدار $\frac{2}{1-\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{6}}$ برابر کدام است؟
 (۱) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}$ (۳) $(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{2})$ (۴) $(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{2})$
- ۲۸۰- اگر $P(x)=x^4+ax^3+6x^2+bx+10$ و باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x-1)$ بر $x-2$ برابر ۱۲ باشد، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x+1)$ بر $x+2$ چقدر است؟
 (۱) ۲۲ (۲) ۱۲ (۳) -۱۲ (۴) -۲۲

آزمون فصل توان، ریشه، اتحاد، تجزیه و تقسیم (۳)

آزمون ۲۹

سؤال	گام
۲۸۱	۲۷۲ ۲۷۳
۲۸۲	۲۷۲ ۲۷۳
۲۸۳	۲۷۲ ۲۷۳
۲۸۴	۲۷۵
۲۸۵	۲۸۱
۲۸۶	۲۷۶
۲۸۷	۲۷۰ ۲۷۶
۲۸۸	۲۷۵ ۲۷۶ ۲۸۵
۲۸۹	۲۷۵ ۲۷۶
۲۹۰	۲۸۶ ۲۸۷

- ۲۸۱- اگر $x = \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{3}$ ، مقدار $\sqrt{x^{21}}$ کدام است؟
 (۱) ۳ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) ۹ (۴) $\sqrt[3]{9}$
- ۲۸۲- مقدار $\sqrt[3]{2}\sqrt[4]{4}\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{16}$ کدام است؟
 (۱) $\sqrt[3]{16}$ (۲) $\sqrt[3]{8}$ (۳) $\sqrt[3]{4}$ (۴) ۲
- ۲۸۳- اگر $a, b > 0$ ، حاصل $\sqrt{\frac{a}{b^3}} \times \sqrt[3]{\frac{b^2}{a^5}} \times \sqrt[4]{a^{14}b^{10}}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{5}{a^6 b^3}$ (۲) $\frac{1}{a^3 b^6}$ (۳) $\frac{5}{a^6}$ (۴) ۱
- ۲۸۴- اگر $3^{x-1} + 3^{-x-1} = 2$ ، مقدار $9^x + 9^{-x}$ کدام است؟
 (۱) ۳۴ (۲) ۳۶ (۳) ۳۸ (۴) ۴۰
- ۲۸۵- اگر $a = \frac{\sqrt{17}+3}{2}$ و $a+b = \sqrt{17}$ ، مقدار $a^3 - b^3 + 9ab$ کدام است؟
 (۱) ۶۲ (۲) ۶۳ (۳) ۶۴ (۴) ۶۵
- ۲۸۶- اگر $\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{(1+\sqrt{2})(1+\sqrt[4]{2})(1+\sqrt[8]{2})}$ ، مقدار x^{48} کدام است؟
 (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۶
- ۲۸۷- مقدار $\sqrt{\sqrt{2}+1} \times \sqrt{\sqrt{2}-1} \times \sqrt[6]{\sqrt{2}-1} \times \sqrt[6]{\sqrt{2}+1}$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt[6]{2}$ (۴) ۲
- ۲۸۸- مقدار $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1} - \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) -۱ (۴) $-\frac{1}{2}$
- ۲۸۹- کدام عبارت در تجزیه عبارت $x^2y^2 - x^2 - y^2 - 4xy + 1$ وجود دارد؟
 (۱) $xy - x + y - 1$ (۲) $xy + x - y - 1$
 (۳) $xy - x - y - 1$ (۴) $xy + x + y + 1$
- ۲۹۰- چندجمله‌ای $P(x+1)$ بر $x-2$ بخش‌پذیر است. اگر $P(1-x) = ax^2 - x + 2a$ ، مقدار a کدام است؟
 (۱) -۱ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{3}$ (۴) $-\frac{1}{4}$

آزمون فصل توان، ریشه، اتحاد، تجزیه و تقسیم (۴)

آزمون ۳۰

سؤال	گام
۲۹۱	۲۷۲ ۲۷۳
۲۹۲	۲۷۲ ۲۷۳
۲۹۳	۲۷۲ ۲۷۳
۲۹۴	۲۷۷
۲۹۵	۲۷۵ ۲۸۱
۲۹۶	۲۷۵ ۲۷۹
۲۹۷	۲۸۳
۲۹۸	۲۷۵ ۲۷۶
۲۹۹	۲۷۵ ۲۷۶ ۲۸۱
۳۰۰	۲۸۷

۲۹۱- مقدار $\sqrt[5]{\sqrt[3]{2^{10}}} \times \sqrt[6]{\sqrt[4]{2^4}}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\sqrt[3]{2}$ (۳) $\sqrt[6]{2}$ (۴) $\sqrt[12]{2}$

۲۹۲- مقدار $\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[5]{2}}{\sqrt[6]{2}\sqrt[7]{2}}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt[4]{2}$ (۲) $\sqrt[3]{2}$ (۳) $\sqrt[6]{2}$ (۴) $\sqrt[12]{2}$

۲۹۳- اگر $\sqrt[5]{27\sqrt[3]{a}} = \sqrt[5]{27\sqrt[3]{a}}$ ، مقدار $\sqrt[4]{a}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt[4]{3}}{3}$ (۴) $3\sqrt{3}$

۲۹۴- اگر $2a^2 + b^2 + 3c^2 = 23$ ، $2a^2 + 3b^2 + c^2 = 33$ و $ab + bc + ca = 11$ ، مقدار $|a+b+c|$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۲۹۵- اگر $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 1$ و $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 3$ ، مقدار $\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۲۹۶- اگر $a^2 + b^2 = \sqrt{6}$ و $ab = 1$ ، مقدار $a^{12} + b^{12}$ کدام است؟

- (۱) ۵۲ (۲) ۵۳ (۳) ۵۴ (۴) ۵۵

۲۹۷- کدام گزینه عاملی از $15x^{10} + 13x^5 + 2$ است؟

- (۱) $3x^5 - 2$ (۲) $3x^5 - 1$ (۳) $5x^5 + 1$ (۴) $5x^5 - 2$

۲۹۸- مقدار $(\sqrt{11} + \sqrt{7})\sqrt{9 - \sqrt{77}}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $3\sqrt{2}$ (۴) $4\sqrt{2}$

۲۹۹- عبارت $\frac{x^{18} - 1}{(x^6 + x^3 + 1)(x^6 - x^3 + 1)}$ برابر کدام است؟

- (۱) $x^2 - 1$ (۲) $x^4 - 1$ (۳) $x^6 - 1$ (۴) $x^8 - 1$

۳۰۰- باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای‌های $Q(x) + x$ و $2P(x) - 1$ بر $x+1$ به ترتیب برابر ۳ و -۳ است. باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $(x-3)P(1-x) + Q(3-2x)$ بر $x-2$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) -۴

آزمون فصل معادله، تعیین علامت و نامعادله (۱)

آزمون ۳۱

سؤال	گام
۳۰۱	۲۹۴
۳۰۲	۲۸۵ ۲۹۰ ۲۹۹
۳۰۳	۲۹۶
۳۰۴	۲۹۶ ۲۹۸
۳۰۵	۳۰۶ ۳۰۸
۳۰۶	۳۰۶ ۳۰۹
۳۰۷	۳۱۹ ۳۲۰
۳۰۸	۳۱۹ ۳۲۱
۳۰۹	۳۱۲
۳۱۰	۳۱۲ ۳۱۸ ۳۱۹

- ۳۰۱- به ازای چند مقدار m معادله $mx^2 - 2x + 4m = 0$ فقط یک جواب دارد؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۳۰۲- مجموع دو عدد برابر ۴ و حاصل ضرب آنها برابر ۲- است. نسبت عدد بزرگ تر به عدد کوچک تر کدام است؟
 (۱) $2 - 2\sqrt{6}$ (۲) $-2 - 2\sqrt{6}$ (۳) $-5 - 2\sqrt{6}$ (۴) $-5 - \sqrt{6}$
- ۳۰۳- اگر x_1 و x_2 جواب های معادله $x^2 + 8x - 13 = 0$ باشند، حاصل $\frac{1}{x_1 + 2} + \frac{1}{x_2 + 2}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{3}{11}$ (۲) $\frac{4}{25}$ (۳) $\frac{4}{11}$ (۴) $\frac{2}{25}$
- ۳۰۴- در معادله $x^2 - 8x + m = 0$ اگر یکی از جواب ها از دو برابر جواب دیگر ۴ واحد بیشتر باشد، مقدار m کدام است؟
 (۱) $\frac{20}{3}$ (۲) $\frac{80}{9}$ (۳) $\frac{80}{3}$ (۴) $\frac{40}{9}$
- ۳۰۵- حاصل ضرب جواب های معادله $\frac{4}{x^2 - 4} + \frac{5}{x^2 - 3} = 2$ کدام است؟
 (۱) ۲۸ (۲) ۸ (۳) $\frac{7}{2}$ (۴) ۲
- ۳۰۶- صد کیلوگرم محلول آب و شکر با غلظت ۲۵٪ موجود است. اگر یک سوم از آب آن را تبخیر کنیم، چند کیلوگرم باید شکر اضافه کنیم تا غلظت آن ۵۰٪ گردد؟
 (۱) ۲۰ (۲) ۲۵ (۳) ۳۰ (۴) این کار ممکن نیست.
- ۳۰۷- معادله $2\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2} = 2$ چند جواب دارد؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر
- ۳۰۸- جواب معادله $\sqrt{2x-1} + x = \sqrt{3x-1}$ کدام است؟
 (۱) $5 - 2\sqrt{5}$ (۲) $5 + 2\sqrt{5}$ (۳) $\frac{5 + 2\sqrt{5}}{2}$ (۴) $\frac{5 - 2\sqrt{5}}{2}$
- ۳۰۹- جدول تعیین علامت عبارت $P(x) = mx^2 + (m^2 - 12)x - m - 2n$ به صورت زیر است. مقدار n کدام است؟

x	$-\infty$	۱	۳	$+\infty$
$P(x)$	-	-	+	-

 (۱) -۱۲ (۲) ۱۲ (۳) -۴ (۴) ۴
- ۳۱۰- اگر مجموعه جواب های نامعادله $\frac{x^2 - mx - m}{x^2 - x + 1} \leq 3$ مجموعه اعداد حقیقی باشد، حداکثر مقدار m کدام است؟
 (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

آزمون فصل معادله، تعیین علامت و نامعادله (۲)

آزمون ۳۲

سؤال	گام
۳۱۱	۲۹۴
۳۱۲	۲۹۶ ۲۹۷
۳۱۳	۲۹۶ ۲۹۹
۳۱۴	۲۹۶ ۲۹۸
۳۱۵	۳۰۲ ۳۰۶
۳۱۶	۳۰۶ ۳۰۷
۳۱۷	۳۱۹ ۳۲۰
۳۱۸	۳۱۹ ۳۲۲
۳۱۹	۳۱۲ ۳۱۸
۳۲۰	۳۱۶ ۳۱۸

۳۱۱- اگر معادله $kx^2 + (2k-8)x + k-7 = 0$ یک ریشه مضاعف داشته باشد، معادله $x^2 - kx + 1 = 0$ چند جواب دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) حداکثر ۱

۳۱۲- اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادله $x^2 - 6x + 4 = 0$ باشند، مقدار $x_1\sqrt{x_1} + x_2\sqrt{x_2}$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{10}$ (۲) $4\sqrt{10}$ (۳) $6\sqrt{5}$ (۴) $8\sqrt{5}$

۳۱۳- اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادله $x^2 - 8x + 2 = 0$ باشند، معادله‌ای که جواب‌هایش $x_1 - \frac{3}{x_1}$ و $x_2 - \frac{3}{x_2}$ هستند، کدام است؟

(۱) $x^2 - 4x + 1 = 0$ (۲) $x^2 - 8x + 1 = 0$

(۳) $2x^2 + 8x + 1 = 0$ (۴) $2x^2 - 8x + 1 = 0$

۳۱۴- اگر $x = \sqrt{2} - 1$ یکی از جواب‌های معادله $x^2 + \sqrt{2}mx + m = 0$ باشد، جواب دیگر معادله کدام است؟

- (۱) $\frac{1-\sqrt{2}}{7}$ (۲) $\frac{1+\sqrt{2}}{7}$ (۳) $\frac{1-2\sqrt{2}}{7}$ (۴) $\frac{1+2\sqrt{2}}{7}$

۳۱۵- معادله $\frac{2}{(x+1)^2} - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x^3+1} = 0$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۳۱۶- به ازای چند مقدار a معادله $\frac{1}{x} + \frac{3}{x+a} = \frac{4}{x-1}$ جواب ندارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۱۷- معادله $\sqrt{x^4 + 2x - 5} = 1 + x$ چند جواب دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۳۱۸- حاصل ضرب جواب‌های معادله $x^3\sqrt{x} - 4\sqrt{x^2} + 3 = 0$ کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۲۷ (۳) ۴۸ (۴) ۶۴

۳۱۹- مجموعه جواب‌های نامعادلات $3x^2 - 18 \leq x^2 \leq 2x^2 - 4$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۳۲۰- مجموعه جواب‌های نامعادله $\frac{x+6}{x-4} \geq x$ به صورت $(-\infty, a] \cup (b, \infty)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

آزمون فصل قدر مطلق و جزء صحیح (۱)

آزمون ۳۳

سؤال	گام
۳۲۱	۳۲۴ ۳۲۶
۳۲۲	۲۹۶ ۳۲۶
۳۲۳	۳۲۴ ۳۲۷
۳۲۴	۲۳ ۳۲۴ ۳۳۱
۳۲۶	۳۳۱
۳۲۷	۳۲۳ ۳۳۵
۳۲۸	۳۳۳ ۳۳۶
۳۲۹	۳۳۳ ۳۳۶
۳۳۰	۳۳۳ ۳۳۵

۳۲۱- مجموع جواب‌های معادله $|2x^2 + 5x - 3| = |2x + 6|$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۲- (۳) ۳- (۴) ۵-

۳۲۲- مجموع جواب‌های معادله $|x-1| = |x^2-3|$ چقدر است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۱- (۴) ۲

۳۲۳- اگر $|2x-5| < 3$ ، ساده شده عبارت $|4x - \sqrt{x^2 - 8x + 16}|$ کدام است؟

- (۱) $3x-2$ (۲) $-3x+2$ (۳) $5x-4$ (۴) $-5x+4$

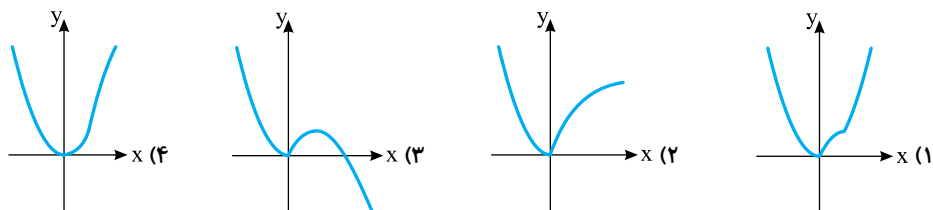
۳۲۴- مجموعه جواب‌های نامعادله $|x^2-3x| < 2x$ بازه (a, b) است. مقدار $b-a$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۲۵- اگر $-3 \leq x \leq 6$ ، مجموع حداقل و حداکثر مقدار تابع $f(x) = ||x-1| - 8|$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۴

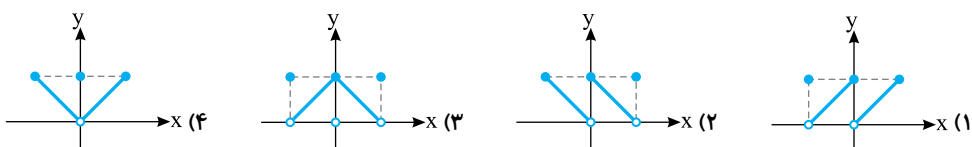
۳۲۶- نمودار تابع $f(x) = |x^2 - x| + x$ کدام است؟



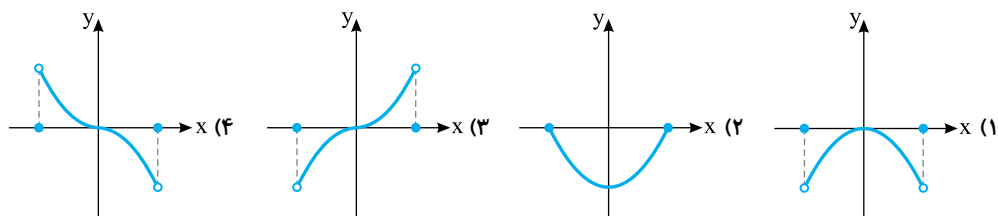
۳۲۷- اگر $f(x) = \left[\frac{x}{11}\right] - \left[\frac{-x}{11}\right]$ مقدار $f(120)$ کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۷ (۳) ۱۸ (۴) ۲۰

۳۲۸- نمودار تابع f با دامنه $[-1, 1]$ و ضابطه $f(x) = [x] + |x-1|$ کدام است؟



۳۲۹- نمودار تابع $f(x) = x^2([x] - x)$ روی بازه $[-1, 1]$ کدام است؟

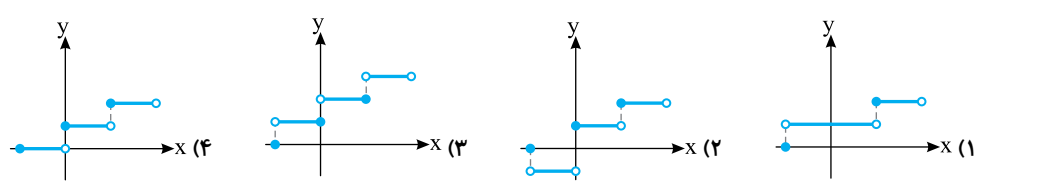
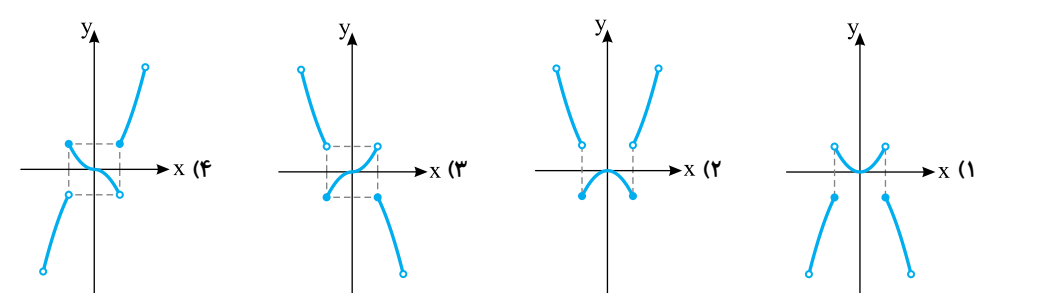


۳۳۰- اگر $f(x) = 4x - [x] - [3x]$ حاصل $f(x-1)$ کدام است؟

- (۱) $f(x)$ (۲) $-f(x)$ (۳) $f(x)-1$ (۴) $-f(x)+1$

آزمون فصل قدر مطلق و جزء صحیح (۲)

آزمون ۳۴

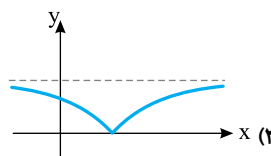
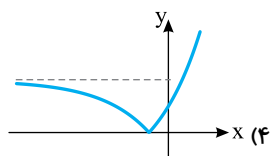
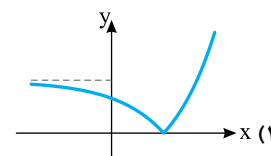
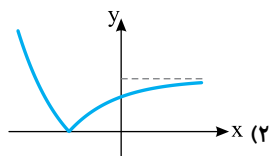
- ۳۳۱- معادله $|x+1|-2x=4$ چند جواب دارد؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۳۳۲- معادله $||x|-k|=4$ جواب ندارد. حدود k کدام است؟
 (۱) $k < 4$ (۲) $k < -4$ (۳) $k > 4$ (۴) $k > -4$
- ۳۳۳- چند عدد صحیح در نامعادله $|3-|x-2|| \leq 4$ صدق می‌کنند؟
 (۱) ۱۲ (۲) ۱۵ (۳) ۱۸ (۴) نامتناهی
- ۳۳۴- مجموعه جواب‌های نامعادله $|\frac{x+2}{2x-1}| > 1$ کدام است؟
 (۱) $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 3)$ (۲) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 3)$ (۳) $(\frac{1}{2}, 3)$ (۴) $(-\frac{1}{3}, 3)$
- ۳۳۵- مجموعه جواب‌های نامعادله $x^2+2x < 1+|x+1|$ شامل چند عدد صحیح است؟
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵
- ۳۳۶- اگر همه نمودار تابع $y=|x-1|+|x-3|$ بالاتر از خط $y=a$ قرار نگیرد، حدود مقدارهای a کدام است؟
 (۱) $0 < a \leq 4$ (۲) $a \geq 4$ (۳) $0 < a \leq 2$ (۴) $a \geq 2$
- ۳۳۷- نمودار تابع f با دامنه $[-2, 4]$ و ضابطه $f(x) = [\frac{x}{2}+1]$ کدام است؟

- ۳۳۸- نمودار تابع $f(x) = x^2(-1)^{[x]}$ روی بازه $(-2, 2)$ کدام است؟

- ۳۳۹- دامنه تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{1-|x+2|}$ بازه (a, b) است. مقدار $b-a$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۳۴۰- اگر مجموعه جواب‌های معادله $[\frac{3x-a}{2}] = 3$ بازه $[-\frac{2}{3}, 0)$ باشد، مقدار a کدام است؟
 (۱) -۴ (۲) -۶ (۳) -۸ (۴) -۱۰

سؤال	گام
۳۳۱	۳۲۴ ۳۲۶
۳۳۲	۳۲۶
۳۳۳	۳۲۷
۳۳۴	۳۱۸ ۳۲۴ ۳۲۷
۳۳۵	۳۱۸ ۳۲۴ ۳۲۷
۳۳۶	۳۳۲
۳۳۷	۳۳۳ ۳۳۶
۳۳۸	۳۳۳ ۳۳۶
۳۳۹	۲۲ ۳۲۷ ۳۳۳
۳۴۰	۳۳۳ ۳۳۴

آزمون فصل توابع نمایی و لگاریتمی (۱)

آزمون ۳۵

۳۴۱- نمودار تابع $f(x) = |3^{x-1} - 1|$ کدام است؟



۳۴۲- مجموع جواب‌های معادله $4^x - 3 \times 2^{x+2} + 27 = 0$ در کدام بازه است؟

- (۱) $(1, 2)$ (۲) $(2, 3)$ (۳) $(3, 4)$ (۴) $(4, 5)$

۳۴۳- فرض کنید $f(x) = a^x + b$. اگر $f(1) = 1$ و $f(2) = 7$ ، مقدار $f^{-1}(-\frac{5}{3})$ کدام است؟

- (۱) -3 (۲) 2 (۳) -1 (۴) 3

۳۴۴- برد تابع $f(x) = 2^x - \frac{|x|}{x}$ کدام است؟

- (۱) $(-1, +\infty)$ (۲) $(0, +\infty)$ (۳) $(-1, 0) \cup (2, +\infty)$ (۴) $(0, +\infty) - \{1\}$

۳۴۵- نمودار تابع $f(x) = \log_a(bx - 3)$ محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۵ قطع می‌کند. اگر نمودار تابع از نقطه $(15, 2)$ بگذرد.

مقدار ab کدام است؟

- (۱) $\frac{6}{5}$ (۲) $\frac{8}{5}$ (۳) $\frac{12}{5}$ (۴) $\frac{14}{5}$

۳۴۶- اگر $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ ، مقدار $\log \sqrt[4]{72}$ برحسب a و b کدام است؟

- (۱) $\frac{2a+3b}{4}$ (۲) $\frac{3a+2b}{4}$ (۳) $\frac{a+3b}{4}$ (۴) $\frac{3a+b}{4}$

۳۴۷- مقدار $\frac{1}{\log_3 30} + \frac{1}{\log_3 30} + \frac{1}{\log_3 30}$ کدام است؟

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

۳۴۸- جواب معادله $\log(x-1) - \log x = \log(\log 2)$ کدام است؟

- (۱) $1 + \log_2 2$ (۲) $\log_2 5$ (۳) $\log_2 2$ (۴) $1 + \log_2 5$

۳۴۹- جواب معادله $2^{x+1} = 5^{x-1}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{1-2\log 2}$ (۲) $\frac{1}{1-\log 2}$ (۳) $\frac{1}{1-2\log 5}$ (۴) $\frac{1}{1-\log 5}$

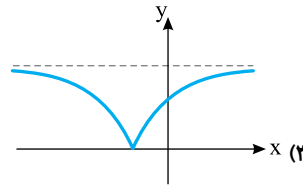
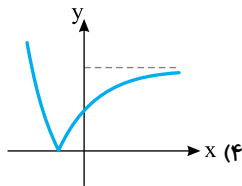
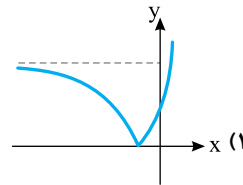
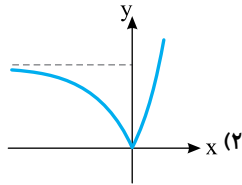
۳۵۰- دامنه تابع $f(x) = \frac{\log(x+2)}{\log(2-x)}$ کدام است؟

- (۱) $(-3, 2) - \{1\}$ (۲) $(-2, 3)$ (۳) $(-3, -2)$ (۴) $(-2, 3) - \{2\}$

سؤال	گام
۳۴۱	۳۱ ۳۲ ۳۸ ۳۳۹
۳۴۲	۳۳۸ ۳۴۱
۳۴۳	۶۲ ۳۳۸
۳۴۴	۲۳ ۳۱ ۳۳۱ ۳۳۹
۳۴۵	۳۴۳ ۳۴۶
۳۴۶	۳۴۴
۳۴۷	۳۴۴
۳۴۸	۳۰۶ ۳۴۴ ۳۵۰
۳۴۹	۳۳۸ ۳۴۳ ۳۴۴ ۳۴۵
۳۵۰	۲۲ ۳۴۸ ۳۵۰

آزمون فصل توابع نمایی و لگاریتمی (۲)

آزمون ۳۶

۳۵۱- نمودار تابع $f(x) = |2^{-x} - 2|$ کدام است؟۳۵۲- در مورد نقاط تلاقی نمودار توابع $y = |x^2 - 1|$ و $y = 1 - 2^x$ کدام گزینه درست است؟

- (۱) یک نقطه با طول مثبت و یک نقطه با طول منفی.
 (۲) دو نقطه با طولهای مثبت.
 (۳) دو نقطه با طولهای منفی و یک نقطه با طول مثبت.
 (۴) دو نقطه با طولهای منفی.

۳۵۳- معادله $2^{x+2} - 5^{x+1} = 2^{x+1} - 4 \times 5^{x+1}$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۳۵۴- مجموعه جوابهای نامعادله $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} > \frac{1}{9}$ به صورت $(-\infty, a)$ است. مقدار a کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{9}$ (۴) $\frac{9}{8}$

۳۵۵- نمودار تابع $f(x) = \log_p(ax+b)$ محور طولها را در نقطه‌ای به طول ۱- و محور عرضها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. اگر دامنه این تابع بازه $(c, +\infty)$ باشد، حداقل مقدار c کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $-\frac{5}{2}$ (۴) $-\frac{9}{2}$

۳۵۶- اگر $\log 5 = a$ ، مقدار $\log_{\frac{2}{5}} \frac{2}{5}$ برحسب a کدام است؟

- (۱) $\frac{1-2a}{2-3a}$ (۲) $\frac{1-2a}{1+3a}$ (۳) $\frac{1-2a}{1-3a}$ (۴) $\frac{1-3a}{2-3a}$

۳۵۷- اگر $2^x = 5^y = 10$ ، مقدار $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{10}$ (۴) $\frac{1}{5}$

۳۵۸- اگر k جواب معادله $5^{\log_2 x} + 4 \times x^{\log_2 5} = 125$ باشد، مقدار $\log_7(k+4)$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۳۵۹- چند عدد طبیعی در نامعادله $\log_{\frac{1}{2}}(\log_3(x+1)) < -1$ صدق نمی‌کنند؟

- (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۷ (۴) ۶

۳۶۰- دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\log_3 x + 2 \log_x 3 - 3}$ به صورت $(a, b] \cup [9, +\infty)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

سؤال	گام
۳۵۱	۳۱ ۳۸ ۳۳۹
۳۵۲	۳۱ ۳۳ ۳۸ ۳۳۹
۳۵۳	۳۳۸ ۳۴۱
۳۵۴	۳۱۸ ۳۳۸ ۳۴۲
۳۵۵	۳۴۶ ۳۴۸
۳۵۶	۳۴۴
۳۵۷	۳۴۳ ۳۴۴
۳۵۸	۳۴۳ ۳۴۴ ۳۵۰
۳۵۹	۳۴۳ ۳۵۱
۳۶۰	۲۲ ۳۱۶ ۳۱۸ ۳۴۳ ۳۵۱

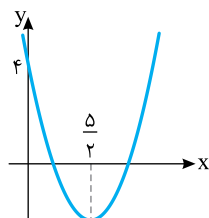
آزمون جامع (۱)

آزمون ۳۷

۳۶۱- مقدار $\frac{\sqrt{5}\sqrt{5}\sqrt{5}}{\sqrt[4]{5}\sqrt{5}}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{5}$ (۲) $\sqrt[3]{5}$ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) $5\sqrt{5}$

۳۶۲- اگر نمودار تابع $f(x) = x^2 + ax - b$ به صورت مقابل باشد، مجموع جواب‌های معادله $f(x) = 0$ چقدر از حاصل ضرب آن‌ها بیشتر است؟



- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{5}{2}$

۳۶۳- مجموع جواب‌های معادله $\sqrt{x} + \sqrt{3-x} = 2$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۳۶۴- اگر $\frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) - 2\sin(2\pi + \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) - 2\cos(3\pi - \alpha)} = 3$ ، مقدار $\tan(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) -۵ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $-\frac{1}{5}$

۳۶۵- اگر $\frac{\sin x + 2\cos x}{\cos x - \sin x} = \frac{1}{4}$ ، مقدار $\tan 2x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{31}{9}$ (۳) $\frac{35}{37}$ (۴) $\frac{35}{12}$

۳۶۶- نمودار تابع $f(x) = \cos 3x$ در بازه $(\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{2})$ چند بار محور طول‌ها را قطع می‌کند؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۳۶۷- مجموعه جواب‌های نامعادله $|x^2 - x| > 2x$ به صورت $\mathbb{R} - [a, b]$ است. مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۳۶۸- اگر $f(x) = \sqrt{4x - x^2} + 3$ و دامنه تابع $f \circ f$ به صورت $[0, a] \cup [b, 4]$ باشد، مقدار ab کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $4\sqrt{3}$ (۴) $2\sqrt{3}$

۳۶۹- ضابطه وارون تابع $f(x) = 2 - \sqrt{4 - x^2}$ ، $-2 \leq x \leq 0$ ، به صورت $f^{-1}(x) = a\sqrt{b + 4x - x^2}$ است. مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) -۶ (۲) -۴ (۳) -۲ (۴) -۱

۳۷۰- نمودار تابع $g(x) = 4f(2x)$ را یک واحد به راست و دو واحد به بالا منتقل می‌کنیم. سپس طول و عرض نقاط این نمودار را نصف می‌کنیم. ضابطه تابعی که نمودار آن به دست آمده کدام است؟

- (۱) $y = 8f(x - 2) + 1$ (۲) $y = f(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}) + 1$ (۳) $y = 2f(4x - 2) + 1$ (۴) $y = 2f(x - 2) + 1$

۳۷۱- دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x - 3) - 1}$ به صورت $D_f = (a, b]$ است. مقدار $b - a$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۳۷۲- مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{2x - \sqrt{3x^2 + 1}}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۳۷۳- مقدار $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{[\cos x]}{\sin x - \sin^2 x}$ کدام است؟

- صفر (۱) ۱ (۲) $+\infty$ (۳) $-\infty$ (۴)

۳۷۴- نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{|x|-2}$ در چند نقطه مجانب‌های افقی خود را قطع می‌کند؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۳۷۵- به ازای کدام مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} 3x - [x] & x < 2 \\ a & x = 2 \\ x + 2 & x > 2 \end{cases}$ در نقطه $x = 2$ پیوسته است؟

- ۴ (۱) $4/5$ (۲) ۵ (۳) هیچ مقدار a (۴)

۳۷۶- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} 1 + a \cos \pi x & x > 1 \\ bx^2 + x & x \leq 1 \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار a کدام است؟

- ۱ (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴)

۳۷۷- تابع f در نقطه $x = 2$ مشتق‌پذیر است. اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - 9}{h} = \frac{3}{2}$ ، مشتق تابع $g(x) = x\sqrt{f(x)}$ در نقطه $x = 2$ کدام است؟

- ۲/۵ (۱) ۳ (۲) $3/5$ (۳) ۴ (۴)

۳۷۸- تابع $f(x) = \frac{x^2}{x^3 + 4}$ روی بازه $[0, a]$ صعودی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) $\sqrt[3]{2}$ (۳) $\sqrt[3]{4}$ (۴)

۳۷۹- جهت تقعر تابع $f(x) = x^4 - 4x^3 + 12x + 3$ روی بازه (a, b) رو به پایین است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

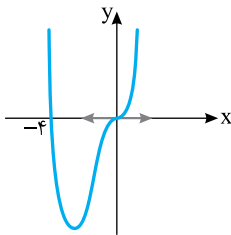
۳۸۰- شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x) = x^4 + ax^3 + bx$ است. مقدار مینیمم مطلق تابع کدام است؟

- ۱) -36

- ۲) -32

- ۳) -27

- ۴) -24



آزمون جامع (۲)

آزمون ۳۸

۳۸۱- در دنباله‌ای حسابی $S_7 = 84$ و $S_{11} = 711$. مجموع یازده جمله نخست این دنباله حسابی چقدر است؟

- (۱) ۲۱۲ (۲) ۲۴۲ (۳) ۲۵۰ (۴) ۲۵۲

۳۸۲- اگر $a-b=b-c=4$ ، مقدار $\frac{ab-ac+bc-b^2}{a-c}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۸

۳۸۳- x_1 و x_2 جواب‌های معادله $x^2 - 3x + 2m + 1 = 0$ هستند و $3x_1 - x_2 = 1$. مقدار m کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۳۸۴- مجموعه جواب‌های نامعادله $\frac{1}{x+3} < \frac{x-5}{9}$ به صورت $(a, -3) \cup (b, +\infty)$ است. مقدار ab کدام است؟

- (۱) -۲۴ (۲) ۲۴ (۳) -۱۰ (۴) ۱۰

۳۸۵- معادله $\cos x - \sin x = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۸۶- اگر معادله $||x-1|-a| = -a$ دقیقاً یک جواب داشته باشد، حدود a کدام است؟

- (۱) $a \leq 0$ (۲) $-1 \leq a \leq 0$ (۳) $a < 0$ (۴) $-1 \leq a < 0$

۳۸۷- اگر $f(x) = \frac{x}{x-1}$ و $g(x) = \frac{2x-3}{x+2}$ ، مجموع مقادیری که در دامنه تابع fog قرار ندارند، کدام است؟

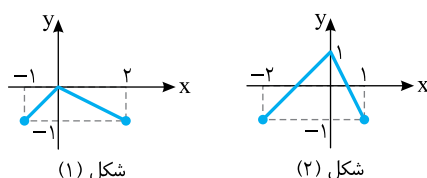
- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۳۸۸- اگر $f(x) = \sqrt[3]{ax+b}$ و نمودار تابع‌های f و f^{-1} در نقطه $(1, 2)$ برخورد کنند، حاصل $3a+b$ کدام است؟

- (۱) -۸ (۲) -۷ (۳) -۶ (۴) -۵

۳۸۹- نمودار تابع f به صورت شکل (۱) است. نمودار کدام تابع به صورت

شکل (۲) است؟



شکل (۱)

شکل (۲)

(۱) $y = 1 - 2f(-x)$ (۲) $y = 1 + 2f(-x)$

(۳) $y = 1 - 2f(x)$ (۴) $y = 1 + 2f(x)$

۳۹۰- اگر $\log \sqrt{\lambda} = a$ ، مقدار $\log 125$ کدام است؟

- (۱) $3-3a$ (۲) $2-3a$ (۳) $3-2a$ (۴) $2-2a$

۳۹۱- اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - ax + b}{2x^2 - 3x + 1} = a - 4$ ، حاصل $a+b$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۳۹۲- اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a+1)x^3 - 2x^2 + x}{(b+1)x^2 - 4} = 2$ ، مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) -۴

۳۹۳- اگر شیب خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = x^4 + mx^2 + x + 3$ در نقطه $x=1$ برابر با ۲ باشد، مقدار m کدام است؟

- (۱) $-\frac{5}{2}$ (۲) -۲ (۳) $-\frac{3}{2}$ (۴) -۱

۳۹۴- اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & x > 3 \\ x-1 & x \leq 3 \end{cases}$ ، مقدار $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(3+h) - f(3-h)}{h}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) صفر (۴) وجود ندارد.

۳۹۵- مشتق دوم تابع $f(x) = x^3 \sqrt{x}$ در $x=4$ کدام است؟

- (۱) ۳۵ (۲) ۷۰ (۳) $\frac{70}{3}$ (۴) ۱۴۰

۳۹۶- اگر تابع $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + kx - 6$ اکیداً صعودی باشد، حدود مقادیر k کدام است؟

- (۱) $k \geq 1$ (۲) $k \leq -1$ (۳) $k \geq -1$ (۴) $k \leq 1$

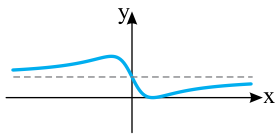
۳۹۷- به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، جهت تقعر نمودار تابع $f(x) = x^4 + ax^3 + \frac{3}{2}x^2$ همواره رو به بالا است؟

- (۱) $-1 \leq a \leq 1$ (۲) $-1 \leq a \leq 2$ (۳) $-2 \leq a \leq 1$ (۴) $-2 \leq a \leq 2$

۳۹۸- اگر $A(1, -2)$ نقطه عطف نمودار تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x - 1$ باشد، مقدار تابع در نقطه ماکزیمم نسبی آن کدام است؟

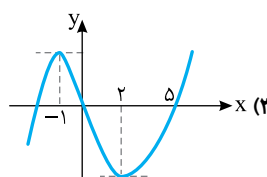
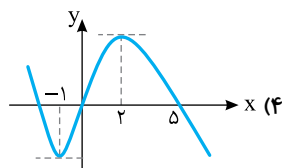
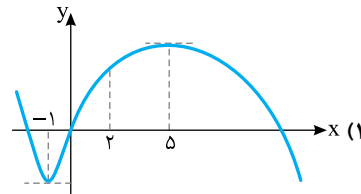
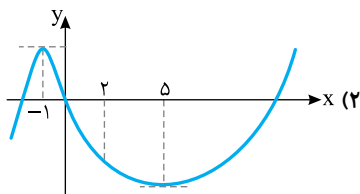
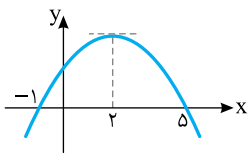
- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) تابع نقطه ماکزیمم نسبی ندارد.

۳۹۹- شکل زیر نمودار تابع $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 8}{x^2 + 4}$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟



- (۱) -۷ (۲) -۶ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۴۰۰- نمودار تابع مشتق تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع f به کدام شکل می‌تواند باشد؟



آزمون جامع (۳)

آزمون ۳۹

۴۰۱ در یک دنباله حسابی مجموع بیست جمله اول سه برابر مجموع دوازده جمله اول آن است. اگر جمله سوم برابر ۶ باشد، جمله دهم کدام است؟

- (۱) ۳۲ (۲) ۳۴ (۳) ۳۶ (۴) ۳۸

۴۰۲ حاصل عبارت $A = \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} + \frac{3}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt[3]{2}$ (۲) $2\sqrt[3]{2}$ (۳) ۲ (۴) ۴

۴۰۳ هر یک از جواب‌های معادله $x^2 - (2m-3)x + 2n+2 = 0$ یک واحد از جواب‌های معادله $x^2 - nx + m+1 = 0$ بیشتر است. مقدار $m+n$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۴۰۴ اگر معادله $x^6 + 2mx^2 + m^2 - 1 = 0$ جواب حقیقی نداشته باشد، حدود m کدام است؟

- (۱) $m > 1$ (۲) $0 < m < 1$ (۳) $m < -1$ (۴) $-1 < m < 0$

۴۰۵ اگر $\cos^2 x - \cos^4 x = \frac{1}{8}$ ، حاصل عبارت $\tan^2 x + \cot^2 x$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۶ (۴) ۸

۴۰۶ معادله $\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -3$ چند جواب در بازه $(0, \pi)$ دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

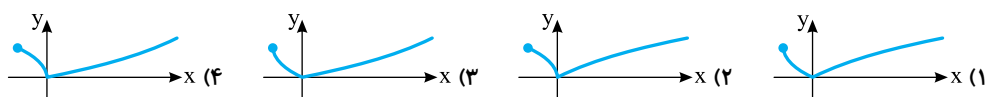
۴۰۷ مجموعه جواب‌های نامعادله $-1 \leq \frac{x-2}{x-3} \leq 1$ به صورت $\left(-\infty, \frac{a}{b}\right]$ است (ساده شدنی نیست). مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۴۰۸ نمودار تابع $f(x) = x|x-2|$ در سه نقطه نمودار تابع $g(x) = |x-1|$ را قطع می‌کند. کمترین طول مربوط به این نقاط کدام است؟

- (۱) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ (۲) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ (۳) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (۴) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

۴۰۹ نمودار تابع $y = |1 - \sqrt{x+1}|$ کدام است؟



۴۱۰ تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است و $R_f = \mathbb{R}$. مجموعه جواب‌های نامعادله $f^{-1}(4x-3) > f^{-1}(x^2)$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

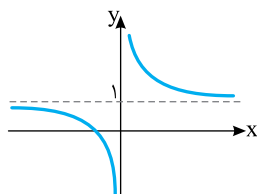
۴۱۱ تابع وارون $f(x) = \frac{2x-|x|}{2}$ تابع $f^{-1}(x) = \frac{ax+2|x|}{b}$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۹

۴۱۲ اگر $\log_{\lambda}(xy) + \log_{\lambda} \frac{x}{y} = 0$ ، مقدار $\log_x y$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۳ (۳) -۴ (۴) -۵

۴۱۳ نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^2(x)-1}{2f^2(x)-3f(x)+1}$ کدام است؟



- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴) -۲

۴۱۴- اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(2kx)}{1 - \cos 2x} = 2k$ ، مجموع مقادیرهای ممکن برای k کدام است؟

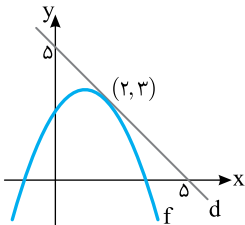
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۴۱۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) صفر ۳ (۳) $+\infty$ ۴ (۴) $-\infty$

۴۱۶- در شکل مقابل خط d بر نمودار تابع f در نقطه $(2, 3)$ مماس است. اگر $g(x) = f^2(x)$ ، مقدار $g'(2)$ کدام است؟

- ۱ (۱) -12
۲ (۲) -6
۳ (۳) -18
۴ (۴) -24



۴۱۷- اگر $f(x) = x^3 - 2x$ ، مقدار $\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{f(2+3h) - f(2)}{\Delta h}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ ۲ (۲) ۳ ۳ (۳) ۵ ۴ (۴) ۶

۴۱۸- اگر $g(x) = xf(x)$ و $f'(2) = f''(2) = 2$ ، مقدار $g''(2)$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ ۲ (۲) ۴ ۳ (۳) ۶ ۴ (۴) ۸

۴۱۹- مجموع طول و عرض نقطه بحرانی تابع $f(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{5-x}$ در بازه $(3, 5)$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۳ ۲ (۲) ۴ ۳ (۳) ۵ ۴ (۴) ۶

۴۲۰- با توجه به نمودار تابع $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ به ازای کدام مجموعه مقادیر m معادله $f(x) = m$ فقط یک ریشه حقیقی دارد؟

- ۱ (۱) $m > 7$ یا $m < 2$ ۲ (۲) $m > 6$ یا $m < 3$ ۳ (۳) $m > 7$ یا $m < 3$ ۴ (۴) $m > 6$ یا $m < 2$

آزمون جامع (۴)

آزمون ۴۰

۴۲۱- در یک مثلث قائم الزاویه، اندازه اضلاع، دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند و مساحت مثلث واسطه هندسی طول وتر و محیط مثلث است. مساحت مثلث کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۱۵ (۴) ۳۰

۴۲۲- اگر $\sqrt[4]{5}\sqrt[3]{3} = \sqrt[4]{5}\sqrt[3]{x}$ ، مقدار x کدام است؟

- (۱) ۴۵ (۲) ۶۰ (۳) ۷۵ (۴) ۹۰

۴۲۳- اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادله $x^2 + 6x - 3 = 0$ باشند، مقدار $(\frac{x_1}{x_2} + x_2)(\frac{x_2}{x_1} + x_1)$ کدام است؟

- (۱) ۶۰ (۲) ۷۲ (۳) ۸۰ (۴) ۸۸

۴۲۴- تعداد جواب‌های متمایز معادله $x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 2\sqrt{2}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۴۲۵- اگر چندجمله‌ای $P(x) = ax^3 + 4x^2 - 14x + 10 = a$ بر $x^2 - 2x + 1$ بخش‌پذیر باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۴۲۶- اگر $\frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\cos 3x}{\cos x} = 1$ ، مقدار $\sin^2 x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{3}{8}$

۴۲۷- مجموع جواب‌های معادله $\cos x + 2\sin^2 x - 1 = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ چقدر است؟

- (۱) 2π (۲) 3π (۳) 4π (۴) 5π

۴۲۸- اگر $(f \circ g)(x) = \frac{3x-2}{2x-1}$ و $g(x) = \frac{3}{2x}$ ، ضابطه تابع $f+g$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4x^2-9}{6x-x^2}$ (۲) $\frac{4x^2-6x-9}{2x^2-6x}$ (۳) $\frac{6x-9}{2x^2-6x}$ (۴) $\frac{4x^2+6x-9}{2x^2-6x}$

۴۲۹- نمودار تابع $f(x) = \sqrt{-x}$ را دو واحد به چپ منتقل می‌کنیم، سپس این نمودار را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم و مجدداً دو واحد به چپ منتقل می‌کنیم. ضابطه تابعی که نمودار آن به دست آمده کدام است؟

- (۱) $y = \sqrt{x+4}$ (۲) $y = \sqrt{x}$ (۳) $y = \sqrt{-x+4}$ (۴) $y = \sqrt{x-4}$

۴۳۰- قرینه نمودار تابع $f(x) = \sqrt[3]{a+bx^3}$ نسبت به خط $y=x$ بر نمودار تابع f منطبق است. مقدار b کدام است؟ ($a, b \neq 0$)

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۴۳۱- اگر $2^a = 3$ و $3^b = 8$ ، مقدار a^{b+1} کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۲ (۳) ۱۶ (۴) ۲۴

