# پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

**۱- گزینهٔ ۴** اگر فرض کنیم $t=x^2\ge 0$، معادلهٔ مورد نظر به‌صورت $t^2-7t-5=0$ درمی‌آید. جواب‌های این معادله به‌صورت زیر هستند:

$$t=\frac{7+\sqrt{69}}{2},\quad t=\frac{7-\sqrt{69}}{2}<0\ (\text{غ.ق.ق})$$

چون جواب‌های معادلهٔ بالا باید نامنفی باشند، پس فقط جواب $t=\frac{7+\sqrt{69}}{2}$ قابل قبول است. پس جواب‌های معادلهٔ اصلی به‌صورت زیر هستند:

$$x_1=\sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}},\quad x_2=-\sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}}$$

پس حاصل‌ضرب و مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر است با

$$P=x_1x_2=-\left(\sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}}\right)^2=-\frac{7+\sqrt{69}}{2}$$

$$S=x_1+x_2=\sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}}-\sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}}=0$$

بنابراین مقدار عبارت خواسته شده برابر است با

$$2P^2-3SP+2S=2P^2-0+0=2\left(-\frac{7+\sqrt{69}}{2}\right)^2$$

$$=2\left(\frac{49+69+14\sqrt{69}}{4}\right)=59+7\sqrt{69}$$

**۲- گزینهٔ ۳** ابتدا توجه کنید که

$$\begin{vmatrix}\log 5 & \log 2\\ \log 2 & \log 5\end{vmatrix}=(\log 5)^2-(\log 2)^2$$

$$=(\log 5+\log 2)(\log 5-\log 2)$$

$$=\log 10\times\log\frac{5}{2}=1\times\log\frac{5}{2}=\log_{10}\frac{5}{2}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\log_{10}\frac{5}{2}\times\log_{\frac{5}{2}}(3x-2)=1$$

$$\log_{10}(3x-2)=1\Rightarrow 3x-2=10\Rightarrow 3x=12\Rightarrow x=4$$

**۳- گزینهٔ ۴** **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$\log_{21}1323=\log_{21}9\times 147=\log_{21}9+\log_{21}147$$

$$=2\log_{21}3+\log_{21}147$$

بنابراین عبارت مورد نظر به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$(\log_{21}3)^2+\log_{21}147(2\log_{21}3+\log_{21}147)$$

$$=(\log_{21}3)^2+2\log_{21}3\log_{21}147+(\log_{21}147)^2$$

$$=(\log_{21}3+\log_{21}147)^2=(\log_{21}(3\times 147))^2=(\log_{21}441)^2$$

$$=(\log_{21}21^2)^2=(2\log_{21}21)^2=(2\times 1)^2=4$$

**راه‌حل دوم** توجه کنید که

$$\log_{21}3=\log_{21}\frac{21}{7}=\log_{21}21-\log_{21}7=1-\log_{21}7$$

$$\log_{21}147=\log_{21}(21\times 7)=\log_{21}21+\log_{21}7=1+\log_{21}7$$

$$\log_{21}1323=\log_{21}(21^2\times 3)=2\log_{21}21+\log_{21}3=2+\log_{21}3$$

پس عبارت مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$(1-\log_{21}7)^2+(1+\log_{21}7)(2+\log_{21}3)$$

$$=1+(\log_{21}7)^2-2\log_{21}7+2+\log_{21}3$$

$$+2\log_{21}7+\log_{21}7\log_{21}3$$

$$=3+\log_{21}3+(\log_{21}7)(\log_{21}7+\log_{21}3)$$

$$=3+\log_{21}3+\log_{21}7\log_{21}21$$

$$=3+\log_{21}3+\log_{21}7=3+\log_{21}21=3+1=4$$

**۴- گزینهٔ ۲** توجه کنید که اگر $x>\frac{3}{2}$، آن‌گاه عبارت $2x-3$ مثبت است و در نتیجه نامعادلهٔ مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$((m^2-1)x^2-4mx+4)(x-3\sqrt{x}+2)>0$$

از طرف دیگر،

$$A=x-3\sqrt{x}+2=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)$$

بنابراین علامت عبارت A با شرط $x>\frac{3}{2}$ به‌صورت زیر است:

| x | $-\infty$ | $\frac{3}{2}$ | | 4 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | $-$ | 0 | $+$ | |

چون علامت A روی بازهٔ $(2,4)$ منفی است و این بازه مجموعهٔ جواب‌های نامعادله است، پس علامت عبارت $B=(m^2-1)x^2-4mx+4$ در این بازه باید منفی باشد تا حاصل‌ضرب AB مثبت شود. همچنین علامت A روی بازهٔ $(\frac{3}{2},2)$ منفی است و این بازه جواب نامعادله نیست. پس علامت B روی این بازه باید مثبت باشد. بنابراین $x=2$ باید ریشهٔ B باشد. پس

$$(m^2-1)4-8m+4=0\Rightarrow m^2-2m=0\Rightarrow\begin{cases}m=2\\ m=0\end{cases}$$

اگر $m=2$، آن‌گاه

$$B=(3x^2-8x+4)=(3x-2)(x-2)$$

در این صورت علامت B روی بازهٔ $(2,4)$ مثبت است که قابل قبول نیست.

اگر $m=0$، آن‌گاه

$$B=-x^2+4=-(x-2)(x+2)$$

در این صورت علامت B روی بازهٔ $(2,4)$ منفی است و قابل قبول است.

**۵- گزینهٔ ۲** توجه کنید که

$$\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2(\frac{1}{4})}{1-(\frac{1}{4})^2}=\frac{8}{15}$$

$$\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2(\frac{1}{4})}{1+(\frac{1}{4})^2}=\frac{8}{17}$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-(\frac{1}{4})^2}{1+(\frac{1}{4})^2}=\frac{15}{17}$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{\tan\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\frac{8}{15}-\frac{8}{17}}{\frac{8}{17}-\frac{15}{17}}=-\frac{16}{105}$$

**۶- گزینهٔ ۴** معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$(1+\cos 2\alpha)(1+\cos 4\alpha)(1+\cos 8\alpha)=\frac{1}{8}$$

$$(2\cos^2\alpha)(2\cos^2 2\alpha)(2\cos^2 4\alpha)=\frac{1}{8}$$

$$(\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha)^2=\frac{1}{64}$$

$$\left(\frac{\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha}{\sin\alpha}\right)^2=\frac{1}{64}$$

$$\left(\frac{1}{2}\sin 2\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\right)^2=\frac{1}{64}\sin^2\alpha$$

$$\left(\frac{1}{4}\sin 4\alpha\cos 4\alpha\right)^2=\frac{1}{64}\sin^2\alpha\Rightarrow\left(\frac{1}{8}\sin 8\alpha\right)^2=\frac{1}{64}\sin^2\alpha$$

$$\sin^2 8\alpha=\sin^2\alpha\Rightarrow\frac{1-\cos 16\alpha}{2}=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos 16\alpha=\cos 2\alpha$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases}16\alpha=2k\pi+2\alpha\\16\alpha=2k\pi-2\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{k\pi}{7}\\\alpha=\frac{k\pi}{9}\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}$$

بنابراین بزرگ‌ترین جواب معادله که در بازهٔ $[0,\pi]$ قرار دارد، برابر $\frac{8\pi}{9}$ است.

**۷- گزینهٔ ۳** فرض کنید $P(x)=ax^2+bx+c$ . در این صورت $P'(x)=2ax+b$ . اگر $P(x)$ را بر $P'(x)$ تقسیم کنیم و خارج قسمت برابر $\frac{1}{2}x+1$ و باقی‌مانده برابر $-2$ باشد، آن‌گاه تساوی زیر همواره برقرار است:

$$P(x)=P'(x)(\frac{1}{2}x+1)-2$$

$$ax^2+bx+c=(2ax+b)(\frac{1}{2}x+1)-2$$

این تساوی را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$ax^2+bx+c=ax^2+(2a+\frac{b}{2})x+b-2$$

برای این که تساوی بالا به‌ازای هر مقدار x برقرار باشد، باید

$$\begin{cases}2a+\frac{b}{2}=b\Rightarrow b=4a\\c=b-2\Rightarrow c=4a-2\end{cases}$$

بنابراین چندجمله‌ای $P(x)$ برابر $ax^2+4ax+4a-2$ است که مجموع ضرایب آن برابر است با $a+4a+4a-2=9a-2$

واضح است که کمترین مقدار این مجموع وقتی a عددی طبیعی است، برابر ۷ است که به‌ازای $a=1$ به‌دست می‌آید.

**۸- گزینهٔ ۱** ابتدا توجه کنید که

$$a_{n+1}=\frac{1}{a_n}+1\Rightarrow a_{100}=\frac{1}{a_{99}}+1\Rightarrow\frac{k}{m}=\frac{1}{a_{99}}+1$$

$$\frac{1}{a_{99}}=\frac{k-m}{m}\Rightarrow a_{99}=\frac{m}{k-m}$$

بنابراین

$$a_{99}=\frac{1}{a_{98}}+1\Rightarrow\frac{m}{k-m}=\frac{1}{a_{98}}+1\Rightarrow\frac{1}{a_{98}}=\frac{m}{k-m}-1=\frac{2m-k}{k-m}$$

$$a_{98}=\frac{k-m}{2m-k}$$

**۹- گزینهٔ ۱** ده جملهٔ اول دنباله را پیدا می‌کنیم.

$$a_n=\begin{cases}2^k & n=3k\\-2k+4 & n=3k+1\\\left[\frac{n}{k+2}\right]+a & n=3k+2\end{cases}$$

$$k=0\Rightarrow\begin{cases}a_0=2^0=1\\a_1=-2\times0+4=4\\a_2=\left[\frac{3\times0+2}{0+2}\right]+a=1+a\end{cases}$$

$$k=1\Rightarrow\begin{cases}a_3=2^1=2\\a_4=-2\times1+4=2\\a_5=\left[\frac{3\times1+2}{1+2}\right]+a=1+a\end{cases}$$

$$k=2\Rightarrow\begin{cases}a_6=2^2=4\\a_7=-2\times2+4=0\\a_8=\left[\frac{3\times2+2}{2+2}\right]+a=2+a\end{cases}$$

$$k=3\Rightarrow a_9=2^3=8$$

مجموع ده جملهٔ اول دنباله برابر ۱۹ است. پس

$$1+4+1+a+2+2+1+a+4+0+2+a+8=19$$

$$3a+25=19\Rightarrow a=-2$$

بنابراین اگر $n=3k+2$ ، آن‌گاه

$$a_n=[\frac{n}{k+2}]+a=[\frac{3k+2}{k+2}]-2=[3-\frac{4}{k+2}]-2=1+[\frac{-4}{k+2}]$$

$$a_2=-1,\ a_5=-1,\ a_8=a_{11}=a_{14}=a_{17}=a_{20}=a_{23}=a_{26}=a_{29}=0$$

بنابراین مجموع جملات بالا برابر $-2$ است.

**۱۰- گزینهٔ ۴** اگر فرض کنیم $t=\sqrt[3]{9\cos^2 x-1}$ ، آن‌گاه ضابطهٔ تابع f به‌صورت $y=2^t-2^{-t}$ در می‌آید. از طرف دیگر،

$$0\le\cos^2 x\le1\Rightarrow 0\le 9\cos^2 x\le 9\Rightarrow -1\le 9\cos^2 x-1\le 8$$

$$-1\le\sqrt[3]{9\cos^2 x-1}\le2\Rightarrow -1\le t\le 2$$

بنابراین باید برد تابع با ضابطهٔ $f(t)=2^t-2^{-t}$ و دامنهٔ $[-1,2]$ را به‌دست بیاوریم.