۴۳۲- جواب معادله $\log_2 x + \log_5 x = 2$ کدام است؟

- (۱) $4^{\log 5}$ (۲) $5^{\log 2}$ (۳) $2^{\log 5}$ (۴) $4^{\log 2}$

۴۳۳- اگر $f(x) = \frac{ax^2 + x + 4}{(a+2)x^2 - 3x - 2}$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$ ، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۵ (۳) -۷ (۴) -۸

۴۳۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \tan 5x}{\sin 2x + \tan 4x}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{3}{4}$

۴۳۵- نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{|x|-1}$ در اطراف مجانب‌های افقی آن چگونه است؟



۴۳۶- به ازای کدام مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x - \sin x}{x^2} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ در نقطه $x=0$ پیوسته است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) هیچ مقدار a

۴۳۷- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = x^3 - x$ در بازه $[-1, 2]$ با آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در کدام نقطه از این بازه برابر است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) صفر

۴۳۸- مقدار مشتق تابع $f(x) = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right)$ در نقطه $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۴۳۹- کمترین مقدار تابع $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2$ کدام است؟

- (۱) -۳۶ (۲) -۳۲ (۳) -۲۴ (۴) -۱۸

۴۴۰- اگر طول نقطه عطف تابع $f(x) = ax^3 + 3x^2 + 2$ برابر ۱- باشد، عرض آن چقدر است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

آزمون جامع (۵)

آزمون ۴۱

۴۴۱- نسبت واسطه حسابی دو عدد مثبت به واسطه هندسی آنها برابر $\frac{3}{\sqrt{8}}$ است. نسبت عدد بزرگتر به عدد کوچکتر کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{3}$

۴۴۲- حاصل $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۴ (۳) $2\sqrt{5}$ (۴) $\frac{4-\sqrt{5}}{2}$

۴۴۳- خطهای $(5-k)y+2x=3$ و $mx-y=-2$ بر هم عمودند و یکدیگر را روی محور x قطع می‌کنند. مقدار $k-m$ کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

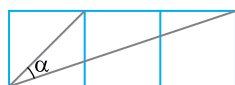
۴۴۴- معادله $x^3+mx-m-1=0$ سه جواب متمایز دارد. حدود m کدام است؟

- (۱) $m \in (-\infty, -\frac{3}{4})$ (۲) $m \in (-\frac{3}{4}, +\infty)$
(۳) $m \in (-\frac{3}{4}, +\infty) - \{-3\}$ (۴) $m \in (-\infty, -\frac{3}{4}) - \{-3\}$

۴۴۵- مقادیر عبارت $\frac{y}{x} + x$ به ازای هر x از مجموعه $(a, 1) \cup (b, +\infty)$ بیشتر از ۳ هستند. مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۴۴۶- در شکل زیر طول ضلع هر یک از مربع‌های کوچک برابر با ۱ است. مقدار $\cos \alpha$ کدام است؟



- (۱) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (۲) $\frac{2}{\sqrt{5}}$
(۳) $\frac{3}{\sqrt{13}}$ (۴) $\frac{2}{\sqrt{15}}$

۴۴۷- جواب کلی معادله $\sqrt{3} \tan(2x + \frac{\pi}{4}) + 1 = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $k\pi - \frac{5\pi}{12}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} - \frac{5\pi}{24}$ (۳) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$ (۴) $k\pi + \frac{5\pi}{12}$

۴۴۸- اگر $|x+1| \leq 7$ ، مجموع بیشترین و کمترین مقدار عبارت $A = x|x| - 4x$ کدام است؟

- (۱) -۱۰ (۲) -۱۶ (۳) -۲۰ (۴) -۲۴

۴۴۹- اگر تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x^2+3ax+6a-4}{x+2}$ و دامنه $\mathbb{R} - \{-2\}$ یک تابع همانی باشد، مقدار $f(3a)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۴۵۰- تابع $f(x) = -2x^2 + kx$ با دامنه $(-\infty, 3]$ یک به یک است. حداقل مقدار k کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) ۱۶

۴۵۱- اگر $f(x) = 3^{\frac{2-x}{2}} - 1$ ، ضابطه تابع f^{-1} کدام است؟

- (۱) $f^{-1}(x) = \log_3(\frac{3}{x+1})$ (۲) $f^{-1}(x) = \log_3(\frac{x+1}{3})$
(۳) $f^{-1}(x) = \log_3(\frac{3}{x+1})^2$ (۴) $f^{-1}(x) = \log_3(\frac{x+1}{3})^2$

۴۵۲- جواب معادله $2^{x+1} = 5^{x-1}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{1-\log 2}$ (۲) $\frac{1}{1-\log 4}$ (۳) $\frac{1}{1+\log 2}$ (۴) $\frac{1}{1+\log 4}$

۴۵۳- مقدار $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x - \frac{1}{2}}{\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}}$ کدام است؟

- (۱) $-\sqrt{3}$ (۲) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) -1

۴۵۴- فاصلهٔ مجانب‌های افقی نمودار تابع $f(x) = \frac{4x+2|x|+1}{3x-|x|-1}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) 2 (۴) $\frac{5}{2}$

۴۵۵- تابع $f(x) = \begin{cases} ax-a+3 & x \leq 1 \\ \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} & x > 1 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطهٔ $x=1$ پیوسته است؟

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) هر مقدار a (۴) هیچ مقدار a

۴۵۶- اگر $g(x) = x + f(x^3)$ و $f'(8) = 2$ ، مقدار $g'(2)$ کدام است؟

- (۱) 3 (۲) 13 (۳) 25 (۴) 31

۴۵۷- اگر $f(x) = x\sqrt[3]{x}$ ، دامنهٔ تابع f' کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R}$ (۲) $\mathbb{R} - \{0\}$ (۳) $(0, +\infty)$ (۴) $[0, +\infty)$

۴۵۸- فرض کنید $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$. اگر نقطه‌ای به طول 2 - نقطهٔ عطف این تابع باشد و تابع در نقطهٔ $x=1$ اکسترمم نسبی داشته باشد، مقدار این اکسترمم نسبی کدام است؟

- (۱) -20 (۲) -9 (۳) -7 (۴) -6

۴۵۹- برد تابع $f(x) = x^4 - 4x$ کدام است؟

- (۱) $[-2, +\infty)$ (۲) $[-3, +\infty)$ (۳) $[-4, +\infty)$ (۴) $[-5, +\infty)$

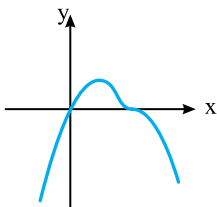
۴۶۰- ضابطهٔ تابع نمودار مقابل کدام است؟

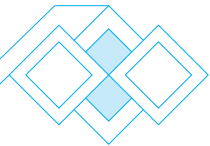
(۱) $y = x(1-x)^3$

(۲) $y = x(x-1)^3$

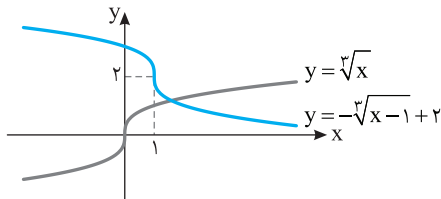
(۳) $y = x(1-x^3)$

(۴) $y = x(x^3-1)$





۵- گزینه ۱ اگر نمودار تابع $y = \sqrt[3]{x}$ را یک واحد به راست و دو واحد به پایین انتقال دهیم، نمودار تابع $y = \sqrt[3]{x-1}-2$ به دست می‌آید. اگر این نمودار را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y = -\sqrt[3]{x-1}+2$ به دست می‌آید. دو نمودار مطابق شکل زیر در یک نقطه متقاطع‌اند.



۶- گزینه ۱ توجه کنید که $D_f = \{x | x^2 - 4x \geq 0\}$ ، یعنی $D_g = \{-1, 0, 1, 3, 4\}$ و $D_f = (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$ بنابراین $D_{fg+f} = D_g \cap D_f = \{-1, 0, 4\}$ بنابراین a باید -1 یا صفر یا 4 باشد:

$$(2g+f)(-1) = 2g(-1) + f(-1) = 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

$$(2g+f)(0) = 2g(0) + f(0) = 2 + 0 = 2$$

$$(2g+f)(4) = 2g(4) + f(4) = 6 + 0 = 6$$

بنابراین $a = 4$ و در نتیجه $f(-4) = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

۷- گزینه ۲ ابتدا $(f \circ f)(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = a(ax^2 + b)^2 + b$$

$$= a(a^2x^4 + 2abx^2 + b^2) + b$$

$$= a^3x^4 + 2a^2bx^2 + ab^2 + b$$

بنابراین تساوی زیر به ازای هر مقدار x برقرار است:

$$a^3x^4 + 2a^2bx^2 + ab^2 + b = 27x^4 - 18x^2 + 2$$

پس باید تساوی‌های زیر درست باشند:

$$a^3 = 27, \quad 2a^2b = -18, \quad ab^2 + b = 2$$

از $a^3 = 27$ نتیجه می‌شود $a = 3$ ، در نتیجه از $2a^2b = -18$ ، $18b = -18$ به دست می‌آید که یعنی $b = -1$ مقادیر $a = 3$ و $b = -1$ در تساوی $ab^2 + b = 2$ هم صدق می‌کنند. پس $a + b = 2$.

۸- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = 3x + |k||x| = \begin{cases} (3+|k|)x & x \geq 0 \\ (3-|k|)x & x < 0 \end{cases}$$

برای اینکه تابع f صعودی باشد، باید خطوط $y = (3+|k|)x$ و $y = (3-|k|)x$ شیب نامنفی داشته باشند. شیب خط $y = (3+|k|)x$ همواره مثبت است، پس باید شیب خط $y = (3-|k|)x$ همواره نامنفی باشد.

یعنی

$$3 - |k| \geq 0 \Rightarrow |k| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq k \leq 3$$

۱- گزینه ۱ با توجه به زوج مرتب‌های $(1, 0)$ و $(1, 4m^3 - m)$ باید تساوی $4m^3 - m = 0$ برقرار باشد. پس

$$m(4m^2 - 1) = 0 \Rightarrow m = 0, \quad m = \pm \frac{1}{2}$$

به ازای $m = 0$ رابطه به شکل زیر درمی‌آید که تابع نیست.

$$f = \{(1, 0), (0, 2), (0, 4)\}$$

به ازای $m = \frac{1}{2}$ رابطه به شکل زیر درمی‌آید که تابع نیست.

$$f = \{(1, 0), (1, 2), (0, 4), (2, 2)\}$$

به ازای $m = -\frac{1}{2}$ رابطه به شکل زیر درمی‌آید که تابع است.

$$f = \{(1, 0), (-1, 2), (0, 4), (-2, 2)\}$$

پس فقط به ازای $m = -\frac{1}{2}$ رابطه تابع است.

۲- گزینه ۴ **راه حل اول** اگر f تابع ثابت c باشد، آن‌گاه

$$f(x) = \frac{(a+2)x+3}{2x-3} = c$$

بنابراین $(a+2)x+3 = 2cx-3c$. در نتیجه $a+2 = 2c$ و $3 = -3c$. به این ترتیب $c = -1$ و $a = 2c - 2 = -4$.

راه حل دوم f تابعی ثابت است، پس $f(1) = f(2)$. بنابراین

$$\frac{a+2+3}{2-3} = \frac{2(a+2)+3}{4-3} \Rightarrow \frac{a+5}{-1} = 2a+7 \Rightarrow a = -4$$

راه حل سوم مشتق تابع ثابت برابر صفر است. پس

$$f'(x) = \frac{(a+2)(2x-3) - 2((a+2)x+3)}{(2x-3)^2} = \frac{-3(a+2)-6}{(2x-3)^2}$$

$$\xrightarrow{f'(x)=0} -3(a+2)-6=0 \Rightarrow a = -4$$

۳- گزینه ۱ اولاً توجه کنید که شرط $x \geq 0$ برای دامنه تابع وجود دارد. عدددهای داده شده در گزینه‌ها بزرگ‌تر از صفر هستند. پس ریشه‌های منخرج را به دست می‌آوریم:

$$x-1-\sqrt{x}=0 \Rightarrow x-1=\sqrt{x} \xrightarrow{(x-1 \geq 0)} x^2-2x+1=x$$

$$x^2-3x+1=0 \Rightarrow x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

بنابراین دامنه تابع $\{x | x \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2}\}$ است.

۴- گزینه ۱ توجه کنید که $D_f = \{x | 16 - |x^2 - 9| \geq 0\}$ ، یعنی

$$D_f = \{x | |x^2 - 9| \leq 16\}$$

$$-16 \leq x^2 - 9 \leq 16 \Rightarrow -7 \leq x^2 \leq 25 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 25 \Rightarrow -5 \leq x \leq 5$$

پس $D_f = [-5, 5]$ و در نتیجه $a = -5$ ، $b = 5$ و $b - a = 10$.

۱۳- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

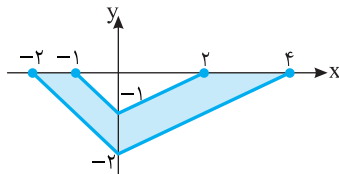
$$f(x) = \left[\frac{x+1}{x}\right] + \left[-\frac{1}{x}\right] = \left[1 + \frac{1}{x}\right] + \left[-\frac{1}{x}\right] = 1 + \left[\frac{1}{x}\right] + \left[-\frac{1}{x}\right]$$

$$f(-x) = 1 + \left[-\frac{1}{x}\right] + \left[\frac{1}{-x}\right] = 1 + \left[-\frac{1}{x}\right] + \left[-\frac{1}{x}\right] = f(x) \text{ بنابراین}$$

۱۴- گزینه ۱ برای رسم نمودار تابع $y = 2f\left(\frac{x}{2}\right)$ باید در نمودار تابع

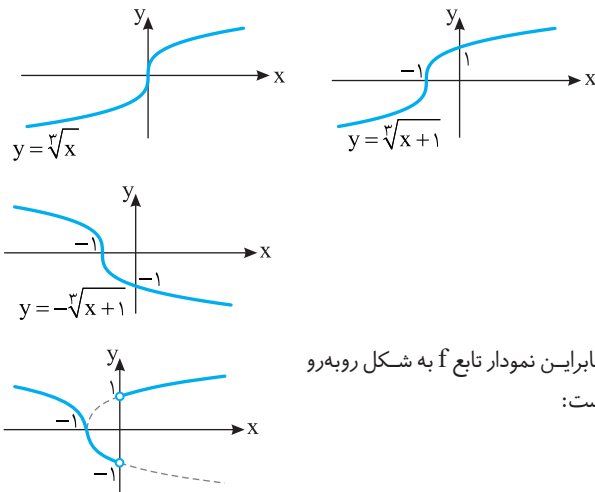
f طول نقاط را در ۲ ضرب کنیم تا نمودار تابع $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$ به دست آید. همچنین در نمودار به دست آمده باید عرض نقاط را در ۲ ضرب کنیم تا نمودار تابع $y = 2f\left(\frac{x}{2}\right)$ به دست آید. بنابراین مساحت قسمت رنگی در شکل زیر

$$\text{مورد سؤال است که برابر است با } \frac{1}{2} \times 6 \times 2 - \frac{1}{2} \times 3 \times 1 = \frac{9}{2}$$



$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{x+1} & x < 0 \end{cases} \quad \text{ضابطه تابع به شکل}$$

است. اکنون توجه کنید که نمودار توابع $y = \sqrt[3]{x+1}$ و $y = -\sqrt[3]{x+1}$ به صورت زیر است:

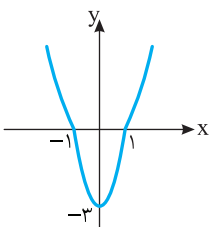


۱۶- گزینه ۴ توجه کنید که

$$g(x) = -2f(x) - |f(x)| = \begin{cases} -2f(x) - f(x) & f(x) \geq 0 \\ -2f(x) - (-f(x)) & f(x) < 0 \end{cases} = \begin{cases} -3f(x) & f(x) \geq 0 \\ -f(x) & f(x) < 0 \end{cases}$$

بنابراین کافی است در جاهایی که مقدار f نامنفی است.

در بازه $[-1, 1]$ ، عرض نقاط روی نمودار f را ۳ برابر کنیم و نمودار را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم. در بقیه جاها نمودار g قرینه نمودار f نسبت به محور طول‌ها است.

۹- گزینه ۳ اگر (m, n) نقطه برخورد نمودار تابع‌های f و f^{-1}

باشد، نتیجه می‌شود $f(m) = n$ و $f(n) = m$. بنابراین

$$f(-1) = \frac{1}{3} \Rightarrow -a + \frac{2}{9} + b = \frac{1}{3}, \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = -1 \Rightarrow \frac{a}{27} - \frac{2}{27} + b = -1$$

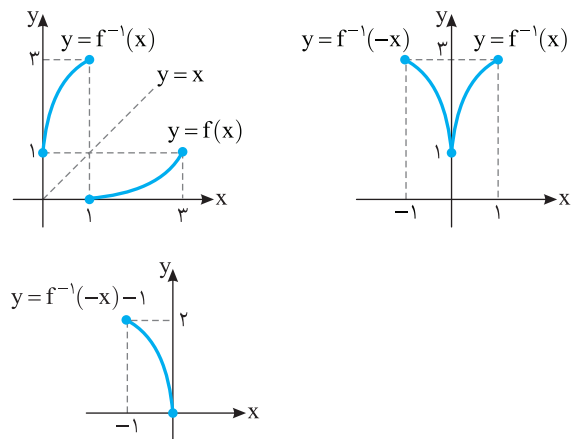
در نتیجه

$$\begin{cases} -a + b = \frac{1}{9} \\ a + 27b = -25 \end{cases} \Rightarrow a = -1, b = -\frac{8}{9}$$

$$\text{پس } a + b = -\frac{17}{9}$$

۱۰- گزینه ۴ ابتدا قرینه نمودار تابع f را نسبت به خط $y = x$ رسم

می‌کنیم تا نمودار تابع f^{-1} به دست بیاید. سپس قرینه نمودار تابع f^{-1} را نسبت به محور y پیدا می‌کنیم تا نمودار تابع $y = f^{-1}(-x)$ به دست بیاید. در آخر نمودار تابع $y = f^{-1}(-x) - 1$ را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y = f^{-1}(-x) - 1$ به دست بیاید.



۱۱- گزینه ۲ اگر ضابطه داده شده متعلق به یک تابع باشد، باید در

$x = 2$ مقدار $f(x)$ منحصر به فرد باشد، یعنی مقدار $f(2)$ در ضابطه اول با مقدار آن در ضابطه دوم برابر باشد. اگر $f(x) = \sqrt{x+2} + a$ ، آن‌گاه $f(2) = 2 + a$ اگر $f(x) = ax^3 + 16$ ، آن‌گاه $f(2) = 8a + 16$.

بنابراین

$$2 + a = 8a + 16 \Rightarrow a = -2$$

$$\text{پس } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} - 2 & x \geq 2 \\ -2x^3 + 16 & x \leq 2 \end{cases} \quad \text{و در نتیجه}$$

$$f(a) = f(-2) = -2(-2)^3 + 16 = 32$$

۱۲- گزینه ۳ ضابطه تابع را به شکل زیر می‌نویسیم:

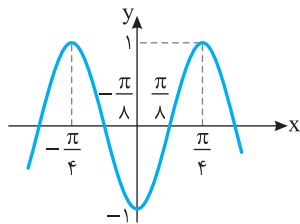
$$f(x) = 2mx^2 - mx^2 + x^2 + 4x + m = (1-m)x^2 + (2m+4)x + m$$

ضابطه توابع خطی به شکل $y = ax + b$ است، یعنی یک چندجمله‌ای درجه اول است. بنابراین باید $m = 1$ تا ضابطه تابع یک چندجمله‌ای درجه اول شود، یعنی

$$m = 1 \Rightarrow f(x) = 6x + 1$$

$$\text{بنابراین } f(m) = f(1) = 7$$

با توجه به شکل، تابع f روی بازه $[-\frac{\pi}{4}, 0]$ اکیداً نزولی است، پس حداقل مقدار a برابر $-\frac{\pi}{4}$ است.



۲۱- گزینه ۲ ضابطه تابع همانی به صورت $f(x)=x$ است. بنابراین $a=0, b=-1, b+c=0 \Rightarrow c=1$

پس $g(x)=2^0-x+1=-x+2$ و در نتیجه g یک تابع خطی است.

۲۲- گزینه ۱ کافی است در تساوی داده شده به جای x قرار دهیم $\frac{1}{x}$:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}+2}{\frac{1}{x^2}} = \frac{1+2x}{x} = \frac{x(1+2x)}{x^2+x^2} \Rightarrow f(x) = \frac{x+2x^2}{2+x^2}$$

۲۳- گزینه ۴ توجه کنید که $D_f = \{x | x-3 \neq 0, \frac{x-7}{2-x} \geq 0\}$ از

طرف دیگر، $\frac{x-7}{2-x} \geq 0 \Rightarrow x \in (2, 7]$ اگر $x-3=0$ ، آن گاه $x=3$. بنابراین

$$D_f = (2, 3) \cup (3, 7] = (2, 7] - \{3\}$$

پس $a=2, b=7, c=3$ و در نتیجه $a+b+c=12$

۲۴- گزینه ۲ چون فقط یک عدد حقیقی در دامنه تابع قرار ندارد، پس معادله $m^2x^2+3x+1=0$ باید فقط یک جواب داشته باشد. در دو حالت این اتفاق می افتد.

حالت اول این معادله ریشه مضاعف داشته باشد:

$$\Delta = 9 - 4m^2 = 0 \Rightarrow m = \pm \frac{3}{2}$$

در این حالت $x = -\frac{2}{3}$ ریشه مخرج است، در نتیجه $n = -\frac{2}{3}$.

حالت دوم این معادله یک معادله درجه اول باشد، یعنی ضریب x^2 برابر صفر باشد: $m=0$. در این حالت $x = -\frac{1}{3}$ ریشه مخرج است. در نتیجه

$n = -\frac{1}{3}$. پس دو مقدار مختلف برای n وجود دارد.

۲۵- گزینه ۲ دامنه تابع f به صورت $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$ است، پس

باید دامنه g هم به همین صورت باشد، یعنی $x=-2$ ریشه مضاعف مخرج $g(x)$ باشد:

$$x^2+cx+4=(x+2)^2 \Rightarrow x^2+cx+4=x^2+4x+4 \Rightarrow c=4$$

از طرف دیگر ضابطه f و g باید برابر باشند، پس باید صورت $g(x)$ یک عامل ۵ و یک عامل $x+2$ داشته باشد:

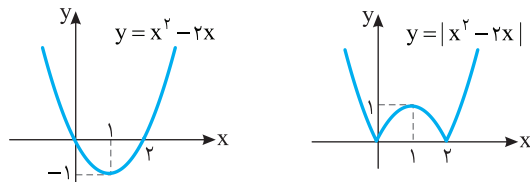
$$g(x)=f(x) \Rightarrow \frac{ax+b}{(x+2)^2} = \frac{5}{x+2} \Rightarrow ax+b=5(x+2) \Rightarrow a=5, b=10$$

بنابراین $abc=5(10)(4)=200$.

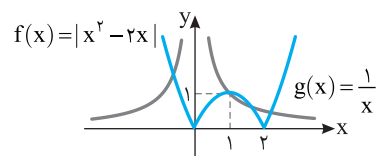
۱۷- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f(x)=|x||x-2|=|x(x-2)|=|x^2-2x|$$

بنابراین، ابتدا نمودار تابع $y=x^2-2x$ را رسم می کنیم. سپس، قرینه قسمتی از این نمودار را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می کنیم.



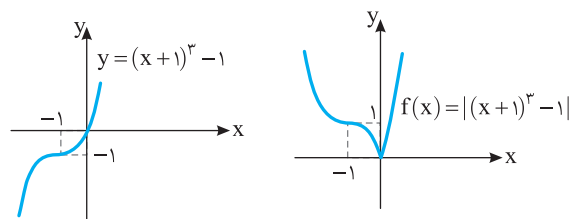
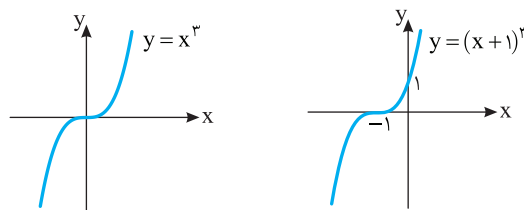
مطابق شکل زیر، نمودار توابع f و g در چهار نقطه متقاطع اند.



۱۸- گزینه ۱ ضابطه تابع را به صورت زیر می نویسیم:

$$f(x)=|x^3+3x^2+3x|=|(x+1)^3-1|$$

بنابراین کافی است نمودار تابع $y=x^3$ را یک واحد به سمت چپ و یک واحد به سمت پایین منتقل کنیم، سپس قرینه قسمتی از نمودار را که پایین محور طولها قرار دارد نسبت به این محور رسم کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف کنیم.



۱۹- گزینه ۲ از تساوی $y=\sqrt[3]{2-3x}$ مقدار x را برحسب y

به دست می آوریم:

$$y^3=2-3x \Rightarrow x=\frac{2-y^3}{3}$$

بنابراین $f^{-1}(x)=\frac{-x^3+2}{3}$ و در نتیجه $a=-1, b=2, ab=-2$.

۲۰- گزینه ۱ توجه کنید که $f(x)=-\cos 4x$. اگر نمودار تابع

$y=\cos x$ را رسم کنیم و نسبت به محور طولها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-\cos x$ به دست می آید. اگر طول هر نقطه از این نمودار را یک چهارم کنیم، نمودار تابع $y=-\cos 4x$ به دست می آید.

۲۶- گزینه ۲ دامنه تابع g به صورت زیر است:

$$D_g = D_f - \{x | f(x) = 2\} = \{1, 4, 3, 5\} - \{4, 3\} = \{1, 5\}$$

از طرف دیگر،

$$g(1) = \frac{3f(1)}{2-f(1)} = \frac{-3}{2-(-1)} = -1, \quad g(5) = \frac{3f(5)}{2-f(5)} = \frac{3}{2-1} = 3$$

بنابراین $g = \{(1, -1), (5, 3)\}$ و $R_g = \{-1, 3\}$. پس مجموع اعضای

برد تابع g برابر ۲ است.

۲۷- گزینه ۳ توجه کنید

$$D_{fog} = \{x | x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x | -5 \leq x \leq 4, 1 \leq |x-1| \leq 4\}$$

بنابراین

$$1 \leq |x-1| \leq 4 \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x-1 \leq 4 \Rightarrow 2 \leq x \leq 5 \\ \text{یا} \\ -4 \leq x-1 \leq -1 \Rightarrow -3 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

$$D_{fog} = [-5, 4] \cap ([-3, 0] \cup [2, 5]) = [-3, 0] \cup [2, 4]$$

پس اعداد صحیح $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ در دامنه تابع fog قرار دارند که تعداد آن‌ها هفت‌تاست.

۲۸- گزینه ۳ تابع $y = ax^2 + bx + c$ با شرط $a < 0$ روی بازه

$$\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right] \text{ صعودی و روی بازه } \left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right) \text{ نزولی است. بنابراین باید}$$

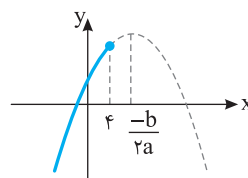
شرایط زیر برقرار باشند تا تابع f صعودی باشد:

$$k+2 < 0 \Rightarrow k < -2$$

$$4 \leq \frac{-2}{2(k+2)} \Rightarrow 4 + \frac{2}{2(k+2)} \leq 0 \Rightarrow \frac{4k+9}{k+2} \leq 0 \Rightarrow -\frac{9}{4} \leq k < -2$$

بنابراین اگر $-\frac{9}{4} \leq k < -2$ ، آن‌گاه تابع f

روی بازه $(-\infty, 4]$ صعودی است.



۲۹- گزینه ۴ نمودار تابع f^{-1} از نقطه $(4, 8)$ عبور می‌کند، پس

نمودار تابع f از نقطه $(8, 4)$ عبور می‌کند. بنابراین

$$f(8) = 4 \Rightarrow \frac{1}{16} \times 8^3 + \sqrt[3]{8+2a} = 4 \Rightarrow 2a = -3 \Rightarrow a = -1.5$$

در نتیجه

$$f(x) = \frac{1}{16}x^3 + \sqrt[3]{x-3} \Rightarrow f(0) = -3$$

۳۰- گزینه ۳ در تساوی $f(2x+1) = 2g(3x) - 1$ قرار می‌دهیم

$$x = 2$$

$$f(5) = 2g(6) - 1 \Rightarrow g(6) = \frac{f(5)+1}{2}$$

از طرف دیگر،

$$f^{-1}(2) = 5 \Rightarrow f(5) = 2$$

$$g(6) = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$

۳۱- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = 3x^2 + \frac{3}{x^2} - 4 \Rightarrow f\left(x + \frac{1}{x}\right) = 3\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 \\ = 3\left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right) - 4 = 3\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 10$$

بنابراین، اگر x عددی باشد که $x + \frac{1}{x} = 5$ (چنین عددی وجود دارد، زیرا

معادله $x + \frac{1}{x} = 5$ معادل است با $x^2 - 5x + 1 = 0$ ، که دلتای آن مثبت

است)، آن‌گاه $f(5) = 3 \times 5^2 - 10 = 65$.

۳۲- گزینه ۴ چون تابع خطی است، باید ضابطه آن یک چندجمله‌ای

درجه اول باشد. پس باید صورت و مخرج کسر در ضابطه داده شده ساده شوند، یعنی صورت باید به شکل ضرب دو عبارت باشد که یکی از آن‌ها $x+2$ است، یعنی

$$x^2 + mx + 4 = (x+2)(x+a) \Rightarrow x^2 + mx + 4 = x^2 + (a+2)x + 2a$$

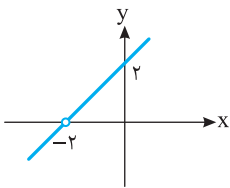
برای اینکه تساوی فوق برقرار باشد باید داشته باشیم

$$a = 2, m = a + 2 \Rightarrow m = 4$$

پس ضابطه تابع به صورت زیر است:

$$f(x) = \frac{(x+2)(x+2)}{x+2} = x+2, \quad x \neq -2$$

پس نمودار تابع به شکل روبه‌رو است:



۳۳- گزینه ۴ شرط محاسبه دامنه به صورت $(a+3)x^2 - ax + b \geq 0$

است. مجموعه جواب‌های نامعادله فوق نمی‌تواند به صورت $[4, +\infty)$ باشد،

مگر اینکه عبارت $(a+3)x^2 - ax + b$ چندجمله‌ای از درجه اول باشد، یعنی

$a+3=0$ و در نتیجه $a=-3$. پس نامعادله به صورت $3x+b \geq 0$ درمی‌آید:

$$3x+b \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{b}{3} \Rightarrow D_f = \left[-\frac{b}{3}, +\infty\right)$$

بنابراین $-\frac{b}{3} = 4$ و در نتیجه $b = -12$.

۳۴- گزینه ۲ دامنه تابع f برابر $D_f = \{x | \sin x > 0, \pi^2 - x^2 \geq 0\}$

است. مجموعه جواب‌های نامعادله $\pi^2 - x^2 \geq 0$ به صورت $-\pi \leq x \leq \pi$

است. بنابراین باید به دنبال x هایی در بازه $[-\pi, \pi]$ باشیم که در نابرابری

$\sin x > 0$ صدق می‌کنند. بنابراین دامنه تابع f به صورت $(0, \pi)$ است و تنها

عدهای صحیح ۲ و ۳ در آن قرار دارند.

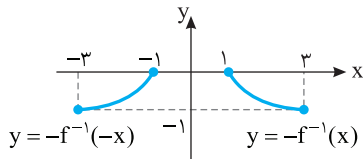
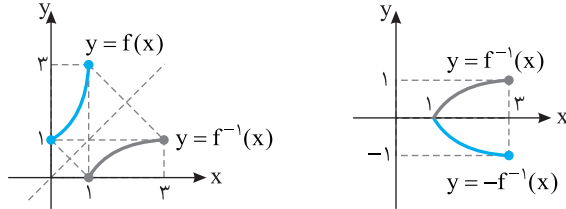
۳۵- گزینه ۱ توجه کنید که

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = |x-1| - |x| = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ -2x+1 & 0 \leq x \leq 1 \\ -1 & x \geq 1 \end{cases}$$

در بازه $[0, 1]$ تابع $f-g$ ثابت نیست. در این بازه،

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = |x-1| + |x| = -x+1+x=1$$

۴۰- گزینه ۲ ابتدا قرینه نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ رسم می کنیم تا نمودار تابع f^{-1} به دست بیاید. سپس قرینه این نمودار را نسبت به محور x رسم می کنیم تا نمودار تابع $-f^{-1}$ به دست بیاید. در آخر، قرینه تابع $-f^{-1}$ را نسبت به محور y رسم می کنیم تا نمودار تابع $y=-f^{-1}(-x)$ به دست بیاید.



بنابراین نمودار توابع $y = -f^{-1}(-x)$ و $y = \frac{x+1}{2}$ مطابق شکل مقابل دو نقطه مشترک دارند.

۴۱- گزینه ۲ ارتفاع AH را رسم می کنیم. در مثلث قائم الزاویه ABH

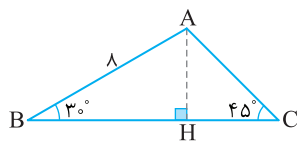
$$\sin 30^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AH}{8}$$

پس $AH=4$. در همین مثلث،

$$\cos 30^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BH}{8}$$

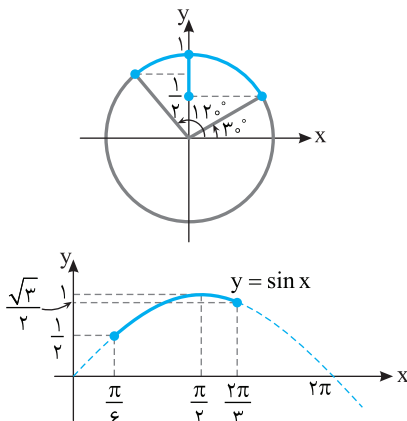
پس $BH=4\sqrt{3}$. اکنون توجه کنید که چون مثلث AHC قائم الزاویه است و زاویه 45° دارد، پس زاویه حاده دیگر آن نیز 45° است. در نتیجه، مثلث AHC متساوی الساقین است، پس $HC=AH=4$. به این ترتیب،

$$BC=BH+HC=4\sqrt{3}+4=4(\sqrt{3}+1)$$



۴۲- گزینه ۳ با توجه به شکل های زیر واضح است که وقتی $30^\circ \leq \alpha \leq 120^\circ$ مقدار $\sin \alpha$ در بازه $[\frac{1}{2}, 1]$ قرار دارد، پس $a = \frac{1}{2}$ و $b=1$

$$\text{در نتیجه } a+b = \frac{3}{2}$$



۳۶- گزینه ۳ توجه کنید که $f(f(4))=2$. بنابراین

$$(f \circ f)(4) = k \Rightarrow f(f(4)) = k \Rightarrow f(2) = k$$

همچنین، از روی شکل معلوم است که $f(2)$ عددی در بازه $(0, 2)$ است، پس $0 < k < 2$ و در نتیجه $0 < \frac{k}{2} < 1$ ، بنابراین چون تابع f روی بازه $(0, 1)$ صعودی

است، پس $f(\frac{k}{2})$ عددی بین $f(0)$ و $f(1)$ است، یعنی $-1 < f(\frac{k}{2}) < 0$.

۳۷- گزینه ۳ راه حل اول توجه کنید که

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 8(x^2 - 4x + 5) \Rightarrow f(2x+1) = 8(x-2)^2 + 8 \quad (*)$$

اگر فرض کنیم $t=2x+1$ ، آن گاه $x = \frac{t-1}{2}$. اکنون در تساوی $(*)$ به جای x مقدار $\frac{t-1}{2}$ را قرار می دهیم:

$$\begin{aligned} f(t) &= 8\left(\frac{t-1}{2}\right)^2 + 8 = 2(t-5)^2 + 8 = 2(t^2 - 10t + 25) + 8 \\ &= 2t^2 - 20t + 58 \end{aligned}$$

بنابراین $f(x) = 2x^2 - 20x + 58$.

راه حل دوم توجه کنید که $(f \circ g)(x) = 8(x^2 - 4x + 5)$ ، در نتیجه $(f \circ g)(0) = 40$. از طرف دیگر $(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(1)$ فقط در گزینه (۳)

شرط $f(1) = 40$ برقرار است.

۳۸- گزینه ۲ اگر $a=0$ ، آن گاه $f(x) = [x]$ و می دانیم یک به یک

نیست. اگر $a=-1$ ، آن گاه $f(x) = -x + [x]$ واضح است که یک به یک

نیست، مثلاً $f(0) = f(1) = 0$. اگر $a=-2$ ، آن گاه $f(x) = -2x + [x]$ و $f(x) = -2x + [x]$

یک به یک نیست، مثلاً $f(0) = f(-\frac{1}{2}) = 0$. اگر $a=1$ ، آن گاه $f(x) = x + [x]$

که یک تابع اکیداً صعودی و یک به یک است.

۳۹- گزینه ۲ راه حل اول ابتدا ضابطه تابع وارون تابع f را به دست می آوریم:

$$y = \frac{x+4}{x+2} \Rightarrow xy + 2y = x + 4 \Rightarrow x(y-1) = -2y + 4 \Rightarrow x = \frac{-2y+4}{y-1}$$

بنابراین $f^{-1}(x) = \frac{-2x+4}{x-1}$. اکنون با حل معادله $f(x) = f^{-1}(x)$

نقطه های برخورد نمودار دو تابع را می یابیم:

$$\frac{x+4}{x+2} = \frac{-2x+4}{x-1} \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = -2x^2 + 8x - 8 \Rightarrow x^2 + x - 4 = 0$$

جواب های معادله بالا طول نقاط برخورد هستند که حاصل ضرب آنها برابر -4 است.

راه حل دوم در تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ که $a \neq -d$ اگر نمودار تابع های f و f^{-1}

$f^{-1}(x) = x$ نقطه های مشترکی داشته باشند، طول این نقطه ها از معادله $f(x) = x$ به دست می آید. پس

$$\frac{x+4}{x+2} = x \Rightarrow x^2 + 2x = x + 4 \Rightarrow x^2 + x - 4 = 0$$

بنابراین حاصل ضرب جواب ها برابر -4 است.

۴۳- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\cot \alpha - \cos \alpha < 0 \Rightarrow \cot \alpha (1 - \sin \alpha) < 0$$

چون $1 - \sin \alpha$ نمی‌تواند منفی باشد، پس $\cot \alpha < 0$. از طرف دیگر $\cos \alpha \cot \alpha > 0$ و چون $\cot \alpha < 0$ ، پس $\cos \alpha < 0$. بنابراین انتهای کمان نظیر زاویه α در ناحیه دوم قرار دارد.

۴۴- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned} \sin \frac{49\pi}{10} &= \sin(\pi - \frac{\pi}{10}) = \sin \frac{\pi}{10}, \quad \sin \frac{5\pi}{6} = \sin(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}) = -\cos \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{18\pi}{5} &= \sin(\pi + \frac{3\pi}{5}) = -\sin \frac{3\pi}{5} = -\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}) = -\cos \frac{\pi}{10} \\ \cos \frac{8\pi}{5} &= \cos(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{10}) = \sin \frac{\pi}{10} \end{aligned}$$

$$A = \sin \frac{\pi}{10} + (-\cos \frac{\pi}{6}) - (-\cos \frac{\pi}{6}) + \sin \frac{\pi}{10} = 2 \sin \frac{\pi}{10}$$

۴۵- گزینه ۲ توجه کنید که $\alpha = \frac{\Delta\pi}{2} + \beta$ و در نتیجه

$$\sin \alpha = \sin(\frac{\Delta\pi}{2} + \beta) = \cos \beta, \quad \cos \alpha = \cos(\frac{\Delta\pi}{2} + \beta) = -\sin \beta$$

$$A = \frac{3 \cos^3 \beta + \cos^3 \beta}{-\sin^3 \beta + 2 \sin^3 \beta} = \frac{4 \cos^3 \beta}{\sin^3 \beta} = 4 \cot^3 \beta$$

۴۶- گزینه ۱ راه حل اول توجه کنید که

$$\begin{aligned} \sin(x+y) \sin(x-y) &= \sin^2 x \cos^2 y - \cos^2 x \sin^2 y \\ &= (1 - \cos^2 x) \cos^2 y - \cos^2 x (1 - \cos^2 y) \\ &= \cos^2 y - \cos^2 x \cos^2 y - \cos^2 x + \cos^2 x \cos^2 y \\ &= \cos^2 y - \cos^2 x \end{aligned}$$

بنابراین

$$\frac{\cos^2 y - \cos^2 x}{\cos^2 x + \cos^2 y} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \cos^2 y - 2 \cos^2 x = \cos^2 x + \cos^2 y$$

$$\cos^2 y = 3 \cos^2 x \Rightarrow \frac{\cos^2 x}{\cos^2 y} = \frac{1}{3}$$

راه حل دوم فرض کنید $y = 0$. در این صورت

$$\frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \sin^2 x = 1 + 1 - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{3}$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر $\frac{1}{3}$ است.۴۷- گزینه ۳ به کمک اتحادهای $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ و

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$A = \sin x \cos x (1 - 2 \sin^2 x) = \frac{1}{2} \sin 2x \times \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x$$

$$A = \frac{1}{4} \sin(\frac{4\pi}{16}) = \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

بنابراین به ازای $x = \frac{\pi}{16}$ به دست می‌آید۴۸- گزینه ۲ از اتحاد مزدوج و اتحاد $\cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \cos^4 \frac{\pi}{12} - \sin^4 \frac{\pi}{12} &= (\cos^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{\pi}{12})(\cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12}) \\ &= 1 \times \cos(\frac{2\pi}{12}) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

۴۹- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\alpha + \beta = \frac{\Delta\pi}{4} \Rightarrow \tan(\alpha + \beta) = 1 \Rightarrow \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 1$$

$$\tan \alpha + \tan \beta = 1 - \tan \alpha \tan \beta$$

$$\tan \alpha + \tan \beta + \tan \alpha \tan \beta = 1$$

بنابراین

$$A = (1 + \tan \alpha)(1 + \tan \beta) = 1 + \tan \beta + \tan \alpha + \tan \alpha \tan \beta$$

$$= 1 + 1 = 2$$

۵۰- گزینه ۳ ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos(2x - \frac{\pi}{9}) = -\sin 2x \Rightarrow \cos(2x - \frac{\pi}{9}) = \cos(\frac{\pi}{2} + 2x)$$

پس جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است:

$$2x - \frac{\pi}{9} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + 2x \Rightarrow 2k\pi = -\frac{11\pi}{18} \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

$$2x - \frac{\pi}{9} = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - 2x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{5\pi}{18}, k \in \mathbb{Z}$$

۵۱- گزینه ۱ دو طرف تساوی $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{3}$ را به توان دو می‌رسانیم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{9}$$

$$1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{9} \Rightarrow 2 \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{8}{9}$$

اگر فرض کنیم $A = \sin \alpha - \cos \alpha$ ، آن‌گاه

$$A^2 = (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$= 1 - (-\frac{8}{9}) = \frac{17}{9} \Rightarrow A = \pm \frac{\sqrt{17}}{3}$$

چون انتهای کمان نظیر زاویه α در ناحیه چهارم قرار دارد، $\sin \alpha < 0$ و

$$\cos \alpha > 0$$
. پس مقدار $\sin \alpha - \cos \alpha$ منفی است و در نتیجه $A = -\frac{\sqrt{17}}{3}$.

۵۲- گزینه ۳ فرض می‌کنیم اندازه این زاویه برحسب درجه برابر D و

$$D = \frac{200}{\pi} R - 5$$
 باشد. بنابراین $R = \frac{D + 5}{200/\pi}$ از تساوی

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$$
 به دست می‌آید

$$\frac{200}{\pi} R - 5 = \frac{R}{\pi} \Rightarrow 180^\circ R = 200^\circ R - 5\pi \Rightarrow 20^\circ R = 5\pi \Rightarrow R = \frac{\pi}{4}$$

۵۳- گزینه ۳ از نمودار داده شده مشخص است که سه برابر دوره تناوب

برابر ۶ است، پس دوره تناوب تابع $f(x) = a \sin(b\pi x)$ برابر ۲ است:

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = 2 \Rightarrow \frac{1}{|b|} = 1 \Rightarrow b = \pm 1$$

از طرف دیگر حداکثر مقدار تابع برابر ۴ است. پس $|a| = 4$. در نتیجه $a = \pm 4$.

اگر $\cos x + \sin x = 0$ ، آن گاه $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$ اگر $\cos x + \sin x = 1$ ، آن گاه

$$1 - \cos x = \sin x$$

از اتحادهای $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ و $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$ به ازای

$$\alpha = \frac{x}{2}$$
 استفاده می‌کنیم:

$$2 \sin^2 \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$\begin{cases} \sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi \Rightarrow x = 2k\pi \\ \sin \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

بنابراین جواب‌های واقع در بازه $(0, 2\pi)$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$.

۶- گزینه ۱ معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم

$$\frac{\tan x + \tan \frac{\pi}{3}}{1 - \tan x \tan \frac{\pi}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} \tan x - 3} \Rightarrow \frac{\tan x + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} \tan x} = \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} \tan x - 3}$$

$$\sqrt{3} \tan^2 x - 3 \tan x + 3 \tan x - 3\sqrt{3} = 3 + \sqrt{3} - (3\sqrt{3} + 3) \tan x$$

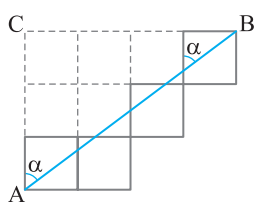
$$\sqrt{3} \tan^2 x + (3 + 3\sqrt{3}) \tan x - 3 - 4\sqrt{3} = 0$$

اگر فرض کنیم $t = \tan x$ معادله فوق به یک معادله درجه دوم تبدیل می‌شود که مجموع ضرایب آن صفر است. پس $\tan x = 1$ و

$$\tan x = -\frac{3 + 4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

در بازه $(0, \frac{\pi}{2})$ مورد سؤال است. پس $\tan x = -\frac{3 + 4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ قابل قبول

نیست و معادله $\tan x = 1$ هم فقط یک جواب $(x = \frac{\pi}{4})$ در این بازه دارد.



۶-۱ گزینه ۳ از نمادگذاری

شکل مقابل استفاده می‌کنیم. توجه کنید که بنابر قضیه خطوط موازی و مورب، $\alpha = \angle BAC$ در نتیجه

$$\sin \alpha = \sin \angle BAC = \frac{BC}{AB}$$

دیگر، بنابر قضیه فیثاغورس، $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. بنابراین

$$\sin \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5} \text{ همچنین } \tan \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{3} \text{ بنابراین}$$

$$\sin \alpha - \tan \alpha = \frac{4}{5} - \frac{4}{3} = -\frac{8}{15}$$

۶-۲ گزینه ۳ با استفاده از اتحاد $\tan \alpha \cot \alpha = 1$ مقدار m را

حساب می‌کنیم:

$$\frac{1}{2m} (m+2) = 1 \Rightarrow m+2 = 2m \Rightarrow m = 2$$

بنابراین $\cot \alpha = 4$ و به کمک اتحاد $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ مقدار

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{17} \text{ پس } 1 + 4^2 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \text{ را به دست می‌آوریم}$$

با توجه به نمودار که در شروع به صورت نزولی است، دو حالت زیر قابل قبول است:

$$\begin{cases} a=4 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 4 \sin(-\pi x), \quad \begin{cases} a=-4 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -4 \sin(\pi x)$$

در هر دو حالت مقدار ab برابر -4 است.

۵۴- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\cot 38^\circ = \cot(27^\circ + 11^\circ) = -\tan 11^\circ$$

بنابراین

$$\frac{1}{1 - \cot 38^\circ} + \frac{1}{1 + \cot 11^\circ} = \frac{1}{1 + \tan 11^\circ} + \frac{1}{1 + \cot 11^\circ}$$

$$= \frac{1 + \cot 11^\circ + 1 + \tan 11^\circ}{(1 + \tan 11^\circ)(1 + \cot 11^\circ)}$$

$$= \frac{2 + \tan 11^\circ + \cot 11^\circ}{1 + \cot 11^\circ + \tan 11^\circ + \tan 11^\circ \cot 11^\circ}$$

$$= \frac{2 + \tan 11^\circ + \cot 11^\circ}{2 + \tan 11^\circ + \cot 11^\circ} = 1$$

۵۵- گزینه ۳ چون $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$ پس

$$\frac{1}{\sin 15^\circ} + \frac{1}{\cos 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{\sqrt{2} \sin(15^\circ + 45^\circ)}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ}$$

$$= \frac{2\sqrt{2} \sin 60^\circ}{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{6}$$

۵۶- گزینه ۳ دو طرف تساوی داده شده را به توان دو می‌رسانیم و از

اتحادهای $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ و $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$(\sin x + \cos x)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = \frac{1}{4}$$

$$1 + \sin 2x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2x = -\frac{3}{4}$$

$$\text{بنابراین } \cos 4x = 1 - 2 \sin^2 2x = 1 - 2 \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{1}{8}$$

۵۷- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$A = \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$$

$$\text{بنابراین } A = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

۵۸- گزینه ۱ معادله را به صورت $\cos 2x = \cos(x + \frac{\pi}{4})$ می‌نویسیم. بنابراین جواب‌ها به صورت زیر هستند: ($k \in \mathbb{Z}$)

$$2x = 2k\pi + x + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad 2x = 2k\pi - x - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{2k\pi - \pi}{3}$$

جواب‌های واقع در بازه $[0, \pi]$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{12}$ که مجموع آن‌ها برابر

$$\frac{5\pi}{6} \text{ است.}$$

۵۹- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $1 + \sin 2x = (\cos x + \sin x)^2$

بنابراین معادله به صورت زیر ساده می‌شود:

$$(\cos x + \sin x)^2 = \cos x + \sin x$$

$$(\cos x + \sin x)(\cos x + \sin x - 1) = 0$$

۶۳- گزینه ۲ راه حل اول توجه کنید که

$$\tan^2 x + 9 \cot^2 x = (\tan x - 3 \cot x)^2 + 6$$

در نتیجه $\tan^2 x + 9 \cot^2 x = (2)^2 + 6 = 10$ بنابرین

$$(\tan^2 x + 9 \cot^2 x)^2 = 100$$

$$\tan^4 x + 18 \cot^4 x + 18 \tan^2 x \cot^2 x = 100$$

$$\tan^4 x + 18 \cot^4 x + 18 = 100 \Rightarrow \tan^4 x + 18 \cot^4 x = 82$$

راه حل دوم توجه کنید که

$$\tan x - 3 \cot x = 2 \Rightarrow \tan x - \frac{3}{\tan x} = 2$$

$$\tan^2 x - 2 \tan x - 3 = 0 \Rightarrow (\tan x + 1)(\tan x - 3) = 0$$

$$\tan x = -1, \tan x = 3$$

اگر $\tan x = -1$ آن گاه $\cot x = -1$ و

$$\tan^4 x + 18 \cot^4 x = 1 + 18 = 19$$

اگر $\tan x = 3$ آن گاه $\cot x = \frac{1}{3}$ و

$$\tan^4 x + 18 \cot^4 x = 81 + \frac{18}{81} = 82$$

پس در هر دو حالت مقدار عبارت مورد نظر برابر ۸۲ است.

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \text{چون} \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$f(x) = 3 - 4x \cdot \frac{1 - \cos 2(2+ax)}{2} = 1 + 2 \cos(4+2ax)$$

بنابرین دوره تناوب تابع f برابر است با $\frac{2\pi}{|2a|} = \frac{\pi}{|a|}$ در نتیجه

$$\frac{\pi}{|a|} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow |a| = 6$$

۶۵- گزینه ۲ توجه کنید که $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ در نتیجهپس $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ و $\sin^2 \alpha = 1 - (-\frac{1}{3})^2 = \frac{8}{9}$ چون $\alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$

$$\sin \alpha < 0 \text{ و در نتیجه } \sin \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ بنابرین}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

۶۶- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\sin x = 2 \cos x \Rightarrow \sin^2 x = 4 \cos^2 x$$

اگر به طرفین تساوی بالا $\cos^2 x$ را اضافه کنیم، آن گاه از اتحاد

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$4 \cos^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{5}$$

پس $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 2 \left(\frac{1}{5}\right) - 1 = -\frac{3}{5}$ راه حل دوم از فرض مسئله نتیجه می گیریم $\tan x = 2$ اکنون می توانیم از

$$\text{اتحاد } \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \text{ استفاده کنیم. بنابرین}$$

$$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \xrightarrow{\tan x = 2} \cos 2x = \frac{1 - 4}{1 + 4} = -\frac{3}{5}$$

۶۷- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \alpha}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \alpha} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 + 2 \tan \alpha = 1 - \tan \alpha$$

$$3 \tan \alpha = -1 \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{1}{3}$$

بنابرین

$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \tan \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$= \frac{2(-\frac{1}{3})}{1 - (-\frac{1}{3})^2} = -\frac{3}{4}$$

۶۸- گزینه ۴ معادله را به صورت $\sin 2x = \frac{1}{2}$ می نویسیم. پس

جوابهای کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}$$

اکنون جوابهای واقع در بازه $(0, \frac{3\pi}{2})$ را مشخص می کنیم:

k	۰	۱	۲
$x = k\pi + \frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{12}$	$\pi + \frac{\pi}{12}$	$2\pi + \frac{\pi}{12}$

(غ.ق.ق.)

k	۰	۱	۲
$x = k\pi + \frac{5\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\pi + \frac{5\pi}{12}$	$2\pi + \frac{5\pi}{12}$

(غ.ق.ق.)

۶۹- گزینه ۱ در نقاطی که $\cos 4x = 1$ تابع f به حداقل مقدار خود

می رسد. پس

$$4x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

k	۰	۱	۲
x	۰	$\frac{\pi}{2}$	π

بنابرین نمودار تابع در بازه مورد نظر سه بار به حداقل مقدار خود می رسد.

۷۰- گزینه ۲ راه حل اول معادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$\sin x \cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} \cos x = 3 \sin x \cos \frac{\pi}{12} - 3 \sin \frac{\pi}{12} \cos x$$

$$4 \sin \frac{\pi}{12} \cos x = 2 \sin x \cos \frac{\pi}{12}$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12}} \Rightarrow \tan x = 2 \tan \frac{\pi}{12}$$

۷۳- گزینه ۳ فرض می‌کنیم $\sin x + \cos x = y$ در نتیجه

$$y^2 = (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{y^2 - 1}{2}$$

بنابراین معادله مورد نظر به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{y^2 - 1}{2} = y \Rightarrow y^2 - 2y - 1 = 0$$

پس $y = 1 \pm \sqrt{2}$ ولی چون $1 + \sqrt{2} > 2$ پس $\sin x + \cos x$ نمی‌تواند با

این عدد برابر باشد و در نتیجه $\sin x + \cos x = 1 - \sqrt{2}$.

۷۴- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\cos^2 179^\circ = \cos^2 (180^\circ - 1^\circ) = \cos^2 1^\circ$$

$$\cos^2 178^\circ = \cos^2 (180^\circ - 2^\circ) = \cos^2 2^\circ$$

:

$$\cos^2 91^\circ = \cos^2 (180^\circ - 89^\circ) = \cos^2 89^\circ$$

بنابراین

$$A = 2(\cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \dots + \cos^2 89^\circ) + \cos^2 90^\circ + \cos^2 180^\circ$$

از طرف دیگر $\cos^2 90^\circ = 0$ و همچنین

$$\cos^2 89^\circ = \sin^2 1^\circ, \cos^2 88^\circ = \sin^2 2^\circ, \dots, \cos^2 46^\circ = \sin^2 44^\circ$$

بنابراین

$$\begin{aligned} A &= 2(\sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ + \dots \\ &\quad + \sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ + \cos^2 45^\circ) + \cos^2 180^\circ \\ &= \frac{\cos^2 45^\circ = \frac{1}{2}}{\cos^2 180^\circ = 1} \rightarrow A = 2\left(\underbrace{1+1+\dots+1}_{644}\right) + \frac{1}{2} + 1 = 90 \end{aligned}$$

۷۵- گزینه ۱ توجه کنید که اگر $-\frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2}$ ، آن‌گاه

$$\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \tan x \geq \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

اکیداً صعودی است و در نتیجه $\tan x \geq -\sqrt{3}$ بنابراین

$$m + 2\sqrt{3} \geq -\sqrt{3} \Rightarrow m \geq -3\sqrt{3}$$

پس حداقل مقدار m برابر $-3\sqrt{3}$ است.

۷۶- گزینه ۴ بیشترین و کمترین مقدار تابع به ترتیب برابر ۲ و -۲

هستند. پس $|a| = 2$. نمودار تابع از نقطه $(\frac{\pi}{3}, 0)$ عبور می‌کند. بنابراین

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow a \sin\left(\pi\left(b - \frac{\pi}{3}\right)\right) = 0 \Rightarrow \sin\left(\pi\left(b - \frac{\pi}{3}\right)\right) = 0$$

$$\pi\left(b - \frac{\pi}{3}\right) = k\pi \Rightarrow b = k + \frac{\pi}{3}$$

چون $2 < b < 3$ ، پس $b = \frac{\pi}{3}$. بنابراین ضابطه تابع به صورت

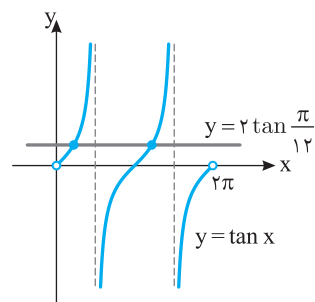
$$f(x) = -2 \sin\left(\frac{\sqrt{\pi}}{3} - \pi x\right) \quad \text{یا} \quad f(x) = 2 \sin\left(\frac{\sqrt{\pi}}{3} - \pi x\right)$$

است. چون $f(0) > 0$ ، پس ضابطه تابع به صورت $f(x) = 2 \sin\left(\frac{\sqrt{\pi}}{3} - \pi x\right)$ است. در

$$\text{نتیجه } a = 2, b = \frac{\pi}{3} \text{ و } a + b = \frac{13}{3}$$

با توجه به نمودار تابع‌های $y = \tan x$ و خط $y = 2 \tan \frac{\pi}{12}$ معادله فوق دو

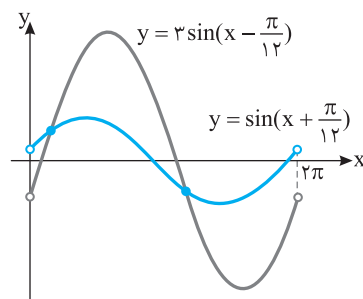
جواب در بازه $(0, 2\pi)$ دارد.



را حل دوم نمودار تابع‌های $y = \sin(x + \frac{\pi}{12})$ و $y = 3 \sin(x - \frac{\pi}{12})$ را در

بازه $(0, 2\pi)$ رسم می‌کنیم و تعداد نقاط برخورد آن‌ها را می‌یابیم. با توجه به

شکل زیر معادله مورد نظر دو جواب دارد.



۷۱- گزینه ۴ می‌دانیم $\tan \alpha \cot \alpha = 1$ بنابراین

$$\begin{aligned} A &= \frac{1 - \tan \frac{\pi}{5} + \cot \frac{\pi}{5} - \tan \frac{\pi}{5} \cot \frac{\pi}{5}}{1 + \tan \frac{\pi}{5} - \cot \frac{\pi}{5} - \tan \frac{\pi}{5} \cot \frac{\pi}{5}} \\ &= \frac{1 - \tan \frac{\pi}{5} + \cot \frac{\pi}{5} - 1}{1 + \tan \frac{\pi}{5} - \cot \frac{\pi}{5} - 1} = \frac{-(\tan \frac{\pi}{5} - \cot \frac{\pi}{5})}{\tan \frac{\pi}{5} - \cot \frac{\pi}{5}} = -1 \end{aligned}$$

۷۲- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ بنابراین از فرض

مسئله نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \frac{\tan x - \frac{1}{\tan x}}{\tan x + \frac{1}{\tan x}} &= \frac{y}{25} \Rightarrow \frac{\tan^2 x - 1}{\tan^2 x + 1} = \frac{y}{25} \\ 25 \tan^2 x - 25 &= y \tan^2 x + y \Rightarrow \tan^2 x = \frac{16}{9} \end{aligned}$$

از اتحاد $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + \frac{16}{9}} = \frac{9}{25}$$

چون x زاویه‌ای حاده است، پس $\cos x > 0$ ، در نتیجه $\cos x = \frac{3}{5}$.

۸۱- گزینه ۲ وقتی چرخ و فلک ۱۸۰ ثانیه (۳ دقیقه) می‌چرخد، ۶ دور

چرخیده و کابین‌ها در محل اولیه خود قرار گرفته‌اند. باید ببینیم در ۴ ثانیه هر کابین چقدر جابه‌جا می‌شود. چون در هر ۶۰ ثانیه ۲ دور می‌چرخد، پس در ۴ ثانیه $2 \times \frac{4}{60}$ دور، یعنی $\frac{2}{15}$ دور معادل $\frac{2\pi \times \frac{2}{15}}{360} = \frac{2\pi}{45}$ رادیان می‌چرخد. چون زاویه

بین دو کابین متوالی $\frac{2\pi}{3}$ رادیان است، پس هر کابین به ۴ کابین جلوتر منتقل می‌شود. یعنی کابین شماره یک به محل کابین شماره پنج منتقل می‌شود.

۸۲- گزینه ۳ در صورت کسر از $\sin 25^\circ$ و در مخرج کسر از

$\cos 25^\circ$ فاکتور می‌گیریم:

$$A = \frac{\sin 25^\circ (1 - \sin^2 25^\circ)}{\cos 25^\circ (1 - \cos^2 25^\circ)} = \frac{\sin 25^\circ \times \cos^2 25^\circ}{\cos 25^\circ \times \sin^2 25^\circ} = \frac{\cos 25^\circ}{\sin 25^\circ} = \cot 25^\circ$$

۸۳- گزینه ۳ توجه کنید که

$$7a + 9a = \frac{7\pi}{32} + \frac{9\pi}{32} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 9a = \frac{\pi}{2} - 7a \Rightarrow \cos 9a = \sin 7a$$

به همین ترتیب

$$21a + 27a = \frac{21\pi}{32} + \frac{27\pi}{32} = \frac{48\pi}{32} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow 27a = \frac{3\pi}{2} - 21a$$

$$\cos 27a = -\sin 21a$$

$$\frac{\sin 7a \cos 27a}{\sin 21a \cos 9a} = -\frac{\sin 7a \sin 21a}{\sin 21a \sin 7a} = -1 \quad \text{بنابراین}$$

۸۴- گزینه ۲ حداقل مقدار تابع مورد نظر باید -۴ و حداکثر مقدار آن

۲ باشد. حداقل مقدار تابع $y = 3 \cos(2x) - 4$ برابر -۷ و حداقل مقدار تابع $y = -2 \cos(3x) + 1$ برابر -۱ است. پس این توابع جواب نیستند.

در تابع $y = -3 \sin(3x) - 1$ مقدار تابع در $x = 0$ برابر -۱ است و تابع در سمت راست $x = 0$ نزولی است. پس $y = -3 \sin(3x) - 1$ جواب نیست.

ولی تابع $y = 3 \sin(2x) - 1$ در سمت راست $x = 0$ صعودی است.

۸۵- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\begin{aligned} \tan((x+10^\circ) + (y+35^\circ)) &= \frac{\tan(x+10^\circ) + \tan(y+35^\circ)}{1 - \tan(x+10^\circ) \tan(y+35^\circ)} \\ &= \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}} = \frac{9}{7} \quad (1) \end{aligned}$$

از طرف دیگر،

$$\begin{aligned} \tan((x+10^\circ) + (y+35^\circ)) &= \tan((x+y) + 45^\circ) \\ &= \frac{\tan(x+y) + \tan 45^\circ}{1 - \tan(x+y) \tan 45^\circ} = \frac{\tan(x+y) + 1}{1 - \tan(x+y)} \quad (2) \end{aligned}$$

اگر تساوی (۱) و (۲) را برابر قرار دهیم، به دست می‌آید

$$\frac{\tan(x+y) + 1}{1 - \tan(x+y)} = \frac{9}{7} \Rightarrow \tan(x+y) = \frac{1}{8}$$

۸۶- گزینه ۲ دو طرف تساوی $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{2}{3}$ را به توان دو

می‌رسانیم:

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{4}{9}$$

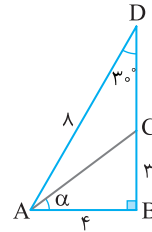
$$1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{4}{9} \Rightarrow 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{5}{9}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{5}{9} \quad \text{بنابراین} \quad \sin 2\alpha = \frac{5}{9} \quad \text{و در نتیجه} \quad \sin^2 2\alpha = \frac{25}{81}$$

۷۷- گزینه ۲ چون $\sin \hat{D} = \sin 30^\circ = \frac{AB}{\lambda} = \frac{1}{2}$ پس $AB = \frac{\lambda}{2}$.

بنابراین با استفاده از قضیه فیثاغورس، $AC = 5$ در نتیجه $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ و

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \quad \text{بنابراین} \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \left(\frac{3}{5}\right) \left(\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$$



۷۸- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \alpha}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \alpha} = \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha}$$

به همین ترتیب $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}$ عبارت مورد نظر

برابر است با

$$\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} + \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{(1 + \tan \alpha)^2 + (1 - \tan \alpha)^2}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2(1 + \tan^2 \alpha)}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2\left(\frac{1}{\cos^2 \alpha}\right)}{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{2}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{2}{\cos 2\alpha} = \frac{2}{\frac{1}{3}} = 6 \end{aligned}$$

۷۹- گزینه ۱ ابتدا دقت کنید که $\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$ در ادامه معادله را

به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{8} - x\right) = -1$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{8}\right)\right) = -1$$

$$2 \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = -1 \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x + \frac{\pi}{8} = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ x + \frac{\pi}{8} = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{7\pi}{24} \\ x = 2k\pi + \frac{25\pi}{24} \end{cases}$$

پس جواب‌های معادله در بازه $[0, 2\pi]$ عبارت‌اند از $\frac{4\pi}{24}$ و $\frac{25\pi}{24}$ که

مجموع آن‌ها برابر $\frac{11\pi}{4}$ است.

۸۰- گزینه ۱ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$2 \sin 3x \cos 4x - 2 \sin 4x \cos 3x = -1$$

$$2 \sin(3x - 4x) = -1 \Rightarrow 2 \sin(-x) = -1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازه $(0, \pi)$ عبارت‌اند از $x = \frac{\pi}{6}$ و $x = \frac{5\pi}{6}$ که

مجموع آن‌ها برابر π است.

۹۱- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که اگر $x \rightarrow 1^+$ ، آن گاه $(1-x^2) \rightarrow 0^-$ و اگر $x \rightarrow 1^-$ ، آن گاه $(1-x^2) \rightarrow 0^+$. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(1-x^2) = \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(1-x^2) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = -2$$

در نتیجه $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(1-x^2) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(1-x^2) = 1 - (-2) = 3$

۹۲- گزینه ۳ فرض می‌کنیم $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = a$ و $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = b$ در

این صورت

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f - 2g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) - 2 \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = a - 2b = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2f + 3g)(x) = 2 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + 3 \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2a + 3b = 18$$

از حل دستگاه معادلات بالا نتیجه می‌شود $a = 6$ و $b = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} g(x)} = \frac{a}{b} = \frac{6}{2} = 3$$

۹۳- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{8})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{8})^-} (\sqrt{2} \sin 2x) = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{8})^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{8})^+} (a \cos 2x + 2) = a \cos \frac{\pi}{4} + 2 = \frac{a\sqrt{2}}{2} + 2$$

اگر تابع f در نقطه $x = \frac{\pi}{8}$ حد داشته باشد، دو حد بالا باید برابر باشند:

$$1 = \frac{a\sqrt{2}}{2} + 2 \Rightarrow a = -\sqrt{2}$$

۹۴- گزینه ۳ راه حل اول توجه کنید که

$$\frac{2x^2 - 8}{x^2 + 3x + 2} = \frac{2(x^2 - 4)}{x^2 + 3x + 2} = \frac{2(x-2)(x+2)}{(x+2)(x+1)} = \frac{2(x-2)}{x+1}, x \neq -2$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - 8}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x-2)}{x+1} = \frac{-8}{-1} = 8$$

راه حل دوم از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم: (به درس آخر فصل چهارم مراجعه کنید).

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - 8}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x}{2x + 3} = \frac{-8}{-1} = 8$$

۹۵- گزینه ۳ **راه حل اول** با استفاده از اتحاد $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$

می‌توان نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 6x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos 6x}{x^2} - \frac{1 - \cos 2x}{x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 3x}{x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 18 \left(\frac{\sin 3x}{3x} \right)^2 - \lim_{x \rightarrow 0} 2 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2$$

$$= 18 - 2 = 16$$

۸۷- گزینه ۲ از اتحادهای $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ و

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \cos 2x$$

بنابراین $A = \left(\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \right)^2 = \cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$ اکنون به ازای

$$x = \frac{\pi}{16}$$

$$\frac{1 + \cos 4(\frac{\pi}{16})}{2} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

۸۸- گزینه ۴ از روی نمودار تابع f در شکل زیر معلوم می‌شود که وقتی

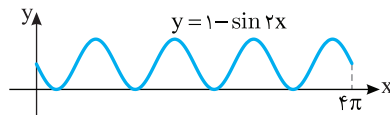
نمودار تابع f بر محور طول‌ها مماس می‌شود، $f(x) = 0$ پس

$$1 - \sin(2x) = 0 \Rightarrow \sin(2x) = 1$$

$$2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$$0 < x < \pi \Rightarrow 0 < k\pi + \frac{\pi}{4} < \pi \Rightarrow 0 < k + \frac{1}{4} < 4 \Rightarrow -\frac{1}{4} < k < \frac{15}{4}$$

پس به ازای $k = 0, 1, 2, 3$ چهار مقدار برای x به دست می‌آید که طول نقاط تماس نمودار تابع با محور طول‌هاست.



۸۹- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$2 \cos^2 2x + 3 \cos 2x + 1 = 0 \Rightarrow (2 \cos 2x + 1)(\cos 2x + 1) = 0$$

بنابراین

$$\cos 2x = -1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازه $[0, \pi]$ عبارتند از $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{2\pi}{3}$ که مجموع آن‌ها

$$\text{برابر } \frac{3\pi}{2} \text{ است.}$$

۹۰- گزینه ۲ دو طرف معادله را بر ۲ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{3} \sin x + \sin \frac{\pi}{3} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{12}$$

$$x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{12}$$

بنابراین معادله در بازه $(0, 2\pi)$ دو جواب $\frac{5\pi}{12}$ و $\frac{23\pi}{12}$ را دارد.

راه حل دوم توجه کنید که از هم‌ارزی‌های مثلثاتی استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 6x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (2x)^2 - (1 - (6x)^2)}{x^2} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2x^2 - 1 + 18x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{16x^2}{x^2} = 16$$

راه حل سوم از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم: (به درس آخر فصل چهارم مراجعه کنید.)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 6x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 2x + 6 \sin 6x}{2x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\sin 2x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 6x}{x} = -2 + 3 \times 6 = 16$$

۹۶- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax^2 + 1) = 4a + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (fax + 21) = 8a + 21$$

برای اینکه تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، باید حدهای چپ و راست تابع در نقطه $x=2$ با مقدار تابع در نقطه ۲ برابر باشند، بنابراین

$$4a + 1 = b - 1, \quad 8a + 21 = b - 1$$

از حل دستگاه معادلات بالا به دست می‌آید $a = -5$ و $b = -18$.

۹۷- گزینه ۲ **راه حل اول** برای اینکه حد کسر برابر $+\infty$ شود، باید

حد مخرج صفر باشد. پس

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + ax^2 + 3x + b) = 1 + a + 3 + b = 0 \Rightarrow b = -a - 4$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x}{x^3 + ax^2 + 3x + b} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{x^3 + ax^2 + 3x - a - 4} \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x^2 + (a+1)x + a+4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2 + (a+1)x + a+4}$$

برای اینکه حد کسر فوق $+\infty$ شود، باید حد مخرج صفر باشد و علامت مخرج در دو طرف $x=1$ مثبت باشد، یعنی $x=1$ ریشه مضاعف آن باشد. پس

$$1 + a + 1 + a + 4 = 0 \Rightarrow a = -3$$

بنابراین $b = -1$ و $a - b = -2$. **راه حل دوم** از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم: (به درس آخر فصل چهارم مراجعه کنید.)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x}{x^3 + ax^2 + 3x + b} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 1}{3x^2 + 2ax + 3}$$

با توجه به اینکه حاصل حد $+\infty$ شده است، بنابراین حد مخرج در نقطه $x=1$ باید صفر باشد. پس

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + 2ax + 3) = 0 \Rightarrow 3 + 2a + 3 = 0 \Rightarrow a = -3$$

توجه کنید که در ابتدا در نقطه $x=1$ هم، حد صورت و هم حد مخرج برابر صفر بود، پس

$$1 + a + 3 + b = 0 \xrightarrow{a=-3} b = -1$$

۹۸- گزینه ۴ توجه کنید که بزرگ‌ترین جمله در صورت کسر مورد نظر

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 \cdot x^2}{\Delta x^2} = 2 \text{ در نتیجه حد مورد نظر برابر است با } 2 \cdot 10^2$$

۹۹- گزینه ۱ توجه کنید که $m \neq 6$ ، در غیر این صورت حد مورد نظر

برابر صفر می‌شود. اکنون توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 - 5x + 1 - mx^2}{(3x - 2)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(6-m)x^2 - 5x + 1}{9x^2 - 12x + 4} = \frac{6-m}{9}$$

$$\text{بنابراین } \frac{6-m}{9} = \frac{1}{2}, \text{ پس } m = \frac{3}{2}$$

۱۰۰- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \frac{1 - \cos 4x}{\sin 4x} = \frac{2 \sin^2 2x}{2 \sin 2x \cos 2x} = \tan 2x$$

بنابراین مجانب‌های قائم نمودار تابع f به صورت $2x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) یا

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

هستند. مجانب‌های قائم نمودار تابع f در بازه $(0, \pi)$ عبارت‌اند از خطوط $x = \frac{\pi}{4}$ و $x = \frac{3\pi}{4}$.

۱۰۱- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $x \rightarrow 0^+$ یا $x \rightarrow 0^-$ ، آن‌گاه

$$x^3 - x^2 = x^2(x-1) \rightarrow 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x^3 - x^2) = \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = -1$$

۱۰۲- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(f(x-3)) = \lim_{t \rightarrow 0} f(f(t)) = \lim_{s \rightarrow -1} f(s) = 0$$

و

$$\lim_{x \rightarrow 3} (xf(x-1)) = \lim_{x \rightarrow 3} x \lim_{x \rightarrow 3} f(x-1) = 3 \lim_{t \rightarrow 2} f(t) = 0$$

$$\text{بنابراین } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(f(x-3)) + 1}{xf(x-1) + 2} = \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2}$$

۱۰۳- گزینه ۳ ابتدا حد چپ و حد راست تابع را در نقطه $x=3$

حساب می‌کنیم. توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} [-x] = -3, \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} [x^2] = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} [-x] = -4, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} [x^2] = 9$$

پس

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (-3x + 8m) = 8m - 9$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (-4x + 9m) = -12 + 9m$$

برای اینکه تابع در نقطه $x=3$ حد داشته باشد، باید حد چپ و حد راست تابع در آن با هم برابر باشند. پس

$$8m - 9 = 9m - 12 \Rightarrow m = 3$$

۱۰۴- گزینه ۲ با توجه به اینکه تابع $y = [x]$ فقط در نقاط صحیح حد

ندارد، پس تابع f هم فقط در این نقاط ممکن است حد نداشته باشد. به دلیل حضور عامل صفر کننده $x^2 - 1$ که در $[x]$ ضرب شده است، تابع f در اعداد صحیح $x=1$ و $x=-1$ حد دارد و در بقیه نقاط صحیح بازه $(-2, 3)$ یعنی نقاط $x=0$ و $x=2$ حد ندارد.

راه حل دوم از قاعده هوییتال استفاده می کنیم: (به درس آخر فصل چهارم مراجعه کنید):

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2} \cos \frac{x}{2}}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{x}{2}}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{x}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

۱۰۷- گزینه ۱ توجه کنید که

$$f(12) = [6] - [4] = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 12^-} f(x) = 5 - 3 = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 12^+} f(x) = 6 - 4 = 2$$

بنابراین تابع f در $x=12$ پیوسته است.

۱۰۸- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+3}{4x^3 + ax^2 + bx} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+3}{x(4x^2 + ax + b)} = -\infty$$

$$\text{چون } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{4x^2 + ax + b} = +\infty \text{، پس باید } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+3}{x} = \frac{1}{-2}$$

نتیجه $x=-2$ باید ریشه مضاعف مخرج باشد و در اطراف آن مخرج مثبت باشد. بنابراین

$$4x^2 + ax + b = 4(x+2)^2 \Rightarrow 4x^2 + ax + b = 4x^2 + 16x + 16$$

پس $a=16$ ، $b=16$ و $a+b=32$.

۱۰۹- گزینه ۴ چون حاصل حد $-\infty$ شده است، پس باید درجه

صورت کسر بیشتر از درجه مخرج آن شود. بنابراین

$$a-3=0 \Rightarrow a=3, \quad b^2-3a=0 \xrightarrow{a=3} b^2=9 \Rightarrow b=\pm 3$$

از طرف دیگر حد مورد نظر به صورت زیر است:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(b-2)x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((b-2)x) = -\infty$$

پس $b-2$ باید منفی باشد و در نتیجه $b=-3$ و $ab=-9$.

۱۱۰- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که خطهای $y=1$ و $y=-1$

مجاانبهای افقی نمودار تابع f هستند:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x^2-3} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2+1}{x^2-3} = -1$$

بنابراین باید معادلات $f(x)=1$ و $f(x)=-1$ را حل کنیم تا طول نقاط تلاقی

نمودار تابع f با مجانبهای آن را مشخص کنیم:

$$f(x)=1 \Rightarrow \frac{x|x|+1}{x^2-3} = 1 \Rightarrow x^2 - x|x| = 4$$

$$\xrightarrow{x < 0} 2x^2 = 4 \Rightarrow x = -\sqrt{2}$$

$$f(x)=-1 \Rightarrow \frac{x|x|+1}{x^2-3} = -1 \Rightarrow x^2 + x|x| = 2$$

$$\xrightarrow{x > 0} 2x^2 = 2 \Rightarrow x = 1$$

بنابراین نمودار تابع f و مجانبهای آن در دو نقطه $(-\sqrt{2}, 1)$ و $(1, -1)$

مقاطعند. فاصله دو نقطه بالا برابر است با

$$\sqrt{(1+\sqrt{2})^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{7+2\sqrt{2}}$$

توجه کنید که اگر k عددی صحیح باشد، آن گاه

$$\lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^+} k(x^2-1) = k(k^2-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^-} (k-1)(x^2-1) = (k-1)(k^2-1)$$

از تساوی $k(k^2-1) = (k-1)(k^2-1)$ نتیجه می شود $k = \pm 1$ ، یعنی تابع f فقط در دو تا نقطه از نقاط صحیح ($x=1$ و $x=-1$) حد دارد و در بقیه نقاط صحیح حد ندارد.

۱۰۵- گزینه ۴ **راه حل اول** چون حد صورت کسر در نقطه $x=2$ صفر است، پس باید حد مخرج کسر هم در آن صفر باشد. زیرا در غیر این صورت حد کسر برابر صفر خواهد شد. پس

$$\lim_{x \rightarrow 2} (ax^2 + bx + 2) = 4a + 2b + 2 = 0 \Rightarrow b = -1 - 2a$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{ax^2+bx+2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{ax^2+(-1-2a)x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2-4}{(x-2)(ax-1)(\sqrt{x+2}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(ax-1)(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{1}{4(2a-1)}\end{aligned}$$

بنابراین

$$\frac{1}{4(2a-1)} = \frac{3}{4} \Rightarrow 2a-1 = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$\text{در نتیجه } a+b = -\frac{5}{3} \text{ و } b = -\frac{7}{3}$$

راه حل دوم توجه کنید که حد صورت در نقطه $x=2$ برابر صفر است و چون

مقدار حد عبارت صفر نشده، پس حد مخرج در این نقطه هم باید صفر باشد:

$$4a+2b+2=0$$

چهارم مراجعه کنید):

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{ax^2+bx+2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+2}}}{2ax+b} = \frac{1}{4a+b} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4a+b = \frac{1}{3}$$

$$\text{از حل دستگاه معادلات } \begin{cases} 4a+2b=-2 \\ 4a+b=\frac{1}{3} \end{cases} \text{ به دست می آید } a=\frac{2}{3} \text{ و } b=-\frac{7}{3} \text{، پس}$$

$$a+b = -\frac{5}{3}$$

۱۰۶- گزینه ۲ **راه حل اول** توجه کنید که در یک همسایگی صفر،

$\cos x > 0$ ، اکنون می توان نوشت:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\cos \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\cos \frac{x}{2}}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2}(1-\cos \frac{x}{2})}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2}(2\sin^2 \frac{x}{4})}{16(\frac{x}{4})^2} = \frac{2\sqrt{2}}{16} = \frac{\sqrt{2}}{8}\end{aligned}$$

راه حل دوم از اتحاد $\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2 \alpha}{1+\tan^2 \alpha}$ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan x}{\cos 2x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan x}{\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^2 x}{1-\tan^2 x} = \frac{2}{-2} = -1\end{aligned}$$

راه حل سوم از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم: (به درس آخر فصل چهارم مراجعه کنید):

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan x}{\cos 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^2 x}{-2 \sin 2x} = \frac{2}{-2(-1)} = 1$$

۱۱۷- گزینه ۴ توجه کنید که $D_f = \mathbb{R}$ ، بنابراین تابع f فقط در نقطه $x=1$ ممکن است ناپیوسته باشد. در این نقطه حد چپ، حد راست و مقدار تابع را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+3}{2x^2+1} = \frac{4}{3} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^4-1}{x^3-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x^3+x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+x+1} = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

بنابراین تابع f در $x=1$ پیوسته است و نقطه ناپیوستگی ندارد.

۱۱۸- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$. بنابراین

$$[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)] = [3] = 3. \text{ از طرف دیگر اگر } x \rightarrow -\infty, \text{ آنگاه } f(x) < 3.$$

$$\text{بنابراین } [f(x)] = 2 \text{ و در نتیجه } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = 2. \text{ پس}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] - 2 [\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)] = 2 - 2 \times 3 = -4$$

۱۱۹- گزینه ۲ توجه کنید که

$$f(2x) - 1 = 3(2x)^2 - 2x - 1 = 12x^2 - 2x - 1$$

$$f(x) + 3x^2 - 1 = 3x^2 - x + 3x^2 - 1 = 6x^2 - x - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x^2 - 2x - 1}{6x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x^2}{6x^2} = 2$$

۱۲۰- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$4x - x^2 > 0 \Rightarrow 0 < x < 4$$

پس $D_f = (0, 4)$ و مخرج $f(x)$ همواره مثبت است. در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = +\infty$$

بنابراین نمودار تابع f در اطراف مجانب‌های قائم آن به صورت گزینه (۳) است.

۱۲۱- گزینه ۲ اگر $x \rightarrow (\frac{5\pi}{4})^+$ ، آنگاه $\sin x \rightarrow (-\frac{\sqrt{2}}{2})^-$. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{5\pi}{4})^+} [\sqrt{2} \sin x] = \lim_{t \rightarrow (-1)^-} [t] = -2. \text{ پس } \sqrt{2} \sin x \rightarrow (-1)^-$$

۱۱۱- گزینه ۱ اگر $x \rightarrow 2^+$ ، آنگاه $f(x) \rightarrow (-1)^-$ و در نتیجه $f(f(x)) \rightarrow 2^-$. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} [(f \circ f)(x)] = \lim_{x \rightarrow 2^+} [f(f(x))] = \lim_{t \rightarrow 2^-} [t] = 1$$

۱۱۲- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f(x+1) = a(x+1)^2 + b(x+1) - c, \quad f(3x) = 9ax^2 + 3bx - c$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x+1) = a(0+1)^2 + b(0+1) - c = a + b - c$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(3x) = 9a \times 1^2 + 3b \times 1 - c = 9a + 3b - c$$

بنابراین از شرط مسئله نتیجه می‌شود $a + b - c = 9a + 3b - c$. یعنی

$$\frac{a}{b} = -\frac{1}{4}, \text{ پس } 4a = -b.$$

۱۱۳- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که اگر $x \rightarrow 3^-$ ، آنگاه

$$-x \rightarrow (-3)^+, \text{ و در نتیجه } [x] = 2 \text{ و } [-x] = -3. \text{ پس}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{x^2}{[x]} - \frac{[-x]}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{-3}{x} \right) = \frac{9}{2} + \frac{3}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

۱۱۴- گزینه ۳ حد چپ و حد راست تابع در $x=1$ را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 4) = -3\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{a}{x - 2} = -a$$

چون حد تابع در $x=1$ وجود دارد، پس حد چپ و حد راست آن در این نقطه برابرند:

$$-a = -3 \Rightarrow a = 3$$

۱۱۵- گزینه ۲ چون حد صورت کسر وقتی $x \rightarrow 3$ صفر است، باید حد

مخرج آن هم صفر باشد، زیرا در غیر این صورت حد کسر برابر صفر خواهد شد. پس

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + ax + 3) = 9 + 3a + 3 = 12 + 3a = 0 \Rightarrow a = -4$$

بنابراین

$$\begin{aligned}b &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{ax - 3a}{x^2 + ax + 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-4x + 12}{x^2 - 4x + 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-4(x - 3)}{(x - 3)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-4}{x - 1} = -2\end{aligned}$$

بنابراین $a + b = -6$.

۱۱۶- گزینه ۴ **راه حل اول** با استفاده از اتحادهای مثلثاتی و اتحاد

مزدوج نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan x}{\cos 2x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1+\frac{\sin x}{\cos x}}{\cos^2 x - \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \sin x}{\cos x (\cos x - \sin x) (\cos x + \sin x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x (\cos x - \sin x)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} (\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2})} = 1\end{aligned}$$

۱۲۴- گزینه ۳ راه حل اول با استفاده از اتحاد مزدوج می توان نوشت

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x} &= \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos x + \sin x)}{(\cos x + \sin x)(\cos x + \sin x)} \\&= \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{\cos x + \sin x} \\&= \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\end{aligned}$$

راه حل دوم از قاعده هوییتال استفاده می کنیم: (به درس آخر فصل چهارم مراجعه کنید):

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x} &= \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{-f \sin x \cos^2 x - f \cos x \sin^2 x}{-\sin x + \cos x} \\&= \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{-f \sin x \cos x (\cos^2 x + \sin^2 x)}{\cos x - \sin x} = \frac{-f \times (-\frac{\sqrt{2}}{2}) \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1}{\frac{\sqrt{2}}{2} - (-\frac{\sqrt{2}}{2})} = \sqrt{2}\end{aligned}$$

۱۲۵- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\begin{aligned}f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= ab - 1, \quad \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} (a \sin x) = a \\ \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} (\cos 2x + b) = -1 + b \\ \text{برای اینکه تابع } f &\text{ در نقطه } x = \frac{\pi}{2} \text{ پیوسته باشد باید } \begin{cases} ab - 1 = a \\ a = b - 1 \end{cases} \text{ بنابراین} \\ ab - 1 &= a \xrightarrow{b = a+1} a(a+1) - 1 = a \\ a^2 + a - 1 &= a \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \\ \text{اگر } a &= 1, \text{ آن گاه } b = 2 \text{ و } a + b = 3 \\ \text{اگر } a &= -1, \text{ آن گاه } b = 0 \text{ و } a + b = -1\end{aligned}$$

۱۲۶- گزینه ۴ توجه کنید که $(f+2g)-(f-g)=3g$ پس تابع g

در نقطه $x=a$ پیوسته است. به این ترتیب چون $(f-g)+g=f$ پس تابع f هم در نقطه $x=a$ پیوسته است. چون برد تابع های f و g مجموعه اعداد حقیقی مثبت است، پس مخرج کسره های $\frac{1}{f}$ ، $\frac{1}{g}$ و $\frac{1}{f+g}$ هیچ گاه صفر نمی شود و دامنه این توابع مجموعه اعداد حقیقی است و چون f و g در $x=a$ پیوسته اند، این توابع هم در $x=a$ پیوسته اند. ولی دامنه تابع $\frac{1}{f-g}$ ممکن است $\mathbb{R}$ نباشد و این تابع ممکن است در $x=a$ تعریف نشود. (کافی است

$$(f(a)=g(a)), \text{ پس تابع } \frac{1}{f-g} \text{ ممکن است در } x=a \text{ پیوسته نباشد.}$$

۱۲۷- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$ بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 1$$

همچنین مقادیر $f(x)$ در مثبت بی نهایت بزرگ تر از یک هستند. پس

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{1 - (f \circ f)(x)} = -\infty \text{ در نتیجه } (f \circ f)(x) \rightarrow 1^+$$

۱۲۲- گزینه ۴ راه حل اول ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4} - 2}{x^2 - 25} &= \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{\sqrt{x+4} - 3}{x^2 - 25} - \frac{\sqrt{x-4} - 1}{x^2 - 25} \right) \\&= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{x^2 - 25} - \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-4} - 1}{x^2 - 25}\end{aligned}$$

اکنون از اتحاد مزدوج استفاده می کنیم:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{\sqrt{x+4} - 3}{x^2 - 25} \times \frac{\sqrt{x+4} + 3}{\sqrt{x+4} + 3} \right) - \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{\sqrt{x-4} - 1}{x^2 - 25} \times \frac{\sqrt{x-4} + 1}{\sqrt{x-4} + 1} \right) \\&= \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{x+4-9}{(x-5)(x+5)} \times \frac{1}{\sqrt{x+4}+3} \right) - \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{x-4-1}{(x-5)(x+5)} \times \frac{1}{\sqrt{x-4}+1} \right) \\&= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(\sqrt{x+4}+3)(x+5)} - \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(\sqrt{x-4}+1)(x+5)} = \frac{1}{60} - \frac{1}{20} = -\frac{1}{30}\end{aligned}$$

راه حل دوم از قاعده هوییتال استفاده می کنیم (به درس آخر فصل چهارم مراجعه کنید):

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4} - 2}{x^2 - 25} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+4}} - \frac{1}{2\sqrt{x-4}}}{2x} = \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{2}}{10} = -\frac{1}{30}$$

۱۲۳- گزینه ۳ راه حل اول فرض می کنیم $\sqrt{x} = t$. در این صورت وقتی $x \rightarrow 8$ ، $t \rightarrow 2$ بنابراین

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x-1}}{x-8} &= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{\sqrt{t^2+1} - t}{t^3-8} \\&= \lim_{t \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{t^2+1} - (t+1)}{t^3-8} \times \frac{\sqrt{t^2+1} + (t+1)}{\sqrt{t^2+1} + (t+1)} \right) \\&= \lim_{t \rightarrow 2} \left(\frac{t^2+1-t^2-2t-1}{t^3-8} \times \frac{1}{\sqrt{t^2+1} + t + 1} \right) \\&= \lim_{t \rightarrow 2} \left(\frac{t(t-2)(t+1)}{(t-2)(t^2+2t+4)} \times \frac{1}{\sqrt{t^2+1} + t + 1} \right) = \frac{2 \times (2+1)}{4+4+4} \times \frac{1}{3+2+1} = \frac{1}{12}\end{aligned}$$

راه حل دوم توجه کنید که

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x-1}}{x-8} &= \lim_{x \rightarrow 8} \left(\frac{\sqrt{x+1} - 3}{x-8} - \frac{\sqrt[3]{x-1} - 2}{x-8} \right) \\&= \lim_{x \rightarrow 8} \left(\frac{\sqrt{x+1} - 3}{x-8} \times \frac{\sqrt{x+1} + 3}{\sqrt{x+1} + 3} \right) - \lim_{x \rightarrow 8} \left(\frac{\sqrt[3]{x-1} - 2}{x-8} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x+4}}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x+4}} \right) \\&= \lim_{x \rightarrow 8} \left(\frac{x+1-9}{x-8} \times \frac{1}{\sqrt{x+1}+3} \right) - \lim_{x \rightarrow 8} \left(\frac{x-8}{x-8} \times \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x+4}} \right) \\&= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{\sqrt{x+1}+3} - \lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x+4}} \\&= \frac{1}{3+3} - \frac{1}{4+4+4} = \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}\end{aligned}$$

راه حل سوم از قاعده هوییتال استفاده می کنیم (به درس آخر فصل چهارم مراجعه کنید):

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x-1}}{x-8} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x-1}}}{1} = \frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{12}$$

۱۲۸- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} = \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

بنابراین پس نمودار تابع f در اطراف خط $x=1$ به صورت مقابل است.

۱۲۹- گزینه ۲ اگر m عددی مثبت باشد، وقتی که $x \rightarrow +\infty$ ، مقادیر

$3-mx$ منفی اند و حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(mx-3)+x-1}{3x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(m+1)x-4}{3x+1} = \frac{m+1}{3}$$

بنابراین $\frac{m+1}{3} = \frac{2}{3}$ ، پس $m=1$. اگر m عددی منفی باشد، وقتی که

$x \rightarrow +\infty$ ، مقادیر $3-mx$ مثبت اند و حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3-mx)+x-1}{3x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-m)x+2}{3x+1} = \frac{1-m}{3}$$

بنابراین $\frac{1-m}{3} = \frac{2}{3}$ ، پس $m=-1$. اگر $m=0$ ، حد مورد نظر برابر $\frac{1}{3}$

می‌شود و قابل قبول نیست. بنابراین مقادیر m عددهای ۱ و -۱ هستند. پس m دو مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد.