توجه کنید که تابع $y=2^t$ اکیداً صعودی است. پس تابع $y=2^{-t}$ اکیداً نزولی است و تابع $y=-2^{-t}$ اکیداً صعودی است. پس تابع $y=2^t-2^{-t}$ نیز اکیداً صعودی است. بنابراین

$$-1\le t\le2\Rightarrow f(-1)\le f(t)\le f(2)$$

$$-\frac{3}{2}\le f(t)\le\frac{15}{4}\Rightarrow R_f=[-\frac{3}{2},\frac{15}{4}]$$

بنابراین $a=-\frac{3}{2}$ و $b=\frac{15}{4}$ و در نتیجه $b-a=\frac{21}{4}$ .

**۱۱- گزینهٔ ۱** **راه‌حل اول** دامنهٔ تابع f مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{1}{6+\sqrt{|x|}-|x|}>0$ است. اگر فرض کنیم $\sqrt{|x|}=t\ge0$ ، آن‌گاه نامعادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{6+t-t^2}>0\Rightarrow 6+t-t^2>0\Rightarrow t^2-t-6<0\Rightarrow (t-3)\underbrace{(t+2)}_{\text{مثبت}}<0$$

$$t-3<0\Rightarrow 0\le t<3$$

بنابراین باید نامعادلهٔ $0\le\sqrt{|x|}<3$ را حل کنیم. نابرابری $0\le\sqrt{|x|}$ به‌ازای هر مقدار x برقرار است. پس باید نامعادلهٔ $\sqrt{|x|}<3$ را حل کنیم.

$$\sqrt{|x|}<3\Rightarrow|x|<9\Rightarrow -9<x<9$$

**راه‌حل دوم** واضح است که $x=-4$ در دامنهٔ تابع قرار دارد.

$$f(-4)=\log_6(\frac{1}{6+\sqrt{4}-4})=\log_6\frac{1}{4}$$

عدد $-4$ فقط در بازهٔ $(-9,9)$ قرار دارد و عضو بازه‌های دیگر گزینه‌ها نیست. پس گزینهٔ (۱) درست است.

**۱۲- گزینهٔ ۳** اگر نمودار تابع $y=\sqrt{4-x}$ را k واحد در راستای قائم انتقال دهیم، نمودار تابع $y=\sqrt{4-x}+k$ به‌دست می‌آید و اگر نمودار به‌دست آمده را $k-2$ واحد در راستای افقی انتقال دهیم، نمودار تابع زیر به‌دست می‌آید:

$$y=\sqrt{4-(x-(k-2))}+k=\sqrt{k+2-x}+k=f(x)$$

چون نمودار تابع f نمودار تابع وارونش را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند، پس اگر طول نقطهٔ تقاطع a باشد، آن‌گاه

$$f(a)=1\Rightarrow\sqrt{k+2-a}+k=1$$

$$\sqrt{k+2-a}=1-k\xrightarrow{1-k\ge0}a=k+2-(1-k)^2$$

$$f^{-1}(a)=1\Rightarrow f(1)=a\Rightarrow\sqrt{k+2-1}+k=a\xrightarrow{k\ge-1}a=\sqrt{k+1}+k$$

توجه کنید که تساوی‌های فوق فقط برای $-1\le k\le1$ می‌توانند برقرار باشند.

$$k+2-(1-k)^2=\sqrt{k+1}+k\Rightarrow 1+2k-k^2=\sqrt{k+1}$$

با شرط $1+2k-k^2\ge0$ ، یعنی $1-\sqrt{2}\le k\le 1+\sqrt{2}$ ، طرفین را به توان دو می‌رسانیم و معادله را ساده می‌کنیم:

$$k^4-4k^3+2k^2+3k=0\Rightarrow k(k^3-4k^2+2k+3)=0$$

$$k(k-3)(k^2-k-1)=0\Rightarrow \begin{cases}k=0\\ k=3\\ k=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\end{cases}$$

چون $-1\le k\le1$ و $1-\sqrt{2}\le k\le1+\sqrt{2}$ ، پس $1-\sqrt{2}\le k\le1$ ، پس فقط $k=0$ قابل قبول است. بنابراین $f(x)=\sqrt{2-x}$ و طول نقطهٔ برخورد نمودار تابع $y=f(x)-1$ با محور طول‌ها به‌صورت زیر است:

$$y=0\Rightarrow f(x)-1=0\Rightarrow\sqrt{2-x}=1\Rightarrow x=1$$

**۱۳- گزینهٔ ۳** ابتدا توابع fog و gof را معین می‌کنیم.

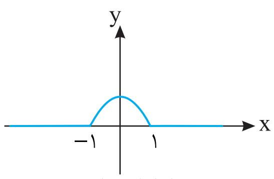
$$(fog)(x)=f(g(x))=f(1-x^2)=\begin{cases}-1 & 1-x^2<-1\\ 1-x^2 & -1\le1-x^2\le1\\ 1 & 1-x^2>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-1 & x^2>2\\ 1-x^2 & 0\le x^2\le2\\ 1 & x^2<0\end{cases}=\begin{cases}-1 & x>\sqrt{2}\ \text{یا}\ x<-\sqrt{2}\\ 1-x^2 & -\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}\end{cases}$$

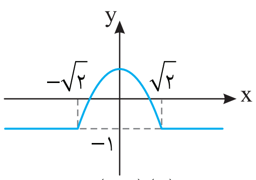
$$(gof)(x)=g(f(x))=1-f^2(x)=\begin{cases}1-(-1)^2 & x<-1\\ 1-x^2 & -1\le x\le1\\ 1-1^2 & x>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & x<-1\ \text{یا}\ x>1\\ 1-x^2 & -1\le x\le1\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع‌های fog و gof به‌صورت زیر است و هرکدام از آن‌ها در دو نقطه مشتق‌پذیر نیستند.




$y=(gof)(x)$

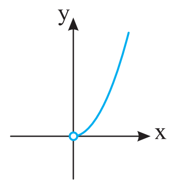



$y=(fog)(x)$

**۱۴- گزینهٔ ۲** ابتدا توجه کنید که ضابطهٔ تابع f به‌صورت زیر است:

$$f(x)=۹^{\log_۳ x}=(۳^۲)^{\log_۳ x}=(۳^{\log_۳ x})^۲=x^۲$$

از طرف دیگر، دامنهٔ تابع f بازهٔ $(۰,+\infty)$ است. پس نمودار تابع f به‌صورت زیر است:




**۱۵- گزینهٔ ؟** توجه کنید که اگر $x\to ۰^+$، آن‌گاه $\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}-۱\to ۰^+$ و $\sqrt{۲x}\to ۰^+$. بنابراین می‌توانیم از هم‌ارزی‌های زیر استفاده کنیم:

$$\alpha\to ۰:\quad \tan\alpha\sim\alpha,\quad ۱-\cos\alpha\sim\frac{۱}{۲}\alpha^۲$$

در این صورت حد مورد نظر به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{(\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}-۱)^۲}{(\frac{۱}{۲}(\sqrt{۲x})^۲)^n}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{(\frac{۱-\sqrt{۱-x^۲}}{\sqrt{۱-x^۲}})^۲}{x^n}$$

$$=\lim_{x\to ۰^+}\frac{(۱-\sqrt{۱-x^۲})^۲}{x^n}\times\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{۱-x^۲}$$

$$=\lim_{x\to ۰^+}\frac{(۱-(۱-x^۲))^۲}{x^n}\times\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{(۱+\sqrt{۱-x^۲})^۲}\times\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{۱-x^۲}$$

$$=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{x^{n-۴}}\times\frac{۱}{(۱+۱)^۲}\times\frac{۱}{۱}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{۴x^{n-۴}}$$

اکنون توجه کنید که اگر $n>۴$، آن‌گاه حد بالا نامتناهی است و نمی‌تواند برابر a باشد. اگر $n=۴$، آن‌گاه حد بالا برابر $\frac{۱}{۴}$ است و در نتیجه $a=\frac{۱}{۴}$ و $a+n=\frac{۱۷}{۴}$. اگر $n<۴$، آن‌گاه حد بالا برابر صفر است و در نتیجه $a=۰$ و $a+n<۴$. پس $a+n$ می‌تواند تمام مقادیر مجموعهٔ $(-\infty,۴)\cup\{\frac{۱۷}{۴}\}$ را داشته باشد.

**۱۶- گزینهٔ ۱** توجه کنید که توابع $y=\frac{۳}{x^۲}$ و $y=\frac{-۲}{x^۲}$ روی بازهٔ $(-\infty,۰)$ به‌ترتیب اکیداً صعودی و اکیداً نزولی هستند. پس اگر $x\to(-\frac{۱}{۲})^-$، آن‌گاه

$$\frac{۳}{x^۲}\to ۱۲^-,\quad \frac{-۲}{x^۲}\to(-۸)^+$$

بنابراین در یک همسایگی چپ $x=-\frac{۱}{۲}$، توابع $y=[\frac{۳}{x^۲}]$ و $y=[\frac{-۲}{x^۲}]$ به‌ترتیب با تابع‌های $y=۱۱$ و $y=-۸$ برابرند. پس

$$\lim_{x\to(-\frac{۱}{۲})^-}\frac{۱۰x-۵+[\frac{۳}{x^۲}]}{۱۶x-[-\frac{۲}{x^۲}]}=\lim_{x\to(-\frac{۱}{۲})^-}\frac{۱۰x-۵+۱۱}{۱۶x-(-۸)}$$

$$=\lim_{x\to(-\frac{۱}{۲})^-}\frac{۱۰x+۶}{۱۶x+۸}=-\infty$$

**۱۷- گزینهٔ ۴** **راه‌حل اول** چون تابع f در دو نقطه ناپیوسته است، پس مخرج $f(x)$ دو ریشه دارد. چون تابع f دو مجانب موازی با محورهای مختصات دارد، پس یا هر دو مجانب آن قائم هستند و مجانب افقی ندارد یا یک مجانب قائم و یک مجانب افقی دارد. اگر $a=۰$، آن‌گاه $f(x)=\frac{-bx^۲+۲}{-bx+۲}$ که در این صورت مخرج $f(x)$ فقط یک ریشه دارد و قابل قبول نیست (واضح است که $b\neq ۰$). اگر $a\neq ۰$، آن‌گاه

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^۳}{ax^۳}=۱$$

یعنی خط $y=۱$ مجانب افقی تابع است. پس این تابع فقط یک مجانب قائم دارد، یعنی یکی از ریشه‌های مخرج $f(x)$ ریشهٔ صورت آن نیز هست. اگر این ریشه $x=n$ باشد، آن‌گاه

$$\begin{cases}an^۳-bn^۲+۲=۰\\ an^۳-bn+۲=۰\end{cases}\Rightarrow bn^۲-bn=۰\Rightarrow bn(n-۱)=۰$$