۱۳۰- گزینه ۳ صورت کسر ضابطه تابع f ریشه ندارد. پس اگر مخرج

این کسر ریشه نداشته باشد، نمودار تابع مجانب قائم نخواهد داشت. در غیر این صورت مجانب قائم دارد. پس

$$x^2 - 6x + 2m = 0, \quad \Delta = 36 - 8m < 0 \Rightarrow m > \frac{9}{2}$$

بنابراین m مقادیر طبیعی ۱، ۲، ۳ و ۴ را نمی‌تواند داشته باشد.

۱۳۱- گزینه ۱ وقتی که x از سمت چپ به ۲ نزدیک می‌شود، $f(x)$ از

سمت راست به ۲ نزدیک می‌شود. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 2^+} f(t) = -1$$

۱۳۲- گزینه ۱ با فرض $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = L_1$ و $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = L_2$ معلوم

می‌شود که

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + g(x)) = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3 \Rightarrow L_1 + L_2 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f^2(x) - g^2(x)) = 21 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f^2(x) - \lim_{x \rightarrow 2} g^2(x) = 21$$

$$L_1^2 - L_2^2 = 21 \Rightarrow (L_1 - L_2)(L_1 + L_2) = 21$$

$$3(L_1 - L_2) = 21 \Rightarrow L_1 - L_2 = 7$$

از حل دستگاه معادله‌های $\begin{cases} L_1 - L_2 = 7 \\ L_1 + L_2 = 3 \end{cases}$ به دست می‌آید $L_1 = 5$ و

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2x^2)}{g(x+1)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} f(2x^2)}{\lim_{x \rightarrow 1} g(x+1)} = \frac{\lim_{k \rightarrow 2} f(k)}{\lim_{k \rightarrow 2} g(k)} = \frac{5}{-2}$$

۱۳۳- گزینه ۲ ابتدا توجه که در یک همسایگی چپ نقطه $x=1$

تساوی‌های $[2x]=1$ ، $[-x]=-1$ و $|1-x|=1-x$ برقرار هستند. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[2x](x+2)}{x[-x]+|1-x|} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+2}{-x+1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+2}{-2x+1} = -3$$

۱۳۴- گزینه ۴ راه‌حل اول چون حد مخرج صفر است و حد مورد نظر وجود

دارد، پس حد صورت هم باید صفر باشد، تا حد به صورت $\frac{0}{0}$ در بیاید.

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x^2 + x + a} - 2) = 0 \Rightarrow \sqrt{2^2 + 2 + a} - 2 = 0 \Rightarrow a = -2$$

اگر $a = -2$ ، حد مورد نظر می‌شود

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2} - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2 + x - 2} - 2)(\sqrt{x^2 + x - 2} + 2)}{(x+2)(x-2)(\sqrt{x^2 + x - 2} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 4}{(x-2)} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2 + x - 2} + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{(x-2)} \times \frac{1}{16} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{16} \lim_{x \rightarrow 2} (x+3) = \frac{5}{16}$$

در نتیجه $b = \frac{5}{16}$.

راه‌حل دوم چون حد مخرج صفر است و حد مورد نظر وجود دارد، پس حد

صورت هم باید صفر باشد، تا حد به صورت $\frac{0}{0}$ در بیاید. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x^2 + x + a} - 2) = 0 \Rightarrow \sqrt{2^2 + 2 + a} - 2 = 0 \Rightarrow a = -2$$

اکنون برای به دست آوردن مقدار حد می‌توانیم از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم (به درس آخر فصل چهارم مراجعه کنید):

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2} - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2 + x - 2}}}{2x} = \frac{5}{4} = \frac{5}{16}$$

۱۳۵- گزینه ۳ راه‌حل اول فرض می‌کنیم $x - \frac{\pi}{2} = t$. در نتیجه

$$x = \frac{\pi}{2} + t \quad \text{و} \quad t \rightarrow 0 \quad \text{پس می‌توان نوشت:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos \Delta x}{\pi - 2x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(\frac{\Delta \pi}{2} + \Delta t)}{\pi - (\pi + 2t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin \Delta t}{-2t} = \frac{\Delta}{2}$$

راه‌حل دوم از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم: (به درس آخر فصل چهارم مراجعه کنید):

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos \Delta x}{\pi - 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\Delta \sin \Delta x}{-2} = \frac{(-5)(1)}{-2} = \frac{5}{2}$$

۱۳۶- گزینه ۴ ابتدا حد تابع در $x=0$ را پیدا می‌کنیم. توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (\sqrt[3]{x+27} - 3) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+27} - 3}{x}$$

فرض می‌کنیم $\sqrt[3]{x+27} = t$. پس $\sqrt[3]{x+27} = t^3$. در نتیجه $x = t^3 - 27$.

همچنین اگر $x \rightarrow 0$ ، آن‌گاه $t \rightarrow 3$. بنابراین حد مورد نظر می‌شود

$$\lim_{t \rightarrow 3} \frac{t - 3}{t^3 - 27} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{t - 3}{(t-3)(t^2 + 3t + 9)} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{1}{t^2 + 3t + 9} = \frac{1}{27}$$

در نتیجه $a = 27$.

راه حل دوم از قاعده هوییتال استفاده می کنیم (به درس آخر این فصل مراجعه کنید):

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f''(x) - f''(-2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3f'(x)f''(x)}{1}$$

از طرف دیگر، $f'(-2) = 3$ و $f''(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+3}}$ پس

$$f''(-2) = \frac{-5}{2\sqrt{9}} = -\frac{5}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} (3f'(x)f''(x)) = 3f'(-2)f''(-2) = -\frac{45}{2}$$

۱۴۳- گزینه ۴ **راه حل اول** اگر فرض کنیم $H = -h^2$ ، آن گاه $H \rightarrow 0^-$

و در نتیجه

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h^2) - f(2)}{h^2 - 4} = \lim_{H \rightarrow 0^-} \frac{f(2+H) - f(2)}{-H - H^2}$$

$$= \lim_{H \rightarrow 0^-} \frac{f(2+H) - f(2)}{H} \times \lim_{H \rightarrow 0^-} \frac{-1}{1+H} = -f'_-(2) = 6$$

راه حل دوم از قاعده هوییتال استفاده می کنیم (به درس آخر این فصل مراجعه کنید):

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h^2) - f(2)}{h^2 - 4} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2hf'(2-h^2)}{2h - 4h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-f'(2-h^2))}{1-2h^2} \\ &= \lim_{H \rightarrow 0^+} \frac{(-f'(2-H))}{1-2H} = -f'_-(2) = 6 \end{aligned}$$

توجه کنید که $H = h^2$

۱۴۴- گزینه ۱ توجه کنید که $f'(x) = \begin{cases} 2x+4 & x > 2 \\ 3x^2+2x & x < 2 \end{cases}$ بنابراین

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x+4) = 4+4=8$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x^2+2x) = 12+4=16$$

$$\text{و در نتیجه } f'_+(2) - f'_-(2) = 8 - 16 = -8$$

۱۴۵- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$g(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2$$

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x}$$

بنابراین

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2 - 2x}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 2}{x} = \frac{-2}{2} = -1$$

۱۴۶- گزینه ۱ توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{(2ax)\sqrt{3x+1} - 3}{2\sqrt{3x+1}} (ax^2+2)$$

بنابراین

$$f'(1) = \frac{7}{16} \Rightarrow \frac{(2a)(1) - \frac{3}{2 \times 2}}{2 \times 2} = \frac{7}{16}$$

$$16a - 3(a+2) = 7 \Rightarrow 13a = 13 \Rightarrow a = 1$$

۱۳۷- گزینه ۱ توجه کنید که

$$2x^2 - 5 = 2(x^2 - 2.5) = 2(x-5)(x+5)$$

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) = (x-1)(x-1+2.5) = (x-1)(x-5)^2$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2x^2 - 5}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2(x-5)(x+5)}{(x-5)^2} = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2(x+5)}{x-5} = -\infty$$

۱۳۸- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $x \rightarrow +\infty$ ، آن گاه $\frac{1}{x} \rightarrow 0^-$ و

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 - 1}{4x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{4x^2} = -\frac{1}{4}$$

۱۳۹- گزینه ۴ توجه کنید که اگر $f(x) = ax + b$ ، آن گاه

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f^{-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax+b}{\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}} = \frac{a}{\frac{1}{a}} = a^2$$

بنابراین $a^2 = 9$ ، و چون شیب خط مثبت است، بنابراین a مثبت است، پس

$a = 3$ به این ترتیب $f(x) = 3x + b$

$$f(3) = 10 \Rightarrow 9 + b = 10 \Rightarrow b = 1$$

بنابراین $f(x) = 3x + 1$ پس $f(1) = 4$

۱۴۰- گزینه ۴ خط $y = 4$ مجانب افقی نمودار تابع f در $+\infty$ است، پس

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + ax + 3}{3x - x + 1} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a+4)x}{2x} = 4 \Rightarrow \frac{a+4}{2} = 4 \Rightarrow a = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x - 4x + 3}{3x + x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{4x} = 0$$

بنابراین

پس $y = 0$ مجانب افقی نمودار تابع f در $-\infty$ است.

۱۴۱- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2f(x) - 6}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(f(x) - 3)}{x + 2} = 2 \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = 2f'(-2)$$

از طرف دیگر، مقدار $f'(-2)$ برابر شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه

$A(-2, 3)$ ، یعنی شیب خط d است. اکنون توجه کنید که چون خط d از

نقطه های $A(-2, 3)$ و $(1, 0)$ می گذرد، شیب آن برابر است با $\frac{3-0}{-2-1} = -1$.

بنابراین $f'(-2) = -1$ و حد مورد نظر برابر است با $2f'(-2) = -2$.

۱۴۲- گزینه ۱ **راه حل اول** توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f^3(x) - f^3(-2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f^3(x) - f^3(-2)}{x - (-2)}$$

$$= (f^3)'(-2) = 3f'(-2)f^2(-2)$$

از طرف دیگر، $f'(-2) = 3$ و $f(-2) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+3}}$ پس

$$f'(-2) = \frac{-5}{2\sqrt{9}} = -\frac{5}{6}$$

به این ترتیب، مقدار حد مورد نظر برابر است با $3(-\frac{5}{6}) \times 3^2 = -\frac{45}{2}$

۱۴۷- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} - \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} x}{(\sqrt{1-x^2})^2} = \frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{g^3(x)}$$

$$g'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = -f(x)$$

بنابراین

$$f'(x)g'(x) = \left(\frac{1}{g^3(x)}\right)(-f(x)) = -\frac{f(x)}{g^3(x)}$$

۱۴۸- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f(x^3+x) = g\left(\frac{f}{x}\right) \Rightarrow (3x^2+1)f'(x^3+x) = -\frac{f}{x^2}g'\left(\frac{f}{x}\right)$$

اگر در تساوی فوق قرار دهیم $x=1$ ، نتیجه می‌شود

$$4f'(2) = -4g'(4) \Rightarrow f'(2) = -g'(4) = 4$$

۱۴۹- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{a(x^2+1)-2x(ax-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-ax^2+2x+a}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(-2ax+2)(x^2+1)^2 - 2x(x^2+1)(-ax^2+2x+a)}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{(-2ax+2)(x^2+1) - 2x(-ax^2+2x+a)}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(1) = \frac{(-2a+2)(2) - 2(-a+2+a)}{2^3} = \frac{-a-1}{2} = 4$$

بنابراین $a = -9$

۱۵۰- گزینه ۲ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[a, 0]$ برابر است با

$$\frac{f(0)-f(a)}{0-a} = \frac{a^2-2a}{-a} = -a+2$$

آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[0, a+1]$ برابر است با

$$\frac{f(a+1)-f(0)}{a+1-0} = \frac{-(a+1)^2+2(a+1)}{a+1} = \frac{-a^2+1}{a+1} = -a+1$$

بنابراین

$$(-a+2)+(-a+1)=4 \Rightarrow -2a=1 \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

۱۵۱- گزینه ۱ توجه کنید که

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \frac{4+2 \times 2}{16-4 \times 2} = 1$$

۱۵۲- گزینه ۴ راه‌حل اول به جای ۲۷ قرار می‌دهیم $f^3(1)$ و ازتعریف مشتق در نقطه $x=1$ استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^3(1+h)-27}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^3(1+h)-f^3(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(1+h)-f(1))(f^2(1+h)+f(1)f(1+h)+f^2(1))}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} (f^2(1+h)+3f(1)+9)$$

$$= f'(1) \times (f^2(1)+3f(1)+9) = 3(9+9+9) = 81$$

$$\text{زیرا } f'(1) = \frac{6 \times 1}{1+1} = 3$$

راه‌حل دوم از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم (به درس آخر این فصل مراجعه کنید):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^3(1+h)-27}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3f'(1+h)f^2(1+h)}{1}$$

$$= 3f'(1)f^2(1) = 3 \times 3 \times 3^2 = 81$$

۱۵۳- گزینه ۱ توجه کنید که $f(0)=0$ و در نتیجه

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+2\sqrt{4x^2-x^4}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+2\sqrt{x^2(4-x^2)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+2|x|\sqrt{4-x^2}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} (1+2\sqrt{4-x^2}) = 1+4 = 5$$

به همین ترتیب،

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2|x|\sqrt{4-x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+2\sqrt{4-x^2}) = 1+4 = 5$$

پس $f'_+(0) + f'_-(0) = 2$

۱۵۴- گزینه ۱ توجه کنید که $f(2)=0$. بنابراین

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-[x])\right)-0}{x-2}$$

در یک همسایگی راست $x=2$ مقدار $[x]$ برابر ۲ است، پس

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-2)\right)}{x-2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{t} = \frac{\pi}{2}$$

۱۵۵- گزینه ۳ توجه کنید که در یک همسایگی نقطه $x=4$ تساوی

$$|x-3|=x-3 \text{ برقرار است، پس}$$

$$f(x) = x^2(x-3)\sqrt{x^2-3x} = x(x^2-3x)\sqrt{x^2-3x} = x(x^2-3x)^{\frac{3}{2}}$$

بنابراین $f'(x) = (x^2-3x)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}x(2x-3)(x^2-3x)^{\frac{1}{2}}$ در نتیجه

$$f'(4) = 8 + \frac{3}{2} \times 4 \times 5 \times 2 = 68$$

۱۵۶- گزینه ۳ راه‌حل اول توجه کنید که ضابطه تابع به صورت زیر است:

$$f(x) = |x||x-3|-|x||x+3| = |x|(|x-3|-|x+3|)$$

۱۶۰- گزینه ۴ در نقطه‌ای که نمودار تابع بر محور طول‌ها مماس است، مقدار تابع و مقدار مشتق تابع برابر صفر است، پس ابتدا نقطه‌ای را که مشتق تابع در آن صفر است، پیدا می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{(2x-a)(x^2+9) - 2x(x^2-ax+9)}{(x^2+9)^2} = 0$$

$$2x^3 + 18x - ax^2 - 9a - 2x^3 + 2ax^2 - 18x = 0$$

$$a(x^2-9) = 0 \xrightarrow{a \neq 0} x = -3, x = 3$$

اگر $x = -3$ ، آن‌گاه

$$f(-3) = 0 \Rightarrow 9 + 3a + 9 = 0 \Rightarrow a = -6$$

اگر $x = 3$ ، آن‌گاه

$$f(3) = 0 \Rightarrow 9 - 3a + 9 = 0 \Rightarrow a = 6$$

پس حاصل ضرب مقادیر ممکن برای a برابر -36 است.

راه‌حل دوم چون تابع f بر محور طول‌ها مماس است، پس معادله $f(x) = 0$ ریشه مضاعف دارد. بنابراین

$$\frac{x^2 - ax + 9}{x^2 + 9} = 0 \Rightarrow x^2 - ax + 9 = 0 \Rightarrow \Delta = a^2 - 36 = 0 \Rightarrow a = \pm 6$$

پس حاصل ضرب مقادیر ممکن برای a برابر -36 است.

۱۶۱- گزینه ۱ **راه‌حل اول** توجه کنید که $f(1) = 1$ ، پس

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - 1}{h^2 - 4h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h(h-4)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h-4} = f'(1) \times \frac{1}{-4}$$

از طرف دیگر

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^4+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x^4+1) - 4x^3(x^2+1)}{(x^4+1)^2}$$

$$f'(1) = \frac{2 \times 2 - 4 \times 2}{4} = -1$$

بنابراین مقدار حد مورد نظر برابر $\frac{1}{4}$ است.

راه‌حل دوم از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم (به درس آخر این فصل مراجعه کنید):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - 1}{h^2 - 4h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(1+h)}{2h - 4} = \frac{f'(1)}{-4} = \frac{1}{4}$$

توجه کنید که

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^4+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x^4+1) - 4x^3(x^2+1)}{(x^4+1)^2}$$

$$f'(1) = \frac{2 \times 2 - 4 \times 2}{4} = -1$$

۱۶۲- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{(2x+a)(x+1) - (1)(x^2+ax)}{(x+1)^2}$$

بنابراین

$$f'(2) = \frac{11}{9} \Rightarrow \frac{(4+a)(3) - (1)(4+2a)}{9} = \frac{11}{9} \Rightarrow a = 3$$

۱۶۳- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - \sqrt{x+5}} = \frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x - \sqrt{x+5}} = \frac{|x-3|}{x - \sqrt{x+5}}$$

بنابراین

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|(|x-3| - |x+3|)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (|x-3| - |x+3|) = 3 - 3 = 0$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|(|x-3| - |x+3|)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-(|x-3| - |x+3|)) = -(3 - 3) = 0$$

پس $f'(0) = 0$.

راه‌حل دوم در یک همسایگی راست $x = 0$ مقدار $x^2 - 3x$ منفی و مقدار

$x^2 + 3x$ مثبت است. پس در این همسایگی

$$f(x) = -x^2 + 3x - x^2 - 3x = -2x^2 \Rightarrow f'(x) = -4x \Rightarrow f'_+(0) = 0$$

در یک همسایگی چپ $x = 0$ مقدار $x^2 - 3x$ مثبت و مقدار $x^2 + 3x$ منفی است. پس در این همسایگی

$$f(x) = x^2 - 3x + x^2 + 3x = 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 4x \Rightarrow f'_-(0) = 0$$

پس $f'(0) = 0$.

۱۵۷- گزینه ۱ **راه‌حل اول** توجه کنید که $x = 1$ و $x = 0$ ریشه‌های

عبارت داخل قدرمطلق هستند. مشتق‌پذیری را در این نقاط بررسی می‌کنیم.

تابع در نقطه $x = 1$ مشتق چپ و راست نابرابر دارد:

$$x \geq 1 \Rightarrow f(x) = x(x^2 - x) = x^3 - x^2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x \Rightarrow f'_+(1) = 3 - 2 = 1$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow f(x) = x(x - x^2) = x^2 - x^3$$

$$f'(x) = 2x - 3x^2 \Rightarrow f'_-(1) = 2 - 3 = -1$$

ولی تابع در نقطه $x = 0$ مشتق‌پذیر است:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x|x^2 - x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} |x^2 - x| = 0$$

راه‌حل دوم تابع $y = |g(x)|$ در ریشه‌های ساده $g(x) = 0$ مشتق ندارد. پس

$y = |x^2 - x|$ در $x = 0$ و $x = 1$ مشتق ندارد ولی تابع $y = x|x^2 - x|$ به

دلیل وجود عامل صفر کننده x که در قدرمطلق ضرب شده است در $x = 0$ مشتق‌پذیر است.

۱۵۸- گزینه ۲ به جای اینکه حاصل $g'(x)f'(g(x))$ را بیابیم، مشتق

تابع fog را به دست می‌آوریم. پس ابتدا ضابطه تابع fog را به دست می‌آوریم:

$$(\text{fog})(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{4 - \frac{4x^2}{1+x^2}}} = \frac{\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}} = x$$

بنابراین $(\text{fog})'(x) = 1$.

۱۵۹- گزینه ۱ اگر S و P به ترتیب مساحت و محیط مربعی با طول ضلع x

باشند، آن‌گاه

$$S = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{S}, \quad P = 4x \Rightarrow P(S) = 4\sqrt{S}$$

بنابراین

$$P'(S) = \frac{4}{2\sqrt{S}} = \frac{2}{\sqrt{S}} = 4 \Rightarrow \sqrt{S} = \frac{1}{2} \Rightarrow S = \frac{1}{4}$$

بنابراین

۱۶۹- گزینه ۴ در نقطه‌ای که نمودار تابع بر خط $y = -2$ مماس است،مقدار تابع برابر -2 و مقدار مشتق آن برابر صفر است. بنابراین ابتدا نقاطی را که در آن‌ها مشتق تابع صفر است، مشخص می‌کنیم:

$$f'(x) = -2 \sin 2x - k \sin x = 0$$

$$-4 \sin x \cos x - k \sin x = 0 \Rightarrow -\sin x (4 \cos x + k) = 0$$

$$\sin x = 0 \text{ یا } \cos x = -\frac{k}{4}$$

اگر $\sin x = 0$ ، آن‌گاه $\cos x = \pm 1$ و در نتیجه

$$f(x) = -2 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 1 + k \cos x = -2$$

$$2 \cos^2 x + k \cos x = -1$$

$$\begin{cases} \cos x = 1 \Rightarrow 2 + k = -1 \Rightarrow k = -3 \\ \cos x = -1 \Rightarrow 2 - k = -1 \Rightarrow k = 3 \end{cases}$$

اگر $\cos x = -\frac{k}{4}$ ، آن‌گاه

$$f(x) = -2 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 1 + k \cos x = -2$$

$$\frac{k^2}{8} - \frac{k^2}{4} + 1 = 0 \Rightarrow k^2 = 8 \Rightarrow k = \pm 2\sqrt{2}$$

پس به ازای چهار مقدار مختلف k نمودار تابع f بر خط $y = -2$ مماس می‌شود.۱۷۰- گزینه ۱ راه‌حل اول در نقطه‌ای که خط بر تابع g مماس است،مشتق تابع g برابر شیب خط است:

$$g'(x) = -2x - b = -\frac{1}{4} \Rightarrow b = -2x + \frac{1}{4}$$

همچنین در این نقطه،

$$g(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} \Rightarrow -x^2 - bx = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$$

$$-x^2 + x\left(2x - \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow b = -\sqrt{3} + \frac{1}{4} \\ x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow b = \sqrt{3} + \frac{1}{4} \end{cases}$$

پس مجموع مقادیر ممکن برای b برابر است با $\frac{1}{2}$.راه‌حل دوم چون تابع g بر خط داده شده مماس است، پس معادله

$$-x^2 - bx = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} \text{ ریشه مضاعف دارد. بنابراین}$$

$$4x^2 + (4b-1)x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = (4b-1)^2 - 4 \times 3 = 0 \Rightarrow 16b^2 - 8b - 47 = 0$$

$$\text{معادله بالا دو جواب دارد که مجموع آن‌ها برابر است با } -\frac{-8}{16} = \frac{1}{2}$$

۱۷۱- گزینه ۳ راه‌حل اول توجه کنید که $f(1) = 0$ ، پس

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x(2x-1)(2x-2) \cdots (2x-12) - 0}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (4x(2x-1)(2x-3)(2x-4) \cdots (2x-12)) \\ &= 4 \times 1(1)(-1)(-2)(-3) \cdots (-10) = 4 \times 10! \end{aligned}$$

راه‌حل دوم با توجه به اینکه مقدار $2x-2$ به ازای $x=1$ برابر صفر است، کافی است مشتق این عبارت یعنی 2 را در مقدار عبارت

$$(2x(2x-1)(2x-3)(2x-4) \cdots (2x-12)) \text{ ضرب کنیم.}$$

$$f'(1) = 2 \times 2 \times 1 \times (-1)(-2) \cdots (-10) = 4 \times 10!$$

$$\begin{aligned} f'_-(3) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x-3|}{x - \sqrt[3]{x+5}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-(x-3)}{(x-3)(x - \sqrt[3]{x+5})} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-1}{x - \sqrt[3]{x+5}} = -\frac{1}{3-2} = -1 \end{aligned}$$

۱۶۴- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f(1) = 3, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 1) = 2, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x) = 2$$

پس تابع در $x=1$ پیوسته نیست و در نتیجه مشتق پذیر نیست.

۱۶۵- گزینه ۲ اگر از دو طرف تساوی داده شده مشتق بگیریم، به دست

$$(3x^2 - 1)f'(x^3 - x) = 4\sqrt{x+1} + (4x) \times \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \text{ می‌آید:}$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=3$ ، به دست می‌آید:

$$26f'(24) = 4 \times 2 + 4 \times 3 \times \frac{1}{2 \times 2} \Rightarrow f'(24) = \frac{11}{26}$$

۱۶۶- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^5 + 1}{x+1} = \frac{(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)}{x+1} \\ &= x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \quad (x \neq -1) \end{aligned}$$

پس $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ بنابراین $f'(x) = 12x^2 - 6x + 2$. $f''(x)$ در نتیجه $f''(2) = 38$.۱۶۷- گزینه ۴ نمودار تابع‌های f و g از نقطه $(2, 3)$ عبور می‌کنند،پس $f(2) = g(2) = 3$. شیب خط مماس در نقطه $(2, 3)$ بر نمودار تابع‌های f و g به ترتیب برابر 1 و 2 است، پس $f'(2) = 1$ و $g'(2) = 2$. اکنون توجه کنید که

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{f(x) + x}{g(x) - x} \\ h'(x) &= \frac{(f'(x) + 1)(g(x) - x) - (g'(x) - 1)(f(x) + x)}{(g(x) - x)^2} \end{aligned}$$

بنابراین

$$h'(2) = \frac{(f'(2) + 1)(g(2) - 2) - (g'(2) - 1)(f(2) + 2)}{(g(2) - 2)^2} = \frac{2 \times 1 - 1 \times 5}{(3 - 2)^2} = -3$$

۱۶۸- گزینه ۲ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[a, 1]$ برابر

$$\frac{f(1) - f(a)}{1 - a} \text{ است:}$$

$$\frac{f(1) - f(a)}{1 - a} = \frac{0 - \sqrt{1-a}}{1-a} = \frac{-1}{\sqrt{1-a}}$$

بنابراین

$$\frac{-1}{\sqrt{1-a}} = -\frac{1}{4} \Rightarrow 1-a = 16 \Rightarrow a = -15$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در $x=a$ را می‌خواهیم که برابر $f'(a)$ است:

$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} \Rightarrow f'(a) = f'(-15) = \frac{-1}{2\sqrt{1+15}} = -\frac{1}{8}$$

۱۷۶- گزینه ۳ ضابطه تابع gof را به دست می آوریم. اگر $x \geq 0$ ، آن گاه

$$f(x) = 4x + x = 5x$$

$$(\text{gof})(x) = g(5x) = 4(5x) - |5x| = 20x - 5x = 15x$$

اگر $x < 0$ ، آن گاه $f(x) = 4x - x = 3x$ و

$$(\text{gof})(x) = g(3x) = 4(3x) - |3x| = 12x + 3x = 15x$$

بنابراین $(\text{gof})(x) = 15x$ و در نتیجه $(\text{gof})'(x) = 15$ و $(\text{gof})'(0) = 15$.

۱۷۷- گزینه ۳ برای اینکه تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق پذیر باشد، باید تابع

$$y = x^2 - 6x + m$$

این تابع دو ریشه متمایز داشته باشد، آن گاه تابع f در این دو ریشه مشتق پذیر

نیست. بنابراین

$$\Delta = 36 - 4m \leq 0 \Rightarrow m \geq 9$$

پس m مقادیر طبیعی ۱ تا ۸ را نمی تواند داشته باشد.

۱۷۸- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = \tan x \quad (x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z})$$

بنابراین

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x \Rightarrow f''(x) = 2 \tan x (1 + \tan^2 x)$$

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \times 1 \times (1+1) = 4$$

۱۷۹- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $y = 4x + 2$ در نقطه $A(1, 6)$ بر

نمودار تابع f مماس است. از طرف دیگر $f'(x) = 3x^2 - 2a$ ، بنابراین

$$f'(1) = 4 \text{ و } f(1) = 6$$

$$\begin{cases} 1 - 3a + b = 6 \\ 3 - 3a = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = 4 \end{cases}$$

۱۸۰- گزینه ۳ خط d از نقطه های $(0, 4)$ و $(2, 0)$ گذشته است، پس

معادله آن به صورت $y = -2x + 4$ است. چون خط d در نقطه ای به طول ۱ بر

سه می مماس است، پس مقدار $f'(x)$ به ازای $x = 1$ برابر با شیب خط d است:

$$f(x) = ax^2 + c \Rightarrow f'(x) = 2ax \Rightarrow f'(1) = 2a = -2 \Rightarrow a = -1$$

چون نقطه A روی خط $y = -2x + 4$ است، پس عرض آن برابر است با

$$y = 2. \text{ چون نقطه } A(1, 2) \text{ روی سهمی } f(x) = -x^2 + c \text{ است، پس}$$

$$f(1) = 2, \text{ بنابراین } 2 = -1 + c, \text{ یعنی } c = 3.$$

۱۸۱- گزینه ۲ چون تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق پذیر و صعودی است، پس

مشتق آن همه جا نامنفی است. بنابراین $f'(x) = 3ax^2 - 18x + 3a \geq 0$.

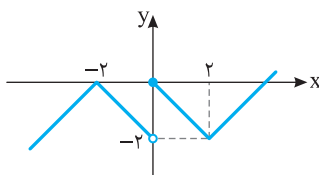
نتیجه

$$ax^2 - 6x + a \geq 0 \Rightarrow a > 0, \Delta = 36 - 4a^2 \leq 0 \Rightarrow a \geq 3 \text{ یا } a \leq -3$$

پس $a \geq 3$.

۱۸۲- گزینه ۳ نمودار تابع f به شکل زیر است. این تابع در نقطه های

$x = 0$ و $x = 2$ ماکزیمم نسبی دارد و در نقطه $x = 2$ مینیمم نسبی دارد.



۱۷۲- گزینه ۳ ابتدا مشتق تابع f را به دست می آوریم:

$$f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x^2 + \sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2 + \sqrt{x})'(x^2 + \sqrt{x}) - (x^2 + \sqrt{x})'(x^2 + \sqrt{x})}{(x^2 + \sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{(2x + \frac{1}{2\sqrt{x}})(x^2 + \sqrt{x}) - (2x + \frac{1}{2\sqrt{x}})(x^2 + \sqrt{x})}{(x^2 + \sqrt{x})^2}$$

اگر در تساوی فوق قرار دهیم $x = 1$ ، نتیجه می شود:

$$f'(1) = \frac{(3 + \frac{1}{2})(1+1) - (2 + \frac{1}{2})(1+1)}{(1+1)^2} = \frac{7}{12}$$

۱۷۳- گزینه ۲ در نزدیکی نقطه $\frac{1}{2}$ ، علامت عبارت $x^2 - x$ منفی

است و $1 < 3x < 2$ ، پس در نزدیکی نقطه $\frac{1}{2}$ تساوی های $|x^2 - x| = x - x^2$

و $[3x] = 1$ برقرارند و

$$f(x) = \frac{x - x^2}{x^3 - 1} = \frac{-x(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{-x}{x^2+x+1} \quad (x \neq 1)$$

در نتیجه

$$f'(x) = -\frac{x^2 + x + 1 - (2x+1)x}{(x^2+x+1)^2} = \frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{4} - 1}{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1\right)^2} = -\frac{12}{49}$$

۱۷۴- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که تابع در نقطه $x = 1$ پیوسته و

مشتق پذیر است:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 4$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 3 & x > 1 \\ 6x & x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_+'(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x^2 + 3) = 6 \\ f_-'(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (6x) = 6 \end{cases}$$

بنابراین $f'(1) = 6$ ، از طرف دیگر

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 4}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x(x+1)} = f'(1) \times \frac{1}{2} = 6 \times \frac{1}{2} = 3$$

۱۷۵- گزینه ۳ به کمک تعریف مشتق می دانیم:

$$\lim_{x \rightarrow f} \frac{f(x) - f(f)}{x - f} = f'(f)$$

پس

$$\lim_{x \rightarrow f} \frac{f(x) + 5}{x - f} = 5 \Rightarrow f(f) = -5, f'(f) = 5$$

از طرف دیگر،

$$g(x) = \frac{x}{f(2x)} \Rightarrow g'(x) = \frac{f(2x) - 2xf'(2x)}{f^2(2x)}$$

$$.g'(2) = \frac{f(4) - 4f'(4)}{f^2(4)} = \frac{-5 - 4 \times 5}{(-5)^2} = -1 \text{ بنابراین}$$

۱۸۳- گزینه ۱ توجه کنید که

$$f'(x) = x(x^2 + 5x + 4) = x(x+1)(x+4)$$

x	$-\infty$	-4	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	-	+
$f(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	max

پس تابع f در نقطه‌های $x=0$ و $x=-4$ مینیمم نسبی دارد و در نقطه $x=-1$ ماکزیمم نسبی دارد.

۱۸۴- گزینه ۱ چون تابع f همه‌جا مشتق‌پذیر است، پس نقاط اکسترمم نسبی آن جواب‌های معادله $f'(x)=0$ هستند. از طرف دیگر،

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

چون $f'(1)=0$ و $f'(3)=0$ در نقطه $x=1$ از مثبت به منفی تغییر علامت می‌دهد، پس تابع f در نقطه $x=1$ ماکزیمم نسبی دارد. طبق فرض $f(1)=-4$ ، پس

$$1 - 6 + 9 + a = -4 \Rightarrow a = -8$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
$f(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$

۱۸۵- گزینه ۲ توجه کنید که $D_f = (-5, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x+5} - \frac{x^2-17}{2\sqrt{x+5}}}{x+5} = \frac{3x^2 + 20x + 17}{2(x+5)\sqrt{x+5}}$$

تابع f در تمام نقاط دامنه‌اش مشتق‌پذیر است. پس نقاط اکسترمم نسبی آن جواب‌های معادله $f'(x)=0$ است. پس

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2 + 20x + 17 = 0 \Rightarrow x = -1, \quad x = -\frac{17}{3} \text{ (غ.ق.ق.)}$$

پس $x=-1$ طول تنها نقطه بحرانی تابع f است و عرض این نقطه برابر است با $f(-1)=-8$.

۱۸۶- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f'(x) = 3(x-2)^2(x+2) + (x-2)^3 = (x-2)^2(4x+4)$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x=2, \quad x=-1$$

اکنون مقادیر $f(-1)$ ، $f(2)$ و $f(-2)$ را مقایسه می‌کنیم:

$$f(-1)=-27, \quad f(2)=0, \quad f(-2)=0$$

بنابراین -27 مقدار مینیمم مطلق تابع f در بازه $[-2, 2]$ است.

۱۸۷- گزینه ۳ توجه کنید که $x=4-2y$ و باید کمترین مقدار ممکن

تابع $f(y)=4-2y+y^2$ را پیدا کنیم. از طرف دیگر،

$$f'(y) = -2+2y, \quad f'(y)=0 \Rightarrow y=1$$

چون تابع f فقط یک نقطه بحرانی دارد و

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} f(y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = +\infty$$

پس کمترین مقدار تابع f به ازای $y=1$ به دست می‌آید و برابر است با $f(1)=3$.

۱۸۸- گزینه ۲ فرض کنید طول نقطه C برابر x باشد. در این صورت،

طول نقطه A هم برابر x است و چون نقطه A روی نمودار تابع $y=\sqrt{5-x}$

است، پس عرض نقطه A برابر با $\sqrt{5-x}$ است. بنابراین $AC=\sqrt{5-x}$. از طرف دیگر $BC=x+4$. به این ترتیب

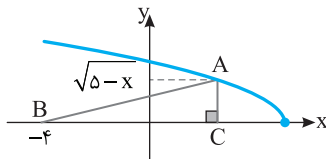
$$ABC \text{ مثلث } \Rightarrow \text{مساحت} = \frac{1}{2}(x+4)\sqrt{5-x}$$

بنابراین باید x ای را پیدا کنیم که تابع $f(x)=\frac{1}{2}(x+4)\sqrt{5-x}$ به ازای آن

بیشترین مقدار ممکن است. توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{5-x} + \frac{1}{2}(x+4)\frac{-1}{2\sqrt{5-x}}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{5-x} = \frac{1}{4}\frac{x+4}{\sqrt{5-x}} \Rightarrow 10-2x = x+4 \Rightarrow x=2$$

۱۸۹- گزینه ۴ چون تابع f همه‌جا دوبار مشتق‌پذیر است، پس طول

نقطه‌های عطف آن جواب‌های معادله $f''(x)=0$ هستند. (به شرطی که f'' در آن‌ها تغییر علامت بدهد.) توجه کنید که

$$f'(x) = 8x^2 + 2ax^2 + 2bx$$

$$f''(x) = 24x^2 + 6ax + 2b$$

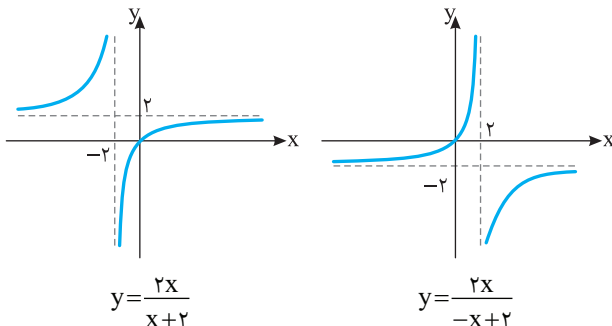
$$\begin{cases} f''(1)=0 \\ f''(-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 24+6a+2b=0 \\ 24-6a+2b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-12 \end{cases}$$

بنابراین $f'(x)=8x^3-24x$ و طول نقاط اکسترمم نسبی جواب‌های معادله $8x^3-24x=0$ هستند. جواب‌های این معادله $x=0$ ، $x=\sqrt{3}$ و $x=-\sqrt{3}$ هستند که مجموع آن‌ها برابر صفر است.

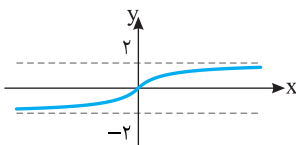
۱۹۰- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x+2} & x \geq 0 \\ \frac{2x}{-x+2} & x \leq 0 \end{cases}$$

نمودار توابع $y=\frac{2x}{x+2}$ و $y=\frac{2x}{-x+2}$ به صورت زیر است.



بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است.



برای اینکه خط $y=m$ نمودار تابع f را قطع نکند، لازم است که $|m| \geq 2$.

همچنین

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 4 = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$$

یعنی $(0, 0)$ و $(1, -3)$ نقاط بحرانی تابع هستند که فاصله آنها برابر است با $\sqrt{10}$.

۱۹۶- گزینه ۱ توجه کنید که تابع f در نقطه $x=1$ مشتق پذیر نیست.

از طرف دیگر،

$$f(x) = \begin{cases} -5x^3 - x(x-1) & 0 \leq x < 1 \\ -5x^3 - x^2 + x & 0 \leq x < 1 \\ -5x^3 + x(x-1) & 1 \leq x \leq 2 \\ -5x^3 + x^2 - x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

بنابراین

$$f'(x) = \begin{cases} -15x^2 - 2x + 1 & 0 < x < 1 \\ -15x^2 + 2x - 1 & 1 < x < 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -15x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{5}, x = -\frac{1}{3} \text{ (غ.ق.ی)} \\ -15x^2 + 2x - 1 = 0 \text{ جواب ندارد} \end{cases}$$

اکنون توجه کنید که $f(2) = -38$ و $f(\frac{1}{5}) = \frac{3}{25}$ ، $f(1) = -5$ ، $f(0) = 0$

بنابراین مقدار مینیمم مطلق تابع f برابر -38 است.

۱۹۷- گزینه ۱ اگر B نقطه‌ای روی نمودار تابع $y = \sqrt{x+1}$ باشد،

مختصات آن به صورت $(x, \sqrt{x+1})$ است. بنابراین

$$AB = \sqrt{(x - \frac{5}{2})^2 + (\sqrt{x+1} - 0)^2} = \sqrt{x^2 - 6x + \frac{53}{4}}$$

اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + \frac{53}{4}}$ ، آن گاه $f'(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2 - 6x + \frac{53}{4}}}$ و در نتیجه

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 3$$

بنابراین کمترین مقدار تابع f ، یعنی کمترین مقدار طول پاره خط AB ، به ازای

$x=3$ به دست می‌آید. پس نقطه $B(3, \sqrt{3+1})$ ، یعنی $(3, 2)$ است.

۱۹۸- گزینه ۲ فرض کنید طول نقطه C برابر $-x$ باشد، در این

صورت طول نقطه B هم برابر $-x$ است. نقطه B روی خطی است که از

نقطه‌های $(0, -6)$ و $(-4, 0)$ می‌گذرد. معادله این خط $y = -\frac{3}{4}x - 6$

است. بنابراین عرض نقطه B برابر $-\frac{3}{4}x - 6$ است. توجه کنید که چون $x < 4$ ،

پس $-\frac{3}{4}x - 6 < 0$ ، در نتیجه $x(-\frac{3}{4}x - 6) =$ مساحت مستطیل $OABC$.

پس باید بیشترین مقدار تابع

$$f(x) = x(-\frac{3}{4}x - 6) \text{ را پیدا کنیم. چون } f'(x) = -\frac{3}{4}x - 6$$

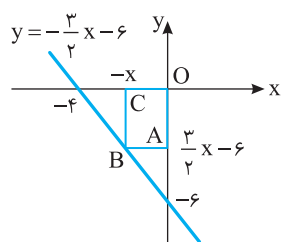
اگر $f'(x) = -\frac{3}{4}x - 6 = 0$ ، آن گاه $x = -8$ ، بنابراین

بیشترین مقدار تابع f ، یعنی بیشترین

مقدار مساحت مستطیل $OABC$

به ازای $x = -8$ به دست می‌آید و

برابر است با $2 \times 3 = 6$.



۱۹۱- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{x^2 + x + 1 - (2x+1)(x+k)}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{-x^2 - 2kx + 1 - k}{(x^2 + x + 1)^2}$$

مخرج کسر فوق همواره مثبت است. پس باید صورت این کسر فقط روی بازه

$[-\frac{4}{5}, 2]$ نامنفی باشد تا $f'(x)$ نامنفی و تابع f صعودی شود. بدین منظور

باید $-\frac{4}{5}$ و 2 جواب‌های معادله $f'(x) = 0$ باشند:

$$-x^2 - 2kx + 1 - k = 0 \xrightarrow{x=2} -4 - 4k + 1 - k = 0 \Rightarrow k = -\frac{3}{5}$$

توجه کنید که اگر $k = -\frac{3}{5}$ ، آن گاه $x = 2$ و $x = -\frac{4}{5}$ جواب‌های معادله

$f'(x) = 0$ هستند.

۱۹۲- گزینه ۳ توجه کنید که $D_f = [2, +\infty)$ و

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+4}} - \frac{1}{2\sqrt{x-2}} = \frac{2\sqrt{x-2} - \sqrt{x+4}}{2\sqrt{x+4}\sqrt{x-2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2\sqrt{x-2} = \sqrt{x+4} \Rightarrow 4x - 8 = x + 4 \Rightarrow x = 4$$

بنابراین جدول تعیین علامت تابع f' به صورت زیر است: (برای تعیین

علامت می‌توانید از عددگذاری استفاده کنید. مثلاً $f'(3) < 0$ و $f'(11) > 0$)

x	2	4	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	+

پس تابع f روی بازه $[2, 4]$ نزولی و روی بازه $[4, +\infty)$ صعودی است، یعنی

حداکثر مقدار $b-a$ وقتی به دست می‌آید که $a=2$ و $b=4$ و برابر ۲ است.

۱۹۳- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x^2+1) - 2x(x^2+x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 + \sqrt{2}, x = 1 - \sqrt{2}$$

x	$-\infty$	$1-\sqrt{2}$	$1+\sqrt{2}$	$+\infty$	
f'(x)	-	$\circ$	+	$\circ$	-
f(x)	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

بنابراین تابع f در نقطه‌ای به طول $x = 1 + \sqrt{2}$ ماکزیمم نسبی دارد. اکنون

توجه کنید که اگر $a = 1 + \sqrt{2}$ ، آن گاه $a > 0$ و $f(a) = \frac{a(a+1)}{a^2+1} > 0$ ، پس

نقطه ماکزیمم نسبی تابع f در ناحیه اول است.

۱۹۴- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $f'(x) = 6x^2 + 2ax + 1$ برای

اینکه تابع f اکسترمم نسبی نداشته باشد باید معادله $f'(x) = 0$ ، یعنی

$$6x^2 + 2ax + 1 = 0 \text{ جواب نداشته باشد یا ریشه مضاعف داشته باشد. پس}$$

$$\Delta = 4a^2 - 24 \leq 0 \Rightarrow a^2 \leq 6 \Rightarrow |a| \leq \sqrt{6}$$

۱۹۵- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} x^4 - 4x & x \geq 0 \\ -x^4 + 4x & x < 0 \end{cases}, \quad f'(x) = \begin{cases} 4x^3 - 4 & x > 0 \\ -4x^3 + 4 & x < 0 \end{cases}$$

پس تابع f در $x=0$ مشتق پذیر نیست زیرا $f'_-(0) = 4$ و $f'_+(0) = -4$.

۱۹۹- گزینه ۱ مشتق دوم تابع را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = -8x^3 + 12mx^2 - 6x + 1$$

$$f''(x) = -24x^2 + 24mx - 6 = 6(-4x^2 + 4mx - 1)$$

برای اینکه تقعر نمودار تابع f همواره رو به پایین باشد، باید $f''(x)$ همواره نامثبت باشد. پس

$$-4x^2 + 4mx - 1 \leq 0$$

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow 16m^2 - 16 \leq 0 \Rightarrow m^2 \leq 1 \Rightarrow |m| \leq 1$$

۲۰۰- گزینه ۳ تابع f روی بازه‌های $(1, 2)$ و $(4, 6)$ اکیداً نزولی است.

بنابراین روی این بازه‌ها f' منفی است. تابع f روی بازه $(2, 4)$ اکیداً صعودی است. بنابراین روی این بازه f' مثبت است. خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌های به طول ۲ و ۴ موازی محور x است. پس مقدار f' در این نقطه‌ها برابر صفر است. جهت تقعر نمودار تابع f روی بازه $(1, 3)$ رو به بالاست.

بنابراین f' روی این بازه اکیداً صعودی است. جهت تقعر نمودار تابع f روی بازه $(3, 6)$ رو به پایین است. پس f' روی این بازه اکیداً نزولی است. توجه

کنید که فقط نمودار گزینه (۳) این ویژگی‌ها را دارد.

۲۰۱- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$ و

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1 - 2x(x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2}$$

به جدول زیر توجه کنید:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	-	-
f		$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$

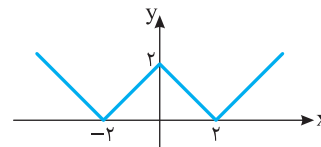
همچنین

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

بنابراین جدول تعیین جدول تغییرات تابع f به شکل بالاست و این تابع روی بازه‌های $(-\infty, -1)$ ، $(-1, 1)$ و $(1, +\infty)$ نزولی است ولی روی دامنه‌اش غیر یکنواست.