چون $b\neq ۰$ و $n\neq ۰$، پس $n=۱$، در نتیجه

$$a-b+۲=۰\Rightarrow b=a+۲$$

اکنون توجه کنید که مخرج $f(x)$ علاوه بر $x=۱$ یک ریشهٔ مضاعف دارد. پس

$$ax^۳-bx+۲=ax^۳-(a+۲)x+۲=۰\Rightarrow ax(x^۲-۱)-۲(x-۱)=۰$$

$$(x-۱)(a(x^۲+x)-۲)=۰\Rightarrow(x-۱)(ax^۲+ax-۲)=۰$$

پس معادلهٔ $ax^۲+ax-۲=۰$ ریشهٔ مضاعف دارد، یعنی

$$\Delta=a^۲+۸a=۰\xrightarrow{a\neq ۰}a=-۸\ ,\ b=-۶$$

**راه‌حل دوم** مقادیر a و b را از گزینه‌ها در ضابطهٔ f قرار دهید و درست بودن شرایط مسئله را بررسی کنید.

**۱۸- گزینهٔ ۲** ابتدا توجه کنید که حد مخرج کسر $\frac{f(x)}{x}$ در $x=۰$ برابر صفر است و اگر حد صورت آن در این نقطه برابر صفر نباشد، حد این کسر نامتناهی می‌شود، پس حد صورت کسر، یعنی $f(x)$ هم باید در $x=۰$ برابر صفر باشد. پس

$$\lim_{x\to ۰^+}f(x)=\lim_{x\to ۰^+}(\cos^۳ ۲x+ax^۲+b)=۱+۰+b=۰\Rightarrow b=-۱$$

از طرف دیگر،

$$f(x)=\cos^۳ ۲x+ax^۲-۱\Rightarrow f'(x)=-۶\sin ۲x\cos^۲ ۲x+۲ax$$

بنابراین

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to ۰^-}(\frac{-۶\sin ۲x\cos^۲ ۲x}{x}+\frac{۲ax}{x})$$

$$=-۶\times ۲\times ۱^۲+۲a=-۱۲+۲a=۲\Rightarrow a=۷$$

بنابراین $a+b=۶$.

**۱۹- گزینهٔ ۳** توجه کنید که تابع $f(x)=|\sin ۲x|+۱$ در نقطهٔ $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست:

$$x>۰\Rightarrow f(x)=\sin ۲x+۱\Rightarrow f'(x)=۲\cos ۲x\Rightarrow f'_+(۰)=۲$$

$$x<۰\Rightarrow f(x)=-\sin ۲x+۱\Rightarrow f'(x)=-۲\cos ۲x\Rightarrow f'_-(۰)=-۲$$

بنابراین شیب نیم‌مماس‌های راست و چپ که در $x=۰$ بر نمودار تابع f رسم می‌شوند، به‌ترتیب برابر ۲ و ۲− است. معادلهٔ این نیم‌مماس‌ها به‌صورت زیر است:

نیم‌مماس راست: $y-f(۰)=f'_+(۰)(x-۰)\Rightarrow y-۱=۲x\Rightarrow y=۲x+۱$

نیم‌مماس چپ: $y-f(۰)=f'_-(۰)(x-۰)\Rightarrow y-۱=-۲x\Rightarrow y=-۲x+۱$

نقاط تلاقی امتداد این نیم‌مماس‌ها و نیمساز ناحیهٔ دوم و ناحیهٔ چهارم را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} y=۲x+۱\\ y=-x\end{cases}\Rightarrow ۲x+۱=-x\Rightarrow x=-\frac{۱}{۳}\Rightarrow y=\frac{۱}{۳}$$

$$\begin{cases} y=-۲x+۱\\ y=-x\end{cases}\Rightarrow -۲x+۱=-x\Rightarrow x=۱\Rightarrow y=-۱$$

پس باید فاصلهٔ نقاط $A(۱,-۱)$ و $B(-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳})$ را پیدا کنیم:

$$AB=\sqrt{(۱+\frac{۱}{۳})^۲+(-۱-\frac{۱}{۳})^۲}=\sqrt{۲\times\frac{۱۶}{۹}}=\frac{۴}{۳}\sqrt{۲}$$

**۲۰- گزینهٔ ۱** توجه کنید که $D_f=[۰,+\infty)-\{۱\}$ و

$$f(x)=۲x^{\frac{۱}{۲}}-\frac{۳}{۲}(x^۲-۱)^{-\frac{۱}{۳}}$$

$$f'(x)=۲(\frac{۱}{۲})x^{-\frac{۱}{۲}}-\frac{۳}{۲}(-\frac{۱}{۳})(۲x)(x^۲-۱)^{-\frac{۴}{۳}}=\frac{۱}{\sqrt{x}}+\frac{x}{\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۴}}$$

بنابراین $f'(x)$ روی $(۰,+\infty)-\{۱\}$ مثبت است. از طرف دیگر،

$$\lim_{x\to ۱^+}f(x)=۲-(+\infty)=-\infty\ ,\quad \lim_{x\to ۱^-}f(x)=۲-(-\infty)=+\infty$$

بنابراین تابع f روی دامنه‌اش صعودی نیست ولی روی بازه‌های $[۰,۱)$ و $(۱,+\infty)$ صعودی است.

**۲۱- گزینهٔ ۱** مشتق تابع f را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^۴}{x^۳-۸}\ ,\ D_f=\mathbb{R}-\{۲\}$$

$$f'(x)=\frac{۴x^۳(x^۳-۸)-۳x^۲(x^۴)}{(x^۳-۸)^۲}=\frac{x^۳(x^۳-۳۲)}{(x^۳-۸)^۲}$$

| x | $-\infty$ | | ۰ | | ۲ | | $\sqrt[۳]{۳۲}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | ۰ | − | | − | ۰ | + | |

بنابراین $f'(x)$ روی بازه‌های $[۰,۲)$ و $(۲,\sqrt[۳]{۳۲}]$ و هر زیرمجموعهٔ آن‌ها اکیداً نزولی است. بیشترین مقدار طول این بازه‌ها مربوط به بازهٔ $[۰,۲)$ است که برابر ۲ است.

**۲۲- گزینهٔ ۳** ابتدا اکسترمم‌های نسبی تابع f را معین می‌کنیم:

$$f(x)=۲x^۳-۳x^۲-۱۲x+۱$$

$$f'(x)=۶x^۲-۶x-۱۲=۶(x^۲-x-۲)=۶(x+۱)(x-۲)$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=-۱\Rightarrow y=-۲-۳+۱۲+۱=۸\\ x=۲\Rightarrow y=۱۶-۱۲-۲۴+۱=-۱۹\end{cases}$$

پس نقاط $A(-۱,۸)$ و $B(۲,-۱۹)$ نقاط اکسترمم نسبی تابع f هستند و شیب پاره‌خط AB برابر است با $\frac{-۱۹-۸}{۲-(-۱)}=-۹$

شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول a برابر $f'(a)$ است.

پس می‌خواهیم بدانیم به‌ازای چند مقدار a تساوی $f'(a)=-۹$ برقرار است.

$$f'(a)=۶(a+۱)(a-۲)=-۹\Rightarrow ۲a^۲-۲a-۴=-۳\Rightarrow ۲a^۲-۲a-۱=۰$$

از معادلهٔ بالا دو جواب برای a به‌دست می‌آید. پس دو نقطه روی نمودار تابع f وجود دارد که خط مماس بر نمودار تابع f در آن نقاط موازی پاره‌خط AB است.

**۲۳- گزینهٔ ۱** ابتدا توجه کنید که

$$\log_a c+\log_b c=۱\Rightarrow\frac{۱}{\log_c a}+\frac{۱}{\log_c b}=۱$$

$$\log_c b+\log_c a=\log_c a\times\log_c b\Rightarrow\log_c(ab)=\log_c a\times\log_c b$$

**۲۴- گزینهٔ ۳** معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\log_۲(۴^x+۱۵)=x+۳\Rightarrow ۴^x+۱۵=۲^{x+۳}$$

$$(۲^x)^۲-۸\times ۲^x+۱۵=۰\Rightarrow(۲^x-۵)(۲^x-۳)=۰$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases}۲^x-۵=۰\Rightarrow ۲^x=۵\Rightarrow x=\log_۲ ۵\\ ۲^x-۳=۰\Rightarrow ۲^x=۳\Rightarrow x=\log_۲ ۳\end{cases}$$

پس مجموع جواب‌های معادله برابر است با

$$\log_۲ ۵+\log_۲ ۳=\log_۲ ۵\times ۳=\log_۲ ۱۵$$

**۲۵- گزینهٔ ۳** ابتدا توجه کنید بـرای اینکه عبارت‌های رادیکالی موجود در معادله تعریف شده باشند، باید شرایط زیر وجود داشته باشد:

$$-x^۲+۶x-۸\ge ۰\Rightarrow x^۲-۶x+۸\le ۰\Rightarrow(x-۲)(x-۴)\le ۰$$

| x | $-\infty$ | | ۲ | | ۴ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(x-۲)(x-۴)$ | | + | ۰ | − | ۰ | + | |

$۲\le x\le ۴\quad (I)$

$$-x^۳+۴x^۲+۲۵x-۱۰۰\ge ۰\Rightarrow x^۳-۴x^۲-۲۵x+۱۰۰\le ۰$$

$$(x^۳-۲۵x)-(۴x^۲-۱۰۰)\le ۰\Rightarrow x(x^۲-۲۵)-۴(x^۲-۲۵)\le ۰$$

$$(x^۲-۲۵)(x-۴)\le ۰\Rightarrow(x-۵)(x+۵)(x-۴)\le ۰$$

| x | $-\infty$ | | −۵ | | ۴ | | ۵ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(x-۵)(x+۵)(x-۴)$ | | − | ۰ | + | ۰ | − | ۰ | + | |

$x\le -۵$ یا $۴\le x\le ۵\quad (II)$

از (I) و (II) نتیجه می‌شود فقط به‌ازای $x=۴$ عبارت‌های رادیکالی موجود در معادله تعریف شده هستند. اکنون کافی است مشخص کنیم $x=۴$ جواب معادله هست یا نه.

$$\sqrt{x+\sqrt{-x^۳+۴x^۲+۲۵x-۱۰۰}}+\sqrt{x^۲+\sqrt{-x^۲+۶x-۸}}=x+۲$$

$$\sqrt{۴+۰}+\sqrt{۱۶+۰}=۴+۲\Rightarrow ۲+۴=۴+۲$$

پس $x=۴$ تنها جواب معادله است.

**۲۶- گزینهٔ «۲ و ۳»** ابتدا توجه کنید که

$$x-3\sqrt{x}+2=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)$$

بنابراین علامت عبارت $A=\dfrac{2x-3}{x-3\sqrt{x}+2}$ مطابق جدول زیر است:

| x | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $\frac{3}{2}$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | //// | //// | | $-$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $+$ | |

اکنون فرض کنید $B=(m^2-1)x^2-4mx+4$ ، می‌خواهیم مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\geq 0$ یک بازه باشد. اگر B چندجمله‌ای درجهٔ دوم باشد و ریشه نداشته باشد یا ریشهٔ مضاعف داشته باشد، آن‌گاه با توجه به علامت A مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\geq 0$ نمی‌تواند یک بازه باشد. پس B دو ریشه دارد و این ریشه‌ها باید از اعداد ۱، $\frac{3}{2}$ و ۴ باشند، بنابراین سه حالت را بررسی می‌کنیم:

**حالت اول:** $x=1$ ریشهٔ B است.

$$m^2-1-4m+4=0\Rightarrow m^2-4m+3=0\Rightarrow m=3\,,\ m=1\ (\text{غ.ق.ق})$$

$$B=8x^2-12x+4=4(x-1)(2x-1)$$

در این صورت جدول تعیین علامت AB به‌صورت زیر است:

| x | $-\infty$ | | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $\frac{3}{2}$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| AB | //// | //// | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $+$ | |

واضح است که مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\geq 0$ یک بازه نیست.

**حالت دوم:** $x=\frac{3}{2}$ ریشهٔ B است.

$$(m^2-1)\frac{9}{4}-4(\frac{3}{2})m+4=0\Rightarrow 9m^2-9-24m+16=0$$

$$9m^2-24m+7=0\Rightarrow(3m-1)(3m-7)=0\Rightarrow m=\frac{1}{3}\,,\ m=\frac{7}{3}$$

اگر $m=\frac{1}{3}$ ، آن‌گاه

$$B=-\frac{8}{9}x^2-\frac{4}{3}x+4=(2x-3)(-\frac{4}{9}x-\frac{4}{3})$$

و جدول تعیین علامت AB به‌صورت زیر است:

| x | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $\frac{3}{2}$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| AB | //// | //// | | $-$ | ‖ | $+$ | $0$ | $+$ | ‖ | $-$ | |

و مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\geq 0$ بازهٔ $(1,4)$ است.

اگر $m=\frac{7}{3}$ ، آن‌گاه

$$B=\frac{40}{9}x^2-\frac{28}{3}x+4=\frac{4}{9}(5x-3)(2x-3)$$

و جدول تعیین علامت AB به‌صورت زیر است:

| x | $-\infty$ | | $0$ | | $\frac{3}{5}$ | | $1$ | | $\frac{3}{2}$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| AB | //// | //// | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $-$ | ‖ | $+$ | |

در این صورت مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\geq 0$ یک بازه نیست.

**حالت سوم:** $x=4$ ریشهٔ B است.

$$16(m^2-1)-16m+4=0\Rightarrow 4m^2-4m-3=0\Rightarrow m=-\frac{1}{2}\,,\ m=\frac{3}{2}$$

اگر $m=-\frac{1}{2}$ ، آن‌گاه

$$B=-\frac{3}{4}x^2+2x+4=(x-4)(-\frac{3}{4}x-1)$$

و جدول تعیین علامت AB به صورت زیر است:

| x | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $\frac{3}{2}$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| AB | //// | //// | | $-$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | |

و مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\geq 0$ بازهٔ $(1,\frac{3}{2}]$ است.

اگر $m=\frac{3}{2}$ ، آن‌گاه

$$B=\frac{5}{4}x^2-6x+4=(x-4)(\frac{5}{4}x-1)$$

و جدول تعیین علامت AB به‌صورت زیر است:

| x | $-\infty$ | | $0$ | | $\frac{4}{5}$ | | $1$ | | $\frac{3}{2}$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| AB | //// | //// | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | |

در این صورت مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\geq 0$ یک بازه نیست.
اکنون توجه کنید که اگر $m=1$ یا $m=-1$ ، آن‌گاه چندجمله‌ای B از درجهٔ اول است. این دو حالت را هم باید بررسی کنیم.
اگر $m=1$ ، آن‌گاه $B=-4x+4$ و جدول تعیین علامت AB به‌صورت زیر است:

| x | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $\frac{3}{2}$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| AB | //// | //// | | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $-$ | |

و مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\geq 0$ بازهٔ $[\frac{3}{2},4)$ است.

اگر $m=-1$ ، آن‌گاه $B=4x+4$ و جدول تعیین علامت AB به‌صورت زیر است:

| x | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $\frac{3}{2}$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| AB | //// | //// | | $-$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $+$ | |

در این صورت مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\geq 0$ یک بازه نیست.

بنابراین به‌ازای $m=\frac{1}{3}$ ، $m=-\frac{1}{2}$ و $m=1$ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\geq 0$ یک بازه است.

**۲۷- گزینهٔ «۳»** **راه‌حل اول** مخرج مشترک می‌گیریم و ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+1-\cos^2\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}=\frac{2\sin^2\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}$$

$$=\frac{2\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{4\times\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=2\cot\frac{\theta}{2}$$

**راه‌حل دوم** ابتدا هریک از کسرها را ساده می‌کنیم، سپس حاصل را ساده می‌کنیم.

$$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}+\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$=\cot\frac{\theta}{2}+\cot\frac{\theta}{2}=2\cot\frac{\theta}{2}$$

**راه‌حل سوم** حاصل عبارت را به‌ازای $\theta=\frac{\pi}{۳}$ حساب می‌کنیم:

$$\frac{\sin\frac{\pi}{۳}}{۱-\cos\frac{\pi}{۳}}+\frac{۱+\cos\frac{\pi}{۳}}{\sin\frac{\pi}{۳}}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱-\frac{۱}{۲}}+\frac{۱+\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\sqrt{۳}+\frac{۳}{\sqrt{۳}}=۲\sqrt{۳}$$

اکنون مقدار گزینه‌ها را به‌ازای $\theta=\frac{\pi}{۳}$ حساب می‌کنیم:

**گزینهٔ (۱)** $\cos\frac{\theta}{۲}=\cos\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

**گزینهٔ (۲)** $\sin\frac{\theta}{۲}=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$

**گزینهٔ (۳)** $۲\cot\frac{\theta}{۲}=۲\cot\frac{\pi}{۶}=۲\sqrt{۳}$

**گزینهٔ (۴)** $۲\tan\frac{\theta}{۲}=۲\tan\frac{\pi}{۶}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

**۲۸- گزینهٔ ۳** معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(۱+\cos\alpha)(۱+\cos۲\alpha)(۱+\cos۴\alpha)=\frac{۱}{۸}$$

$$(۲\cos^۲\frac{\alpha}{۲})(۲\cos^۲\alpha)(۲\cos^۲ ۲\alpha)=\frac{۱}{۸}$$

$$(۸\cos\frac{\alpha}{۲}\cos\alpha\cos۲\alpha)^۲=۱$$

واضح است که $\alpha=۲k\pi$ جواب معادله نیست، پس $\sin\frac{\alpha}{۲}\neq۰$ و معادله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\left(\frac{۸\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}\cos\alpha\cos۲\alpha}{\sin\frac{\alpha}{۲}}\right)^۲=۱$$

$$(۴\sin\alpha\cos\alpha\cos۲\alpha)^۲=\sin^۲\frac{\alpha}{۲}$$

$$(۲\sin۲\alpha\cos۲\alpha)^۲=\sin^۲\frac{\alpha}{۲}\Rightarrow\frac{۱-\cos۸\alpha}{۲}=\frac{۱-\cos\alpha}{۲}$$

$$\cos۸\alpha=\cos\alpha$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases}۸\alpha=۲k\pi+\alpha\\ ۸\alpha=۲k\pi-\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{۲k\pi}{۷}\\ \alpha=\frac{۲k\pi}{۹}\end{cases},\quad k\in\mathbb{Z}$$

تعداد جواب‌های واقع در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید. (توجه کنید که $\alpha\neq۲k\pi$)

$$۰<\frac{۲k\pi}{۷}<۲\pi\Rightarrow۰<k<۷\Rightarrow k\in\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$$

$$۰<\frac{۲k\pi}{۹}<۲\pi\Rightarrow۰<k<۹\Rightarrow k\in\{۱,۲,\dots,۸\}$$

پس معادله ۱۴ جواب در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ دارد.

**۲۹- گزینهٔ ۴** بنابر قضیهٔ تقسیم، تساوی زیر به‌ازای هر مقدار x برقرار است:

$$P(x)=(x^۲+۲x)Q(x)+۳x+۱$$

از طرفین این تساوی مشتق می‌گیریم.

$$P'(x)=(۲x+۲)Q(x)+(x^۲+۲x)Q'(x)+۳$$

در تساوی بالا قرار می‌دهیم $x=-۲$ و نتیجه می‌شود

$$P'(-۲)=(-۴+۲)Q(-۲)+(۴-۴)Q'(-۲)+۳$$

$$P'(-۲)=-۲Q(-۲)+۳=-۲\times۳+۳=-۳$$

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم $P'(x)$ بر $x+۲$ برابر $-۳$ است.

**۳۰- گزینهٔ ۲** ابتدا چند جمله از دنباله را مشخص می‌کنیم.

$$a_۱=-۱,\quad a_{n+۱}=۲-\frac{۱}{a_n}$$

$$a_۲=۲-\frac{۱}{a_۱}=۲+۱=۳\Rightarrow a_۲=\frac{۲\times۲-۱}{۲\times۲-۳}$$

$$a_۳=۲-\frac{۱}{a_۲}=۲-\frac{۱}{۳}=\frac{۵}{۳}\Rightarrow a_۳=\frac{۲\times۳-۱}{۲\times۳-۳}$$

$$a_۴=۲-\frac{۱}{a_۳}=۲-\frac{۳}{۵}=\frac{۷}{۵}\Rightarrow a_۴=\frac{۲\times۴-۱}{۲\times۴-۳}$$

$$a_۵=۲-\frac{۱}{a_۴}=۲-\frac{۵}{۷}=\frac{۹}{۷}\Rightarrow a_۵=\frac{۲\times۵-۱}{۲\times۵-۳}$$

بنابراین می‌توان حدس زد که

$$a_{۹۹}=\frac{۲\times۹۹-۱}{۲\times۹۹-۳}=\frac{۱۹۷}{۱۹۵},\quad a_{۱۰۰}=\frac{۲\times۱۰۰-۱}{۲\times۱۰۰-۳}=\frac{۱۹۹}{۱۹۷}$$

در نتیجه حاصل‌ضرب صد جملهٔ اول دنباله برابر است با

$$a_۱a_۲\cdots a_{۱۰۰}=(-۱)(\frac{۳}{۱})(\frac{۵}{۳})(\frac{۷}{۵})(\frac{۹}{۷})\cdots(\frac{۱۹۷}{۱۹۵})(\frac{۱۹۹}{۱۹۷})=-۱۹۹$$

**۳۱- گزینهٔ ۲** ده جملهٔ اول دنباله را پیدا می‌کنیم.

$$a_n=\begin{cases}۲^k & n=۳k\\ -۲k+۴ & n=۳k+۱\\ [\frac{n}{k+۲}]+a & n=۳k+۲\end{cases}$$

$$k=۰\Rightarrow\begin{cases}a_۰=۲^۰=۱\\ a_۱=-۲\times۰+۴=۴\\ a_۲=[\frac{۳\times۰+۲}{۰+۲}]+a=۱+a\end{cases}$$

$$k=۱\Rightarrow\begin{cases}a_۳=۲^۱=۲\\ a_۴=-۲\times۱+۴=۲\\ a_۵=[\frac{۳\times۱+۲}{۱+۲}]+a=۱+a\end{cases}$$

$$k=۲\Rightarrow\begin{cases}a_۶=۲^۲=۴\\ a_۷=-۲\times۲+۴=۰\\ a_۸=[\frac{۳\times۲+۲}{۲+۲}]+a=۲+a\end{cases}$$

$$k=۳\Rightarrow a_۹=۲^۳=۸$$

مجموع ده جملهٔ اول دنباله برابر ۱۹ است. پس

$$1+4+1+a+2+2+1+a+4+0+2+a+8=19$$

$$3a+25=19\Rightarrow a=-2$$

بنابراین باید میانگین $a_{28}$ و $a_{29}$ را پیدا کنیم.