۲۰۲- گزینه ۲ نمودار



تابع f به شکل مقابل است. از روی این شکل معلوم است که تابع f دو نقطهٔ مینیمم نسبی و یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی دارد.

۲۰۳- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 1 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 - 20x^3 = 5x^3(x - 4)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4$$

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
f		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

بنابراین تابع f در نقطهٔ $x = 0$ ماکزیمم نسبی و در نقطهٔ $x = 4$ مینیمم نسبی دارد.

۲۰۴- گزینه ۳ چون تابع f همه‌جا مشتق پذیر است، پس مشتق آن در

نقطهٔ اکسترمم نسبی‌اش برابر صفر است:

$$f(x) = \frac{a}{3}x^3 + 2bx^2 + 4x - \frac{4}{3} \Rightarrow f'(x) = ax^2 + 4bx + 4$$

$$f'(-1) = 0 \Rightarrow a - 4b + 4 = 0$$

از طرف دیگر، مختصات نقطهٔ اکسترمم نسبی در معادلهٔ تابع صدق می‌کنند:

$$f(-1) = 2 \Rightarrow -\frac{a}{3} + 2b - 4 - \frac{4}{3} = 2 \Rightarrow -a + 6b = 22$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases} a - 4b = -4 \\ -a + 6b = 22 \end{cases}$ نتیجه می‌شود $a = 32$ و $b = 9$ و

در نتیجه $a - b = 23$.

۲۰۵- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f'(x) = 2x\sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x^2-1)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{8x^2-2}{3\sqrt[3]{x}}$$

تابع f در نقطهٔ $x = 0$ مشتق پذیر نیست و $f'(-\frac{1}{2}) = 0$ و $f'(\frac{1}{2}) = 0$. پس تابع f سه نقطهٔ بحرانی دارد.

۲۰۶- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که تابع f در تمام نقاط دامنه‌اش

مشتق پذیر است و

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(x+a)}{x} = \frac{x-a}{2x\sqrt{x}}, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = a \notin [1, 4] \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

پس باید بین مقادیر $f(1)$ و $f(4)$ دنبال ماکزیمم مطلق تابع بگردیم:

$$f(1) = 1 + a \quad \text{و} \quad f(4) = 2 + \frac{a}{2}. \quad \text{چون عددی از بازهٔ } (0, 1) \text{ است، مقدار}$$

$$2 + \frac{a}{2} \text{ از مقدار } 1 + a \text{ بزرگتر است، پس مقدار ماکزیمم مطلق تابع } 2 + \frac{a}{2}$$

$$\text{است. بنابراین } 2 + \frac{a}{2} = \frac{9}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

۲۰۷- گزینه ۳ فرض کنید طول نقطهٔ A برابر $-x$ باشد. چون نقطهٔ A

روی نمودار تابع $y = x^2 + 1$ است، پس عرض نقطهٔ A برابر $x^2 + 1$ است. به

این ترتیب، عرض نقطهٔ D هم برابر $x^2 + 1$ است و در نتیجه

$$CD = y - (x^2 + 1) = 6 - x^2$$

بنابراین $\text{مساحت مستطیل } ABCD = x(6 - x^2)$.

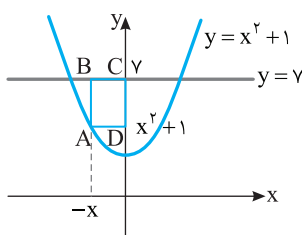
$$\text{اگر } f(x) = x(6 - x^2), \text{ آن‌گاه } f(x) = 6x - x^3, \text{ در نتیجه } f'(x) = 6 - 3x^2.$$

پس

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2} \quad (x > 0 \text{ توجه کنید که})$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع f ، یعنی بیشترین مقدار مساحت مستطیل $ABCD$

$$\text{به ازای } x = \sqrt{2} \text{ به دست می‌آید و برابر است با } \sqrt{2} \times 4 = 4\sqrt{2}.$$



۲۰۸-گزینه ۲ به جدول تعیین علامت تابع f' توجه کنید.

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x(x+1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

x	$-\infty$	$-1 - \sqrt{2}$	$-1 + \sqrt{2}$	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
f		↘	↗		↘

بنابراین تابع f روی بازه $[-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}]$ صعودی است و حداکثر مقدار $b-a$ برابر $2\sqrt{2}$ است.

۲۱۲-گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که $D_f = (-\infty, k]$ و

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{k-x}} = \frac{2\sqrt{k-x}-1}{2\sqrt{k-x}}$$

$$f'(x) \leq 0 \Rightarrow 2\sqrt{k-x} \leq 1 \Rightarrow x \geq k - \frac{1}{4}$$

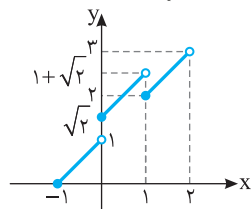
بنابراین تابع f روی بازه $[k - \frac{1}{4}, k]$ نزولی است و بیشترین مقدار $b-a$ برابر با $\frac{1}{4}$ است.

۲۱۳-گزینه ۱ ابتدا دامنه تابع f را به دست می آوریم:

$$2 - [x]^2 \geq 0 \Rightarrow [x]^2 \leq 2 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq [x] \leq \sqrt{2} \Rightarrow -1 \leq [x] \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x < 2$$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \leq x < 0 \\ x+\sqrt{2} & 0 \leq x < 1 \\ x+1 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

بنابراین ضابطه تابع f به صورت



نمودار تابع f به شکل روبه‌رو است و مشخص است که این تابع فقط در نقطه $x=1$ مینیمم نسبی دارد.

۲۱۴-گزینه ۱ توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(x^2+a) - 2x(x^2+2x)}{(x^2+a)^2} = \frac{-2(x^2-ax-a)}{(x^2+a)^2}$$

چون تابع f همه‌جا مشتق پذیر است، برای اینکه دو نقطه اکسترمم نسبی داشته باشد، باید معادله $x^2 - ax - a = 0$ دو جواب متمایز داشته باشد:

$$\Delta > 0 \Rightarrow a^2 + 4a > 0$$

که چون $a > 0$ ، همواره درست است.

۲۱۵-گزینه ۱ توجه کنید که $x=0$ طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع مشتق پذیر f است. پس $f'(0) = 0$:

$$f'(x) = 4x^3 + 2ax + b \Rightarrow f'(0) = 0 + 0 + b = 0 \Rightarrow b = 0$$

بنابراین $f(x) = x^4 + ax^2 + 1$. از طرف دیگر، عرض نقاط مینیمم نسبی تابع f برابر -3 است. ابتدا طول این نقاط را به دست می آوریم:

$$f'(x) = 4x^3 + 2ax = 0$$

$$2x(2x^2 + a) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = \pm\sqrt{\frac{-a}{2}}, \quad a < 0$$

$$f(\pm\sqrt{\frac{-a}{2}}) = -3 \Rightarrow \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + 1 = -3 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = -4$$

بنابراین پس طول نقاط مینیمم نسبی تابع $\pm\sqrt{2}$ است.

۲۰۸-گزینه ۱ فرض کنید (x, x^3) نقطه‌ای روی نمودار تابع

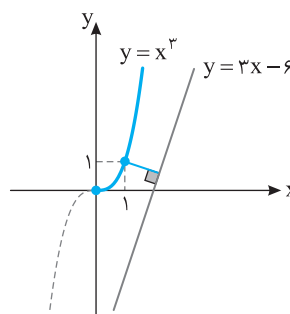
$y = x^3$ باشد. فاصله این نقطه تا خط $y - 3x + 6 = 0$ برابر است با

$$\frac{|x^3 - 3x + 6|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|x^3 - 3x + 6|}{\sqrt{10}} = \frac{x^3 - 3x + 6}{\sqrt{10}}$$

بنابراین طول نقطه مورد نظر جایی است که کمترین مقدار تابع $d = x^3 - 3x + 6$ به دست می آید. توجه کنید که

$$d' = 3x^2 - 3, \quad d' = 0 \Rightarrow x = 1, x = -1 \quad (\text{غ.ق.})$$

پس باید مقادیر $d(1)$ و $d(-1)$ را مقایسه کنیم: $d(1) = 4$ و $d(-1) = 6$. بنابراین طول نزدیک‌ترین نقطه برابر ۱ است.



۲۰۹-گزینه ۲ توجه کنید که $f''(x) = 6ax - 12$. طبق فرض مسئله،

جدول تغییر علامت f'' به صورت زیر است:

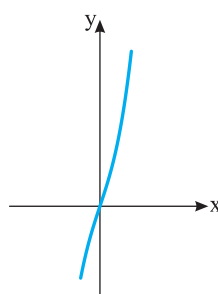
x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f''(x)$		+	-
f		∪	∩

بنابراین -2 ریشه f'' است.

$$6a(-2) - 12 = 0 \Rightarrow a = -1$$

۲۱۰-گزینه ۲ تابع g اکیداً صعودی

است، زیرا $g'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ ، از طرف دیگر، $g(0) = 0$ و نمودار تقریبی این تابع به صورت روبه‌رو است.

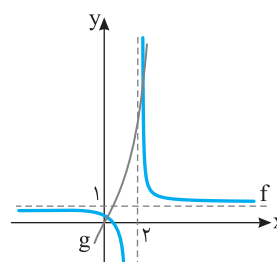


تابع $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$ دو مجانب به معادله‌های $x=2$ و $y=1$ دارد و روی

بازه‌های $(-\infty, 2)$ و $(2, +\infty)$ نزولی است، زیرا

$$f'(x) = \frac{x-2-x+1}{(x-2)^2} = \frac{-1}{(x-2)^2} < 0$$

پس نمودار تابع f به صورت زیر است و دو نمودار یکدیگر را در دو نقطه قطع می کنند.



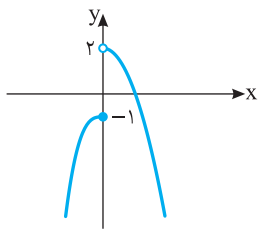
پس در یک همسایگی چپ نقطه عطف، تقعر نمودار تابع رو به پایین است. به همین ترتیب در یک همسایگی راست نقطه عطف، تقعر نمودار رو به بالا است. این شرایط در گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) وجود دارد که با توجه به $f'(-\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$ گزینه (۲) درست است.

گزینه ۴ - ۲۲۱ از روی نمودار تابع f معلوم است که این تابع روی بازه $(-3, -1)$ مشتق‌پذیر و اکیداً نزولی است. بنابراین $f'(x) < 0$. اکنون توجه کنید که چون مقادیر تابع f منفی‌اند، پس

$$y = \frac{f(x)}{x} \Rightarrow y' = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} > 0, \quad x \in (-3, -1)$$

بنابراین تابع گزینه (۴) اکیداً صعودی است.

مثال نقض برای گزینه‌های دیگر تابع $f(x) = -x^3 - 100$ است.



گزینه ۴ - ۲۲۲ نمودار تابع f

به صورت مقابل است. این تابع نه ماکزیمم نسبی دارد و نه مینیمم نسبی.

گزینه ۴ - ۲۲۳ توجه کنید که $f'(x) = \frac{3-3x^2}{3\sqrt{3x-x^3}}$. تابع f در

نقطه‌های $x=0$ و $x=\pm\sqrt{3}$ مشتق ندارد و در نقطه‌های $x=1$ و $x=-1$ مشتق آن صفر است. جدول تغییرات تابع f به صورت زیر است:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\frac{0}{0}$	$-$	$\frac{0}{0}$	$+$	$\frac{0}{0}$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$
			min		max		

پس $x=1$ طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع است و عرض این نقطه برابر $\sqrt[3]{2}$ است.

گزینه ۳ - ۲۲۴ ابتدا توجه کنید که $D_f = [-2, 2]$ و تابع f روی بازه $(-2, 2)$ مشتق‌پذیر است و

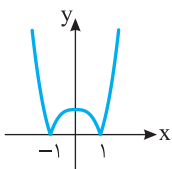
$$f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2} - x}{\sqrt{4-x^2}}, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{4-x^2} = x$$

$$\xrightarrow{x \geq 0} 4-x^2 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{2}, \quad x = -\sqrt{2} \text{ (غ.ق.)}$$

بنابراین باید $f(-2)$ ، $f(\sqrt{2})$ و $f(2)$ را مقایسه کنیم تا بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع f روی بازه $[-2, 2]$ پیدا شود: $f(-2) = -2$ ، $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$ و $f(2) = 2$. بنابراین بیشترین مقدار تابع برابر $2\sqrt{2}$ و کمترین مقدار آن برابر -2 است و نسبت بیشترین مقدار به کمترین مقدار تابع برابر $-\sqrt{2}$ است.

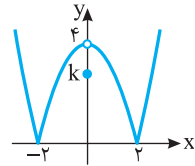
گزینه ۳ - ۲۲۵ ابتدا توجه کنید که اگر $x \geq 0$ ، آن‌گاه $f(x) = |x^3 - 1|$

و اگر $x < 0$ ، آن‌گاه $f(x) = |-x^3 - 1| = |x^3 + 1|$. بنابراین نمودار تابع f



به صورت مقابل است. پس در نقطه‌های $x=1$ و $x=-1$ تابع f مشتق ندارد (نقطه گوشه‌ای) و در نقطه $x=0$ مشتق تابع f برابر صفر است. پس این تابع سه نقطه بحرانی دارد.

گزینه ۱ - ۲۱۶ به نمودار تابع f توجه



کنید. واضح است که اگر تابع f در $x=0$ مینیمم نسبی داشته باشد ولی مینیمم مطلق نداشته باشد، باید $0 < k < 4$. دقت کنید که اگر $k \leq 0$ ، آن‌گاه تابع f در $x=0$ مینیمم مطلق دارد و اگر $k \geq 4$ ، آن‌گاه تابع f در $x=0$ ماکزیمم نسبی دارد.

گزینه ۱ - ۲۱۷ توجه کنید که طول نقطه‌های A و B صفرهای تابع f هستند. در نتیجه $x_A + x_B$ برابر مجموع صفرهای تابع درجه دوم f است:

$$x_A + x_B = -\frac{3-2m}{m^2-2} = \frac{2m-3}{m^2-2}, \quad \text{اگر } g(x) = \frac{2m-3}{m^2-2}, \text{ آن‌گاه}$$

$$g'(x) = \frac{2(m^2-2) - 2m(2m-3)}{(m^2-2)^2} = \frac{-2m^2 + 6m - 4}{(m^2-2)^2}$$

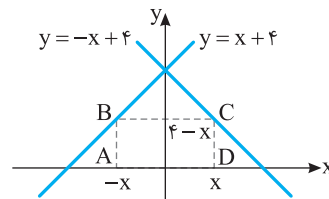
$$g'(x) = 0 \Rightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Rightarrow m = 1, m = 2$$

اگر $m=2$ ، آن‌گاه ضرب x^2 در ضابطه تابع f مثبت می‌شود و در نتیجه نمودار تابع f پایین‌ترین نقطه دارد که چنین نیست. بنابراین $m=1$ و کمترین مقدار تابع g به ازای $m=1$ به دست می‌آید و برابر است با ۱.

گزینه ۳ - ۲۱۸ فرض کنید طول نقطه D برابر x باشد. در این صورت، طول نقطه C هم برابر x است و چون نقطه C روی خط $y = -x + 4$ است، پس عرض نقطه C برابر $-x + 4$ است. اکنون توجه کنید که عرض نقطه B هم برابر $-x + 4$ است، و چون نقطه B روی خط $y = x + 4$ است، پس طول نقطه B برابر $-x$ است. به این ترتیب طول نقطه A نیز برابر $-x$ است، در نتیجه $AD = 2x$. بنابراین

$$ABCD = 2x(4-x)$$

بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $f(x) = 2x(4-x)$ را به دست آوریم. چون $f'(x) = 8 - 4x$ ، پس اگر $f'(x) = 0$ ، آن‌گاه $x = 2$. بنابراین بیشترین مقدار تابع f ، یعنی بیشترین مقدار مساحت مستطیل $ABCD$ به ازای $x = 2$ به دست می‌آید و برابر است با $2 \times 2 \times 2 = 8$.



گزینه ۱ - ۲۱۹ مشتق دوم تابع را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = 2 \cos x \sin x - 2 \cos x = \sin 2x - 2 \cos x$$

$$f''(x) = 2 \cos 2x + 2 \sin x = 2(1 - \sin^2 x) + 2 \sin x$$

$$= 2(-2 \sin^2 x + \sin x + 1) = 2(1 - \sin x)(1 + 2 \sin x)$$

اکنون توجه کنید که همواره $1 - \sin x \geq 0$ و $x \in (0, \pi)$ و $1 + 2 \sin x > 0$. بنابراین $f''(x) \geq 0$ و $x \in (0, \pi)$.

در نتیجه جهت تقعر نمودار تابع f روی بازه $(0, \pi)$ رو به بالاست.

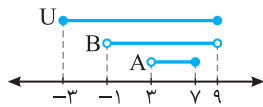
گزینه ۲ - ۲۲۰ مشتق دوم تابع را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x + 2$$

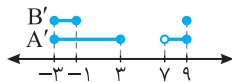
$x = -\frac{1}{3}$ طول نقطه عطف تابع f است و اگر $x < -\frac{1}{3}$ ، آن‌گاه $f''(x) < 0$

۲۳۱- گزینه ۲ از روی شکل زیر معلوم می شود که

$$A' = [-3, 3] \cup (7, 9], \quad B' = [-3, -1] \cup \{9\}$$



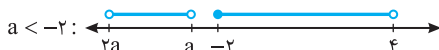
بنابراین از روی شکل زیر معلوم می شود که $A' - B' = (-1, 3] \cup (7, 9)$.



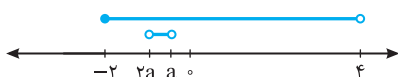
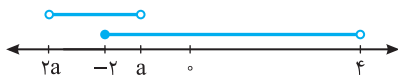
بنابراین، عددهای صحیح در مجموعه $A' - B'$ عبارت اند از صفر، ۱، ۲، ۳ و ۸. که مجموعشان می شود ۱۴.

۲۳۲- گزینه ۲ چون $(2a, a)$ یک بازه است، پس $2a < a$ و در نتیجه

$a < 0$. از روی شکل های زیر معلوم است که اگر $a \leq -2$ اشتراک بازه های $[-2, 4]$ و $(2a, a)$ تهی است:

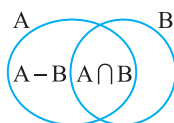


بنابراین $a > -2$. از روی شکل های زیر معلوم است که اگر $-2 < a < 0$ ، اشتراک بازه های $[-2, 4]$ و $(2a, a)$ تهی نیست.

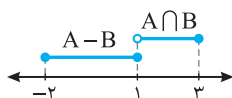


۲۳۳- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ (شکل

زیر را ببینید).



از روی شکل زیر معلوم می شود که $A = [-2, 3]$.



۲۳۴- گزینه ۳ اگر از مجموعه ای نامتناهی تعدادی متناهی عضو حذف

کنیم، مجموعه ای که به دست می آید نامتناهی است. پس $B - A$ نامتناهی است. بقیه گزینه ها ممکن است متناهی باشند.

گزینه ۱) اگر $U = \mathbb{N}$ ، $A = \{1\}$ و $B = \{2, 3, 4, \dots\}$ ، آن گاه

$$A' - B = \emptyset$$

گزینه ۲) چون A متناهی است، پس $A - B'$ نیز متناهی است.

گزینه ۴) اگر $U = \mathbb{N}$ ، $A = \{1\}$ و $B = \mathbb{N}$ ، آن گاه $B' - A' = \emptyset$.

۲۲۶- گزینه ۲ چون $x + y = 2$ ، پس $y = 2 - x$ ، در نتیجه

$$x^3 + y^3 = x^3 + (2 - x)^3 = 2(3x^2 - 6x + 4)$$

بنابراین باید کمترین مقدار تابع $f(x) = 2(3x^2 - 6x + 4)$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x) = 2(6x - 6) = 12(x - 1), \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

چون تابع f فقط یک نقطه بحرانی دارد و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

پس کمترین مقدار تابع f به ازای $x = 1$ به دست می آید و برابر است با $f(1) = 2$.

۲۲۷- گزینه ۳ فاصله نقطه های مورد نظر برابر است با

$$\sqrt{(3x - x)^2 + (x + 6 - 4)^2} = \sqrt{4x^2 + 4x + 4}$$

بنابراین باید کمترین مقدار تابع $f(x) = \sqrt{4x^2 + 4x + 4}$ را پیدا کنیم. توجه کنید که $D_f = \mathbb{R}$ و

$$f'(x) = \frac{1 \cdot x + 4}{2\sqrt{4x^2 + 4x + 4}}, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{5}$$

چون تابع f فقط یک نقطه بحرانی دارد، پس کمترین مقدار آن به ازای $x = -\frac{2}{5}$ به دست می آید که برابر است با

$$f\left(-\frac{2}{5}\right) = \sqrt{4\left(-\frac{2}{5}\right)^2 + 4\left(-\frac{2}{5}\right) + 4} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

۲۲۸- گزینه ۴ ارتفاع مکعب حاصل مساوی x است. طول و عرض

قاعده آن را با l نمایش می دهیم. در این صورت $xl^2 = \text{حجم}$. توجه کنید که

$$2x + l = 3 \Rightarrow l = 3 - 2x \Rightarrow \text{حجم} = x(3 - 2x)^2$$

بنابراین باید ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = x(3 - 2x)^2$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 9x \Rightarrow f'(x) = 12x^2 - 24x + 9 = 0$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 24x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0$$

$$(x - 5)(x - 15) = 0 \Rightarrow x = 5, x = 15$$

توجه کنید که به ازای $x = 15$ حجم جعبه برابر صفر می شود، در نتیجه بیشترین مقدار تابع f به ازای $x = 5$ به دست می آید.

۲۲۹- گزینه ۱ توجه کنید که $f(x) = x + (x - 1)^{\frac{1}{3}}$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{3}(x - 1)^{-\frac{2}{3}} \quad \text{و} \quad f''(x) = -\frac{2}{9}(x - 1)^{-\frac{5}{3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = +\infty$$

بنابراین نمودار تابع f در نقطه به طول ۱ خط مماس قائم دارد و چون $f'' < 0$ در $x = 1$ تغییر علامت می دهد، پس طول نقطه عطف نمودار تابع f برابر ۱ و عرض آن نیز برابر است با $f(1) = 1$.

۲۳۰- گزینه ۱ چون مقادیر f'' همه جا مثبت اند، پس جهت تفرع تابع f

روی $\mathbb{R}$ رو به بالا است. توجه کنید که نمودارهای گزینه های (۲) و (۳) این ویژگی را ندارند. گزینه (۴) نیز درست نیست چون مشتق دوم تابع خطی برابر صفر است. بنابراین گزینه (۱) درست است.

۲۳۵- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{cases} n(A) = 3n(A') \\ n(A) = 12 \end{cases} \Rightarrow n(A') = 4$$

در نتیجه،

$$n(U) = n(A) + n(A') = 12 + 4 = 16$$

اکنون توجه کنید که

$$n(U) = n(B) + n(B') \Rightarrow 16 = n(B) + 7 \Rightarrow n(B) = 9$$

۲۳۶- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$n(A) + n(A') = n(U) \xrightarrow{n(A) = n(A')} 2n(A) = 26 \Rightarrow n(A) = 13$$

از طرف دیگر،

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 14 = 13 + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(B) - n(A \cap B) = 1 \Rightarrow n(B - A) = 1$$

۲۳۷- گزینه ۲ توجه کنید که

$$n(A - B) = 2n(B - A) \Rightarrow n(A) - n(A \cap B) = 2n(B) - 2n(A \cap B)$$

$$n(A) = 2n(B) - n(A \cap B) = 2n(B) - 5$$

بنابراین

$$\begin{cases} n(A) = 2n(B) - 5 \\ n(A) = n(B) + 3 \end{cases} \Rightarrow n(A) = 11, n(B) = 8$$

در نتیجه $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 11 + 8 - 5 = 14$

۲۳۸- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$n(A') = n(U) - n(A) = 23 - 10 = 13$$

$$n(B') = n(U) - n(B) = 23 - 7 = 16$$

اکنون توجه کنید که $n(A' \cap B') \leq n(A') = 13$ ۲۳۹- گزینه ۳ فرض می‌کنیم تعداد دانش‌آموزان کلاس برابر x باشد.همچنین، فرض می‌کنیم A و B به ترتیب مجموعه کسانی باشند که به فیزیک و ریاضیات علاقه دارند. در این صورت $n(A) = \frac{0}{6}x$ و $n(B) = \frac{0}{7}x$ ازطرف دیگر، چون هر دانش‌آموز کلاس حداقل به یکی از درس‌های فیزیک یا ریاضی علاقه‌مند است، پس مجموعه دانش‌آموزان کلاس برابر $A \cup B$ است،در نتیجه، $n(A \cup B) = x$ به این ترتیب،

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$x = \frac{0}{6}x + \frac{0}{7}x - 6 \Rightarrow x = 20$$

۲۴۰- گزینه ۳ فرض کنید A مجموعه علاقه‌مندان به ریاضی و B مجموعه علاقه‌مندان به فیزیک باشد. اگر تعداد کسانی که به این دو درس علاقه‌مند نیستند x باشد، آن‌گاه

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$120 - x = 105 + 95 - n(A \cap B) \Rightarrow 120 - x = 200 - n(A \cap B)$$

پس $n(A \cap B) = 80 + x$. برای اینکه $n(A \cap B)$ حداقل باشد و با توجه بهاینکه $x \geq 0$ است، باید $x = 0$ ؛ پس حداقل مقدار $n(A \cap B)$ برابر با ۸۰ است.

۲۴۱- گزینه ۲ تعداد نقاط روی شکل (۱) برابر ۵ است و در هر مرحله ۴

نقطه به نقاط شکل قبل اضافه می‌شود. پس در مرحله n م به تعداد $(n-1) \times 4$ نقطه به ۵ نقطه شکل (۱) اضافه شده است: $4(n-1) + 5 = 4n + 1$ ، یعنی شکل n م $4n + 1$ نقطه دارد. پس شکل پانزدهم ۶۱ نقطه دارد.۲۴۲- گزینه ۲ از شرط $a_n > 0$ مقادیری از n را پیدا می‌کنیم که به ازایآن‌ها a_n مثبت است:

$$a_n > 0 \Rightarrow 95n - n^2 > 0 \Rightarrow n(95 - n) > 0$$

چون $n > 0$ ، پس $95 - n > 0$ ، در نتیجه $n < 95$ ، یعنی $n \leq 94$. بنابراین ۹۴ جمله دنباله مثبت هستند.۲۴۳- گزینه ۴ فرض کنید قدرنسبت این دنباله d باشد. بنابراین

$$a_8 = 2a_1 \Rightarrow a_1 + 7d = 2(a_1 + 7d) \Rightarrow a_1 + 14d = 0 \Rightarrow a_{15} = 0 \Rightarrow 15a_1 = 0$$

۲۴۴- گزینه ۳ جمله وسط، واسطه حسابی دو جمله دیگر است:

$$\log_7 a + \log_7 (16a) = 2 \log_7 (3a + 4) \Rightarrow \log_7 (a(16a)) = \log_7 (3a + 4)^2$$

$$16a^2 = (3a + 4)^2 \Rightarrow 16a^2 = 9a^2 + 24a + 16$$

$$7a^2 - 24a - 16 = 0 \Rightarrow a = 4, a = -\frac{4}{7} \text{ (غ.ق.ی.)}$$

۲۴۵- گزینه ۳ جمله‌های اول و دوم دنباله $a_n = 2 - 3n$ به ترتیب برابر۱- و ۴- است. پس قدرنسبت آن برابر $-3 - (-1) = -4$ است. اگر جملهاول را ۴ واحد کاهش دهیم، به ۵- تبدیل می‌شود و اگر قدرنسبت را ۶ واحد افزایش دهیم، به ۳ تبدیل می‌شود. پس دنباله حسابی جدید $1, -2, -5, \dots$ است که جمله عمومی آن به صورت $b_n = -5 + 3(n-1) = 3n - 8$ است.پس جمله بیست و یکم دنباله جدید $b_{21} = 3 \times 21 - 8 = 55$ است.۲۴۶- گزینه ۴ چون $a_1 = \frac{1}{2}$ و $r = 1 \div \frac{1}{2} = 2$ ، حاصل ضرب پانزده

جمله اول دنباله برابر است با

$$P = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_{15} = a_1^{15} \times r^{1+2+\dots+14} = a_1^{15} \times r^{\frac{14 \times 15}{2}} = a_1^{15} \times r^{105} = \left(\frac{1}{2}\right)^{15} \times 2^{105} = \left(\frac{1}{2}\right)^{15} \times 2^{105} = 2^90$$

۲۴۷- گزینه ۴ می‌دانیم اگر دنباله‌ای هم حسابی و هم هندسی باشد

جمله‌های آن با هم برابرند، پس هر سه جمله باید برابر باشند. در نتیجه

$$y - 9 = 2x + 3 = 3x - 1$$

بنابراین $x = 4$ و $y = 20$ ، پس $x + y = 24$.۲۴۸- گزینه ۳ توجه کنید که اگر قدرنسبت دنباله r و جمله اول آن a_1

باشد، آن‌گاه

$$a_8 - a_3 = 96 \Rightarrow a_1 r^7 - a_1 r^2 = 96 \Rightarrow a_1 r^2 (r^5 - 1) = 96 \quad (1)$$

$$a_8 - a_6 = 12 \Rightarrow a_1 r^7 - a_1 r^5 = 12 \Rightarrow a_1 r^5 (r^2 - 1) = 12 \quad (2)$$

طرفین تساوی (۲) را بر طرفین تساوی (۱) تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{a_1 r^5 (r^2 - 1)}{a_1 r^2 (r^5 - 1)} = \frac{12}{96} \Rightarrow r^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

پس

$$a_1 r^2 (r^2 - 1) = 96 \Rightarrow a_1 \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{4} - 1\right) = 96 \Rightarrow a_1 = -512$$

بنابراین

$$a_8 = a_1 r^7 = -512 \left(\frac{1}{2}\right)^7 = -32$$

اکنون توجه کنید که

$$\frac{9}{10} < \frac{2n-1}{n+2} \Rightarrow 9n+18 < 20n-10 \Rightarrow n > \frac{28}{11} \quad (1)$$

$$\frac{2n-1}{n+2} < \frac{11}{10} \Rightarrow 20n-10 < 11n+22 \Rightarrow n < \frac{32}{9} \quad (2)$$

تنها عدد طبیعی که در شرطهای (۱) و (۲) صدق می‌کند، ۳ است.

۲۵۴- گزینه ۳ چون $a_p + a_v = 0$ ، پس $a_v = -a_p$. بنابراین از رابطه

$$a_p^2 + a_v^2 = 128$$

$$a_p^2 + (-a_p)^2 = 128 \Rightarrow a_p^2 + a_p^2 = 128 \Rightarrow a_p^2 = 64 \Rightarrow a_p = \pm 8$$

$$d = \frac{a_v - a_p}{v - 3} = \frac{-8 - 8}{4} = -4 \text{ اگر } a_v = -8 \text{ و } a_p = 8 \text{ آنگاه}$$

$$d = \frac{a_v - a_p}{v - 3} = \frac{8 - (-8)}{4} = 4 \text{ اگر } a_v = 8 \text{ و } a_p = -8 \text{ آنگاه}$$

۲۵۵- گزینه ۲ توجه کنید که

$$2x = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$y^2 = \tan^2 \alpha \cot^2 \alpha \Rightarrow y^2 = 1 \xrightarrow{y > 0} y = 1$$

$$x + y = \frac{3}{2} \text{ بنابراین}$$

۲۵۶- گزینه ۱ اگر قدرنسبت دنباله را با r نشان دهیم، آنگاه

$$r^2 = \frac{32}{\frac{1}{2}} = 64 \Rightarrow r = 8$$

در نتیجه $x = \frac{1}{8}$ ، $y = 2$ و $z = 8$. بنابراین $xyz = 2$.

۲۵۷- گزینه ۱ فرض کنید قدرنسبت دنباله هندسی r و جمله اول آن

a_1 باشند. در این صورت جمله‌های اول، دوم و چهارم آن به ترتیب a_1 ، $a_1 r$ و

$a_1 r^3$ هستند. چون این اعداد جمله‌های متوالی یک دنباله حسابی هستند،

پس جمله $a_1 r$ واسطه حسابی دو جمله دیگر است:

$$2a_1 r = a_1 + a_1 r^3 \Rightarrow r^3 + 1 = 2r \Rightarrow r^3 - 2r + 1 = 0$$

$$r^3 - r - r + 1 = r(r^2 - 1) - (r - 1) = 0 \Rightarrow (r - 1)(r^2 + r - 1) = 0$$

چون دنباله هندسی غیرثابت است، پس $r \neq 1$ ، در نتیجه

$$r^2 + r - 1 = 0 \Rightarrow r = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, r = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (غ.ق.)}$$

توجه کنید که قدرنسبت دنباله هندسی عددی مثبت است، پس $r = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ قابل قبول نیست.

۲۵۸- گزینه ۳ اگر قدرنسبت دنباله حسابی برابر d باشد، آنگاه

$$a = b - d \text{ و } c = b + d \text{ در نتیجه}$$

$$a + b + c = 15 \Rightarrow b - d + b + b + d = 15 \Rightarrow b = 5$$

از طرف دیگر، چون $c + 4$ ، $b + 6$ ، $a + 8$ دنباله‌ای هندسی است، پس

$$(b + 6)^2 = (a + 8)(c + 4) \Rightarrow 11^2 = (5 - d + 8)(5 + d + 4)$$

$$121 = (13 - d)(9 + d) \Rightarrow d^2 - 4d + 4 = 0 \Rightarrow (d - 2)^2 = 0 \Rightarrow d = 2$$

بنابراین $a = 3$ و $c = 7$ و $ac = 21$.

۲۴۹- گزینه ۳ چون تعداد جمله‌های هر دسته برابر شماره آن دسته

است، برای نوشتن ۲۹ دسته نخست از $1 + 2 + 3 + \dots + 29$ عدد استفاده شده

است. چون $\frac{29 \times 30}{2} = 435$ پس برای نوشتن ۲۹ دسته

نخست، از نخستین ۴۳۵ عدد فرد استفاده شده است. پس جمله اول دسته

سی‌ام، ۴۳۶-امین عدد فرد و جمله آخر آن $(436 + 29)$ -امین عدد فرد است. از

طرف دیگر، جمله عمومی عددهای فرد به صورت $a_n = 2n - 1$ است، پس

$$a_{435} + a_{436} = 2(435) - 1 + 2(436) - 1 = 2(435 + 436 - 1) = 2(870) = 1740$$

۲۵۰- گزینه ۴ اگر جمله اول دنباله را a_1 و قدرنسبت را q فرض کنیم،

آنگاه

$$S_8 = \frac{a_1(q^8 - 1)}{q - 1} = 8, \quad S_{10} = \frac{a_1(q^{10} - 1)}{q - 1} = 264$$

پس

$$\frac{a_1(q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{264}{8} \Rightarrow \frac{q^{10} - 1}{q^8 - 1} = 33 \Rightarrow \frac{(q^2 - 1)(q^8 + q^6 + q^4 + q^2 + 1)}{q^8 - 1} = 33$$

$$q^2 = 32 \Rightarrow q = 2$$

بنابراین

$$S_8 = \frac{a_1(q^8 - 1)}{q - 1} = 8 \Rightarrow \frac{a_1(256 - 1)}{2 - 1} = 8 \Rightarrow a_1 = \frac{8}{255}$$

$$a_v = a_1 q^6 = \frac{8}{255} \times 2^6 = \frac{512}{31} \text{ در نتیجه}$$

۲۵۱- گزینه ۳ اگر ۴ مربع 1×1 را که در چهار گوشه شکل‌ها حذف شده

است به شکل‌ها اضافه کنیم، در مرحله n یک مربع بزرگ داریم که $(n + 2)$

مربع 1×1 در هر سطر و $(n + 2)$ مربع 1×1 در هر ستون دارد. پس مساحت

آن $(n + 2)^2$ است. بنابراین مساحت شکل n برابر است با

$$(n + 2)^2 - 4 = n^2 + 4n$$

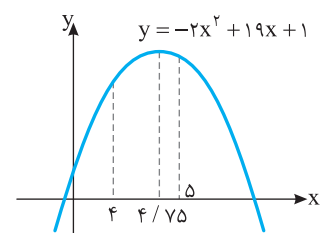
پس مساحت شکل هشتم برابر است با $8^2 + 4 \times 8 = 96$.

۲۵۲- گزینه ۲ بیشترین مقدار تابع درجه دوم $y = -2x^2 + 19x + 1$

به‌ازای $x = \frac{19}{4} = 4.75$ به دست می‌آید. چون $\frac{19}{4}$ عددی طبیعی نیست،

بزرگ‌ترین مقدار در میان a_n ها، a_8 است، که برابر است با

$$a_8 = -50 + 95 + 1 = 46$$



۲۵۳- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\frac{9}{10} < a_n < \frac{11}{10} \Rightarrow \frac{9}{10} < \frac{2n-1}{n+2} < \frac{11}{10}$$

۲۶۴- گزینه ۳ راه حل اول توجه کنید که

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{(a+b)((a+b)^2 - 3ab)}{ab}$$

از طرف دیگر،

$$a+b=3+\sqrt{3}+3-\sqrt{3}=6$$

$$ab=(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})=9-3=6$$

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} = \frac{6(36-18)}{6} = 18 \quad \text{بنابراین}$$

راه حل دوم

$$\frac{a^2}{b} = \frac{(3+\sqrt{3})^2}{3-\sqrt{3}} = \frac{12+6\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{(12+6\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}$$

$$= \frac{36+(12+18)\sqrt{3}+18}{9-3} = \frac{54+30\sqrt{3}}{6} = 9+5\sqrt{3}$$

$$\frac{b^2}{a} = \frac{(3-\sqrt{3})^2}{3+\sqrt{3}} = \frac{12-6\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{(12-6\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}$$

$$= \frac{36-(12+18)\sqrt{3}+18}{9-3} = \frac{54-30\sqrt{3}}{6} = 9-5\sqrt{3}$$

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} = 18 \quad \text{بنابراین}$$

۲۶۵- گزینه ۲ دو طرف تساوی داده شده را به توان سه می‌رسانیم:

$$(\sqrt[3]{a+9})^3 - (\sqrt[3]{a-9})^3 - 3\sqrt[3]{a+9} \times \sqrt[3]{a-9} (\sqrt[3]{a+9} - \sqrt[3]{a-9}) = 3^3$$

$$a+9-(a-9)-3\sqrt[3]{a^2-81} \times (3) = 27$$

$$18-9\sqrt[3]{a^2-81} = 27 \Rightarrow \sqrt[3]{a^2-81} = -1 \Rightarrow a^2 = 81$$

۲۶۶- گزینه ۱ راه حل اول توجه کنید که

$$f(x) = \frac{x^8 - 1}{(x^3 + x)(x^6 - x^4 + x^2 - 1)} = \frac{(x^4 - 1)(x^4 + 1)}{x(x^2 + 1)(x^4(x^2 - 1) + x^2 - 1)}$$

$$= \frac{(x^4 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)}{x(x^2 + 1)((x^2 - 1)(x^4 + 1))} = \frac{1}{x}$$

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{3}{2} \quad \text{بنابراین}$$

راه حل دوم توجه کنید که

$$f(x) = \frac{x^8 - 1}{x(x^2 + 1)(x^6 - x^4 + x^2 - 1)} = \frac{x^8 - 1}{x((x^2)^3 - 1)} = \frac{x^8 - 1}{x(x^8 - 1)} = \frac{1}{x}$$

که در اینجا از اتحاد زیر استفاده کرده‌ایم:

$$(x^2 + 1)(x^6 - x^4 + x^2 - 1) = (x^2 + 1)((x^2)^3 - (x^2)^2 + x^2 - 1)$$

$$= ((x^2)^4 - 1)$$

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{3}{2} \quad \text{بنابراین}$$

۲۶۷- گزینه ۳ می‌توان نوشت

$$x^2 - 2x + 4y - y^2 - 3 = (x^2 - 2x + 1) - (y^2 - 4y + 4)$$

$$= (x-1)^2 - (y-2)^2 = (x-1-(y-2))(x-1+y-2)$$

$$= (x-y+1)(x+y-3)$$

۲۵۹- گزینه ۲ راه حل اول مساحت قسمت‌های رنگ شده پس از n

مرحله برابر است با

$$S = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8} + \dots + \frac{a^2}{2^n} = a^2 \times \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = a^2 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

بنابراین

$$S > \frac{999}{1000} a^2 \Rightarrow a^2 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) > \frac{999}{1000} a^2 \Rightarrow 1 - \frac{1}{2^n} > \frac{999}{1000}$$

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{1000} \Rightarrow 2^n > 1000 \Rightarrow n \geq 10$$

یعنی باید حداقل ده مرحله رنگ آمیزی انجام شود.

راه حل دوم مساحت باقی‌مانده (رنگ نشده) پس از n مرحله رنگ آمیزی برابر

است با $S = \frac{a^2}{2^n}$. بنابراین

$$\frac{a^2}{2^n} \leq \frac{1}{1000} a^2 \Rightarrow 2^n \geq 1000 \Rightarrow n \geq 10$$

۲۶۰- گزینه ۳ مجموع ده جمله اول دنباله حسابی برابر است با

$$S_{10} = \frac{10}{2} (2a + 9 \times 2) = 10a + 90$$

مجموع ده جمله اول دنباله هندسی برابر است با

$$S'_{10} = \frac{1 \times (2^{10} - 1)}{2 - 1} = 2^{10} - 1 = 1023$$

بنابراین

$$10a + 90 = 1023 \Rightarrow a = 93/3$$

۲۶۱- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\frac{\sqrt[3]{x} \sqrt[3]{x} \sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x} \sqrt[6]{x}} = \frac{x^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{6}} x^{\frac{1}{6}}} = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{6}}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

۲۶۲- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{3}} 2^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$$

بنابراین

$$\frac{5}{28} = \sqrt[3]{x^5} \Rightarrow \frac{5}{28} = x^{\frac{5}{3}} \Rightarrow x = \frac{5}{28}$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان $\frac{3}{5}$ برسانیم، به دست می‌آید

$$\left(\frac{5}{28}\right)^{\frac{3}{5}} = x \Rightarrow 2^{\frac{1}{2}} = x \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

۲۶۳- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\frac{(a^2 - 4)(a^2 - 1)}{a^2} = \frac{a^4 - 5a^2 + 4}{a^2} = a^2 - 5 + \frac{4}{a^2}$$

از طرف دیگر، اگر دو طرف فرض مسئله را به توان دو برسانیم، نتیجه می‌شود

$$a^2 + \frac{4}{a^2} + 4 = 25$$

بنابراین $a^2 + \frac{4}{a^2} = 25 - 4$ در نتیجه عبارت مورد نظر برابر است با

$$25^2 - 4 - 5 = 625 - 9 = 616$$

۲۸۵- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$b = (a+b) - a = \sqrt{17} - \frac{\sqrt{17+3}}{2} = \frac{\sqrt{17-3}}{2}$$

بنابراین $a-b=3$ و $ab=2$. به این ترتیب،

$$a^3 - b^3 + 9ab = (a-b)((a-b)^2 + 3ab) + 9ab = 3(9+6) + 18 = 63$$

۲۸۶- گزینه ۲ اگر دو طرف تساوی داده شده را در $1-\sqrt[3]{2}$ ضرب

کنیم، به دست می‌آید

$$(1+\sqrt[3]{2})(1+\sqrt[3]{2})(1+\sqrt[3]{2})(1-\sqrt[3]{2}) = \frac{1-\sqrt[3]{2}}{x^3-1}$$

$$(1+\sqrt[3]{2})(1+\sqrt[3]{2})(1-\sqrt[3]{2}) = \frac{1-\sqrt[3]{2}}{x^3-1}$$

$$(1+\sqrt[3]{2})(1-\sqrt[3]{2}) = \frac{1-\sqrt[3]{2}}{x^3-1} \Rightarrow 1-2 = \frac{1-\sqrt[3]{2}}{x^3-1}$$

$$-1 = \frac{1-\sqrt[3]{2}}{x^3-1} \Rightarrow x^3-1 = \sqrt[3]{2}-1 \Rightarrow x^3 = \sqrt[3]{2}$$

$$(x^3)^{16} = (\sqrt[3]{2})^{16} \Rightarrow x^{48} = 2^{\frac{16}{3}} = 2^5 = 32$$

۲۸۷- گزینه ۱ ابتدا همه ریشه‌ها را به ریشه ششم تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{\sqrt[3]{2}+1} \times \sqrt[6]{\sqrt[3]{2}-1} \times \sqrt[6]{\sqrt[3]{2}-1} &= \sqrt[6]{(\sqrt[3]{2}+1)^3 \times (\sqrt[3]{2}-1)^2 \times \sqrt[3]{2}-1} \\ &= \sqrt[6]{(\sqrt[3]{2}+1)^3 (\sqrt[3]{2}-1)^3} = \sqrt[6]{(\sqrt[3]{2}+1)^3 (\sqrt[3]{2}-1)^3} \\ &= \sqrt[6]{((\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{2}-1))^3} = \sqrt[6]{(2-1)^3} = \sqrt[6]{1} = 1 \end{aligned}$$

۲۸۸- گزینه ۲ ابتدا مخرج کسر را گویا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1} &= \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1} \times \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-1} \\ &= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{3+2+2\sqrt{6}-1} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{2(\sqrt{6}+2)} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{2(\sqrt{6}+2)} \times \frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{6}-2} \\ &= \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)(\sqrt{6}-2)}{2(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)(\sqrt{6}-2)}{4} \\ &= \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}-2\sqrt{3}-2\sqrt{2}+2}{4} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}+2}{4} \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1} - \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}+2}{4} - \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

۲۸۹- گزینه ۳ می‌توان نوشت

$$x^2y^2 - x^2 - y^2 - 4xy + 1 = x^2y^2 - 2xy + 1 - (x^2 + y^2 + 2xy)$$

$$= (xy-1)^2 - (x+y)^2 = (xy-1-x-y)(xy-1+x+y)$$

۲۹۰- گزینه ۳ چون چندجمله‌ای $P(x+1)$ بر $x-2$ بخش پذیر است،

$$P(1-x) = ax^2 - x + 2a. P(2+1) = P(3) = 0$$

پس $P(2+1) = P(3) = 0$. اکنون اگر در تساوی $P(1-x) = ax^2 - x + 2a$

$$P(3) = a(-2)^2 - (-2) + 2a = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

۲۷۸- گزینه ۳ فرض می‌کنیم $A = \frac{1}{3}(\sqrt{7}-1)\sqrt{4+\sqrt{7}}$. در این صورت،

$$A^2 = \frac{1}{9}(\sqrt{7}-1)^2(4+\sqrt{7}) = \frac{1}{9}(7+1-2\sqrt{7})(4+\sqrt{7})$$

$$= \frac{2}{9}(4-\sqrt{7})(4+\sqrt{7}) = \frac{2}{9}(16-7) = 2$$

چون A عددی مثبت است، $A = \sqrt{2}$.

۲۷۹- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\begin{aligned} \frac{2}{1-\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{6}} &= \frac{2}{1-\sqrt{3}+\sqrt{2}(1-\sqrt{3})} = \frac{2}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{2})} \\ &= \frac{2(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{2})}{(1-3)(1-2)} = (1+\sqrt{3})(1-\sqrt{2}) \end{aligned}$$

۲۸۰- گزینه ۱ چون باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x-1)$ بر $x-2$

برابر ۱۲ است، پس $P(2-1) = 12$ ، یعنی $P(1) = 12$. در نتیجه

$$P(1) = 1 + a + 6 + b + 10 = 12 \Rightarrow a + b = -5$$

از طرف دیگر، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x+1)$ بر $x+2$ برابر است

با $P(-2+1) = P(-1)$. اکنون توجه کنید که

$$P(-1) = 1 - a + 6 - b + 10 = 17 - (a+b) = 17 - (-5) = 22$$

بنابراین باقی‌مانده مورد نظر برابر ۲۲ است.

۲۸۱- گزینه ۱ توجه کنید که $x = \sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}} = 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{3}}$

بنابراین

$$\sqrt[4]{x^{21}} = x^{\frac{21}{4}} = (3^{\frac{2}{3}})^{\frac{21}{4}} = 3^{\frac{7}{2}}$$

۲۸۲- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{\sqrt[6]{\sqrt[7]{\sqrt[8]{\sqrt[9]{\sqrt[10]{\sqrt[11]{\sqrt[12]{\sqrt[13]{\sqrt[14]{\sqrt[15]{\sqrt[16]{\sqrt[17]{\sqrt[18]{\sqrt[19]{\sqrt[20]{\sqrt[21]{\sqrt[22]{\sqrt[23]{\sqrt[24]{\sqrt[25]{\sqrt[26]{\sqrt[27]{\sqrt[28]{\sqrt[29]{\sqrt[30]{\sqrt[31]{\sqrt[32]{\sqrt[33]{\sqrt[34]{\sqrt[35]{\sqrt[36]{\sqrt[37]{\sqrt[38]{\sqrt[39]{\sqrt[40]{\sqrt[41]{\sqrt[42]{\sqrt[43]{\sqrt[44]{\sqrt[45]{\sqrt[46]{\sqrt[47]{\sqrt[48]{\sqrt[49]{\sqrt[50]{\sqrt[51]{\sqrt[52]{\sqrt[53]{\sqrt[54]{\sqrt[55]{\sqrt[56]{\sqrt[57]{\sqrt[58]{\sqrt[59]{\sqrt[60]{\sqrt[61]{\sqrt[62]{\sqrt[63]{\sqrt[64]{\sqrt[65]{\sqrt[66]{\sqrt[67]{\sqrt[68]{\sqrt[69]{\sqrt[70]{\sqrt[71]{\sqrt[72]{\sqrt[73]{\sqrt[74]{\sqrt[75]{\sqrt[76]{\sqrt[77]{\sqrt[78]{\sqrt[79]{\sqrt[80]{\sqrt[81]{\sqrt[82]{\sqrt[83]{\sqrt[84]{\sqrt[85]{\sqrt[86]{\sqrt[87]{\sqrt[88]{\sqrt[89]{\sqrt[90]{\sqrt[91]{\sqrt[92]{\sqrt[93]{\sqrt[94]{\sqrt[95]{\sqrt[96]{\sqrt[97]{\sqrt[98]{\sqrt[99]{\sqrt[100]{\sqrt[101]{\sqrt[102]{\sqrt[103]{\sqrt[104]{\sqrt[105]{\sqrt[106]{\sqrt[107]{\sqrt[108]{\sqrt[109]{\sqrt[110]{\sqrt[111]{\sqrt[112]{\sqrt[113]{\sqrt[114]{\sqrt[115]{\sqrt[116]{\sqrt[117]{\sqrt[118]{\sqrt[119]{\sqrt[120]{\sqrt[121]{\sqrt[122]{\sqrt[123]{\sqrt[124]{\sqrt[125]{\sqrt[126]{\sqrt[127]{\sqrt[128]{\sqrt[129]{\sqrt[130]{\sqrt[131]{\sqrt[132]{\sqrt[133]{\sqrt[134]{\sqrt[135]{\sqrt[136]{\sqrt[137]{\sqrt[138]{\sqrt[139]{\sqrt[140]{\sqrt[141]{\sqrt[142]{\sqrt[143]{\sqrt[144]{\sqrt[145]{\sqrt[146]{\sqrt[147]{\sqrt[148]{\sqrt[149]{\sqrt[150]{\sqrt[151]{\sqrt[152]{\sqrt[153]{\sqrt[154]{\sqrt[155]{\sqrt[156]{\sqrt[157]{\sqrt[158]{\sqrt[159]{\sqrt[160]{\sqrt[161]{\sqrt[162]{\sqrt[163]{\sqrt[164]{\sqrt[165]{\sqrt[166]{\sqrt[167]{\sqrt[168]{\sqrt[169]{\sqrt[170]{\sqrt[171]{\sqrt[172]{\sqrt[173]{\sqrt[174]{\sqrt[175]{\sqrt[176]{\sqrt[177]{\sqrt[178]{\sqrt[179]{\sqrt[180]{\sqrt[181]{\sqrt[182]{\sqrt[183]{\sqrt[184]{\sqrt[185]{\sqrt[186]{\sqrt[187]{\sqrt[188]{\sqrt[189]{\sqrt[190]{\sqrt[191]{\sqrt[192]{\sqrt[193]{\sqrt[194]{\sqrt[195]{\sqrt[196]{\sqrt[197]{\sqrt[198]{\sqrt[199]{\sqrt[200]{\sqrt[201]{\sqrt[202]{\sqrt[203]{\sqrt[204]{\sqrt[205]{\sqrt[206]{\sqrt[207]{\sqrt[208]{\sqrt[209]{\sqrt[210]{\sqrt[211]{\sqrt[212]{\sqrt[213]{\sqrt[214]{\sqrt[215]{\sqrt[216]{\sqrt[217]{\sqrt[218]{\sqrt[219]{\sqrt[220]{\sqrt[221]{\sqrt[222]{\sqrt[223]{\sqrt[224]{\sqrt[225]{\sqrt[226]{\sqrt[227]{\sqrt[228]{\sqrt[229]{\sqrt[230]{\sqrt[231]{\sqrt[232]{\sqrt[233]{\sqrt[234]{\sqrt[235]{\sqrt[236]{\sqrt[237]{\sqrt[238]{\sqrt[239]{\sqrt[240]{\sqrt[241]{\sqrt[242]{\sqrt[243]{\sqrt[244]{\sqrt[245]{\sqrt[246]{\sqrt[247]{\sqrt[248]{\sqrt[249]{\sqrt[250]{\sqrt[251]{\sqrt[252]{\sqrt[253]{\sqrt[254]{\sqrt[255]{\sqrt[256]{\sqrt[257]{\sqrt[258]{\sqrt[259]{\sqrt[260]{\sqrt[261]{\sqrt[262]{\sqrt[263]{\sqrt[264]{\sqrt[265]{\sqrt[266]{\sqrt[267]{\sqrt[268]{\sqrt[269]{\sqrt[270]{\sqrt[271]{\sqrt[272]{\sqrt[273]{\sqrt[274]{\sqrt[275]{\sqrt[276]{\sqrt[277]{\sqrt[278]{\sqrt[279]{\sqrt[280]{\sqrt[281]{\sqrt[282]{\sqrt[283]{\sqrt[284]{\sqrt[285]{\sqrt[286]{\sqrt[287]{\sqrt[288]{\sqrt[289]{\sqrt[290]{\sqrt[291]{\sqrt[292]{\sqrt[293]{\sqrt[294]{\sqrt[295]{\sqrt[296]{\sqrt[297]{\sqrt[298]{\sqrt[299]{\sqrt[300]{\sqrt[301]{\sqrt[302]{\sqrt[303]{\sqrt[304]{\sqrt[305]{\sqrt[306]{\sqrt[307]{\sqrt[308]{\sqrt[309]{\sqrt[310]{\sqrt[311]{\sqrt[312]{\sqrt[313]{\sqrt[314]{\sqrt[315]{\sqrt[316]{\sqrt[317]{\sqrt[318]{\sqrt[319]{\sqrt[320]{\sqrt[321]{\sqrt[322]{\sqrt[323]{\sqrt[324]{\sqrt[325]{\sqrt[326]{\sqrt[327]{\sqrt[328]{\sqrt[329]{\sqrt[330]{\sqrt[331]{\sqrt[332]{\sqrt[333]{\sqrt[334]{\sqrt[335]{\sqrt[336]{\sqrt[337]{\sqrt[338]{\sqrt[339]{\sqrt[340]{\sqrt[341]{\sqrt[342]{\sqrt[343]{\sqrt[344]{\sqrt[345]{\sqrt[346]{\sqrt[347]{\sqrt[348]{\sqrt[349]{\sqrt[350]{\sqrt[351]{\sqrt[352]{\sqrt[353]{\sqrt[354]{\sqrt[355]{\sqrt[356]{\sqrt[357]{\sqrt[358]{\sqrt[359]{\sqrt[360]{\sqrt[361]{\sqrt[362]{\sqrt[363]{\sqrt[364]{\sqrt[365]{\sqrt[366]{\sqrt[367]{\sqrt[368]{\sqrt[369]{\sqrt[370]{\sqrt[371]{\sqrt[372]{\sqrt[373]{\sqrt[374]{\sqrt[375]{\sqrt[376]{\sqrt[377]{\sqrt[378]{\sqrt[379]{\sqrt[380]{\sqrt[381]{\sqrt[382]{\sqrt[383]{\sqrt[384]{\sqrt[385]{\sqrt[386]{\sqrt[387]{\sqrt[388]{\sqrt[389]{\sqrt[390]{\sqrt[391]{\sqrt[392]{\sqrt[393]{\sqrt[394]{\sqrt[395]{\sqrt[396]{\sqrt[397]{\sqrt[398]{\sqrt[399]{\sqrt[400]{\sqrt[401]{\sqrt[402]{\sqrt[403]{\sqrt[404]{\sqrt[405]{\sqrt[406]{\sqrt[407]{\sqrt[408]{\sqrt[409]{\sqrt[410]{\sqrt[411]{\sqrt[412]{\sqrt[413]{\sqrt[414]{\sqrt[415]{\sqrt[416]{\sqrt[417]{\sqrt[418]{\sqrt[419]{\sqrt[420]{\sqrt[421]{\sqrt[422]{\sqrt[423]{\sqrt[424]{\sqrt[425]{\sqrt[426]{\sqrt[427]{\sqrt[428]{\sqrt[429]{\sqrt[430]{\sqrt[431]{\sqrt[432]{\sqrt[433]{\sqrt[434]{\sqrt[435]{\sqrt[436]{\sqrt[437]{\sqrt[438]{\sqrt[439]{\sqrt[440]{\sqrt[441]{\sqrt[442]{\sqrt[443]{\sqrt[444]{\sqrt[445]{\sqrt[446]{\sqrt[447]{\sqrt[448]{\sqrt[449]{\sqrt[450]{\sqrt[451]{\sqrt[452]{\sqrt[453]{\sqrt[454]{\sqrt[455]{\sqrt[456]{\sqrt[457]{\sqrt[458]{\sqrt[459]{\sqrt[460]{\sqrt[461]{\sqrt[462]{\sqrt[463]{\sqrt[464]{\sqrt[465]{\sqrt[466]{\sqrt[467]{\sqrt[468]{\sqrt[469]{\sqrt[470]{\sqrt[471]{\sqrt[472]{\sqrt[473]{\sqrt[474]{\sqrt[475]{\sqrt[476]{\sqrt[477]{\sqrt[478]{\sqrt[479]{\sqrt[480]{\sqrt[481]{\sqrt[482]{\sqrt[483]{\sqrt[484]{\sqrt[485]{\sqrt[486]{\sqrt[487]{\sqrt[488]{\sqrt[489]{\sqrt[490]{\sqrt[491]{\sqrt[492]{\sqrt[493]{\sqrt[494]{\sqrt[495]{\sqrt[496]{\sqrt[497]{\sqrt[498]{\sqrt[499]{\sqrt[500]{\sqrt[501]{\sqrt[502]{\sqrt[503]{\sqrt[504]{\sqrt[505]{\sqrt[506]{\sqrt[507]{\sqrt[508]{\sqrt[509]{\sqrt[510]{\sqrt[511]{\sqrt[512]{\sqrt[513]{\sqrt[514]{\sqrt[515]{\sqrt[516]{\sqrt[517]{\sqrt[518]{\sqrt[519]{\sqrt[520]{\sqrt[521]{\sqrt[522]{\sqrt[523]{\sqrt[524]{\sqrt[525]{\sqrt[526]{\sqrt[527]{\sqrt[528]{\sqrt[529]{\sqrt[530]{\sqrt[531]{\sqrt[532]{\sqrt[533]{\sqrt[534]{\sqrt[535]{\sqrt[536]{\sqrt[537]{\sqrt[538]{\sqrt[539]{\sqrt[540]{\sqrt[541]{\sqrt[542]{\sqrt[543]{\sqrt[544]{\sqrt[545]{\sqrt[546]{\sqrt[547]{\sqrt[548]{\sqrt[549]{\sqrt[550]{\sqrt[551]{\sqrt[552]{\sqrt[553]{\sqrt[554]{\sqrt[555]{\sqrt[556]{\sqrt[557]{\sqrt[558]{\sqrt[559]{\sqrt[560]{\sqrt[561]{\sqrt[562]{\sqrt[563]{\sqrt[564]{\sqrt[565]{\sqrt[566]{\sqrt[567]{\sqrt[568]{\sqrt[569]{\sqrt[570]{\sqrt[571]{\sqrt[572]{\sqrt[573]{\sqrt[574]{\sqrt[575]{\sqrt[576]{\sqrt[577]{\sqrt[578]{\sqrt[579]{\sqrt[580]{\sqrt[581]{\sqrt[582]{\sqrt[583]{\sqrt[584]{\sqrt[585]{\sqrt[586]{\sqrt[587]{\sqrt[588]{\sqrt[589]{\sqrt[590]{\sqrt[591]{\sqrt[592]{\sqrt[593]{\sqrt[594]{\sqrt[595]{\sqrt[596]{\sqrt[597]{\sqrt[598]{\sqrt[599]{\sqrt[600]{\sqrt[601]{\sqrt[602]{\sqrt[603]{\sqrt[604]{\sqrt[605]{\sqrt[606]{\sqrt[607]{\sqrt[608]{\sqrt[609]{\sqrt[610]{\sqrt[611]{\sqrt[612]{\sqrt[613]{\sqrt[614]{\sqrt[615]{\sqrt[616]{\sqrt[617]{\sqrt[618]{\sqrt[619]{\sqrt[620]{\sqrt[621]{\sqrt[622]{\sqrt[623]{\sqrt[624]{\sqrt[625]{\sqrt[626]{\sqrt[627]{\sqrt[628]{\sqrt[629]{\sqrt[630]{\sqrt[631]{\sqrt[632]{\sqrt[633]{\sqrt[634]{\sqrt[635]{\sqrt[636]{\sqrt[637]{\sqrt[638]{\sqrt[639]{\sqrt[640]{\sqrt[641]{\sqrt[642]{\sqrt[643]{\sqrt[644]{\sqrt[645]{\sqrt[646]{\sqrt[647]{\sqrt[648]{\sqrt[649]{\sqrt[650]{\sqrt[651]{\sqrt[652]{\sqrt[653]{\sqrt[654]{\sqrt[655]{\sqrt[656]{\sqrt[657]{\sqrt[658]{\sqrt[659]{\sqrt[660]{\sqrt[661]{\sqrt[662]{\sqrt[663]{\sqrt[664]{\sqrt[665]{\sqrt[666]{\sqrt[667]{\sqrt[668]{\sqrt[669]{\sqrt[670]{\sqrt[671]{\sqrt[672]{\sqrt[673]{\sqrt[674]{\sqrt[675]{\sqrt[676]{\sqrt[677]{\sqrt[678]{\sqrt[679]{\sqrt[680]{\sqrt[681]{\sqrt[682]{\sqrt[683]{\sqrt[684]{\sqrt[685]{\sqrt[686]{\sqrt[687]{\sqrt[688]{\sqrt[689]{\sqrt[690]{\sqrt[691]{\sqrt[692]{\sqrt[693]{\sqrt[694]{\sqrt[695]{\sqrt[696]{\sqrt[697]{\sqrt[698]{\sqrt[699]{\sqrt[700]{\sqrt[701]{\sqrt[702]{\sqrt[703]{\sqrt[704]{\sqrt[705]{\sqrt[706]{\sqrt[707]{\sqrt[708]{\sqrt[709]{\sqrt[710]{\sqrt[711]{\sqrt[712]{\sqrt[713]{\sqrt[714]{\sqrt[715]{\sqrt[716]{\sqrt[717]{\sqrt[718]{\sqrt[719]{\sqrt[720]{\sqrt[721]{\sqrt[722]{\sqrt[723]{\sqrt[724]{\sqrt[725]{\sqrt[726]{\sqrt[727]{\sqrt[728]{\sqrt[729]{\sqrt[730]{\sqrt[731]{\sqrt[732]{\sqrt[733]{\sqrt[734]{\sqrt[735]{\sqrt[736]{\sqrt[737]{\sqrt[738]{\sqrt[739]{\sqrt[740]{\sqrt[741]{\sqrt[742]{\sqrt[743]{\sqrt[744]{\sqrt[745]{\sqrt[746]{\sqrt[747]{\sqrt[748]{\sqrt[749]{\sqrt[750]{\sqrt[751]{\sqrt[752]{\sqrt[753]{\sqrt[754]{\sqrt[755]{\sqrt[756]{\sqrt[757]{\sqrt[758]{\sqrt[759]{\sqrt[760]{\sqrt[761]{\sqrt[762]{\sqrt[763]{\sqrt[764]{\sqrt[765]{\sqrt[766]{\sqrt[767]{\sqrt[768]{\sqrt[769]{\sqrt[770]{\sqrt[771]{\sqrt[772]{\sqrt[773]{\sqrt[774]{\sqrt[775]{\sqrt[776]{\sqrt[777]{\sqrt[778]{\sqrt[779]{\sqrt[780]{\sqrt[781]{\sqrt[782]{\sqrt[783]{\sqrt[784]{\sqrt[785]{\sqrt[786]{\sqrt[787]{\sqrt[788]{\sqrt[789]{\sqrt[790]{\sqrt[791]{\sqrt[792]{\sqrt[793]{\sqrt[794]{\sqrt[795]{\sqrt[796]{\sqrt[797]{\sqrt[798]{\sqrt[799]{\sqrt[800]{\sqrt[801]{\sqrt[802]{\sqrt[803]{\sqrt[804]{\sqrt[805]{\sqrt[806]{\sqrt[807]{\sqrt[808]{\sqrt[809]{\sqrt[810]{\sqrt[811]{\sqrt[812]{\sqrt[813]{\sqrt[814]{\sqrt[815]{\sqrt[816]{\sqrt[817]{\sqrt[818]{\sqrt[819]{\sqrt[820]{\sqrt[821]{\sqrt[822]{\sqrt[823]{\sqrt[824]{\sqrt[825]{\sqrt[826]{\sqrt[827]{\sqrt[828]{\sqrt[829]{\sqrt[830]{\sqrt[831]{\sqrt[832]{\sqrt[833]{\sqrt[834]{\sqrt[835]{\sqrt[836]{\sqrt[837]{\sqrt[838]{\sqrt[839]{\sqrt[840]{\sqrt[841]{\sqrt[842]{\sqrt[843]{\sqrt[844]{\sqrt[845]{\sqrt[846]{\sqrt[847]{\sqrt[848]{\sqrt[849]{\sqrt[850]{\sqrt[851]{\sqrt[852]{\sqrt[853]{\sqrt[854]{\sqrt[855]{\sqrt[856]{\sqrt[857]{\sqrt[858]{\sqrt[859]{\sqrt[860]{\sqrt[861]{\sqrt[862]{\sqrt[863]{\sqrt[864]{\sqrt[865]{\sqrt[866]{\sqrt[867]{\sqrt[868]{\sqrt[869]{\sqrt[870]{\sqrt[871]{\sqrt[872]{\sqrt[873]{\sqrt[874]{\sqrt[875]{\sqrt[876]{\sqrt[877]{\sqrt[878]{\sqrt[879]{\sqrt[880]{\sqrt[881]{\sqrt[882]{\sqrt[883]{\sqrt[884]{\sqrt[885]{\sqrt[886]{\sqrt[887]{\sqrt[888]{\sqrt[889]{\sqrt[890]{\sqrt[891]{\sqrt[892]{\sqrt[893]{\sqrt[894]{\sqrt[895]{\sqrt[896]{\sqrt[897]{\sqrt[898]{\sqrt[899]{\sqrt[900]{\sqrt[901]{\sqrt[902]{\sqrt[903]{\sqrt[904]{\sqrt[905]{\sqrt[906]{\sqrt[907]{\sqrt[908]{\sqrt[909]{\sqrt[910]{\sqrt[911]{\sqrt[912]{\sqrt[913]{\sqrt[914]{\sqrt[915]{\sqrt[916]{\sqrt[917]{\sqrt[918]{\sqrt[919]{\sqrt[920]{\sqrt[921]{\sqrt[922]{\sqrt[923]{\sqrt[924]{\sqrt[925]{\sqrt[926]{\sqrt[927]{\sqrt[928]{\sqrt[929]{\sqrt[930]{\sqrt[931]{\sqrt[932]{\sqrt[933]{\sqrt[934]{\sqrt[935]{\sqrt[936]{\sqrt[937]{\sqrt[938]{\sqrt[939]{\sqrt[940]{\sqrt[941]{\sqrt[942]{\sqrt[943]{\sqrt[944]{\sqrt[945]{\sqrt[946]{\sqrt[947]{\sqrt[948]{\sqrt[949]{\sqrt[950]{\sqrt[951]{\sqrt[952]{\sqrt[953]{\sqrt[954]{\sqrt[955]{\sqrt[956]{\sqrt[957]{\sqrt[958]{\sqrt[959]{\sqrt[960]{\sqrt[961]{\sqrt[962]{\sqrt[963]{\sqrt[964]{\sqrt[965]{\sqrt[966]{\sqrt[967]{\sqrt[968]{\sqrt[969]{\sqrt[970]{\sqrt[971]{\sqrt[972]{\sqrt[973]{\sqrt[974]{\sqrt[975]{\sqrt[976]{\sqrt[977]{\sqrt[978]{\sqrt[979]{\sqrt[980]{\sqrt[981]{\sqrt[982]{\sqrt[983]{\sqrt[984]{\sqrt[985]{\sqrt[986]{\sqrt[987]{\sqrt[988]{\sqrt[989]{\sqrt[990]{\sqrt[991]{\sqrt[992]{\sqrt[993]{\sqrt[994]{\sqrt[995]{\sqrt[996]{\sqrt[997]{\sqrt[998]{\sqrt[999]{\sqrt[1000]{\sqrt[1001]{\sqrt[1002]{\sqrt[1003]{\sqrt[1004]{\sqrt[1005]{\sqrt[1006]{\sqrt[1007]{\sqrt[1008]{\sqrt[1009]{\sqrt[1010]{\sqrt[1011]{\sqrt[1012]{\sqrt[1013]{\sqrt[1014]{\sqrt[1015]{\sqrt[1016]{\sqrt[1017]{\sqrt[1018]{\sqrt[1019]{\sqrt[1020]{\sqrt[1021]{\sqrt[1022]{\sqrt[1023]{\sqrt[1024]{\sqrt[1025]{\sqrt[1026]{\sqrt[1027]{\sqrt[1028]{\sqrt[1029]{\sqrt[1030]{\sqrt[1031]{\sqrt[1032]{\sqrt[1033]{\sqrt[1034]{\sqrt[1035]{\sqrt[1036]{\sqrt[1037]{\sqrt[1038]{\sqrt[1039]{\sqrt[1040]{\sqrt[1041]{\sqrt[1042]{\sqrt[1043]{\sqrt[1044]{\sqrt[1045]{\sqrt[1046]{\sqrt[1047]{\sqrt[1048]{\sqrt[1049]{\sqrt[1050]{\sqrt[1051]{\sqrt[1052]{\sqrt[1053]{\sqrt[1054]{\sqrt[1055]{\sqrt[1056]{\sqrt[1057]{\sqrt[1058]{\sqrt[1059]{\sqrt[1060]{\sqrt[1061]{\sqrt[1062]{\sqrt[1063]{\sqrt[1064]{\sqrt[1065]{\sqrt[1066]{\sqrt[1067]{\sqrt[1068]{\sqrt[1069]{\sqrt[1070]{\sqrt[1071]{\sqrt[1072]{\sqrt[1073]{\sqrt[1074]{\sqrt[1075]{\sqrt[1076]{\sqrt[1077]{\sqrt[1078]{\sqrt[1079]{\sqrt[1080]{\sqrt[1081]{\sqrt[1082]{\sqrt[1083]{\sqrt[1084]{\sqrt[1085]{\sqrt[1086]{\sqrt[1087]{\sqrt[1088]{\sqrt[1089]{\sqrt[1090]{\sqrt[1091]{\sqrt[1092]{\sqrt[1093]{\sqrt[1094]{\sqrt[1095]{\sqrt[1096]{\sqrt[1097]{\sqrt[1098]{\sqrt[1099]{\sqrt[1100]{\sqrt[1101]{\sqrt[1102]{\sqrt[1103]{\sqrt[1104]{\sqrt[1105]{\sqrt[1106]{\sqrt[1107]{\sqrt[1108]{\sqrt[1109]{\sqrt[1110]{\sqrt[1111]{\sqrt[1112]{\sqrt[1113]{\sqrt[1114]{\sqrt[1115]{\sqrt[1116]{\sqrt[1117]{\sqrt[1118]{\sqrt[1119]{\sqrt[1120]{\sqrt[1121]{\sqrt[1122]{\sqrt[1123]{\sqrt[1124]{\sqrt[1125]{\sqrt[1126]{\sqrt[1127]{\sqrt[1128]{\sqrt[1129]{\sqrt[1130]{\sqrt[1131]{\sqrt[1132]{\sqrt[1133]{\sqrt[1134]{\sqrt[1135]{\sqrt[1136]{\sqrt[1137]{\sqrt[1138]{\sqrt[1139]{\sqrt[1140]{\sqrt[1141]{\sqrt[1142]{\sqrt[1143]{\sqrt[1144]{\sqrt[1145]{\sqrt[1146]{\sqrt[1147]{\sqrt[1148]{\sqrt[1149]{\sqrt[1150]{\sqrt[1151]{\sqrt[1152]{\sqrt[1153]{\sqrt[1154]{\sqrt[1155]{\sqrt[1156]{\sqrt[1157]{\sqrt[1158]{\sqrt[1159]{\sqrt[1160]{\sqrt[1161]{\sqrt[1162]{\sqrt[1163]{\sqrt[1164]{\sqrt[1165]{\sqrt[1166]{\sqrt[1167]{\sqrt[1168]{\sqrt[1169]{\sqrt[1170]{\sqrt[1171]{\sqrt[1172]{\sqrt[1173]{\sqrt[1174]{\sqrt[1175]{\sqrt[1176]{\sqrt[1177]{\sqrt[1178]{\sqrt[1179]{\sqrt[1180]{\sqrt[1181]{\sqrt[1182]{\sqrt[1183]{\sqrt[1184]{\sqrt[1185]{\sqrt[1186]{\sqrt[1187]{\sqrt[1188]{\sqrt[1189]{\sqrt[1190]{\sqrt[1191]{\sqrt[1192]{\sqrt[1193]{\sqrt[1194]{\sqrt[1195]{\sqrt[1196]{\sqrt[1197]{\sqrt[1198]{\sqrt[1199]{\sqrt[1200]{\sqrt[1201]{\sqrt[1202]{\sqrt[1203]{\sqrt[1204]{\sqrt[1205]{\sqrt[1206]{\sqrt[1207]{\sqrt[1208]{\sqrt[1209]{\sqrt[1210]{\$$

۲۹۷- گزینه ۳ راه حل اول توجه کنید که

$$15x^{10} + 13x^5 + 2 = 15x^{10} + 3x^5 + 10x^5 + 2 \\ = 3x^5(\Delta x^5 + 1) + 2(\Delta x^5 + 1) = (\Delta x^5 + 1)(3x^5 + 2)$$

بنابراین $\Delta x^5 + 1$ عامل عبارت مورد نظر است و بقیه نیستند.

راه حل دوم فرض کنید $y = x^5$ ، بنابراین

$$15x^{10} + 13x^5 + 2 = 15y^2 + 13y + 2 = (\Delta y + 1)(3y + 2)$$

در نتیجه عبارت مورد نظر به صورت $(\Delta x^5 + 1)(3x^5 + 2)$ تجزیه می‌شود و $(\Delta x^5 + 1)$ عاملی از آن است.

۲۹۸- گزینه ۲ فرض کنید $A = (\sqrt{11} + \sqrt{7})\sqrt{9 - \sqrt{77}}$ در این صورت،

$$A^2 = (\sqrt{11} + \sqrt{7})^2(9 - \sqrt{77}) = (11 + 7 + 2\sqrt{77})(9 - \sqrt{77}) \\ = 2(9 + \sqrt{77})(9 - \sqrt{77}) = 2(81 - 77) = 8$$

پس، چون A مثبت است، $A = 2\sqrt{2}$.

۲۹۹- گزینه ۳ بنابر اتحاد چاق و لاغر،

$$x^{18} - 1 = (x^6)^3 - 1 = (x^6 - 1)(x^{12} + x^6 + 1)$$

از طرف دیگر،

$$x^{12} + x^6 + 1 = (x^{12} + 2x^6 + 1) - x^6 = (x^6 + 1)^2 - (x^3)^2 \\ = (x^6 + 1 - x^3)(x^6 + 1 + x^3)$$

$$\text{پس } \frac{x^{18} - 1}{(x^6 + x^3 + 1)(x^6 - x^3 + 1)} = x^6 - 1$$

۳۰۰- گزینه ۴ چون باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای‌های $1 - P(x)$ و

$Q(x) + x$ بر $x + 1$ به ترتیب برابر ۳ و -۳ است، پس

$$2P(-1) - 1 = 3 \Rightarrow P(-1) = 2, \quad Q(-1) - 1 = -3 \Rightarrow Q(-1) = -2$$

بنابراین باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $(x - 3)P(1 - x) + Q(3 - 2x)$ بر $x - 2$ برابر است با

$$(2 - 3)P(1 - 2) + Q(3 - 4) = -P(-1) + Q(-1) = -2 - 2 = -4$$

۳۰۱- گزینه ۳ اگر $m = 0$ ، معادله به صورت $-2x = 0$ در می‌آید که

یک جواب دارد. اگر $m \neq 0$ ، باید مقدار دلتای معادله برابر صفر باشد، یعنی

$$\Delta = 4 - 16m^2 = 0 \Rightarrow m^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow m = \pm \frac{1}{2}$$

بنابراین به ازای سه مقدار m ، معادله فقط یک جواب دارد.

۳۰۲- گزینه ۳ فرض کنید α عدد بزرگ‌تر و β عدد کوچک‌تر باشد.

در این صورت $\alpha + \beta = 4$ و $\alpha\beta = -2$. بنابراین α و β جواب‌های معادله $x^2 - 4x - 2 = 0$ هستند. در نتیجه $\alpha = 2 + \sqrt{6}$ و $\beta = 2 - \sqrt{6}$.

بنابراین

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2 + \sqrt{6}}{2 - \sqrt{6}} = \frac{(2 + \sqrt{6})^2}{(2 - \sqrt{6})(2 + \sqrt{6})} = \frac{10 + 4\sqrt{6}}{4 - 6} = -5 - 2\sqrt{6}$$

۳۰۳- گزینه ۲ توجه کنید که $x_1 + x_2 = -8$ و $x_1 x_2 = -13$. پس

$$\frac{1}{x_1 + 2} + \frac{1}{x_2 + 2} = \frac{(x_1 + x_2) + 4}{x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4} = \frac{-8 + 4}{-13 - 16 + 4} = \frac{4}{25}$$

۲۹۱- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{21^0}} \times \sqrt[6]{\sqrt[4]{2^4}} = (21^0)^{\frac{1}{3 \times 5}} \times (2^4)^{\frac{1}{4 \times 6}} = 2^{\frac{10}{3 \times 5}} \times 2^{\frac{4}{2 \times 3 \times 2}} \\ = 2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}} = 2^1 = 2$$

۲۹۲- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\sqrt[4]{2^3 \sqrt[3]{2^4 \sqrt[5]{2}}} = \frac{1}{2^2} \times \frac{1}{2^2 \times 2} \times \frac{1}{2^4 \times 2 \times 2} = \frac{1}{2^{24}} \\ \sqrt[4]{2^3 \sqrt[3]{2^4 \sqrt[5]{2}}} = \frac{1}{2^4} \times \frac{1}{2^2 \times 2} = \frac{1}{2^8}$$

در نتیجه عبارت مورد نظر برابر است با $\sqrt[4]{2} = \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{4} \times 24}} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$.

۲۹۳- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt[3]{3\sqrt[5]{9}} = 3^{\frac{1}{3}} \times 9^{\frac{1}{5 \times 3}} = 3^{\frac{1}{3}} \times (3^2)^{\frac{1}{5 \times 3}} = 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{5 \times 3}} = 3^{\frac{1}{3} + \frac{2}{5 \times 3}} = 3^{\frac{5}{15}} \\ \sqrt[5]{2\sqrt[3]{a}} = 2^{\frac{1}{5}} \times a^{\frac{1}{3 \times 5}} = (2^{\frac{1}{5}})^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3 \times 5}} = 2^{\frac{1}{15}} a^{\frac{1}{15}}$$

بنابراین از فرض نتیجه می‌شود

$$\frac{5}{3^{15}} = \frac{3}{3^5 a^{15}} \Rightarrow a^{15} = 3^{15} \Rightarrow a = 3^{\frac{15}{15}} = 3^1 = 3$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان ۱۵ برسانیم نتیجه می‌شود $a = 3^{-2}$. پس

$$\sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}} = (3^{-2})^{\frac{1}{4}} = 3^{-\frac{2}{4}} = 3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

۲۹۴- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{cases} 2a^2 + b^2 + 3c^2 = 23 \\ 2a^2 + b^2 + c^2 = 14 \\ 2a^2 + 3b^2 + c^2 = 33 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 56 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 14 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 14 \end{cases}$$

بنابراین

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 14 + 22 = 36$$

در نتیجه $|a + b + c| = 6$.

۲۹۵- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{ab}\right)$$

از طرف دیگر،

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 3 \Rightarrow \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 + \frac{2}{ab} = 3 \Rightarrow 1 + \frac{2}{ab} = 3 \Rightarrow ab = 1$$

$$\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3} = 1(3 + 1) = 4$$

۲۹۶- گزینه ۱ توجه کنید که

$$(a^2 + b^2)^3 = a^6 + b^6 + 3a^2 b^2 (a^2 + b^2) \\ 6\sqrt{6} = a^6 + b^6 + 3(1)(\sqrt{6}) \Rightarrow a^6 + b^6 = 3\sqrt{6}$$

در نتیجه

$$(a^6 + b^6)^2 = a^{12} + b^{12} + 2a^6 b^6 \\ 9 \times 6 = a^{12} + b^{12} + 2 \Rightarrow a^{12} + b^{12} = 52$$

اگر $m=2$ ، آن‌گاه ضریب x^2 در $P(x)$ مثبت است و جدول تعیین علامت آن نمی‌تواند به صورت داده شده باشد. اگر $m=-6$ ، آن‌گاه

$$m^2 - 2n - 12 = 0 \Rightarrow 36 - 2n - 12 = 0 \Rightarrow n = 12$$

۳۱۰- گزینه ۴ نامعادله داده شده را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{x^2 - mx - m}{x^2 - x + 1} - 3 \leq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - mx - m - 3x^2 + 3x - 3}{x^2 - x + 1} \leq 0$$

$$\frac{2x^2 + (m-3)x + m+3}{x^2 - x + 1} \geq 0$$

برای عبارت $x^2 - x + 1$ مقدار Δ منفی است و مقدار عبارت همواره مثبت است. پس برای اینکه مقدار کسر بالا همواره نامنفی باشد، کافی است صورت آن همواره نامنفی باشد. یعنی برای عبارت $2x^2 + (m-3)x + m+3$ ضریب

x^2 مثبت باشد (که هست) و Δ نامثبت باشد. پس

$$\Delta = (m-3)^2 - 8(m+3) \leq 0 \Rightarrow m^2 - 6m + 9 - 8m - 24 \leq 0$$

$$m^2 - 14m - 15 \leq 0 \Rightarrow (m-15)(m+1) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq m \leq 15$$

بنابراین حداکثر مقدار m برابر ۱۵ است.

۳۱۱- گزینه ۳ برای اینکه معادله ریشه مضاعف داشته باشد، باید دلتای آن صفر باشد:

$$\Delta = (2k-8)^2 - 4k(k-7) = 0 \Rightarrow 4k^2 - 32k + 64 - 4k^2 + 28k = 0$$

$$-4k + 64 = 0 \Rightarrow k = 16$$

بنابراین تعداد جواب‌های معادله $x^2 - 16x + 1 = 0$ را می‌خواهیم که چون $\Delta = 256 - 4 = 252 > 0$ این معادله دو جواب دارد.

۳۱۲- گزینه ۲ توجه کنید که $x_1 + x_2 = 6$ و $x_1 x_2 = 4$ ، پس $x_1, x_2 > 0$ از طرف دیگر،

$$A = (x_1 \sqrt{x_1} + x_2 \sqrt{x_2})^2$$

$$= (x_1 \sqrt{x_1})^2 + (x_2 \sqrt{x_2})^2 + 2x_1 \sqrt{x_1} x_2 \sqrt{x_2}$$

$$= x_1^3 + x_2^3 + 2x_1 x_2 \sqrt{x_1 x_2}$$

$$= (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) + 2x_1 x_2 \sqrt{x_1 x_2}$$

$$A = 6^3 - 3 \times 4 \times 6 + 2 \times 4 \sqrt{4} = 160$$

اکنون توجه کنید که چون جواب‌های معادله عددی مثبت‌اند، پس عبارت مورد نظر هم مثبت است. بنابراین

$$x_1 \sqrt{x_1} + x_2 \sqrt{x_2} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$$

۳۱۳- گزینه ۳ توجه کنید که $x_1 + x_2 = 8$ و $x_1 x_2 = 2$ ، اکنون مجموع و حاصل ضرب جواب‌های معادله مورد نظر را به دست می‌آوریم:

$$S = x_1 - \frac{3}{x_1} + x_2 - \frac{3}{x_2} = x_1 + x_2 - \left(\frac{3}{x_1} + \frac{3}{x_2}\right)$$

$$= x_1 + x_2 - \frac{3(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} = 8 - \frac{3(8)}{2} = -4$$

$$P = \left(x_1 - \frac{3}{x_1}\right)\left(x_2 - \frac{3}{x_2}\right) = x_1 x_2 - 3 - 3 + \frac{9}{x_1 x_2} = 2 - 6 + \frac{9}{2} = \frac{1}{2}$$

۳۰۴- گزینه ۲ اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه $\alpha + \beta = 8$ و $\alpha = 2\beta + 4$. از حل دستگاه معادله‌های به دست آمده نتیجه می‌شود $\beta = \frac{4}{3}$ و $\alpha = \frac{20}{3}$. پس $m = \frac{80}{9}$.

۳۰۵- گزینه ۱ اگر فرض کنیم $x^2 - 4 = t$ ، آن‌گاه معادله مورد نظر می‌شود $\frac{t}{t+1} + \frac{5}{t+1} = 2$. اگر دو طرف این معادله را در $t(t+1)$ ضرب کنیم، آن‌گاه

$$t(t+1) + 5t = 2t(t+1) \Rightarrow 4t + 4 + 5t = 2t^2 + 2t$$

$$2t^2 - 7t - 4 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}, t = 4$$

اگر $t = -\frac{1}{2}$ ، آن‌گاه

$$x^2 - 4 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{7}{2} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{7}{2}}$$

اگر $t = 4$ ، آن‌گاه

$$x^2 - 4 = 4 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm \sqrt{8}$$

بنابراین حاصل ضرب جواب‌های معادله برابر ۲۸ است.

۳۰۶- گزینه ۲ ۲۵ کیلوگرم از محلول اولیه شکر و ۷۵ کیلوگرم آن آب است. اگر یک‌سوم از آب را بخیّر کنیم، ۵۰ کیلوگرم آب باقی می‌ماند. اگر x کیلوگرم شکر به آن اضافه کنیم، وزن شکر $25+x$ و وزن محلول $75+x$ می‌شود. پس $\frac{25+x}{75+x} = \frac{50}{100} \Rightarrow 50 + 2x = 75 + x \Rightarrow x = 25$ یعنی باید ۲۵ کیلوگرم شکر به آن اضافه کنیم.

۳۰۷- گزینه ۲ معادله را به صورت $2\sqrt{x-1} = 2 + \sqrt{x-2}$ می‌نویسیم و دو طرف آن را به توان دو می‌رسانیم:

$$4x - 4 = 4 + x - 2 + 4\sqrt{x-2} \Rightarrow 3x - 6 = 4\sqrt{x-2}$$

دوباره دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$9x^2 + 36 - 36x = 16x - 32 \Rightarrow 9x^2 - 52x + 68 = 0$$

$$(x-2)(9x-34) = 0 \Rightarrow x = 2, x = \frac{34}{9}$$

هر دو جواب به دست آمده در معادله اصلی صدق می‌کنند، پس معادله دو جواب دارد.

۳۰۸- گزینه ۱ طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و ساده می‌کنیم:

$$2x - 1 + x^2 + 2x\sqrt{2x-1} = 3x - 1 \Rightarrow 2x\sqrt{2x-1} = x - x^2$$

چون $x = 0$ جواب معادله اصلی نیست، پس

$$2\sqrt{2x-1} = 1-x \quad (1)$$

دوباره طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$4(2x-1) = 1 + x^2 - 2x \Rightarrow x^2 - 10x + 5 = 0 \Rightarrow x = 5 + 2\sqrt{5}, x = 5 - 2\sqrt{5}$$

با توجه به تساوی (۱) باید $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ تا هم عبارت زیر رادیکال منفی نشود و هم حاصل عبارت رادیکالی منفی نشود. بنابراین $x = 5 + 2\sqrt{5}$ قابل قبول نیست و $x = 5 - 2\sqrt{5}$ تنها جواب معادله است.

۳۰۹- گزینه ۲ با توجه به اینکه در $x=1$ و $x=3$ ، $P(x)=0$ ، پس

$$P(1)=0 \Rightarrow m + (m^2 - 12) - m - 2n = 0 \Rightarrow m^2 - 2n - 12 = 0$$

$$P(3)=0 \Rightarrow 9m + 3(m^2 - 12) - m - 2n = 0 \Rightarrow 3m^2 + 8m - 2n - 36 = 0$$

اگر طرفین معادله (۱) را از معادله (۲) کم کنیم، نتیجه می‌شود

$$2m^2 + 8m - 24 = 0 \Rightarrow m^2 + 4m - 12 = 0$$

$$(m+6)(m-2) = 0 \Rightarrow m = 2, m = -6$$

بنابراین معادله مورد نظر به صورت زیر است:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow 2x^2 + 8x + 1 = 0$$

۳۱۴- گزینه ۳ فرض کنید α جواب دیگر معادله باشد. مجموع

جوابها برابر $-\sqrt{2}m$ و حاصل ضرب آنها برابر m است. پس

$$\begin{cases} \alpha + \sqrt{2} - 1 = -\sqrt{2}m & (۱) \\ \alpha(\sqrt{2} - 1) = m & (۲) \end{cases}$$

از جای گذاری $\alpha(\sqrt{2} - 1)$ به جای m در معادله (۱) نتیجه می شود

$$\alpha + \sqrt{2} - 1 = -\sqrt{2}\alpha(\sqrt{2} - 1) \Rightarrow \alpha + \sqrt{2} - 1 = -2\alpha + \sqrt{2}\alpha$$

$$(3 - \sqrt{2})\alpha = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow \alpha = \frac{1 - \sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}} = \frac{(1 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})}{9 - 2} = \frac{3 + \sqrt{2} - 3\sqrt{2} - 2}{7} = \frac{1 - 2\sqrt{2}}{7}$$

۳۱۵- گزینه ۱ ابتدا دقت کنید که $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$

اکنون دو طرف معادله را در $(x+1)^2(x^2 - x + 1)$ ضرب می کنیم:

$$\frac{2}{(x+1)^2} - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = 0$$

$$2(x^2 - x + 1) - 2(x+1) + (x+1) = 0 \Rightarrow 2x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$$

واضح است که $x=1$ یک جواب معادله است. پس معادله فوق به صورت

$$(x-1)(2x^2 + 1) = 0 \text{ است. معادله } 2x^2 + 1 = 0 \text{ جواب ندارد، پس } x=1 \text{ تنها}$$

جواب معادله مورد نظر است.

۳۱۶- گزینه ۳ معادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$\frac{x+a+3x}{x(x+a)} = \frac{4}{x-1} \Rightarrow 4(x^2 + ax) = (4x+a)(x-1)$$

$$4x^2 + 4ax = 4x^2 - 4x + ax - a \Rightarrow (3a+4)x = -a \Rightarrow x = -\frac{a}{3a+4}$$

واضح است که اگر $a = -\frac{4}{3}$ ، آن گاه معادله جواب ندارد. همچنین اگر $a=0$ ،

آن گاه $x=0$ که قابل قبول نیست. از طرف دیگر اگر $-\frac{a}{3a+4}$ برابر ۱ یا $-a$

(ریشه های مخرج کسر) شود، جواب به دست آمده قبول نیست:

$$-\frac{a}{3a+4} = 1 \Rightarrow a = -1, \quad -\frac{a}{3a+4} = -a \Rightarrow a = -1, \quad a = 0$$

بنابراین به ازای سه مقدار $-\frac{4}{3}$ ، صفر و -1 برای a معادله مورد نظر جواب ندارد.

۳۱۷- گزینه ۲ دو طرف معادله داده شده را به توان دو می رسانیم:

$$x^4 + 2x - 5 = (1+x)^2 \Rightarrow x^4 - x^2 - 6 = 0 \Rightarrow (x^2 - 3)(x^2 + 2) = 0$$

چون $x^2 + 2 \neq 0$ ، پس

$$x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$x = \sqrt{3}$ در معادله صدق می کند، اما $x = -\sqrt{3}$ در معادله صدق نمی کند،

زیرا به ازای $x = -\sqrt{3}$ سمت راست معادله منفی است و سمت چپ آن مثبت

است. پس معادله فقط یک جواب دارد.

۳۱۸- گزینه ۲ ابتدا معادله را به صورت $\sqrt[3]{x^4} - 4\sqrt[3]{x^2} + 3 = 0$

می نویسیم. اکنون فرض می کنیم $t = \sqrt[3]{x^2}$ و معادله به صورت

$$t^3 - 4t + 3 = 0 \text{ در می آید. جواب های این معادله } t=1 \text{ و } t=3 \text{ هستند. پس}$$

$$\sqrt[3]{x^2} = 1 \Rightarrow x = \pm 1, \quad \sqrt[3]{x^2} = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt[3]{27}$$

پس حاصل ضرب جواب های معادله برابر ۲۷ است.