$$a_{28}=-2\times9+4=-14,\quad a_{29}=[\frac{29}{9+2}]-2=2-2=0$$

پس میانگین جملات بیست و نهم $(a_{28})$ و سی‌ام $(a_{29})$ برابر است با

$$\frac{-14+0}{2}=-7$$

**۳۲- گزینهٔ ۴** توجه کنید که

$$0\le\sin^2x\le1\Rightarrow0\le5\sin^2x\le5\Rightarrow-1\le5\sin^2x-1\le4$$

$$0\le\sqrt{5\sin^2x-1}\le2\Rightarrow-2\le-\sqrt{5\sin^2x-1}\le0$$

$$2^{-2}\le2^{-\sqrt{5\sin^2x-1}}\le2^0\Rightarrow\frac{1}{4}\le f(x)\le1$$

بنابراین $R_f=[\frac{1}{4},1]$. در نتیجه

$$a=\frac{1}{4},\ b=1\Rightarrow a+b=\frac{5}{4}$$

**۳۳- گزینهٔ ۲** توجه کنید که

$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{t}=\log_{2^{-1}}t^{-1}=\log_2 t$$

بنابراین اگر فرض کنیم $t=12+\sqrt{[x]}-[x]$، آن‌گاه

$$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{t}-1=\log_2 t-1$$

چون $R_f=\{\log_2 3,\log_2 5\}$، پس

$$\begin{cases}\log_2 t-1=\log_2 3\Rightarrow\log_2 t=1+\log_2 3=\log_2 6\Rightarrow t=6\\ \log_2 t-1=\log_2 5\Rightarrow\log_2 t=1+\log_2 5=\log_2 10\Rightarrow t=10\end{cases}$$

بنابراین با فرض $u=\sqrt{[x]}\ge0$ داریم

$$\begin{cases}12+u-u^2=6\Rightarrow u^2-u-6=0\Rightarrow u=3,\ u=-2\ \text{(غ.ق.ق)}\\ 12+u-u^2=10\Rightarrow u^2-u-2=0\Rightarrow u=2,\ u=-1\ \text{(غ.ق.ق)}\end{cases}$$

بنابراین

$$\sqrt{[x]}=2\Rightarrow[x]=4\Rightarrow4\le x<5$$

$$\sqrt{[x]}=3\Rightarrow[x]=9\Rightarrow9\le x<10$$

بنابراین حداکثر عددهای صحیح ۴ و ۹ در دامنهٔ تابع f قرار دارند.

**۳۴- گزینهٔ ۳** تابع f اکیداً صعودی است و اگر نمودار آن را k واحد به بالا یا پایین منتقل کنیم، باز هم تابعی اکیداً صعودی حاصل می‌شود که نمودار وارونش را روی خط $y=x$ قطع می‌کند. پس نقطهٔ تقاطع نمودار تابع $y=f(x)+k$ و وارونش نقطهٔ $(1,1)$ است، پس

$$f(1)+k=1\Rightarrow\sqrt{\sqrt{1}+3}+k=1\Rightarrow k=-1$$

اکنون اگر نمودار حاصل را نسبت به محور x قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-(f(x)-1)$ به‌دست می‌آید و اگر این نمودار را ۴ واحد در جهت افقی به سمت چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y=-f(x+4)+1$ به‌دست می‌آید. پس ضابطهٔ تابع مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$y=-\sqrt{\sqrt{x+4}+3}+1$$

واضح است که نمودار این تابع از نقطهٔ $(0,1-\sqrt{5})$ عبور می‌کند.

**۳۵- گزینهٔ ۴** ابتدا توابع fog و gof را معین می‌کنیم.

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(1-x^2)=\begin{cases}-1 & 1-x^2<-1\\ 1-x^2 & -1\le1-x^2\le1\\ 1 & 1-x^2>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-1 & x^2>2\\ 1-x^2 & 0\le x^2\le2\\ 1 & x^2<0\end{cases}=\begin{cases}-1 & x>\sqrt{2}\ \text{یا}\ x<-\sqrt{2}\\ 1-x^2 & -\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}\end{cases}$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=1-f^2(x)=\begin{cases}1-(-1)^2 & x<-1\\ 1-x^2 & -1\le x\le1\\ 1-1^2 & x>1\end{cases}$$

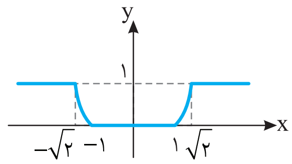
$$=\begin{cases}0 & x<-1\ \text{یا}\ x>1\\ 1-x^2 & -1\le x\le1\end{cases}$$

بنابراین تابع $h=gof-fog$ به‌صورت زیر است:

$$h(x)=\begin{cases}0-(-1) & x<-\sqrt{2}\\ 0-(1-x^2) & -\sqrt{2}\le x<-1\\ 1-x^2-(1-x^2) & -1\le x\le1\\ 0-(1-x^2) & 1<x\le\sqrt{2}\\ 0-(-1) & x\ge\sqrt{2}\end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases}1 & x<-\sqrt{2}\ \text{یا}\ x\ge\sqrt{2}\\ x^2-1 & -\sqrt{2}\le x<-1\ \text{یا}\ 1<x\le\sqrt{2}\\ 0 & -1\le x\le1\end{cases}$$

پس نمودار تابع h به‌صورت زیر است و ماکزیمم مقدار آن برابر ۱ است.




**۳۶- گزینهٔ ۱** ابتدا توجه کنید که اگر $x\to0^+$، آن‌گاه $[x]=0$، پس

$$\tan[x]=\tan0=0$$

از طرف دیگر، $\sqrt{3x}\to 0^+$ و $(\sqrt{1-x^3}-1)\to 0^-$ و می‌توان از هم‌ارزی‌های $\sin\alpha\sim\alpha$ و $1-\cos\alpha\sim\frac{1}{2}\alpha^2$ استفاده کرد. پس

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(\sqrt{1-x^3}-1)-2\tan[x]}{x^n(1-\cos\sqrt{3x})}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{x^n(\frac{1}{2}(3x))}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-x^3-1}{\frac{3}{2}x^{n+1}}\times\frac{1}{\sqrt{1-x^3}+1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{3x^{n-2}}$$

اکنون توجه کنید که اگر $n>2$، آن‌گاه حد بالا موجود نیست. اگر $n=2$، آن‌گاه حد بالا برابر $-\frac{1}{3}$ است. پس $a=-\frac{1}{3}$ و در نتیجه $a^n=\frac{1}{9}$. اگر $0<n<2$، آن‌گاه حد مورد نظر برابر صفر است و در نتیجه $a^n=0$. بنابراین مقدار $a^n$ می‌تواند برابر $\frac{1}{9}$ یا صفر باشد که فقط $\frac{1}{9}$ در گزینه‌ها وجود دارد.

**۳۷- گزینهٔ ۲** توجه کنید که اگر $x\to(-\frac{1}{2})^+$، آن‌گاه $\frac{-2}{x^2}\to(-8)^-$ و $\frac{3}{x^2}\to 12^+$. بنابراین $[-\frac{2}{x^2}]=-9$ و $[\frac{3}{x^2}]=12$. پس حد مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^+}\frac{16x-(-9)}{24x+12}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

**۳۸- گزینهٔ ۱** ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x^3-5x+4}{(x-a)(4x^2-4x+1)}=\frac{(x-1)(x^2+x-4)}{(x-a)(2x-1)^2}$$

واضح است که $y=\frac{1}{4}$ مجانب افقی و $x=\frac{1}{2}$ مجانب قائم نمودار تابع f است. پس این تابع نباید مجانب قائم دیگری داشته باشد. سه حالت ممکن است:

**حالت اول:** $x=a$ همان $x=\frac{1}{2}$ باشد، یعنی $a=\frac{1}{2}$.

**حالت دوم:** $x=a$ همان $x=1$ باشد، یعنی $a=1$.

**حالت سوم:** $x=a$ ریشهٔ معادلهٔ $x^2+x-4=0$ باشد که در این حالت مجموع مقدارهای ممکن برای a برابر $-1$ است. پس مجموع تمام مقادیر ممکن a برابر است با

$$\frac{1}{2}+1-1=\frac{1}{2}$$

**۳۹- گزینهٔ ۳** ابتدا مشتق تابع f را پیدا می‌کنیم.

$$f(x)=\sin^n(x^2)\Rightarrow f'(x)=2nx\cos(x^2)\sin^{n-1}(x^2)$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)f'(x)}{(1-\cos x)^m}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^n(x^2)2nx\cos(x^2)\sin^{n-1}(x^2)}{(1-\cos x)^m}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{2nx\sin^{2n-1}(x^2)\cos(x^2)}{(1-\cos x)^m}=32\sqrt{2}$$

اکنون از هم‌ارزی‌های $\sin\alpha\sim\alpha$ و $1-\cos\alpha\sim\frac{1}{2}\alpha^2$ استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2nx(x^2)^{2n-1}\cos(x^2)}{(\frac{1}{2}x^2)^m}=\lim_{x\to 0^+}\frac{n\times 2^{m+1}x^{4n-1}}{x^{2m}}=32\sqrt{2}$$

بنابراین

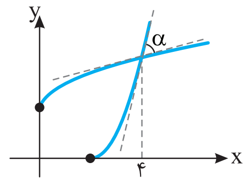
$$\begin{cases}2m=4n-1\Rightarrow m=2n-\frac{1}{2}\\ n\times 2^{m+1}=32\sqrt{2}\Rightarrow n\times 2^{2n+\frac{1}{2}}=32\sqrt{2}\Rightarrow n=2\Rightarrow m=\frac{7}{2}\end{cases}$$

پس $2m+n=9$.

**۴۰- گزینهٔ ۴** تابع $f(x)=\sqrt{x}+2$ اکیداً صعودی است و محل تقاطع نمودار آن با نمودار وارونش روی خط $y=x$ است. پس کافی است معادلهٔ $f(x)=x$ را حل کنیم.

$$\sqrt{x}+2=x\Rightarrow\sqrt{x}=x-2\Rightarrow x=x^2-4x+4$$

$$x^2-5x+4=0\Rightarrow x=4\,,\ x=1\ (\text{غ.ق.ق})$$



اکنون شیب خطوط مماس بر نمودار تابع‌های f و $f^{-1}$ را در نقطهٔ $x=4$ پیدا می‌کنیم.

$$f(x)=\sqrt{x}+2\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow f'(4)=\frac{1}{4}$$

$$f^{-1}(x)=(x-2)^2\Rightarrow(f^{-1})'(x)=2(x-2)\Rightarrow(f^{-1})'(4)=4$$

تانژانت زاویهٔ بین دو خط با شیب‌های $m_1$ و $m_2$ از تساوی $\tan\alpha=|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}|$ به‌دست می‌آید. پس

$$\tan\alpha=|\frac{4-\frac{1}{4}}{1+4(\frac{1}{4})}|=\frac{15}{8},\quad \sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{2(\frac{15}{8})}{1+(\frac{15}{8})^2}=\frac{240}{289}$$

**۴۱- گزینهٔ ۱** مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم.

$$f(x)=3\sqrt[3]{x}+|x|=\begin{cases}3\sqrt[3]{x}+x & x\geq 0\\ 3\sqrt[3]{x}-x & x\leq 0\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+1 & x>0\\ \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-1 & x<0\end{cases}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+1=0\ (\text{غ.ق.ق})\\ \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-1=0\Rightarrow\sqrt[3]{x^2}=1\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=-1\end{cases}$$

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |

بنابراین تابع f روی بازهٔ $[-1,+\infty)$ صعودی است.