۳۱۹- گزینه ۲ باید دو نامعادله $3x^2 - 18 \leq x^2$ و $x^2 \leq 2x^2 - 4$ را

حل کنیم و مجموعه جواب های آنها را با هم اشتراک بگیریم

$$3x^2 - 18 \leq x^2 \Rightarrow 2x^2 - 18 \leq 0 \Rightarrow x^2 - 9 \leq 0 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$$

$$x^2 \leq 2x^2 - 4 \Rightarrow x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \text{ یا } x \leq -2$$

بنابراین مجموعه جواب های نامعادله های داده شده به صورت $[-3, -2] \cup [2, 3]$ است که شامل چهار عدد صحیح است.

۳۲۰- گزینه ۲ نامعادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$\frac{x+6}{x-4} - x \geq 0 \Rightarrow \frac{x+6-x^2+4x}{x-4} \geq 0$$

$$\frac{x^2 - 5x - 6}{x-4} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x+1)(x-6)}{x-4} \leq 0$$

اکنون به کمک تعیین علامت، مجموعه جواب های نامعادله را معین می کنیم.

x	$-\infty$	-1	4	6	$+\infty$
$\frac{(x+1)(x-6)}{x-4}$		-	+	-	+

پس مجموعه جواب های نامعادله به صورت $(-\infty, -1] \cup (4, 6]$ است. بنابراین

$$a=1 \text{ و } b=6 \text{ و در نتیجه } a+b=7$$

۳۲۱- گزینه ۲ توجه کنید که $2x^2 + 5x - 3 = (2x-1)(x+3)$

بنابراین معادله مورد نظر می شود

$$|(2x-1)(x+3)| = 2|x+3| \Rightarrow |2x-1| |x+3| = 2|x+3|$$

$$|x+3| (|2x-1| - 2) = 0$$

به این ترتیب

$$|x+3| = 0 \Rightarrow x = -3$$

$$|2x-1| - 2 = 0 \Rightarrow 2x-1 = \pm 2 \Rightarrow x = \frac{3}{2}, x = -\frac{1}{2}$$

در نتیجه، مجموع جواب ها برابر با -2 است.

۳۲۲- گزینه ۱ معادله مورد نظر را می توان این طور نوشت

$$x^2 - 3 = \pm(x-1)$$

بنابراین

$$x^2 - 3 = x - 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \quad (۱)$$

$$x^2 - 3 = -(x-1) \Rightarrow x^2 + x - 4 = 0 \quad (۲)$$

هر دو معادله دو جواب دارند و دو معادله جواب یکسان ندارند. مجموع

جواب های معادله (۱) برابر ۱ و مجموع جواب های معادله (۲) برابر -1 است.

بنابراین مجموع جواب های معادله اصلی برابر صفر است.

۳۲۳- گزینه ۳ راه حل اول ابتدا توجه کنید که

$$|4x - \sqrt{x^2 - 8x + 16}| = |4x - \sqrt{(x-4)^2}| = |4x - |x-4||$$

از طرف دیگر.

$$|2x-5| < 3 \Rightarrow -3 < 2x-5 < 3 \Rightarrow 2 < 2x < 8 \Rightarrow 1 < x < 4 \quad (1)$$

بنابراین $x-4 < 0$ ، در نتیجه $|x-4| = -(x-4)$. بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $|4x+x-4| = |5x-4|$. از طرف دیگر، بنابر نابرابری‌های (۱)،

$$x > 1 \Rightarrow 5x > 5 \Rightarrow 5x-4 > 1$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $5x-4$.

راه حل دوم توجه کنید که $x=2$ در نامعادله $|2x-5| < 3$ صدق می‌کند.

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر را به ازای $x=2$ به دست می‌آوریم:

$$A = |4x - \sqrt{x^2 - 8x + 16}| \xrightarrow{x=2} A = |8 - \sqrt{4 - 16 + 16}| = 6$$

فقط مقدار گزینه (۳) به ازای $x=2$ برابر ۶ است.

۳۲۴- گزینه ۴ نامعادله مورد نظر را می‌توان این طور نوشت

$$|x^2 - 3x| < 2x \Rightarrow |x(x-3)| < 2x \Rightarrow |x||x-3| < 2x$$

معلوم است که $x=0$ جواب این نامعادله نیست و x نمی‌تواند منفی باشد.بنابراین $x > 0$ و

$$x|x-3| < 2x \Rightarrow x(|x-3|-2) < 0 \Rightarrow |x-3|-2 < 0 \Rightarrow |x-3| < 2$$

$$-2 < x-3 < 2 \Rightarrow 1 < x < 5$$

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله مورد نظر بازه $(1, 5)$ است، یعنی $a=1$ ،

$$b=5 \text{ و } b-a=4$$

۳۲۵- گزینه ۲ راه حل اول از $-3 \leq x \leq 6$ ، نتیجه می‌شود

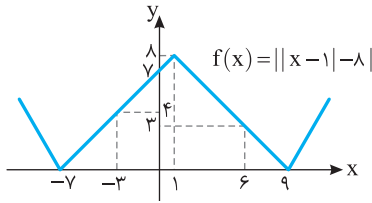
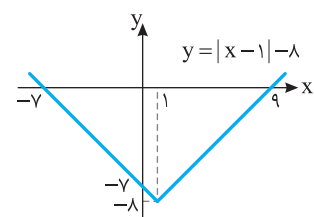
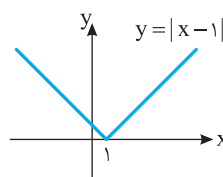
$$-4 \leq x-1 \leq 5$$

پس $|x-1| \leq 5$. بنابراین

$$-8 \leq |x-1| - 8 \leq -3 \Rightarrow 3 \leq ||x-1| - 8| \leq 8 \Rightarrow 3 \leq f(x) \leq 8$$

پس حداقل مقدار تابع برابر ۳ و حداکثر مقدار آن ۸ است و مجموع آن‌ها ۱۱ است.

راه حل دوم نمودار تابع را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل تابع، واضح است که وقتی $-3 \leq f(x) \leq 8$ ، $-3 \leq x \leq 6$.

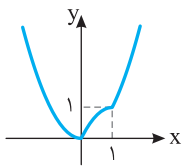


پس حداقل مقدار تابع برابر ۳ و حداکثر مقدار آن ۸ است و مجموع آن‌ها ۱۱ است.

۳۲۶- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + x & x \leq 0 \\ -(x^2 - x) + x & 0 < x \leq 1 \\ x^2 - x + x & x > 1 \end{cases} = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ -x^2 + 2x & 0 < x \leq 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ -(x-1)^2 + 1 & 0 < x \leq 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به شکل روبه‌رو است.

$$f(120) = \left[\frac{120}{11} \right] - \left[-\frac{120}{17} \right] \text{ توجه کنید که}$$

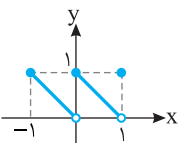
از طرف دیگر،

$$10 < \frac{120}{11} < 11 \Rightarrow \left[\frac{120}{11} \right] = 10, \quad -8 < -\frac{120}{17} < -7 \Rightarrow \left[-\frac{120}{17} \right] = -8$$

$$f(120) = 10 - (-8) = 18 \text{ بنابراین}$$

۳۲۸- گزینه ۲ توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} -1-(x-1) & -1 \leq x < 0 \\ 0-(x-1) & 0 \leq x < 1 \\ 1+0 & x=1 \end{cases} = \begin{cases} -x & -1 \leq x < 0 \\ -x+1 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x=1 \end{cases}$$

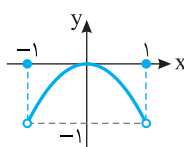
بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است:۳۲۹- گزینه ۱ راه حل اول اگر k عددی صحیح باشد، آن‌گاه

$$[x+k] = [x] + k \text{ بنابراین}$$

$$[x] \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = x^2([x] + [-x])$$

$$[-x] = \begin{cases} -[x] & x \in \mathbb{Z} \\ -[x]-1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \text{ از طرف دیگر، پس می‌توان نوشت}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -x^2 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \text{ و نمودار تابع } f \text{ به صورت زیر است:}$$



راه حل دوم می توانیم نامعادله مورد نظر را به صورت $|x+2| > |2x-1|$ بنویسیم

که برای به دست آوردن مجموعه جواب های آن به صورت زیر عمل می کنیم:

$$|x+2| > |2x-1| \Rightarrow (x+2)^2 > (2x-1)^2 \Rightarrow (x+2)^2 - (2x-1)^2 > 0$$

$$(x+2+2x-1)(x+2-2x+1) > 0 \Rightarrow (3x+1)(-x+3) > 0$$

$$x \in (-\frac{1}{3}, 3)$$

چون $x = \frac{1}{2}$ مخرج را صفر می کند، مجموعه جواب های نامعادله مورد نظر

به صورت $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 3)$ یا $(-\frac{1}{3}, 3) - \{\frac{1}{2}\}$ است.

۳۳۵- گزینه ۲ **راه حل اول** نامعادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$x^2 + 2x + 1 < 2 + |x+1|$$

$$(x+1)^2 < 2 + |x+1| \Rightarrow |x+1|^2 < 2 + |x+1|$$

اگر فرض کنیم $t = |x+1|$ ، آن گاه

$$t^2 - t - 2 < 0 \Rightarrow (t+1)(t-2) < 0$$

چون $t \geq 0$ ، بنابراین $t+1 \geq 1$ و در نتیجه $t+1 > 0$ ، پس باید نامعادله $t-2 < 0$ را حل کنیم که جواب آن به صورت $t < 2$ است، پس $|x+1| < 2$ و در نتیجه

$$-2 < x+1 < 2 \Rightarrow -3 < x < 1$$

پس اعداد صحیح صفر، -۱ و -۲ در مجموعه جواب های نامعادله قرار دارند.

راه حل دوم دو حالت در نظر می گیریم:

حالت اول اگر $x \leq -1$ ، آن گاه

$$x^2 + 2x < 1 - x - 1 \Rightarrow x^2 + 3x < 0 \Rightarrow -3 < x < 0 \xrightarrow{x \leq -1} -3 < x \leq -1$$

حالت دوم اگر $x > -1$ ، آن گاه

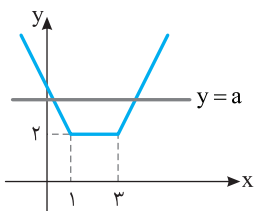
$$x^2 + 2x < 1 + x + 1 \Rightarrow x^2 + x - 2 < 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) < 0 \Rightarrow -2 < x < 1$$

$$\xrightarrow{x > -1} -1 < x < 1$$

بنابراین $-3 < x < 1$ ، در نتیجه عددهای صحیحی که در نامعادله مورد نظر

صدق می کنند عبارت اند از $x = -2$ و $x = -1$ ، $x = 0$.

۳۳۶- گزینه ۴ با توجه به نمودار تابع $y = |x-1| + |x-3|$ باید $a \geq 2$.

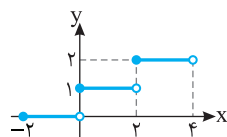


۳۳۷- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که اگر k عددی صحیح باشد، آن گاه

$$[x+k] = [x] + k \text{، بنابراین } f(x) = \left[\frac{x}{p}\right] + 1 \text{ اکنون توجه کنید که}$$

$$f(x) = \begin{cases} -1+1 & -2 \leq x < 0 \\ 0+1 & 0 \leq x < 2 \\ 1+1 & 2 \leq x < 4 \end{cases} = \begin{cases} 0 & -2 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 2 \\ 2 & 2 \leq x < 4 \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است:



راه حل دوم می دانیم $[x] \leq x$ ، بنابراین تابع $f(x) = x^2 - [x]$ همواره

نامثبت است. بنابراین گزینه های (۳) و (۴) رد می شوند. از طرف دیگر

$$f(0) = 0 \text{، پس گزینه (۲) هم رد می شود.}$$

۳۳۰- گزینه ۱ به جای x در ضابطه f قرار می دهیم $x-1$:

$$f(x-1) = 4(x-1) - [x-1] - [3(x-1)] = 4x - 4 - [x] + 1 - [3x] + 3$$

$$= 4x - [x] - [3x] = f(x)$$

۳۳۱- گزینه ۲ **راه حل اول** اگر $x \geq -1$ ، معادله مورد نظر می شود

$$|x+1| - 2x = |x+1-2x| = |1-x| = 4$$

$$1-x=4 \Rightarrow x=-3 \text{ (غ.ق.)، } 1-x=-4 \Rightarrow x=5$$

بنابراین

اگر $x < -1$ ، معادله مورد نظر می شود

$$|x+1| - 2x = |-(x+1) - 2x| = |3x+1| = 4$$

که چون در این حالت $3x+1 < 0$ ، پس معادله مورد نظر به صورت $-(3x+1) = 4$

$$\text{است، یعنی } x = -\frac{5}{3} \text{ . بنابراین معادله مورد نظر دو جواب دارد.}$$

راه حل دوم توجه کنید که

$$|x+1| - 2x = 4 \Rightarrow |x+1| - 2x = 4 \Rightarrow |x+1| = 4 + 2x \quad (1)$$

$$x+1 = 4 + 2x \Rightarrow x = -3 \text{، } x+1 = -4 - 2x \Rightarrow x = -\frac{5}{3} \checkmark$$

($x = -3$) غیر قابل قبول است، چون در تساوی (۱) صدق نمی کند.)

$$|x+1| - 2x = -4 \Rightarrow |x+1| = -4 + 2x \quad (2)$$

$$x+1 = -4 + 2x \Rightarrow x = 5 \checkmark \text{، } x+1 = 4 - 2x \Rightarrow x = 1 \text{، } x$$

($x = 1$) غیر قابل قبول است، چون در تساوی (۲) صدق نمی کند.)

۳۳۲- گزینه ۲ معادله را می توان به شکل زیر نوشت

$$|x| - k = -4 \Rightarrow |x| = k - 4 \quad (1)$$

$$|x| - k = 4 \Rightarrow |x| = k + 4 \quad (2)$$

برای اینکه معادله اصلی جواب نداشته باشد، باید هر کدام از معادله های (۱) و (۲)

جواب نداشته باشند. بنابراین بایستی $k-4 < 0$ و $k+4 < 0$ ، پس $k < -4$.

۳۳۳- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$|3 - |x-2|| \leq 4 \Rightarrow -4 \leq 3 - |x-2| \leq 4 \Rightarrow -7 \leq -|x-2| \leq 1$$

نا برابری سمت راست همواره درست است. بنابراین باید

$$-7 \leq -|x-2| \Rightarrow |x-2| \leq 7 \Rightarrow -7 \leq x-2 \leq 7 \Rightarrow -5 \leq x \leq 9$$

بنابراین عددهای صحیح -۵، -۴، ...، ۸ و ۹ در نامعادله مورد نظر صدق

می کنند. تعداد این عددها ۱۵ تا است.

۳۳۴- گزینه ۱ چون در اینجا $|2x-1|$ مثبت است، پس

$$\frac{|x+2|}{2x-1} > 1 \Rightarrow |x+2| > |2x-1| \xrightarrow{\text{به توان دو می رسانیم}} x^2 + 4x + 4 > 4x^2 - 4x + 1$$

$$3x^2 - 8x - 3 < 0 \Rightarrow (3x+1)(x-3) < 0 \Rightarrow -\frac{1}{3} < x < 3$$

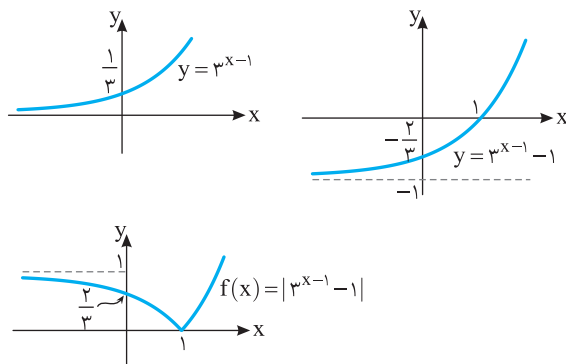
البته چون مخرج عبارت سمت چپ نامعادله مورد نظر به ازای $x = \frac{1}{3}$ صفر

می شود، پس $\frac{1}{3}$ در مجموعه جواب های نامعادله مورد نظر نیست. بنابراین

مجموعه جواب های نامعادله می شود $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, 3)$.

۳۴۱- گزینه ۱ ابتدا نمودار تابع $y=3^x$ را یک واحد به سمت راست

انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=3^{x-1}$ به دست بیاید. سپس این نمودار را یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=3^{x-1}-1$ به دست بیاید. سپس قرینه قسمتی از این نمودار را که پایین محور x است، نسبت به محور x رسم و قسمتی را که زیر محور x است، حذف می‌کنیم تا نمودار تابع f به دست بیاید.



۳۴۲- گزینه ۴ فرض می‌کنیم $2^x = t$. در این صورت معادله مورد نظر

می‌شود

$$4^x - 3 \times 2^{x+2} + 2^7 = (2^x)^2 - 12 \times 2^x + 2^7 \\ = t^2 - 12t + 2^7 = (t-3)(t-9) = 0$$

بنابراین

$$t=3 \Rightarrow 2^{x_1} = 3 \quad (1), \quad t=9 \Rightarrow 2^{x_2} = 9 \quad (2)$$

اگر تساوی‌های (۱) و (۲) را در هم ضرب کنیم، به دست می‌آید $2^{x_1+x_2} = 2^7$.

بنابراین $2^4 < 2^{x_1+x_2} < 2^5$. در نتیجه $4 < x_1 + x_2 < 5$.

۳۴۳- گزینه ۳ با توجه به فرض‌های مسئله،

$$f(1)=1 \Rightarrow a+b=1, \quad f(2)=7 \Rightarrow a^2+b=7$$

اگر تساوی اول را از تساوی دوم کم کنیم، به دست می‌آید:

$$a^2 - a - 6 = 0 \Rightarrow a = 3, \quad a = -2$$

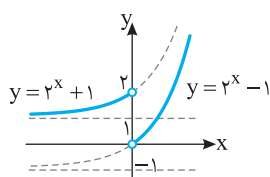
چون a باید مثبت باشد، پس $a = 3$. در نتیجه $b = 1 - a = -2$. به این ترتیب

$$f(x) = 3^x - 2. \quad \text{اکنون توجه کنید که اگر } f^{-1}\left(-\frac{5}{3}\right) = m, \text{ آن‌گاه}$$

$$f(m) = -\frac{5}{3} \Rightarrow 3^m - 2 = -\frac{5}{3} \Rightarrow 3^m = -\frac{5}{3} + 2 = \frac{1}{3} \Rightarrow m = -1$$

$$f(x) = \begin{cases} 2^x + 1 & x < 0 \\ 2^x - 1 & x > 0 \end{cases} \quad \text{۳۴۴- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که}$$

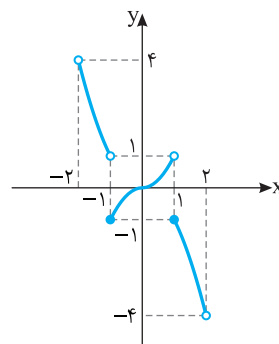
بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است.



پس برد تابع به صورت $(0, +\infty)$ است.

۳۳۸- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که اگر $[x]$ عددی زوج باشد، آن‌گاه

$[-1]^{[x]} = 1$ و در نتیجه $f(x) = x^2$. اگر $[x]$ عددی فرد باشد، آن‌گاه $[-1]^{[x]} = -1$ و در نتیجه $f(x) = -x^2$. یعنی تابع در بازه‌های $(-2, -1)$ ، $[0, 1)$ ، $(1, 2)$ و $[-1, 0)$ $f(x) = -x^2$ و در بازه‌های $[1, 2)$ و $[-1, 0)$ $f(x) = x^2$ است. بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است:



۳۳۹- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $D_f = \{x \mid 1 - |x+3| \geq 0\}$.

طرف دیگر،

$$1 - |x+3| \geq 0 \Rightarrow |x+3| \leq 1$$

چون $|x+3|$ نامنفی است، پس جزء صحیح آن نیز نامنفی است و چون در اینجا جزء صحیح $|x+3|$ از ۱ بیشتر نیست، پس یا صفر است یا ۱. اکنون توجه کنید که

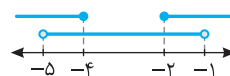
$$|x+3| = 0 \Rightarrow 0 \leq |x+3| < 1 \Rightarrow |x+3| < 1 \Rightarrow -1 < x+3 < 1 \\ \Rightarrow -4 < x < -2$$

$$|x+3| = 1 \Rightarrow 1 \leq |x+3| < 2$$

$$|x+3| \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} x+3 \geq 1 \\ x+3 \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq -4 \end{cases} \quad (1)$$

$$|x+3| < 2 \Rightarrow -2 < x+3 < 2 \Rightarrow -5 < x < -1 \quad (2)$$

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله $|x+3| < 2$ اشتراک جواب‌های (۱) و (۲) است، که می‌شود $[-2, -1) \cup (-5, -4]$.



به این ترتیب، دامنه تابع f برابر است با

$$(-4, -2) \cup (-5, -4] \cup [-2, -1) = (-5, -1)$$

پس $b-a=4$ و $b=-1$ ، $a=-5$.

۳۴۰- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\left\lfloor \frac{3x-a}{2} \right\rfloor = 3 \Rightarrow 3 \leq \frac{3x-a}{2} < 4 \Rightarrow 6 \leq 3x-a < 8$$

$$6+a \leq 3x < 8+a \Rightarrow \frac{6+a}{3} \leq x < \frac{8+a}{3}$$

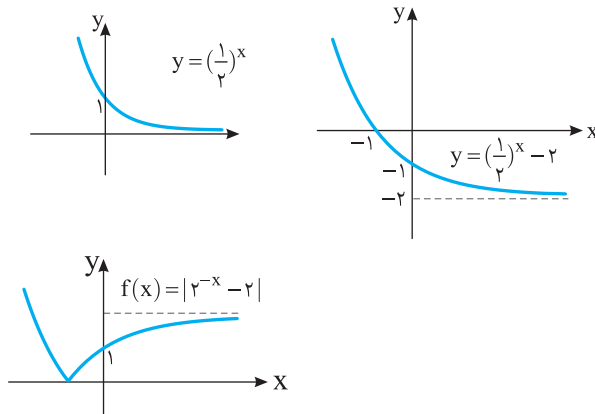
بنابراین، مجموعه جواب‌های معادله مورد نظر بازه $\left[\frac{6+a}{3}, \frac{8+a}{3}\right)$ است. در

نتیجه، $\frac{8+a}{3} = 0$ ، یعنی $a = -8$. توجه کنید که اگر $a = -8$ ، آن‌گاه

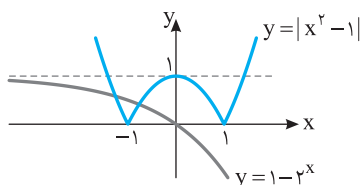
$$\frac{6+a}{3} = \frac{-2}{3}$$

از $x+3 > 0$ نتیجه می‌شود $x > -3$ و از $2-x > 0$ نتیجه می‌شود $x < 2$. از طرف دیگر اگر $\log(2-x) = 0$ ، آن‌گاه $2-x = 1$ ، در نتیجه $x = 1$. بنابراین دامنه تابع f به صورت $\{-1\} - (-3, 2)$ است.

گزینه ۳۵۱-۴ ابتدا توجه کنید که $f(x) = |(\frac{1}{2})^x - 2|$ نمودار تابع به ترتیب زیر رسم می‌شود:



گزینه ۳۵۲-۴ نمودار تابع‌های $y = 1-2^x$ و $y = |x^2-1|$ را رسم می‌کنیم. از روی شکل معلوم است دو نقطه تقاطع با طول‌های منفی وجود دارد.



گزینه ۳۵۳-۱ معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$2^{x+2} - 2^{x+1} = 5^{x+2} - 4 \times 5^{x+1} \Rightarrow 2^{x+1}(2-1) = 5^{x+1}(5-4)$$

$$2^{x+1} = 5^{x+1} \Rightarrow (\frac{2}{5})^{x+1} = 1$$

بنابراین $x+1=0$ و در نتیجه $x=-1$. پس معادله فقط یک جواب دارد.

گزینه ۳۵۴-۲ اگر فرض کنیم $(\frac{2}{3})^x = t$ ، نامعادله مورد نظر می‌شود

$$t^2 + \frac{2}{3}t - \frac{1}{9} > 0 \Rightarrow (t + \frac{1}{3})(t - \frac{1}{3}) > 0$$

$$\text{چون } t + \frac{1}{3} = (\frac{2}{3})^x + \frac{1}{3} > 0 \text{، پس}$$

$$t - \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow (\frac{2}{3})^x > (\frac{1}{3})^1 \xrightarrow{\frac{2}{3} < 1} x < 1$$

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله مورد نظر بازه $(-\infty, 1)$ است، در نتیجه $a=1$.

گزینه ۳۵۵-۲ ابتدا توجه کنید که $f(-1)=0$ و $f(0)=1$ پس

$$f(0) = \log_p b = 1 \Rightarrow b = p$$

$$f(-1) = \log_p(-a+b) = 0 \Rightarrow \log_p(-a+p) = 0$$

$$-a+p = 1 \Rightarrow a = p-1$$

بنابراین $f(x) = \log_p(px+p-1)$ و دامنه تابع $(-\frac{p}{p-1}, +\infty)$ است. پس

حداقل مقدار c برابر $-\frac{p}{p-1}$ است.

گزینه ۳۴۵-۳ نمودار تابع از نقطه $(5, 0)$ می‌گذرد، پس

$$f(5) = 0 \Rightarrow \log_a(5b-3) = 0 \Rightarrow 5b-3 = 1 \Rightarrow b = \frac{4}{5}$$

به این ترتیب $f(x) = \log_a(\frac{4}{5}x-3)$ نمودار تابع از نقطه $(15, 2)$

می‌گذرد، پس

$$f(15) = 2 \Rightarrow \log_a(\frac{4}{5} \times 15 - 3) = 2 \Rightarrow \log_a 9 = 2 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

$$\text{بنابراین } ab = \frac{12}{5}$$

گزینه ۳۴۶-۱ با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \log \sqrt[4]{72} &= \log 72^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \log 72 = \frac{1}{4} \log(2^3 \times 3^2) \\ &= \frac{1}{4} (\log 2^3 + \log 3^2) = \frac{1}{4} (3 \log 2 + 2 \log 3) = \frac{1}{4} (3b + 2a) \end{aligned}$$

گزینه ۳۴۷-۱ چون $\frac{1}{\log_a b} = \log_b a$ پس

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log_7 30} + \frac{1}{\log_7 30} + \frac{1}{\log_7 30} &= \log_{30} 7 + \log_{30} 7 + \log_{30} 7 \\ &= \log_{30} (7 \times 7 \times 7) = \log_{30} 343 = 1 \end{aligned}$$

گزینه ۳۴۸-۱ معادله را به صورت $\log \frac{x-1}{x} = \log(\log 2)$ می‌نویسیم.

بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x} &= \log 2 \Rightarrow x-1 = x \log 2 \Rightarrow x = \frac{1}{1-\log 2} = \frac{1}{\log 10 - \log 2} \\ &= \frac{1}{\log \frac{10}{2}} = \frac{1}{\log 5} = \frac{\log 10}{\log 5} = \frac{\log 2 + \log 5}{\log 5} = \frac{\log 2}{\log 5} + 1 = \log_5 2 + 1 \end{aligned}$$

گزینه ۳۴۹-۱ راه حل اول از دو طرف معادله مورد نظر در مبنای ۱۰

لگاریتم می‌گیریم:

$$(x+1) \log 2 = (x-1) \log 5 \Rightarrow x(\log 5 - \log 2) = \log 2 + \log 5$$

$$x \log \frac{5}{2} = \log 10 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\log \frac{5}{2}} = \frac{1}{\log 5 - \log 2} = \frac{1}{\log 10 - \log 4} = \frac{1}{1 - 2 \log 2}$$

راه حل دوم توجه کنید که

$$2^{x+1} = 5^{x-1} \Rightarrow 2^x \times 2 = 5^x \times 5^{-1} \Rightarrow (\frac{2}{5})^x = \frac{1}{2}$$

از دو طرف این معادله در مبنای ۱۰ لگاریتم می‌گیریم:

$$x \log \frac{2}{5} = \log 10 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\log \frac{2}{5}} = \frac{1}{\log 2 - \log 5}$$

$$= \frac{1}{\log 10 - \log 4} = \frac{1}{1 - 2 \log 2}$$

گزینه ۳۵۰-۱ باید هر دو عبارت $\log(2-x)$ و $\log(x+3)$ با معنی

باشند و نیز $\log(2-x) \neq 0$:

$$D_f = \{x | x+3 > 0, 2-x > 0, \log(2-x) \neq 0\}$$

۳۵۶- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\log_{\frac{2}{5}} \frac{2}{5} = \frac{\log \frac{2}{5}}{\log \frac{2}{5}} = \frac{\log 2 - \log 5}{\log 2 - \log 5} = \frac{\log 2 - \log 5}{2 \log 2 - \log 5} = \frac{\log \frac{1}{5} - \log 5}{2 \log \frac{1}{5} - \log 5}$$

$$= \frac{\log 10 - \log 5 - \log 5}{2(\log 10 - \log 5) - \log 5} = \frac{1 - 2a}{2 - 3a}$$

۳۵۷- گزینه ۱ توجه کنید که

$$2^x = 10 \Rightarrow x = \log_2 10 = \frac{\log 10}{\log 2}, \quad 5^y = 10 \Rightarrow y = \log_5 10 = \frac{\log 10}{\log 5}$$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{\log 2 + \log 5}{\log 10} = \frac{\log(2 \times 5)}{\log 10} = \frac{\log 10}{\log 10} = 1$$

۳۵۸- گزینه ۲ توجه کنید که $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ معادله را به صورت

$$5^{\log_2 x} + 4 \times 5^{\log_2 x} = 125 \Rightarrow 5 \times 5^{\log_2 x} = 125 \Rightarrow 5^{\log_2 x} = 25 = 5^2$$

$$\Rightarrow \log_2 x = 2 \Rightarrow x = 4$$

پس $k=4$ و در نتیجه $\log_2(k+4) = \log_2 8 = 3$ ۳۵۹- گزینه ۲ توجه کنید که تابع لگاریتم در مبنای $\frac{1}{2}$ اکیداً نزولی و

تابع لگاریتم در مبنای ۳ اکیداً صعودی است. بنابراین

$$\log_{\frac{1}{2}}(\log_2(x+1)) < -1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} 2$$

$$\log_2(x+1) > 2 \Rightarrow \log_2 9 \Rightarrow x+1 > 9 \Rightarrow x > 8$$

بنابراین عددهای طبیعی ۱، ۲، ... و ۸ در نامعادله مورد نظر صدق نمی‌کنند.

۳۶۰- گزینه ۳ برای اینکه لگاریتم‌ها بامعنی باشند باید $x > 0$ و $x \neq 1$.

اکنون توجه کنید که

$$D_f = \{x | x > 0, x \neq 1, \log_2 x + 2 \log_x 3 - 3 \geq 0\}$$

اگر فرض کنیم $\log_2 x = t$ ، آن‌گاه $\log_x 3 = \frac{1}{t}$

در نتیجه

$$\log_2 x + 2 \log_x 3 - 3 \geq 0$$

$$t + \frac{2}{t} - 3 \geq 0 \Rightarrow \frac{t^2 - 3t + 2}{t} \geq 0 \Rightarrow \frac{(t-1)(t-2)}{t} \geq 0$$

t	$-\infty$	۰	۱	۲	$+\infty$
$\frac{(t-1)(t-2)}{t}$		-	+	-	+

بنابراین باید $0 < t \leq 1$ یا $t \geq 2$. اکنون توجه کنید که

$$0 < t \leq 1 \Rightarrow 0 < \log_2 x \leq 1 \Rightarrow 1 < x \leq 2, \quad t \geq 2 \Rightarrow \log_2 x \geq 2 \Rightarrow x \geq 9$$

بنابراین $D_f = (1, 2] \cup [9, +\infty)$ ، پس $a=1$ ، $b=3$ و $a+b=4$

۳۶۱- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\sqrt[4]{5^4 \sqrt{5^3}} = 5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{8}} \times 5^{\frac{1}{8}} = 5^{\frac{12+2+4}{24}} = 5^{\frac{19}{24}}$$

$$\sqrt[4]{5^4 \sqrt{5}} = 5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{6+1}{4}} = 5^{\frac{7}{4}}$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{\frac{19}{24}}{\frac{7}{4}} = \frac{19}{24} \times \frac{4}{7} = \frac{19}{6} = 3\frac{1}{6}$$

۳۶۲- گزینه ۱ طول رأس سهمی برابر $\frac{5}{2}$ است، پس

$$-\frac{a}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow a = -5$$

مقدار $f(0)$ مساوی ۴ است. پس

$$f(0) = -b \Rightarrow -b = 4 \Rightarrow b = -4$$

بنابراین $f(x) = x^2 - 5x + 4$. مجموع و حاصل ضرب جواب‌های معادله $f(x) = 0$ به ترتیب برابر ۵ و ۴ هستند، پس مجموع جواب‌ها یک واحد بیشتر

از حاصل ضرب آن‌هاست.

۳۶۳- گزینه ۲ معادله را به صورت $\sqrt{3-x} = 2 - \sqrt{x}$ می‌نویسیم و

طرفین آن را به توان دو می‌رسانیم:

$$3-x = 4+x-4\sqrt{x} \Rightarrow 4\sqrt{x} = 1+2x$$

مجدداً طرفین را به توان دو می‌رسانیم:

$$16x = 1+4x+4x^2 \Rightarrow 4x^2 - 12x + 1 = 0$$

مجموع جواب‌های معادله بالا مورد نظر است که برابر ۳ است. (توجه کنید

که معادله درجه دوم فوق دو جواب دارد که در معادله اصلی صدق می‌کنند.)

۳۶۴- گزینه ۳ ابتدا تساوی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) - 2 \sin(2\pi + \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) - 2 \cos(3\pi - \alpha)} = 3 \Rightarrow \frac{\cos \alpha - 2 \sin \alpha}{-\sin \alpha + 2 \cos \alpha} = 3$$

$$\cos \alpha - 2 \sin \alpha = -3 \sin \alpha + 6 \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = 5 \cos \alpha \Rightarrow \tan \alpha = 5$$

$$\tan(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = \cot \alpha = \frac{1}{5}$$

۳۶۵- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\frac{\sin x + 2 \cos x}{\cos x - \sin x} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4 \sin x + 8 \cos x = \cos x - \sin x$$

$$5 \sin x = -7 \cos x \Rightarrow \tan x = -\frac{7}{5}$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2(-\frac{7}{5})}{1 - (-\frac{7}{5})^2} = \frac{-\frac{14}{5}}{1 - \frac{49}{25}} = \frac{-\frac{14}{5}}{-\frac{24}{25}} = \frac{14}{12}$$

۳۶۶- گزینه ۲ در نقاطی نمودار تابع f محور طول‌ها را قطع می‌کند کهپس $f(x) = 0$

$$\cos 3x = 0, \quad 3x = \frac{(2k+1)\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

چون جواب‌های واقع در بازه $(\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$ را می‌خواهیم، پس

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{7\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{(2k+1)\pi}{6} < \frac{7\pi}{4}$$

$$3 < 2k+1 < 21 \Rightarrow 1 < k < 10$$

بنابراین به ازای $k=2$ ، $k=3$ ، ... و $k=9$ برای x هشت مقدار به دست

می‌آید که طول نقاط برخورد نمودار تابع با محور طول‌هاست.

۳۷۲- گزینه ۳ راه حل اول ابتدا توجه کنید که

$$x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x-1) + (x-1) = (x-1)(x^2+1)$$

اکنون اگر صورت و مخرج کسر داده شده را در مزدوج مخرج ضرب کنیم، معلوم می‌شود که حد مورد نظر برابر است با

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+1)(2x+\sqrt{3x^2+1})}{(2x-\sqrt{3x^2+1})(2x+\sqrt{3x^2+1})} \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+1)(2x+\sqrt{3x^2+1})}{4x^2-3x^2-1} \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+1)(2x+\sqrt{3x^2+1})}{(x-1)(x+1)} \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2+1)(2x+\sqrt{3x^2+1})}{x+1} = \frac{2(2+2)}{2} = 4 \end{aligned}$$

راه حل دوم از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{2x - \sqrt{3x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x + 1}{2 - \frac{6x}{2\sqrt{3x^2 + 1}}} = \frac{2}{2 - \frac{3}{2}} = 4$$

۳۷۳- گزینه ۴ اگر $x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+$ آن‌گاه $\cos x \rightarrow 0^-$ و در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{-1}{\sin x - \sin^2 x} = -1. [\cos x] = -1 \text{ پس باید مقدار } \frac{1}{\sin x - \sin^2 x}$$

آوریم. حد مخرج کسر صفر است و مقدار عبارت مخرج مثبت است، زیرا در یک همسایگی راست $\frac{\pi}{2}$ ، نابرابری $0 < \sin x < 1$ برقرار است. بنابراین

$$\sin x - \sin^2 x = \sin x(1 - \sin x), \quad \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{-1}{\sin x - \sin^2 x} = -\infty$$

۳۷۴- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که خطوط $y=1$ و $y=-1$ مجانب‌های

افقی نمودار تابع f هستند. بنابراین باید نقاط تلاقی نمودار تابع f و این خطوط را مشخص کنیم:

$$\begin{aligned} f(x)=1 &\Rightarrow \frac{x}{|x|-2} = 1 \Rightarrow |x|-2=x \\ \begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow x-2=x \Rightarrow -2=0 \text{ (غ.ق.ق.)} \\ x < 0 \Rightarrow -x-2=x \Rightarrow x=-1 \end{cases} \\ f(x)=-1 &\Rightarrow \frac{x}{|x|-2} = -1 \Rightarrow |x|-2=-x \\ \begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow x-2=-x \Rightarrow x=1 \\ x < 0 \Rightarrow -x-2=-x \Rightarrow -2=0 \text{ (غ.ق.ق.)} \end{cases} \end{aligned}$$

بنابراین $A(-1, 1)$ و $B(1, -1)$ نقاط تلاقی نمودار تابع f با خطوط مجانب آن است.

۳۷۵- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - [x]) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - 1) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 2) = 4 \end{aligned}$$

پس به ازای هیچ مقدار a حد چپ و حد راست تابع نمی‌توانند با مقدار تابع در $x=2$ برابر باشند.

۳۶۷- گزینه ۲ اگر $x < 0$ ، نامعادله برقرار است و عددهای منفی در آن صدق می‌کنند. اگر $x > 0$ ، آن‌گاه

$$\begin{cases} x^2 - x > 2x \Rightarrow x^2 - 3x > 0 \Rightarrow x(x-3) > 0 \Rightarrow x-3 > 0 \Rightarrow x > 3 \\ \text{یا} \\ x^2 - x < -2x \Rightarrow x^2 + x < 0 \Rightarrow x(x+1) < 0 \Rightarrow x+1 < 0 \Rightarrow x < -1 \end{cases}$$

واضح است که $x=0$ نیز جواب نامعادله نیست. بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله به صورت $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$ است که می‌توانیم آن را به صورت $\mathbb{R} - [0, 3]$ بنویسیم. پس $a=0$ و $b=3$ و در نتیجه $a+b=3$.

۳۶۸- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$4x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(4-x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 4 \Rightarrow D_f = [0, 4]$$

بنابراین

$$D_{\text{fof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} = \{x \mid 0 \leq x \leq 4, 0 \leq \sqrt{4x-x^2} + 3 \leq 4\}$$

از طرف دیگر

$$\begin{aligned} -3 \leq \sqrt{4x-x^2} \leq 1 &\Rightarrow 4x-x^2 \leq 1 \Rightarrow x^2-4x+4 \geq 3 \\ (x-2)^2 \geq 3 &\Rightarrow \begin{cases} x-2 \geq \sqrt{3} \\ x-2 \leq -\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2+\sqrt{3} \\ x \leq 2-\sqrt{3} \end{cases} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} D_{\text{fof}} &= \{x \mid 0 \leq x \leq 4, x \geq 2+\sqrt{3} \text{ یا } x \leq 2-\sqrt{3}\} \\ &= [0, 2-\sqrt{3}] \cup [2+\sqrt{3}, 4] \end{aligned}$$

پس $a=2-\sqrt{3}$ و $b=2+\sqrt{3}$ و $ab=4-3=1$.

۳۶۹- گزینه ۴ ابتدا ضابطه تابع وارون تابع f را پیدا می‌کنیم

$$\begin{aligned} y &= 2 - \sqrt{4-x^2}, \quad -2 \leq x \leq 0 \\ \sqrt{4-x^2} &= 2-y \Rightarrow 4-x^2 = (2-y)^2 \\ x^2 &= 4 - (2-y)^2 \Rightarrow |x| = \sqrt{4 - (2-y)^2} = \sqrt{4y-y^2} \end{aligned}$$

چون $-2 \leq x \leq 0$ ، پس $x = -\sqrt{4y-y^2}$ و در نتیجه $a+b=-1$ و $b=0$ و $a=-1$ بنابراین $f^{-1}(x) = -\sqrt{4x-x^2}$.

۳۷۰- گزینه ۳ اگر نمودار تابع $y=f(2x)$ را یک واحد به سمت

راست منتقل کنیم، نمودار تابع زیر به دست می‌آید:

$$y = 4f(2(x-1)) = 4f(2x-2)$$

اگر این نمودار را دو واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع

به دست می‌آید. اگر طول نقاط این نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع

$y=4f(2(2x-2))+2$ رسم می‌شود و اگر عرض نقاط این نمودار را نصف کنیم،

نمودار تابع $y=\frac{1}{4}(4f(4x-2))+2$ رسم می‌شود. بنابراین ضابطه تابعی که

نمودار آن رسم شده است به صورت $y=2f(4x-2)+1$ است.

۳۷۱- گزینه ۴ شرایط زیر باید برقرار باشند:

$$x-3 > 0 \Rightarrow x > 3$$

$$\log_{5/4}(x-3) \geq 1 \Rightarrow \log_{5/4}(x-3) \geq \log_{5/4} 5/4$$

$$x-3 \leq 5/4 \Rightarrow x \leq 3/4$$

بنابراین دامنه تابع $[3, 3/4]$ است. پس $a=3$ و $b=3/5$ و در نتیجه

$$b-a = \frac{1}{2}$$

۳۷۶- گزینه ۴ شرط لازم برای مشتق پذیری تابع در یک نقطه پیوستگی آن است:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (1 + a \cos \pi x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (bx^2 + x)$$

$$1 - a = b + 1 \Rightarrow b = -a$$

همچنین باید مشتق چپ و مشتق راست تابع f در نقطه $x=1$ با هم برابر باشند:

$$f'(x) = \begin{cases} -a\pi \sin \pi x & x > 1 \\ 2bx + 1 & x < 1 \end{cases}$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = 0, \quad f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 2b + 1$$

$$2b + 1 = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

بنابراین $a = \frac{1}{2}$

۳۷۷- گزینه ۳ با توجه به تعریف مشتق، از $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - 9}{h} = \frac{3}{2}$ نتیجه می‌شود $f'(2) = \frac{3}{2}$ و $f(2) = 9$ از طرف دیگر،

$$g'(x) = \sqrt{f(x)} + \frac{xf'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

$$g'(2) = \sqrt{f(2)} + \frac{2f'(2)}{2\sqrt{f(2)}} = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

۳۷۸- گزینه ۲ ابتدا مشتق تابع f را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = \frac{2x(x^3 + 4) - 3x^4}{(x^3 + 4)^2} = \frac{x(4 - x^3)}{(x^3 + 4)^2}$$

بنابراین جدول تعیین علامت $f'(x)$ به صورت زیر است:

x	$-\infty$	$-\sqrt[3]{4}$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	

بنابراین تابع f روی بازه $[0, 2]$ صعودی است و حداکثر مقدار a برابر ۲ است.

۳۷۹- گزینه ۲ توجه کنید که $f''(x) = 12x(x-2)$ ، بنابراین

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f''(x)$		$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	
f		$\cup$	$\cap$	$\cup$

از روی این جدول معلوم می‌شود که کمترین مقدار a برابر صفر و بیشترین مقدار b برابر ۲ است. بنابراین بیشترین مقدار $b-a$ برابر ۲ است.

۳۸۰- گزینه ۳ نمودار تابع f در مبدأ مختصات بر محور x مماس است،

$$f'(0) = 0: f'(0) = 0 \Rightarrow b = 0$$

همچنین -4 ریشه تابع است، پس

$$f(x) = x^4 + ax^3 = x^3(x+a) \xrightarrow{f(-4)=0} (-4)^3(-4+a) = 0 \Rightarrow a = 4$$

بنابراین $f(x) = x^4 + 4x^3$. اکنون ریشه‌های تابع مشتق را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 + 12x^2 = 0 \Rightarrow x^2(4x + 12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

مشخص است که $x = -3$ طول نقطهٔ مینیمم مطلق تابع است. مقدار مینیمم مطلق

$$f(-3) = (-3)^4 + 4(-3)^3 = 81 - 108 = -27$$

۳۸۱- گزینه ۲ اگر از دستور $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ استفاده کنیم،

$$S_7 = 84 \Rightarrow 84 = \frac{7}{2}(2a_1 + (7-1)d)$$

$$S_{18} = 711 \Rightarrow 711 = \frac{18}{2}(2a_1 + (18-1)d)$$

بنابراین

$$\begin{cases} a_1 + 3d = 12 \\ 2a_1 + 17d = 79 \end{cases}$$

اگر این دستگاه معادلات را حل کنیم، معلوم می‌شود که $a_1 = -3$ و $d = 5$.

$$S_{11} = \frac{11}{2}(2a_1 + (11-1)d) = \frac{11}{2}(2(-3) + 10 \times 5) = 242$$

بنابراین

۳۸۲- گزینه ۲ توجه کنید که $a - c = (a - b) + (b - c) = 8$ ،

همچنین،

$$\frac{ab - ac + bc - b^2}{a - c} = \frac{-ac + b(a + c) - b^2}{a - c} = \frac{-(b^2 - b(a + c) + ac)}{a - c}$$

$$= \frac{-(b-a)(b-c)}{a-c} = \frac{-(-4)(4)}{8} = 2$$

۳۸۳- گزینه ۳ توجه کنید که $x_1 + x_2 = 3$ و $x_1 x_2 = 2m + 1$.

بنابراین

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 3x_1 - x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

در نتیجه

$$x_1 x_2 = 2 \Rightarrow 2m + 1 = 2 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

۳۸۴- گزینه ۱ نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\frac{1}{x+3} < \frac{x-5}{9} \Rightarrow \frac{9}{x+3} + 5 - x < 0 \Rightarrow \frac{9 + (5-x)(x+3)}{x+3} < 0$$

$$\frac{-x^2 + 2x + 24}{x+3} < 0 \Rightarrow \frac{(x-6)(x+4)}{x+3} > 0$$

با توجه به جدول تعیین علامت زیر، مجموعهٔ جواب نامعادله به صورت

$$(-4, -3) \cup (6, +\infty) \text{ است.}$$

x	$-\infty$	-4	-3	6	$+\infty$
$\frac{(x-6)(x+4)}{x+3}$		$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	
		$-$	$+$	$-$	$+$

پس $a = -4$ ، $b = 6$ و $ab = -24$.