**۴۲- گزینهٔ ۳** مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم.

$$f(x)=\frac{x^۴-۳}{x^۲-۲}\Rightarrow f'(x)=\frac{۴x^۳(x^۲-۲)-۲x(x^۴-۳)}{(x^۲-۲)^۲}$$

$$=\frac{۲x^۵-۸x^۳+۶x}{(x^۲-۲)^۲}=\frac{۲x(x^۴-۴x^۲+۳)}{(x^۲-۲)^۲}=\frac{۲x(x^۲-۱)(x^۲-۳)}{(x^۲-۲)^۲}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-۲$ | | $-\sqrt{۳}$ | | $-\sqrt{۲}$ | | $-۱$ | | $۰$ | | $۱$ | | $\sqrt{۲}$ | | $\sqrt{۳}$ | | $۲$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ////// | ////// | | $-$ | $۰$ | $+$ | // | $+$ | $۰$ | $-$ | $۰$ | $+$ | $۰$ | $-$ | // | $-$ | $۰$ | $+$ | | ////// | ////// |

بنابراین تابع $f$ روی بازه‌های $(-۲,-\sqrt{۳})$، $(-۱,۰)$، $(۱,\sqrt{۲})$ و $(\sqrt{۲},\sqrt{۳})$ اکیداً نزولی است و در نقاط $-\sqrt{۳}$، $-۱$، $۰$، $۱$ و $\sqrt{۳}$ (پنج بار) جهت صعودی و نزولی نمودار تابع $f$ تغییر می‌کند.

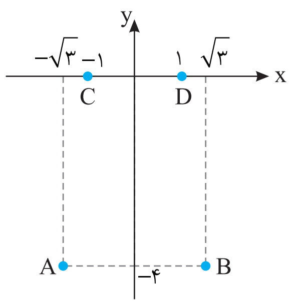
**۴۳- گزینهٔ ۱** مشتق اول و مشتق دوم تابع را تعیین علامت می‌کنیم و نقاط مینیمم نسبی و عطف تابع را معین می‌کنیم.

$$f(x)=x^۴-۶x^۲+۵\Rightarrow f'(x)=۴x^۳-۱۲x\Rightarrow f''(x)=۱۲x^۲-۱۲$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۴x(x^۲-۳)=۰\Rightarrow x=۰\,,\,x=\pm\sqrt{۳}$$

$$f''(x)=۰\Rightarrow ۱۲(x^۲-۱)=۰\Rightarrow x=\pm ۱$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{۳}$ | | $-۱$ | | $۰$ | | $۱$ | | $\sqrt{۳}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $۰$ | $+$ | $\vert$ | $+$ | $۰$ | $-$ | $\vert$ | $-$ | $۰$ | $+$ | |
| $f''(x)$ | | $+$ | $\vert$ | $+$ | $۰$ | $-$ | $\vert$ | $-$ | $۰$ | $+$ | $\vert$ | $+$ | |
| | | | min | | عطف | | max | | عطف | | min | | |




پس نقاط $A(-\sqrt{۳},-۴)$ و $B(\sqrt{۳},-۴)$ مینیمم نسبی تابع $f$ هستند و نقاط $C(-۱,۰)$ و $D(۱,۰)$ نقاط عطف این تابع هستند. شیب پاره‌خط‌های $AB$ و $CD$ برابر صفر است. بنابراین زاویهٔ بین آن‌ها برابر صفر است.

**۴۴- گزینهٔ ۴** عبارت مورد نظر را $A$ می‌نامیم. در این صورت

$$A=(a^۲+b^۲-۲ab)^۲(a^۲+b^۲+۲ab)^۲=((a-b)^۲)^۲((a+b)^۲)^۲$$

$$=(((a-b)(a+b))^۲)^۲$$

از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم.

$$A=((a^۲-b^۲)^۲)^۲=(a^۴-۲a^۲b^۲+b^۴)^۲$$

اکنون توجه کنید که

$$a^۴=(\sqrt[۴]{\sqrt{۶}-۲})^۴=\sqrt{۶}-۲\,,\quad b^۴=(\sqrt[۴]{\sqrt{۶}+۲})^۴=\sqrt{۶}+۲$$

$$a^۲b^۲=(\sqrt[۴]{\sqrt{۶}-۲})^۲\times(\sqrt[۴]{\sqrt{۶}+۲})^۲=\sqrt{\sqrt{۶}-۲}\times\sqrt{\sqrt{۶}+۲}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{۶}-۲)(\sqrt{۶}+۲)}=\sqrt{۶-۴}=\sqrt{۲}$$

بنابراین

$$A=(a^۴-۲a^۲b^۲+b^۴)^۲=(\sqrt{۶}-۲-۲\sqrt{۲}+\sqrt{۶}+۲)^۲$$

$$=(۲\sqrt{۶}-۲\sqrt{۲})^۲=۴(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})^۲=۴(۶+۲-۲\sqrt{۱۲})$$

چون $\sqrt{۱۲}=۲\sqrt{۳}$، پس

$$A=۴(۸-۴\sqrt{۳})=۱۶(۲-\sqrt{۳})$$

**۴۵- گزینهٔ ۴** فرض می‌کنیم $\sqrt[۳]{x}=t$ . در این صورت معادلهٔ مورد نظر به شکل زیر در می‌آید:

$$(t^۲+\frac{۱}{t^۲}+۱)(t^۲-۱)=۲t\Rightarrow(\frac{t^۴+۱+t^۲}{t^۲})(t^۲-۱)=۲t$$

برای اینکه معادله را ساده کنیم، دو طرف آن را در $t^۲$ ضرب می‌کنیم

$$(t^۴+t^۲+۱)(t^۲-۱)=۲t^۳$$

اکنون توجه کنید که می‌توانیم سمت چپ معادله را به کمک اتحاد چاق و لاغر ساده کنیم

$$(t^۲)^۳-۱^۳=۲t^۳\Rightarrow(t^۳)^۲-۲t^۳-۱=۰\qquad(*)$$

چون $\sqrt[۳]{x}=t$، پس $x=t^۳$ ، در نتیجه معادلهٔ $(*)$ می‌شود $x^۲-۲x-۱=۰$ ، که مجموع جواب‌های آن برابر است با $-\frac{(-۲)}{۱}=۲$ .

**۴۶- گزینهٔ ۱** **راه‌حل اول** توجه کنید که چون $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ $x^۲+x-۵=۰$ هستند، پس $x_۱+x_۲=-۱$ و $x_۱x_۲=-۵$ . اکنون می‌توانیم مجموع جواب‌های معادلهٔ جدید را به صورت زیر حساب کنیم:

$$S=\frac{۱}{(x_۱+۱)^۳}+\frac{۱}{(x_۲+۱)^۳}\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}}S=\frac{(x_۱+۱)^۳+(x_۲+۱)^۳}{(x_۱+۱)^۳(x_۲+۱)^۳}$$

از اتحاد $a^۳+b^۳=(a+b)^۳-۳ab(a+b)$ استفاده می‌کنیم و صورت کسر را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$S=\frac{(x_۱+۱+x_۲+۱)^۳-۳(x_۱+۱)(x_۲+۱)(x_۱+۱+x_۲+۱)}{((x_۱+۱)(x_۲+۱))^۳}$$

$$=\frac{(x_۱+x_۲+۲)^۳-۳(x_۱+x_۲+x_۱x_۲+۱)(x_۱+x_۲+۲)}{(x_۱+x_۲+x_۱x_۲+۱)^۳}$$

$$=\frac{(-۱+۲)^۳-۳(-۱-۵+۱)(-۱+۲)}{(-۱-۵+۱)^۳}=\frac{۱-۳(-۵)(۱)}{(-۵)^۳}=-\frac{۱۶}{۱۲۵}$$

همچنین حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ جدید به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$P=\frac{۱}{(x_۱+۱)^۳}\times\frac{۱}{(x_۲+۱)^۳}=\frac{۱}{((x_۱+۱)(x_۲+۱))^۳}$$

$$=\frac{۱}{(x_۱+x_۲+x_۱x_۲+۱)^۳}=\frac{۱}{(-۱-۵+۱)^۳}=-\frac{۱}{۱۲۵}$$

بنابراین معادلهٔ جدید به‌صورت $x^۲+\frac{۱۶}{۱۲۵}x-\frac{۱}{۱۲۵}=۰$ است، که اگر دو طرف آن را در ۱۲۵ ضرب کنیم، می‌شود $۱۲۵x^۲+۱۶x-۱=۰$.

**راه‌حل دوم** توجه کنید که

$$S=\frac{۱}{(x_۱+۱)^۳}+\frac{۱}{(x_۲+۱)^۳}=(\frac{۱}{x_۱+۱})^۳+(\frac{۱}{x_۲+۱})^۳=\frac{x_۱^۳}{۱۲۵}+\frac{x_۲^۳}{۱۲۵}=\frac{x_۱^۳+x_۲^۳}{۱۲۵}$$

اکنون از اتحاد $a^۳+b^۳=(a+b)^۳-۳ab(a+b)$ استفاده می‌کنیم. چون $x_۱+x_۲=-۱$ و $x_۱x_۲=-۵$ ، پس

$$S=\frac{(x_۱+x_۲)^۳-۳x_۱x_۲(x_۱+x_۲)}{۱۲۵}=\frac{(-۱)^۳-۳(-۵)(-۱)}{۱۲۵}=-\frac{۱۶}{۱۲۵}$$

از طرف دیگر،

$$P=\frac{1}{(x_1+1)^3}\times\frac{1}{(x_2+1)^3}=(\frac{1}{x_1+1})^3\times(\frac{1}{x_2+1})^3=\frac{x_1^3}{5^3}\times\frac{x_2^3}{5^3}=\frac{(x_1x_2)^3}{5^3\times5^3}$$

چون $x_1x_2=-5$، پس $P=\frac{(-5)^3}{5^3\times5^3}$، یعنی $P=-\frac{1}{125}$. در نتیجه معادلهٔ مورد نظر به‌صورت $x^2+\frac{16}{125}x-\frac{1}{125}=0$ است، که اگر دو طرف آن را در ۱۲۵ ضرب کنیم، می‌شود $125x^2+16x-1=0$.