۳۸۵- گزینه ۳ راه حل اول ابتدا توجه کنید که

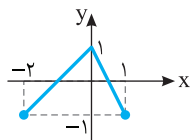
$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

بنابراین

$$\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

بنابراین جواب‌های واقع در بازه $[0, 2\pi]$ عبارتند از صفر، 2π و $\frac{3\pi}{2}$.



$$y = 1 + 2f(-x)$$

راه حل دوم ابتدا توجه کنید که $f(-1) = f(2) = -1$. اگر شکل (۲) مربوط به تابع g باشد، آن گاه $g(-2) = g(1) = -1$ از طرف دیگر،

$$g(x) = 1 + 2f(-x)$$

$$g(-2) = 1 + 2f(2) = 1 - 2 = -1$$

$$g(1) = 1 + 2f(-1) = 1 - 2 = -1$$

بنابراین شکل (۲) متعلق به تابع $g(x) = 1 + 2f(-x)$ است.

گزینه ۳۹۰ از تساوی $\log \sqrt{a} = a$ نتیجه می شود

$$\log \sqrt[3]{2} = a \Rightarrow \frac{3}{2} \log 2 = a \Rightarrow \log 2 = \frac{2a}{3}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \log 125 &= \log 5^3 = 3 \log 5 = 3 \log \frac{1}{2} \\ &= 3(\log 10 - \log 2) = 3(1 - \frac{2a}{3}) = 3 - 2a \end{aligned}$$

گزینه ۳۹۱ چون حد مخرج صفر است و حد مورد نظر وجود دارد،

پس حد صورت هم باید صفر باشد تا حد مورد نظر به صورت $\frac{0}{0}$ در بیاید. در

نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - ax + b) = 0 \Rightarrow 1 - a + b = 0 \Rightarrow b = a - 1$$

اکنون باید حد زیر را حساب کنیم

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - ax + a - 1}{2x^2 - 3x + 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-a+1)}{(x-1)(2x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-a+1}{2x-1} = 2 - a \end{aligned}$$

بنابراین

$$2 - a = a - 4 \Rightarrow a = 3$$

پس $b = 2$ و در نتیجه $a + b = 5$.

گزینه ۳۹۲ اگر در صورت کسر داده شده جمله شامل x^3 وجود

داشته باشد، مقدار حد مورد نظر برابر $-\infty$ یا $+\infty$ است. بنابراین باید

ضریب x^3 در صورت کسر داده شده صفر باشد، یعنی $a + 1 = 0$ ، پس

$a = -1$. در این صورت حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2 + x}{(b+1)x^2 - 4b + 1} = \frac{-2}{b+1}$$

بنابراین $\frac{-2}{b+1} = 2$ ، یعنی $b = -2$. به این ترتیب $a + b = -3$.

گزینه ۳۹۳ شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $x = 1$ همان

$f'(1)$ است. پس،

$$f'(x) = 4x^3 + 2mx + 1 \Rightarrow f'(1) = 4 + 2m + 1 = 2 \Rightarrow m = -\frac{3}{2}$$

راه حل دوم معادله را به صورت زیر ساده می کنیم:

$$\sin x + 1 - \cos x = 0 \Rightarrow 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 0$$

$$2 \sin \frac{x}{2} (\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}) = 0$$

$$\begin{cases} \sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2\pi \\ \sin \frac{x}{2} = -\cos \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

گزینه ۳۸۶ توجه کنید که اگر $a > 0$ ، آن گاه معادله جواب ندارد.

اگر $a \leq 0$ ، آن گاه

$$|x-1|-a = -a$$

$$\begin{cases} |x-1|-a = -a \\ |x-1|-a = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x-1| = 0 \Rightarrow x = 1 \\ |x-1| = 2a \end{cases} (*)$$

اگر $a < 0$ ، آن گاه معادله (*) جواب ندارد. اگر $a = 0$ ، آن گاه

$$|x-1| = 0 \Rightarrow x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

بنابراین در حالتی که $a \leq 0$ معادله یک جواب دارد.

گزینه ۳۸۷ توجه کنید که $D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$ و $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

بنابراین

$$D_{f \circ g} = \{x | x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x | x \neq -2, \frac{2x-3}{x+2} \neq 1\}$$

از طرف دیگر

$$\frac{2x-3}{x+2} \neq 1 \Rightarrow 2x-3 \neq x+2 \Rightarrow x \neq 5$$

پس $D_{f \circ g} = \{x | x \neq -2, x \neq 5\} = \mathbb{R} - \{-2, 5\}$.

بنابراین -2 و 5 در دامنه تابع $f \circ g$ قرار ندارند که مجموع آنها برابر ۳ است.

گزینه ۳۸۸ چون این دو منحنی در نقطه $(1, 2)$ برخورد می کنند،

پس

$$(1, 2) \in f \Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow \sqrt[3]{a+b} = 2 \Rightarrow a+b = 8$$

$$(1, 2) \in f^{-1} \Rightarrow (2, 1) \in f \Rightarrow f(2) = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{2a+b} = 1 \Rightarrow 2a+b = 1$$

در نتیجه

$$\begin{cases} a+b=8 \\ 2a+b=1 \end{cases} \Rightarrow a=-7, b=15$$

بنابراین $3a+b = -6$.

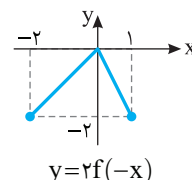
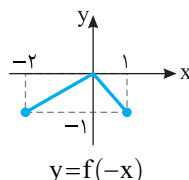
گزینه ۳۸۹ **راه حل اول** اگر نمودار تابع f را نسبت به محور عرض ها

قرینه کنیم، نمودار تابع $y = f(-x)$ به دست می آید. اگر عرض نقاط نمودار

به دست آمده را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y = 2f(-x)$ به دست می آید.

نمودار اخیر را یک واحد به بالا منتقل می کنیم تا نمودار تابع $y = 1 + 2f(-x)$

به دست آید که به صورت شکل (۲) خواهد بود.



۳۹۴- گزینه ۲

تابع در $x=3$ پیوسته است و

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x+1}} & x > 3 \\ 1 & x < 3 \end{cases}$$

$$f'_+(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{4}, \quad f'_-(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 1 = 1$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(3+h) - f(3-h)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(3-h) - f(3)}{-h} \\ = f'_+(3) + f'_-(3) = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

توجه کنید که می‌توانیم از قاعده هوییتال نیز استفاده کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(3+h) - f(3-h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f'(3+h) + f'(3-h)}{1} \\ &= f'_+(3) + f'_-(3) = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

۳۹۵- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned} f(x) = x^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{5}{6}} \Rightarrow f'(x) = \frac{5}{6} x^{-\frac{1}{6}} \Rightarrow f''(x) = -\frac{5}{36} x^{-\frac{7}{6}} = -\frac{5}{36} x^{-\frac{1}{6}} x^{-1} = -\frac{5}{36} x^{-\frac{7}{6}} \\ \text{بنابراین } f''(4) = -\frac{5}{36} \times 4 \times 2 = -\frac{10}{9} \end{aligned}$$

۳۹۶- گزینه ۱

ابتدا توجه کنید که $f'(x) = x^2 + 2x + k$ ، برای اینکه تابع اکیداً صعودی باشد باید مشتق آن به ازای هر x نامنفی باشد: $x^2 + 2x + k \geq 0$ ، بنابراین

$$\Delta = 4 - 4k \leq 0 \Rightarrow k \geq 1$$

۳۹۷- گزینه ۴ به ازای تمام مقادیر x ، باید مشتق دوم تابع نامنفی باشد:

$$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 3x$$

$$f''(x) = 12x^2 + 6ax + 3$$

برای اینکه این عبارت درجه دوم همواره مثبت باشد، باید

$$\Delta = 36a^2 - 144 = 36(a^2 - 4) \leq 0 \Rightarrow -2 \leq a \leq 2$$

۳۹۸- گزینه ۴ می‌دانیم در تابع درجه سوم

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

نقطه عطف به صورت $\left(\frac{-b}{3a}, f\left(\frac{-b}{3a}\right)\right)$ است. پس

$$\frac{-b}{3a} = 1 \Rightarrow b = -3a$$

$$-2 = f(1) \Rightarrow a + b - 3 - 1 = -2 \Rightarrow a + b = 2$$

در نتیجه $a = -1$ و $b = 3$ ، بنابراین تابع به صورت

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x - 1$$

تابع ابتدا مشتق تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x) = -3x^2 + 6x - 3 = -3(x^2 - 2x + 1) = -3(x-1)^2$$

مشخص است که همواره $f'(x) \leq 0$ ، پس تابع اکیداً نزولی است و اکسترمم نسبی

ندارد.

۳۹۹- گزینه ۲

با توجه به ضابطه داده شده می‌توان نتیجه گرفت که تابع از نقطه $(0, 2)$ می‌گذرد، پس مجانب افقی تابع خط $y=2$ است. بنابراین

$$2 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a \Rightarrow a = 2$$

همچنین تابع $f(x) = \frac{2x^2 + bx + 8}{x^2 + 4}$ بر محور x مماس است، پس معادله $f(x) = 0$ ریشه مضاعف دارد: $2x^2 + bx + 8 = 0 \Rightarrow b^2 - 64 = 0 \Rightarrow b = \pm 8$ چون نمودار تابع در نقطه‌ای به طول مثبت بر محور x مماس است، می‌توان نتیجه گرفت $b < 0$ ، پس مقدار $b = -8$ قابل قبول است. بنابراین $a + b = -6$.

۴۰۰- گزینه ۱

مقدار تابع f' در نقطه‌های -1 و 5 برابر صفر است، پس خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌های به طول -1 و 5 موازی محور x است. روی بازه‌های $(-\infty, -1)$ و $(5, +\infty)$ علامت f' منفی است، پس تابع f روی این بازه‌ها اکیداً نزولی است. روی بازه $(-1, 5)$ علامت f' مثبت است، پس تابع f روی این بازه اکیداً صعودی است. توجه کنید که فقط نمودار گزینه (۱) این ویژگی‌ها را دارد.

۴۰۱- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\begin{aligned} S_{P_0} = 3S_{P_1} &\Rightarrow \frac{r_0}{r} (ra_1 + 19d) = 3 \times \frac{1}{r} (ra_1 + 19d) \\ 20a_1 + 190d = 36a_1 + 198d &\Rightarrow 16a_1 = -8d \Rightarrow d = -2a_1 \\ \text{از طرف دیگر, } a_p = 6 &\Rightarrow a_1 + 2d = 6 \Rightarrow a_1 - 4a_1 = 6 \Rightarrow a_1 = -2 \\ \text{پس } \begin{cases} a_1 = -2 \\ d = 4 \end{cases} &\Rightarrow a_{10} = a_1 + 9d = -2 + 9 \times 4 = 34 \end{aligned}$$

۴۰۲- گزینه ۲ ابتدا مخرج کسرها را با استفاده از اتحادهای چاق و لاغر گویا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{2} + 1} &= \frac{\sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{4} + \sqrt{2} + 1)} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - 1} = \sqrt{2} - 1 \\ \frac{3}{\sqrt{4} - \sqrt{2} + 1} &= \frac{3(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{4} - \sqrt{2} + 1)} = \frac{3(\sqrt{2} + 1)}{2 + 1} = \sqrt{2} + 1 \\ \text{بنابراین } A &= \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} + 1 = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

۴۰۳- گزینه ۳ اگر α و β جواب‌های معادله زیر باشند،

$$\begin{aligned} x^2 - (2m-3)x + 2n+2 &= 0 \\ \alpha + \beta &= 2m-3, \quad \alpha\beta = 2n+2 \end{aligned}$$

همچنین اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادله $x^2 - nx + m+1 = 0$ باشند، آنگاه

$$x_1 + x_2 = n, \quad x_1 x_2 = m+1$$

با توجه به $\alpha = x_1 + 1$ و $\beta = x_2 + 1$ نتیجه می‌شود

$$\alpha\beta = (x_1 + 1)(x_2 + 1) = x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1$$

بنابراین

$$\begin{cases} 2m-3 = n+2 \\ 2n+2 = m+1+n+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m-5 = n \\ m = n \end{cases}$$

$$2m-5 = m \Rightarrow m = 5, \quad n = 5$$

پس

بنابراین $m+n=10$.

۴۰۷- گزینه ۴ می‌دانیم اگر $-1 \leq a \leq 1$ ، آن‌گاه $|a| \leq 1$. بنابراین

نامعادله را به صورت $|\frac{x-2}{x-3}| \leq 1$ می‌نویسیم. بنابراین

$$\frac{|x-2|}{|x-3|} \leq 1 \Rightarrow |x-2| \leq |x-3|, \quad x \neq 3$$

$$|x-2| \leq |x-3| \Rightarrow x^2 - 4x + 4 \leq x^2 - 6x + 9 \Rightarrow x \leq \frac{5}{2}$$

بنابراین $(-\infty, \frac{5}{2}]$ مجموعه جواب‌های نامعادله است و در نتیجه $a = 5$.

۲. $b = 2$ پس $a + b = 7$.

۴۰۸- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 2 \\ -x^2 + 2x & x \leq 2 \end{cases}$$

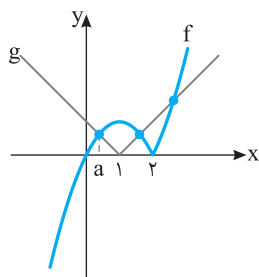
پس نمودار تابع‌های f و g به صورت زیر است. کمترین طول نقطه‌های برخورد برابر a است. چون $a < 1$ ، پس

$$f(x) = -x^2 + 2x, \quad g(x) = -x + 1$$

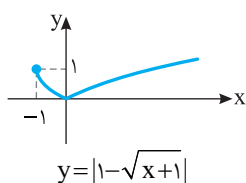
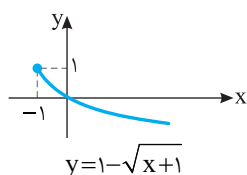
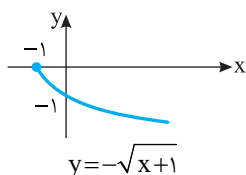
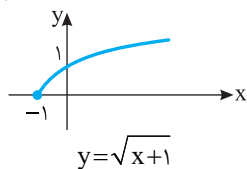
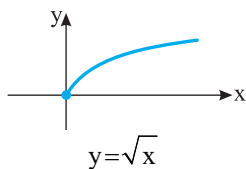
مقدار a از حل معادله $-x^2 + 2x = -x + 1$ به دست می‌آید:

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad (\text{غ.ق.}), \quad x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$



۴۰۹- گزینه ۱ مراحل رسم نمودار به صورت زیر است.



۴۰۴- گزینه ۱ اگر فرض کنیم $x^2 = t$ ، آن‌گاه $x = \pm\sqrt{t}$ ، $t \geq 0$ و

معادله به شکل زیر درمی‌آید

$$t^2 + 2mt + m^2 - 1 = 0 \quad (*)$$

در این معادله

$$\Delta = 4m^2 - 4(m^2 - 1) = 4 > 0$$

بنابراین معادله (*) به ازای هر مقدار m دو جواب حقیقی دارد. اگر هر دو جواب این معادله منفی باشند، آن‌گاه معادله اولیه جواب حقیقی نخواهد داشت.

بنابراین اگر t_1 و t_2 جواب‌های معادله (*) باشند، باید

$$t_1 + t_2 < 0 \Rightarrow -2m < 0 \Rightarrow m > 0$$

$$t_1 t_2 > 0 \Rightarrow m^2 - 1 > 0 \Rightarrow m < -1 \text{ یا } m > 1$$

بنابراین اگر $m > 1$ ، آن‌گاه معادله اولیه جواب حقیقی ندارد.

۴۰۵- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\cos^2 x - \cos^4 x = \cos^2 x (1 - \cos^2 x) = \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{8}$$

بنابراین

$$\tan^2 x + \cot^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

صورت کسر بالا را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \sin^4 x + \cos^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x - 2 \sin^2 x \cos^2 x \\ = (\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1 - \frac{1}{8}}{\frac{1}{8}} = 6$$

۴۰۶- گزینه ۳ معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم

$$\frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan x}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan x} + \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan x}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan x} = -3$$

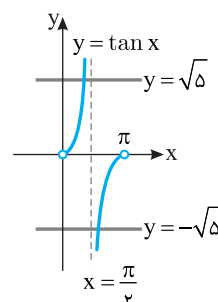
$$\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} + \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = -3$$

$$(1 + \tan x)^2 + (1 - \tan x)^2 = -3(1 - \tan^2 x)$$

$$2 + 2 \tan^2 x = -3 + 3 \tan^2 x$$

$$\tan^2 x = 5 \Rightarrow \tan x = \pm\sqrt{5}$$

بنابراین با توجه به نمودار تابع $y = \tan x$ معادله دو جواب در بازه $(0, \pi)$ دارد.



۴۱۰- گزینه ۱ چون تابع f اکیداً صعودی است، پس از $f^{-1}(4x-3) > f^{-1}(x^2)$ نتیجه می‌شود

$$4x-3 > x^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 < 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) < 0 \Rightarrow 1 < x < 3$$

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله شامل عدد صحیح ۲ است.

۴۱۱- گزینه ۳ اگر $x < 0$ ، باید وارون تابع $g(x) = \frac{2x+x}{2}$ را پیدا کنیم:

$$g(x) = \frac{3x}{2} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{2x}{3}, \quad x < 0$$

اگر $x \geq 0$ ، باید وارون تابع $h(x) = \frac{2x-x}{2}$ را پیدا کنیم:

$$h(x) = \frac{x}{2} \Rightarrow h^{-1}(x) = 2x, \quad x \geq 0$$

بنابراین وارون تابع به صورت زیر است:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{2x}{3} & x < 0 \\ 2x & x \geq 0 \end{cases}$$

که همان $f^{-1}(x) = \frac{4x+2|x|}{3}$ است. بنابراین $a=4$ ، $b=3$ و $a+b=7$.

۴۱۲- گزینه ۴ معادله داده شده را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\log_2(xy) + \log_2 \frac{x}{y} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \log_2(xy) + \frac{1}{3} \log_2 \frac{x}{y} = 0$$

$$3 \log_2(xy) + 2 \log_2 \frac{x}{y} = 0 \Rightarrow \log_2(xy)^3 + \log_2 \left(\frac{x}{y}\right)^2 = 0$$

$$\log_2((x^3 y^3) \left(\frac{x}{y}\right)^2) = 0 \Rightarrow x^5 y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x^5} = x^{-5}$$

بنابراین

$$\log_x y = \log_x x^{-5} = -5 \log_x x = -5$$

۴۱۳- گزینه ۳ توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ و حد مورد نظر

به صورت $\frac{0}{0}$ است. اکنون توجه کنید که

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^2(x) - 1}{2f^2(x) - 3f(x) + 1} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(f(x)-1)(f(x)+1)}{(f(x)-1)(2f(x)-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)+1}{2f(x)-1} = \frac{1+1}{2-1} = 2 \end{aligned}$$

۴۱۴- گزینه ۲ از اتحاد $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$ استفاده می‌کنیم

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2kx)}{1 - \cos 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(kx)}{2 \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(\frac{\sin kx}{kx} \right)^2 \times \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 \times k^2 \right) = 1^2 \times 1^2 \times k^2 = k^2 \end{aligned}$$

بنابراین $k^2 = 2k$ و در نتیجه $k=0$ یا $k=2$. پس مجموع مقدارهای ممکن برای k برابر ۲ است.

۴۱۵- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{x^2-1}{x^3-4x^2+5x-2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2-3x+2)} = \frac{x+1}{(x-1)(x-2)}$$

پس

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{x^3-4x^2+5x-2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = +\infty$$

۴۱۶- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که شیب خط d برابر است با -۱.

بنابراین شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $x=2$ برابر -۱ است. یعنی $f'(2) = -1$. در نتیجه

$$g(x) = f^2(x) \Rightarrow g'(x) = 2f(x)f'(x)$$

$$g'(2) = 2f(2)f'(2) = 2 \times 3 \times (-1) = -6$$

۴۱۷- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h) - f(2)}{\Delta h} = \frac{3}{\Delta h} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h) - f(2)}{3h} = \frac{3}{\Delta h} f'(2)$$

از طرف دیگر، $f'(x) = 3x^2 - 2$ ، پس $f'(2) = 10$. بنابراین مقدار مورد نظر

$$\frac{3}{\Delta h} \times 10 = 6$$

۴۱۸- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$g'(x) = f(x) + xf'(x)$$

$$g''(x) = f'(x) + f'(x) + xf''(x) = 2f'(x) + xf''(x)$$

$$g''(2) = 2f'(2) + 2f''(2) = 4 + 4 = 8$$

۴۱۹- گزینه ۴ توجه کنید که $D_f = [3, 5]$ و

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}} - \frac{1}{2\sqrt{5-x}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x-3} = \sqrt{5-x} \Rightarrow x-3 = 5-x \Rightarrow x=4$$

پس $(4, 2)$ نقطه بحرانی تابع f است و مجموع طول و عرض آن برابر ۶ است.

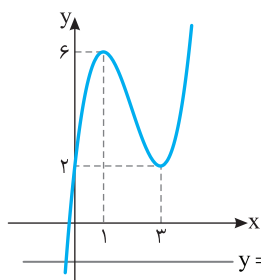
۴۲۰- گزینه ۴ ابتدا نقاط اکسترمم نسبی تابع را مشخص می‌کنیم:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x=1, x=3$$

جدول تغییرات تابع f به صورت زیر است:

x	$-\infty$	۱	۳	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
f		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		۶	۲	
		max	min	
		نسبی	نسبی	



پس نمودار تقریبی تابع f به صورت

رو به رو است. واضح است که اگر

معادله $f(x) = m$ یک ریشه

داشته باشد، باید m کمتر از مقدار

مینیمم نسبی تابع یا بیشتر از مقدار

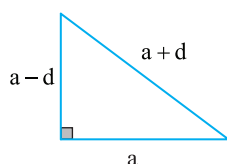
ماکزیمم نسبی آن باشد، یعنی

$$m > 6 \text{ یا } m < 2.$$

۴۲۱- گزینه ۲ طول ضلع‌های مثلث را مطابق شکل $a-d, a, a+d$

در نظر می‌گیریم. بنابر قضیه فیثاغورس،

$$(a+d)^2 = a^2 + (a-d)^2 \Rightarrow a = 4d$$



راه حل دوم باید $P(1)=0$ و $P'(1)=0$ بنابراین

$$P'(x) = 3ax^2 + 8x - 14$$

$$P'(1) = 3a + 8 - 14 = 0 \Rightarrow a = 2$$

۴-۲۶ گزینه ۴ می توان نوشت

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\cos 3x}{\cos x} = 1 \Rightarrow \frac{\cos x \sin 3x + \sin x \cos 3x}{\sin x \cos x} = 1$$

$$\frac{\sin(x+3x)}{\sin x} = 1 \Rightarrow \frac{\sin 4x}{\sin x} = 1 \Rightarrow \frac{2 \sin 2x \cos 2x}{\sin x} = 1$$

$$\frac{1}{2} \sin 2x$$

بنابراین $\cos 2x = \frac{1}{4}$ اکنون توجه کنید که $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{3}{8}$$

۴-۲۷ گزینه ۳ معادله را به صورت زیر ساده می کنیم:

$$2 \sin^2 x + \cos x - 1 = 0 \Rightarrow 2 - 2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow (\cos x - 1)(2 \cos x + 1) = 0$$

بنابراین جواب های معادله در بازه $[0, 2\pi]$ به صورت زیر هستند

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 0, \quad x = 2\pi$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}, \quad x = \frac{4\pi}{3}$$

پس مجموع جواب های بالا برابر است با 4π .

۴-۲۸ گزینه ۲ توجه کنید که

$$f(g(x)) = \frac{3x-2}{2x-1} \Rightarrow f\left(\frac{3}{2x}\right) = \frac{3x-2}{2x-1}$$

اگر در این تساوی به جای x قرار دهیم $\frac{3}{2x}$ به دست می آید

$$f(x) = \frac{3x - \frac{3}{2x} - 2}{2x - \frac{3}{2x} - 1} = \frac{9 - 4x}{6 - 2x}$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{9-4x}{6-2x} + \frac{3}{2x} = \frac{4x^2 - 6x - 9}{2x^2 - 6x}$$

۴-۲۹ گزینه ۲ اگر نمودار تابع $y = \sqrt{-x}$ را دو واحد به چپ منتقل

کنیم، نمودار تابع $y = \sqrt{-(x+2)} = \sqrt{-x-2}$ به دست می آید، اگر نمودار

به دست آمده را نسبت به محور عرض ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y = \sqrt{x-2}$

به دست می آید و اگر این نمودار را مجدداً دو واحد به چپ منتقل کنیم، نمودار

تابع $y = \sqrt{(x+2)-2} = \sqrt{x}$ به دست می آید.

۴-۳۰ گزینه ۲ قرینه نمودار تابع f نسبت به خط $y=x$ نمودار تابع f^{-1}

است. پس باید f و f^{-1} برابر باشند. ضابطه f^{-1} را به دست می آوریم:

$$y = \sqrt{a+bx^3} \Rightarrow y^2 = a+bx^3 \Rightarrow x^3 = \frac{y^2-a}{b}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{b}y^2 - \frac{a}{b}} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{b}x^2 - \frac{a}{b}}$$

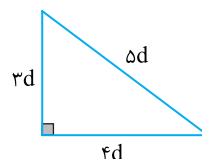
از تساوی $f(x) = f^{-1}(x)$ نتیجه می شود $\sqrt[3]{a+bx^3} = \sqrt[3]{-\frac{a}{b} + \frac{1}{b}x^3}$

پس $a = -\frac{a}{b}$ و $\frac{1}{b} = b$ و در نتیجه $b = \pm 1$. اگر $b = 1$ ، آن گاه $a = 0$ که

قابل قبول نیست. پس $b = -1$.

بنابراین طول ضلع های مثلث $3d, 4d, 5d$ هستند. پس مساحت مثلث

$$S = \frac{1}{2} \times 3d \times 4d = 6d^2 \text{ و محیط آن } P = 12d \text{ است.}$$



مساحت مثلث، واسطه هندسی بین وتر و محیط است. پس

$$S^2 = P \times (\Delta d) \Rightarrow 36d^4 = 12d \times 5d \Rightarrow d = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

بنابراین مساحت مثلث برابر است با $S = 6d^2 = 10$.

۴-۲۲ گزینه ۳ توجه کنید که

$$\sqrt[4]{5^4 \sqrt{3}} = \sqrt[4]{5^4 \sqrt{x}} = \sqrt[4]{5^4 \sqrt{x}} = 5^2 \sqrt[4]{x} = 5^4 \sqrt{x}$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان ۸ برسانیم، معلوم می شود که

$$5^4 \times 3 = 5^2 \times x \Rightarrow x = 5^2 \times 3 = 75$$

۴-۲۳ گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $x_1 + x_2 = -6$ و $x_1 x_2 = -3$.

بنابراین

$$\left(\frac{x_1}{x_2} + x_2\right) \left(\frac{x_2}{x_1} + x_1\right) = 1 + \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} + x_1 x_2$$

$$= 1 + \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1 x_2} + x_1 x_2 = 1 + \frac{(x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)}{x_1 x_2} + x_1 x_2$$

$$= 1 + \frac{(-6)^3 - 3(-3)(-6)}{-3} - 3 = 88$$

۴-۲۴ گزینه ۲ ابتدا دقت کنید که اگر x جواب معادله باشد، آن گاه

$x > 0$. اکنون دو طرف معادله داده شده را به توان دو می رسانیم:

$$x^2 + \frac{x^2}{x^2-1} + 2\sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}} = 8 \Rightarrow \frac{x^4}{x^2-1} + 2\sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}} = 8$$

بنابراین اگر $\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = y$ ، آن گاه

$$y^2 + 2y = 8 \Rightarrow (y+1)^2 = 9 \xrightarrow{y>0} y+1=3 \Rightarrow y=2$$

در نتیجه

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = 2 \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^4 = 4(x^2-1)$$

$$x^4 - 4x^2 + 4 = 0 \Rightarrow (x^2-2)^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \xrightarrow{x>0} x = \sqrt{2}$$

پس معادله مورد نظر فقط یک جواب دارد.

۴-۲۵ گزینه ۲ راه حل اول چند جمله ای $P(x)$ را به شکل زیر

می نویسیم:

$$P(x) = ax^3 + 4x^2 - 14x + 10 - a = a(x^3 - 1) + 4x^2 - 14x + 10$$

$$= a(x-1)(x^2+x+1) + (x-1)(4x-10)$$

$$= (x-1)(ax^2 + (a+4)x + a-10)$$

برای اینکه چند جمله ای $P(x)$ بر $(x-1)^2$ بخش پذیر باشد، باید چند جمله ای

$Q(x) = ax^2 + (a+4)x + a-10$ بر $x-1$ بخش پذیر باشد. پس

$$Q(1) = 0 \Rightarrow a + a + 4 + a - 10 = 0 \Rightarrow a = 2$$

۴۳۱- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$2^a = 3 \Rightarrow a = \log_2 3 \Rightarrow \frac{1}{a} = \log_3 2$$

$$3^b = 8 \Rightarrow b = \log_3 8$$

$$\text{بنابراین } b + \frac{1}{a} = \log_3 8 + \log_3 2 = \log_3 16$$

$$3^{b + \frac{1}{a}} = 3^{\log_3 16} = 16$$

۴۳۲- گزینه ۱ با استفاده از خاصیت $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ معادله را

حل می‌کنیم:

$$\frac{\log x}{\log 2} + \frac{\log x}{\log 5} = 2 \Rightarrow \log x \left(\frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log 5} \right) = 2$$

$$\log x \left(\frac{\log 5 + \log 2}{\log 2 \times \log 5} \right) = 2 \Rightarrow \log x \left(\frac{1}{\log 2 \times \log 5} \right) = 2$$

$$\log x = 2 \log 2 \times \log 5 = \log 4 \times \log 5$$

$$x = 10^{\log 4 \times \log 5} = (10^{\log 4})^{\log 5} = 4^{\log 5}$$

۴۳۳- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2}{(a+2)x^2} = \frac{a}{a+2}$$

پس

$$\frac{a}{a+2} = 3 \Rightarrow a = -3$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3x^2 + x + 4}{-x^2 - 3x - 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(-3x+4)}{(x+1)(-x-2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3x+4}{-x-2} = -7$$

۴۳۴- گزینه ۲ راه حل اول با توجه به تساوی‌های $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$ و

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1 \text{ می‌توان نوشت}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \tan 5x}{\sin 2x + \tan 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{x} + \frac{\tan 5x}{x}}{\frac{\sin 2x}{x} + \frac{\tan 4x}{x}}$$

$$= \frac{3 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \right) + 5 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan 5x}{5x} \right)}{2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right) + 4 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan 4x}{4x} \right)} = \frac{3+5}{2+4} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

راه حل دوم از هم‌ارزی‌های مثلثاتی استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \tan 5x}{\sin 2x + \tan 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + 5x}{2x + 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x}{6x} = \frac{4}{3}$$

راه حل سوم از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \tan 5x}{\sin 2x + \tan 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos 3x + 5(1 + \tan^2 5x)}{2 \cos 2x + 4(1 + \tan^2 4x)} = \frac{3+5}{2+4} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

۴۳۵- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که خط‌های $y=1$ و $y=-1$ مجاانب‌های افقی نمودار تابع f هستند. از طرف دیگر اگر $x \rightarrow +\infty$ ، آن‌گاه

$$f(x) = \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1} > 1$$

و اگر $x \rightarrow -\infty$ ، آن‌گاه

$$f(x) = \frac{x}{x-1} = -1 + \frac{1}{x+1} < -1$$

پس نمودار تابع f در $+\infty$ بالای مجانب افقی آن قرار دارد و در $-\infty$ پایین مجانب افقی آن قرار دارد.۴۳۶- گزینه ۴ برای آنکه تابع f در نقطه $x=0$ پیوسته باشد، می‌بایست $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ برابر a باشد. با استفاده از اتحادهای مثلثاتی، حد مورد نظر را

محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x - \sin x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (2 \cos x - 1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - 1}{x} \end{aligned}$$

اکنون دقت کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \cos x - 1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \cos x - 1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

پس $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - 1}{x}$ وجود ندارد، بنابراین هیچ مقداری برای a پیدانمی‌شود. توجه کنید که حد تابع f در $x=0$ را می‌توانیم به کمک هم‌ارزی‌های مثلثاتی به‌طور ساده‌تری به‌دست آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2x - \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

به همین ترتیب

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin 2x - \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

۴۳۷- گزینه ۲ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[-1, 2]$ برابر

$$f(2) - f(-1) = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{6 - 2}{3} = \frac{4}{3} \text{ است. آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع } f$$

در نقطه a برابر $f'(a)$ است.

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow f'(a) = 3a^2 - 1$$

بنابراین

$$3a^2 - 1 = 2 \Rightarrow 3a^2 = 3 \Rightarrow a = \pm 1$$

پس نقطه $x=1$ جواب مسئله است.

راه حل دوم می دانیم اگر $a+b+c=0$ ، آن گاه، $a^3+b^3+c^3=3abc$ ، بنابراین

$$x=\sqrt{2+\sqrt{5}}+\sqrt{2-\sqrt{5}}\Rightarrow\sqrt{2+\sqrt{5}}+\sqrt{2-\sqrt{5}}+(-x)=0$$

$$2+\sqrt{5}+2-\sqrt{5}-x^3=3\sqrt{2+\sqrt{5}}\sqrt{2-\sqrt{5}}(-x)$$

پس از ساده کردن مجدداً به معادله $x^3+3x-4=0$ می رسیم که در راه حل اول آن را حل کرده ایم.

گزینه ۴۴۳ خط $(\delta-k)y+2x=3$ محور x را در نقطه $(\frac{3}{2}, 0)$

قطع می کند. این نقطه روی خط $mx-y=-2$ نیز هست. پس

$$m(\frac{3}{2})-0=-2\Rightarrow m=-\frac{4}{3}$$

چون دو خط بر هم عمودند، حاصل ضرب شیب های آنها -1 است، پس

$$m \times (\frac{-2}{\delta-k}) = -1 \Rightarrow -\frac{4}{3} \times \frac{-2}{\delta-k} = -1 \Rightarrow k = \frac{23}{3}$$

بنابراین $k-m=9$.

گزینه ۴۴۴ واضح است که $x=1$ جواب معادله است. پس $x-1$

عامل معادله است

$$(x^3-1)+(mx-m)=0 \Rightarrow (x-1)(x^2+x+1)+m(x-1)=0$$

$$(x-1)(x^2+x+1+m)=0$$

برای اینکه معادله سه جواب متمایز داشته باشد، باید معادله $x^2+x+m+1=0$

دو جواب داشته باشد که برابر ۱ نباشند. بنابراین

$$\Delta=1-4(m+1)>0 \Rightarrow -4m-3>0 \Rightarrow m<-\frac{3}{4}$$

$$1^2+1+m+1 \neq 0 \Rightarrow m \neq -3$$

$$\text{پس } m \in (-\infty, -\frac{3}{4}) - \{-3\}$$

گزینه ۴۴۵ برای حل این مسئله باید نامعادله زیر را حل کنیم:

$$\frac{2}{x}+x>3 \Rightarrow \frac{2}{x}+x-3>0$$

این نامعادله به صورت $\frac{x^2-3x+2}{x}>0$ درمی آید. چون

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$$

پس جدول تعیین علامت به شکل زیر است:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$\frac{x^2-3x+2}{x}$		-	+	-	+

بنابراین مجموعه جواب های نامعادله مورد نظر $(0,1) \cup (2,+\infty)$ است. در

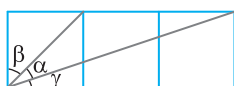
نتیجه $a=0$ ، $b=2$ و $a+b=2$.

گزینه ۴۴۶ با نمادگذاری شکل زیر، $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$. بنابراین

$$\alpha=90^\circ-(\beta+\gamma)$$

$$\cos \alpha = \cos(90^\circ-(\beta+\gamma)) = \sin(\beta+\gamma) = \sin \beta \cos \gamma + \sin \gamma \cos \beta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{10}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{20}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$



گزینه ۴۳۸ با استفاده از قواعد مشتق گیری، مشتق تابع را حساب می کنیم:

$$f'(x) = 2 \times 2 \cos(\frac{\pi-x}{6}) \times (-\sin(\frac{\pi-x}{6})) \times (-\frac{1}{6})$$

$$= \cos(\frac{\pi-x}{6}) \sin(\frac{\pi-x}{6}) = \frac{1}{2} \sin(2(\frac{\pi-x}{6})) = \frac{1}{2} \sin(\frac{\pi-x}{3})$$

بنابراین

$$f'(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} \sin(\frac{\pi-\pi}{3}) = \frac{1}{2} \sin 0 = 0$$

گزینه ۴۳۹ ابتدا نقاط بحرانی تابع f را پیدا می کنیم:

$$f'(x) = x^3 - 3x^2 - 4x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -1, x = 4$$

بنابراین کمترین مقدار تابع بین مقادیر زیر است:

$$f(0)=0, f(-1)=-\frac{3}{4}, f(4)=-32$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

پس کمترین مقدار تابع برابر -32 است.

گزینه ۴۴۰ چون تابع f همه جا دو بار مشتق پذیر است، طول نقطه

عطف آن ریشه معادله $f''(x)=0$ است. توجه کنید که

$$f'(x) = 3ax^2 + 6x \Rightarrow f''(x) = 6ax + 6$$

$$f''(-1) = 0 \Rightarrow -6a + 6 = 0 \Rightarrow a = 1$$

بنابراین $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2$. چون نقطه عطف روی نمودار تابع است،

پس عرض آن برابر است با $f(-1) = -1 + 3 + 2 = 4$.

گزینه ۴۴۱ اگر دو عدد a و b بنامیم، واسطه حسابی آنها $\frac{a+b}{2}$

و واسطه هندسی آنها $\pm\sqrt{ab}$ است. چون دو عدد مثبت هستند، پس

$$\frac{a+b}{2} = \frac{3}{\sqrt{ab}} \Rightarrow \frac{(a+b)^2}{4ab} = \frac{9}{ab} \Rightarrow 8(a+b)^2 = 36ab$$

$$2a^2 + 2b^2 - 8ab = 0 \Rightarrow (2a-b)(a-2b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b=2a \Rightarrow \frac{b}{a}=2 \\ a=2b \Rightarrow \frac{a}{b}=2 \end{cases}$$

بنابراین نسبت عدد بزرگ تر به عدد کوچک تر برابر ۲ است.

گزینه ۴۴۲ **راه حل اول** فرض می کنیم $x=\sqrt{2+\sqrt{5}}+\sqrt{2-\sqrt{5}}$

و طرفین تساوی را به توان ۳ می رسانیم:

$$x^3 = (\sqrt{2+\sqrt{5}})^3 + (\sqrt{2-\sqrt{5}})^3 + 3\sqrt{2+\sqrt{5}}\sqrt{2-\sqrt{5}}(\sqrt{2+\sqrt{5}}+\sqrt{2-\sqrt{5}})$$

$$x^3 = 2+\sqrt{5}+2-\sqrt{5}+3\sqrt{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}x$$

بنابراین

$$x^3 = 4 - 3x \Rightarrow x^3 + 3x - 4 = 0$$

از حل این معادله مقدار x را به دست می آوریم:

$$x^3 + 3x - 4 = x^3 - 1 + 3x - 3 = (x-1)(x^2+x+4) + 2(x-1)$$

$$= (x-1)(x^2+x+4+2) = 0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$$

۴۵۲- گزینه ۲ از طرفین معادله در مبنای ۱۰ لگاریتم می‌گیریم:

$$\log 2^{x+1} = \log 5^{x-1} \Rightarrow (x+1) \log 2 = (x-1) \log 5$$

$$x \log 2 - x \log 5 = -\log 2 - \log 5$$

$$x(\log 2 - \log 5) = -(\log 2 + \log 5) = -\log 10 = -1$$

$$\text{از طرف دیگر } \log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2$$

$$x(\log 2 - 1 + \log 2) = -1 \Rightarrow x = \frac{-1}{2 \log 2 - 1} = \frac{-1}{\log 4 - 1} = \frac{1}{1 - \log 4}$$

۴۵۳- گزینه ۱ **راحل اول** ابتدا توجه کنید که اگر $f(x) = \sin x$ و

$$g(x) = \cos x \text{، آن‌گاه}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x - \sin \frac{\pi}{6}}{x - \frac{\pi}{6}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{6}}$$

$$g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos x - \cos \frac{\pi}{6}}{x - \frac{\pi}{6}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}}{x - \frac{\pi}{6}}$$

بنابراین

$$L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x - \frac{1}{2}}{\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\frac{\sin x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{6}}}{\frac{\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}}{x - \frac{\pi}{6}}} = \frac{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)}{g'\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

از طرف دیگر

$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$g'(x) = -\sin x \Rightarrow g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$L = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

راحل دوم از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x - \frac{1}{2}}{\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{-\sin x} = \frac{\cos \frac{\pi}{6}}{-\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

۴۵۴- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x+2x+1}{3x-x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{2x} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x-2x+1}{3x+x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}$$

بنابراین خطوط $y = \frac{1}{2}$ و $y = 3$ مجانب‌های افقی نمودار تابع f هستند و فاصله

آن‌ها از یکدیگر برابر $\frac{5}{2}$ است.

۴۴۷- گزینه ۲ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

بنابراین جواب کلی معادله به صورت زیر است

$$2x + \frac{\pi}{4} = k\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{5\pi}{24} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

۴۴۸- گزینه ۳ اگر $|x+1| \leq 7$ ، آن‌گاه $-7 \leq x+1 \leq 7$ ، یعنی

$-8 \leq x \leq 6$. اگر $0 \leq x \leq 6$ ، آن‌گاه عبارت مورد نظر برابر است با

$$A = x^2 - 4x \text{ که حدود آن به صورت زیر به دست می‌آید:}$$

$$A = x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$$

بنابراین

$$0 \leq x \leq 6 \Rightarrow -2 \leq x-2 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq (x-2)^2 \leq 16 \Rightarrow -4 \leq A \leq 12$$

اگر $-8 \leq x \leq 0$ ، آن‌گاه عبارت مورد نظر برابر است با $A = -x^2 - 4x$ که

حدود آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$A = -x^2 - 4x = -(x+2)^2 + 4$$

$$-8 \leq x \leq 0 \Rightarrow -6 \leq x+2 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq (x+2)^2 \leq 36$$

$$-36 \leq -(x+2)^2 \leq 0 \Rightarrow -32 \leq A \leq 4$$

پس بیشترین مقدار A برابر ۱۲ و کمترین مقدار آن برابر -32 است و مجموع

این دو مقدار برابر -20 است.

۴۴۹- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \frac{(x^2 - 4) + (3ax + 6a)}{x+2} = \frac{(x-2)(x+2) + 3a(x+2)}{x+2} = \frac{(x+2)(x-2+3a)}{x+2} = x+3a-2, \quad x \neq -2$$

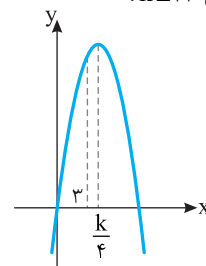
برای اینکه تابع همانی باشد، باید $f(x) = x$ ، پس $3a-2=0$ و در نتیجه

$$f(3a) = 3a = 2 \text{، بنابراین } a = \frac{2}{3}$$

۴۵۰- گزینه ۳ نمودار تابع $y = -2x^2 + kx$ به شکل زیر است. اگر

$x=3$ قبل از طول رأس سهمی قرار گیرد یا بر آن منطبق شود، تابع یک‌به‌یک

است. بنابراین $\frac{k}{4} \leq 3$ پس $k \geq 12$.



۴۵۱- گزینه ۳ می‌توان نوشت

$$y = 3^{\frac{2-x}{2}} - 1 \Rightarrow y+1 = 3^{\frac{2-x}{2}}$$

$$\log_3(y+1) = \frac{2-x}{2} \Rightarrow x = 2 - 2 \log_3(y+1)$$

$$= \log_3 3^2 - \log_3 (y+1)^2 = \log_3 \left(\frac{3}{y+1} \right)^2$$

بنابراین $f^{-1}(x) = \log_3 \left(\frac{3}{x+1} \right)^2$

۴۵۵- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned} f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax - a + 3) = a - a + 3 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = 2 \end{aligned}$$

بنابراین تابع f به ازای هیچ مقدار a ، در نقطه $x=1$ پیوسته نیست.

۴۵۶- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $g'(x) = 1 + 3x^2 f'(x^3)$

بنابراین $g'(2) = 1 + 3 \times 4 f'(8) = 1 + 12 \times 2 = 25$

۴۵۷- گزینه ۱ در $x=0$ تابع مشتق دارد، زیرا

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} = 0$$

اگر $x \neq 0$ ، آن گاه مشتق تابع به صورت $f'(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{x}{3\sqrt[3]{x^2}}$ محاسبه می‌شود.

بنابراین مشتق تابع به ازای هر x حقیقی تعریف می‌شود و در نتیجه $D_{f'} = \mathbb{R}$.

۴۵۸- گزینه ۴ طول نقطه عطف تابع f جواب معادله $f''(x) = 0$ است.

(به شرطی که f'' در اطراف آن تغییر علامت دهد.) توجه کنید که

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f''(x) = 6x + 2a$$

$$f''(-2) = 0 \Rightarrow -12 + 2a = 0 \Rightarrow a = 6$$

چون $x=1$ طول نقطه اکسترمم نسبی تابع f است، پس $f'(1) = 0$ ، در نتیجه

$$3 + 12 + b = 0 \Rightarrow b = -15$$

به این ترتیب $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 2$ و مقدار اکسترمم نسبی مورد نظر

برابر است با $f(1) = -6$.

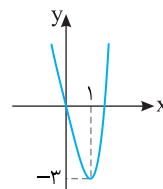
۴۵۹- گزینه ۲ نقاط اکسترمم نسبی تابع f را پیدا می‌کنیم و با توجه به

اینکه نمودار تابع f از مبدأ می‌گذرد، این نمودار را رسم می‌کنیم.

$$f'(x) = 4x^3 - 4, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	۱	$+\infty$
$f'(x)$	-	۰	+
f	$\searrow$	-۳ min	$\nearrow$

پس برد تابع f بازه $[-3, +\infty)$ است.



۴۶۰- گزینه ۱ طبق نمودار $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ پس گزینه‌های (۲) و (۴)

رد می‌شوند. همچنین طبق نمودار، تابع یک ریشه ساده ($x=0$) و یک ریشه

مکرر دارد، پس گزینه (۳) نیز رد می‌شود (تابع گزینه (۳) دو ریشه ساده $x=0$

و $x=1$ را دارد).