**۴۷- گزینهٔ ۴** **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$f(\frac{\pi}{36})=16\cos^2\frac{3\pi}{36}\cos^2\frac{6\pi}{36}\cos^2\frac{12\pi}{36}\cos^2\frac{24\pi}{36}$$

$$=16\cos^2\frac{\pi}{12}\cos^2\frac{\pi}{6}\cos^2\frac{\pi}{3}\cos^2\frac{2\pi}{3}$$

$$=16\cos^2\frac{\pi}{12}(\frac{\sqrt3}{2})^2(\frac12)^2(-\frac12)^2=\frac34\cos^2\frac{\pi}{12}$$

اکنون برای اینکه مقدار $\cos^2\frac{\pi}{12}$ را حساب کنیم، از اتحاد مثلثاتی $\cos^2\alpha=\frac12(1+\cos2\alpha)$ استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$f(\frac{\pi}{36})=\frac34\times\frac12(1+\cos\frac{2\pi}{12})=\frac38(1+\frac{\sqrt3}{2})$$

$$=\frac38(\frac{2+\sqrt3}{2})=\frac{6+3\sqrt3}{16}$$

**راه‌حل دوم** عبارت داده شده را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=16(\cos3x\cos6x\cos12x\cos24x)^2$$

اکنون عبارت داخل پرانتز را در $\sin3x$ ضرب و تقسیم می‌کنیم

$$f(x)=16(\frac{\sin3x\cos3x\cos6x\cos12x\cos24x}{\sin3x})^2$$

از اتحاد مثلثاتی $\sin\alpha\cos\alpha=\frac12\sin2\alpha$ به‌دست می‌آید

$$\sin3x\cos3x=\frac12\sin6x$$

درنتیجه

$$f(x)=16(\frac{\frac12\sin6x\cos6x\cos12x\cos24x}{\sin3x})^2$$

به‌طور مشابه $\sin6x\cos6x=\frac12\sin12x$، پس

$$f(x)=16(\frac{\frac12\times\frac12\sin12x\cos12x\cos24x}{\sin3x})^2$$

به‌طور مشابه با انجام دو مرحلهٔ دیگر عبارت را به ساده‌ترین صورت می‌نویسیم.

$$f(x)=16(\frac{\frac12\times\frac12\times\frac12\sin24x\cos24x}{\sin3x})^2$$

$$=16(\frac{\frac12\times\frac12\times\frac12\times\frac12\sin48x}{\sin3x})^2=\frac{\sin^2 48x}{16\sin^2 3x}$$

بنابراین

$$f(\frac{\pi}{36})=\frac{\sin^2\frac{48\pi}{36}}{16\sin^2\frac{3\pi}{36}}=\frac{\sin^2\frac{4\pi}{3}}{16\sin^2\frac{\pi}{12}}=\frac{\sin^2(\pi+\frac{\pi}{3})}{16\sin^2\frac{\pi}{12}}\xrightarrow[2\sin^2\alpha=1-\cos2\alpha]{\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha}$$

$$f(\frac{\pi}{36})=\frac{(-\sin\frac{\pi}{3})^2}{8(1-\cos\frac{2\pi}{12})}=\frac{\sin^2\frac{\pi}{3}}{8(1-\cos\frac{\pi}{6})}=\frac{(\frac{\sqrt3}{2})^2}{8(1-\frac{\sqrt3}{2})}=\frac{\frac34}{4(2-\sqrt3)}$$

در نهایت صورت و مخرج را در مزدوج $2-\sqrt3$، یعنی $2+\sqrt3$ ضرب می‌کنیم

$$f(\frac{\pi}{36})=\frac{3}{16(2-\sqrt3)}\times\frac{2+\sqrt3}{2+\sqrt3}=\frac{3(2+\sqrt3)}{16(4-3)}=\frac{6+3\sqrt3}{16}$$

**راه‌حل سوم** عبارت $f(x)$ را به شکل زیر ساده می‌کنیم:

$$f(x)=(2\cos^2 3x)(2\cos^2 6x)(2\cos^2 12x)(2\cos^2 24x)$$

$$=(1+\cos6x)(1+\cos12x)(1+\cos24x)(1+\cos48x)$$

بنابراین

$$f(\frac{\pi}{36})=(1+\cos\frac{6\pi}{36})(1+\cos\frac{12\pi}{36})(1+\cos\frac{24\pi}{36})(1+\cos\frac{48\pi}{36})$$

$$=(1+\cos\frac{\pi}{6})(1+\cos\frac{\pi}{3})(1+\cos\frac{2\pi}{3})(1+\cos\frac{4\pi}{3})$$

$$=(1+\frac{\sqrt3}{2})(1+\frac12)(1-\frac12)(1-\frac12)=\frac{2+\sqrt3}{2}\times\frac32\times\frac12\times\frac12=\frac{6+3\sqrt3}{16}$$

**۴۸- گزینهٔ ۲** توجه کنید که

$$\cos(2\alpha-\frac{\pi}{2})=\sin2\alpha\ ,\quad \cos(\alpha+\pi)=-\cos\alpha$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{\sin2\alpha-\cos\alpha}{\cot2\alpha}$. اکنون مقادیر $\cos\alpha$ و $\sin2\alpha$ را حساب می‌کنیم. چون $\tan\alpha=\frac34$، پس می‌توان نوشت

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow1+\frac{9}{16}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{16}{25}$$

چون انتهای کمان $\alpha$ در ناحیهٔ سوم مثلثاتی است، پس $\cos\alpha<0$، یعنی $\cos\alpha=-\frac45$. از طرف دیگر،

$$\sin2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{2(\frac34)}{1+\frac{9}{16}}=\frac{24}{25}$$

$$\cos2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}}=\frac{7}{25}$$

$$\cot2\alpha=\frac{\cos2\alpha}{\sin2\alpha}=\frac{\frac{7}{25}}{\frac{24}{25}}=\frac{7}{24}$$

در نتیجه، عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{\sin2\alpha-\cos\alpha}{\cot2\alpha}=\frac{\frac{24}{25}+\frac45}{\frac{7}{24}}=\frac{1056}{175}$$

**۴۹- گزینهٔ ۳** می‌توان نوشت

$$\cos^2 x-\sin^2 x\cos 3x=1\Rightarrow 1-\cos^2 x+\sin^2 x\cos 3x=0$$

$$\sin^2 x+\sin^2 x\cos 3x=0\Rightarrow \sin^2 x(1+\cos 3x)=0$$

$$\begin{cases}\sin^2 x=0\Rightarrow \sin x=0\Rightarrow x=k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\\ \cos 3x=-1\Rightarrow 3x=(2k+1)\pi\Rightarrow x=\dfrac{(2k+1)\pi}{3}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

برای اینکه جواب‌های واقع در بازهٔ $[0,2\pi]$ را پیدا کنیم، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

| $k$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|
| $k\pi$ | $0$ | $\pi$ | $2\pi$ | $\cancel{3\pi}$ |
| $\dfrac{(2k+1)\pi}{3}$ | $\dfrac{\pi}{3}$ | $\pi$ | $\dfrac{5\pi}{3}$ | $\cancel{\dfrac{7\pi}{3}}$ |

از این جدول معلوم می‌شود که جواب‌های مورد نظر $0$، $\frac{\pi}{3}$، $\pi$، $\frac{5\pi}{3}$ و $2\pi$ هستند، که تعداد آن‌ها پنج‌تاست.

**۵۰- گزینهٔ ۱** **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$ که در آن $g(x)=\log_4(x^2-x-2)$ و $h(x)=\sqrt{x^2-1}+1$. برای پیدا کردن دامنهٔ تابع f، دامنهٔ تابع‌های g و h را به‌دست می‌آوریم، از آن‌ها اشتراک می‌گیریم و در آخر جواب‌های معادلهٔ $h(x)=0$ را از آن حذف می‌کنیم، یعنی

$$D_f=(D_g\cap D_h)-\{x\,|\,x\in D_h, h(x)=0\}$$

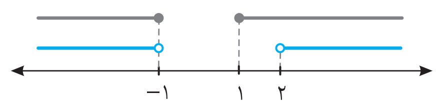
برای پیدا کردن دامنهٔ تابع g باید نامعادلهٔ $x^2-x-2>0$ را حل کنیم:

$$x^2-x-2>0\xrightarrow{\text{اتحاد جملهٔ مشترک}}(x-2)(x+1)>0\Rightarrow x<-1 \text{ یا } x>2$$

پس $D_g=(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$. از طرف دیگر، برای پیدا کردن دامنهٔ تابع h باید نامعادلهٔ $x^2-1\geq 0$ را حل کنیم: $x^2-1\geq 0\Rightarrow x^2\geq 1\Rightarrow x\geq 1$ یا $x\leq -1$

پس $D_h=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$. توجه کنید که معادلهٔ $h(x)=0$ جواب ندارد، زیرا $\sqrt{x^2-1}+1$ همواره مثبت است. بنابراین

$$D_f=((-\infty,-1)\cup(2,+\infty))\cap((-\infty,-1]\cup[1,+\infty))=(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$$




**راه‌حل دوم** توجه کنید که عدد ۳ در دامنهٔ تابع f است، زیرا

$$f(3)=\frac{\log_4(9-3-2)}{\sqrt{9-1}+1}=\frac{\log_4 4}{\sqrt{8}+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}+1}$$

پس گزینه‌های (۲) و (۴) حذف می‌شوند، زیرا ۳ عضو آن‌ها نیست. از طرف دیگر، چون ۲ عضو مجموعهٔ گزینهٔ (۱) نیست، ولی عضو مجموعهٔ گزینهٔ (۳) است، پس کافی است ببینیم ۲ در دامنهٔ تابع f هست یا خیر. توجه کنید که

$$f(2)=\frac{\log_4(4-2-2)}{\sqrt{4-1}+1}=\frac{\log_4 0}{\sqrt{3}+1}$$

چون $\log_4 0$ تعریف نشده است، پس عدد ۲ در دامنهٔ تابع f نیست، یعنی گزینهٔ (۳) نیز حذف می‌شود. بنابراین گزینهٔ (۱) دامنهٔ تابع f است.

**۵۱- گزینهٔ ۲** **راه‌حل اول** چون $-\frac{1}{2}\leq x<\frac{1}{2}$، پس $-\frac{3}{2}\leq 3x<\frac{3}{2}$.
بنابراین

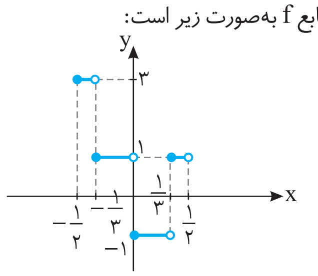
$$-\frac{3}{2}\leq 3x<-1\Rightarrow[3x]=-2, -\frac{1}{2}\leq x<-\frac{1}{3}\Rightarrow f(x)=2|-2|-1=3$$

$$-1\leq 3x<0\Rightarrow[3x]=-1, -\frac{1}{3}\leq x<0\Rightarrow f(x)=2|-1|-1=1$$

$$0\leq 3x<1\Rightarrow[3x]=0, 0\leq x<\frac{1}{3}\Rightarrow f(x)=2|0|-1=-1$$

$$1\leq 3x<\frac{3}{2}\Rightarrow[3x]=1, \frac{1}{3}\leq x<\frac{1}{2}\Rightarrow f(x)=2|1|-1=1$$

در نتیجه نمودار تابع f به‌صورت زیر است:




**راه‌حل دوم** توجه کنید که اگر $x\to 0^-$، آن‌گاه $3x\to 0^-$، پس $[3x]=-1$.

در نتیجه $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2|[3x]|-1)=2|-1|-1=1$

همچنین اگر $x\to 0^+$، آن‌گاه $3x\to 0^+$، پس $[3x]=0$. در نتیجه

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(2|[3x]|-1)=2|0|-1=-1$$

فقط گزینهٔ (۲) این شرایط را دارد.

**۵۲- گزینهٔ ۴** **راه‌حل اول** نقطهٔ برخورد منحنی‌ها جواب دستگاه زیر است:

$$\begin{cases}2y=x^2\\ x=\sqrt{y+3}-\sqrt{y-3}\end{cases}$$

دو طرف معادلهٔ دوم را به توان دو می‌رسانیم و به جای $x^2$ قرار می‌دهیم $2y$:

$$x^2=(\sqrt{y+3}-\sqrt{y-3})^2\Rightarrow 2y=y+3+y-3-2\sqrt{(y+3)(y-3)}$$

$$2y=2y-2\sqrt{y^2-9}\Rightarrow -2\sqrt{y^2-9}=0\Rightarrow y^2-9=0\Rightarrow y=\pm 3$$

توجه کنید که چون $2y=x^2\geq 0$، پس فقط $y=3$ قبول است. در نتیجه

$$x=\sqrt{y+3}-\sqrt{y-3}=\sqrt{6}-\sqrt{0}=\sqrt{6}$$

بنابراین نقطهٔ برخورد منحنی‌ها $(\sqrt{6},3)$ است، که فاصله‌اش از مبدأ برابر است با

$$\sqrt{(\sqrt{6})^2+3^2}=\sqrt{6+9}=\sqrt{15}$$

**راه‌حل دوم** با توجه به ضابطهٔ منحنی $x=\sqrt{y+3}-\sqrt{y-3}$، متوجه می‌شویم که $y\geq 3$. اکنون اگر در ضابطه‌های داده شده قرار دهیم $y=3$، برای هر دو به‌دست می‌آید $x=\sqrt{6}$، یعنی $(\sqrt{6},3)$ نقطهٔ تلاقی دو منحنی است که فاصلهٔ آن از مبدأ مختصات برابر است با $\sqrt{(\sqrt{6})^2+3^2}=\sqrt{15}$.

**۵۳- گزینهٔ ۲** در صورت از $3^x$ و در مخرج از $2^{x-2}$ فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{3^x(1+3+3^2+3^3+3^4+3^5)}{2^{x-2}(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5)}=52\Rightarrow\frac{3^x\times 364}{2^{x-2}\times 63}=52$$

$$\frac{3^{x-2}\times 9\times 52\times 7}{2^{x-2}\times 9\times 7}=52\Rightarrow\frac{3^{x-2}}{2^{x-2}}=1\Rightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^{x-2}=1=\left(\frac{3}{2}\right)^0\Rightarrow x-2=0\Rightarrow x=2$$

**۵۴- گزینهٔ ۳** ابتدا توجه کنید که انتقال به اندازهٔ $\frac{\pi}{۲}$ در امتداد محور x در جهت مثبت معادل $\frac{\pi}{۲}$ واحد انتقال به راست و انتقال به اندازهٔ $\frac{۳}{۲}$ در امتداد محور y در جهت منفی معادل $\frac{۳}{۲}$ واحد فقط یک فاصله انتقال به پایین است. پس

$$y=۲^{|\sin x|}\xrightarrow{\frac{\pi}{۲}\text{ واحد به راست}} y=۲^{|\sin(x-\frac{\pi}{۲})|}$$

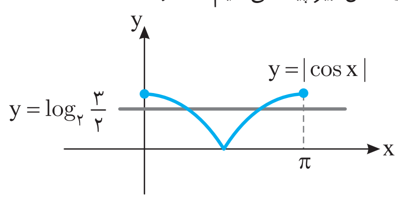
چون که $\sin(x-\frac{\pi}{۲})=-\cos x$، پس

$$y=۲^{|-\cos x|}=۲^{|\cos x|}\xrightarrow{\frac{۳}{۲}\text{ واحد به پایین}} y=۲^{|\cos x|}-\frac{۳}{۲}$$

بنابراین با انجام انتقال‌های خواسته شده، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=۲^{|\cos x|}-\frac{۳}{۲}$ به‌دست می‌آید. برای پیدا کردن تعداد نقاط برخورد نمودار تابع بالا با محور x در فاصلهٔ $[۰,\pi]$، باید تعداد جواب‌های معادلهٔ $۲^{|\cos x|}-\frac{۳}{۲}=۰$ را در این فاصله پیدا کنیم. اکنون با استفاده از تعریف تابع لگاریتم داریم

$$۲^{|\cos x|}-\frac{۳}{۲}=۰\Rightarrow ۲^{|\cos x|}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow |\cos x|=\log_۲\frac{۳}{۲}$$

توجه کنید که $\log_۲ ۱<\log_۲\frac{۳}{۲}<\log_۲ ۲$، پس $۰<\log_۲\frac{۳}{۲}<۱$. اکنون تعداد نقاط برخورد خط $y=\log_۲\frac{۳}{۲}$ و نمودار تابع $y=|\cos x|$ را روی بازهٔ $[۰,\pi]$ از روی شکل زیر پیدا می‌کنیم که دوتاست.




**۵۵- گزینهٔ ۱** اگر فرض کنیم $a=\log_x y$، آن‌گاه $\log_y x=\frac{۱}{a}$.

بنابراین از تساوی داده شده به‌دست می‌آید

$$a-۲(\frac{۱}{a})=۱\xrightarrow{\times a} a^۲-۲=a\Rightarrow a^۲-a-۲=۰$$

به کمک اتحاد جملهٔ مشترک عبارت بالا را تجزیه می‌کنیم

$$(a+۱)(a-۲)=۰\Rightarrow a=-۱,\ a=۲$$

چون $x,y>۱$، پس $a=\log_x y>۰$، در نتیجه فقط $a=۲$ قابل قبول است،

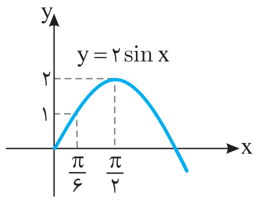
پس

$$\log_x y=۲\Rightarrow y=x^۲$$

**۵۶- گزینهٔ ۱** **راه‌حل اول** اگر $x\to\frac{\pi}{۶}^-$، آن‌گاه $\sin x\to\frac{۱}{۲}^-$ و در نتیجه $۲\sin x\to ۱^-$، پس $۲\sin x-۱\to ۰^-$. بنابراین $[۲\sin x-۱]=-۱$، یعنی

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}^-}[۲\sin x-۱]=-۱$$

**راه‌حل دوم** چون به‌ازای هر عدد حقیقی x و هر عدد صحیح k، $[x+k]=[x]+k$، پس $[۲\sin x-۱]=[۲\sin x]-۱$. اکنون به نمودار تابع $y=۲\sin x$ در شکل زیر توجه کنید.




از روی این نمودار معلوم می‌شود که

$$x\to\frac{\pi}{۶}^-\Rightarrow ۰<۲\sin x<۱\Rightarrow[۲\sin x]=۰$$

بنابراین

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}^-}([۲\sin x]-۱)=\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}^-}(۰-۱)=-۱$$

**۵۷- گزینهٔ ۳** **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون، x را برحسب y به‌دست می‌آوریم

$$f(x)=y=۲+\sqrt{x-۱}\Rightarrow y-۲=\sqrt{x-۱}\xrightarrow{\text{به توان دو}}$$

$$(y-۲)^۲=x-۱\Rightarrow x=(y-۲)^۲+۱$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=(x-۲)^۲+۱$. اگر این نمودار را ۲ واحد در جهت مثبت محور x و سپس ۳ واحد در جهت منفی محور y انتقال دهیم، نمودار تابع $g(x)=f^{-۱}(x-۲)-۳$ به‌دست می‌آید. بنابراین

$$g(۴)=f^{-۱}(۴-۲)-۳=f^{-۱}(۲)-۳=(۲-۲)^۲+۱-۳=-۲$$

**راه‌حل دوم** قرینهٔ نمودار تابع $f(x)=۲+\sqrt{x-۱}$ نسبت به خط $y=x$ نمودار تابع $f^{-۱}$ است. بنابراین $g(x)=f^{-۱}(x-۲)-۳$. قرار می‌دهیم $g(۴)=a$ و از تعریف تابع معکوس استفاده می‌کنیم. در نتیجه

$$g(۴)=f^{-۱}(۲)-۳=a\Rightarrow f^{-۱}(۲)=a+۳$$

$$\xrightarrow{\text{تعریف تابع وارون}} f(a+۳)=۲$$

پس

$$۲+\sqrt{a+۳-۱}=۲\Rightarrow\sqrt{a+۲}=۰\Rightarrow a=-۲$$

**۵۸- گزینهٔ ۳** توجه کنید که

$$(gof)(x)=g(f(x))=\begin{cases} ۱ & f(x)>۰ \\ ۰ & f(x)=۰ \\ -۱ & f(x)<۰ \end{cases}$$

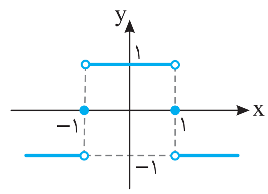
از طرف دیگر، جدول تعیین علامت $f(x)$ به صورت زیر است:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1-x^2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

بنابراین

$$(gof)(x)=\begin{cases}1 & x\in(-1,1)\\ 0 & x=\pm1\\ -1 & x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\end{cases}$$

پس نمودار تابع $gof$ به‌صورت زیر است، که در نقاط $x=\pm1$ ناپیوسته است.




**۵۹- گزینهٔ ۲** توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2(x^2-4)}{x^2-1} & x^2\geq 4\\[2mm] \dfrac{-x^2(x^2-4)}{x^2-1} & x^2\leq 4\,,\,x\neq\pm1\end{cases}$$

از طرف دیگر، اگر $g(x)=\dfrac{x^2(x^2-4)}{x^2-1}=\dfrac{x^4-4x^2}{x^2-1}$، آن‌گاه

$$g'(x)=\frac{(4x^3-8x)(x^2-1)-(2x)(x^4-4x^2)}{(x^2-1)^2}=\frac{2x((x^2-1)^2+3)}{(x^2-1)^2}$$

بنابراین

$$f'(x)=\begin{cases}g'(x) & x>2 \text{ یا } x<-2\\ -g'(x) & -2<x<2\,,\,x\neq\pm1\end{cases}$$

توجه کنید که تابع f در نقطه‌های ۲ و $-۲$ مشتق‌پذیر نیست، زیرا این عددها ریشه‌های سادهٔ عبارت داخل قدرمطلق هستند. همچنین،

$$f'(x)=0\Rightarrow g'(x)=0\Rightarrow x=0$$

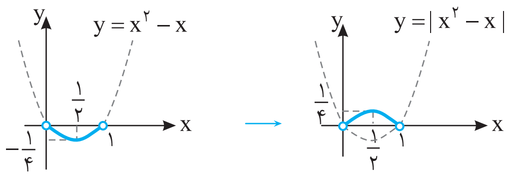
پس نقاط بحرانی تابع f نقطه‌های ۲، $-۲$ و صفر هستند، که مطابق جدول زیر هر سه طول نقاط اکسترمم نسبی تابع f هستند $(x\neq\pm1)$:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $+$ | |

**۶۰- گزینهٔ ۳** اگر مختصات نقطهٔ A واقع بر سهمی $f(x)=x^2$ به‌صورت $(x,x^2)$ باشد، مختصات نقطهٔ $A'$، یعنی قرینهٔ A نسبت به نیمساز نواحی اول و سوم، به‌صورت $(x^2,x)$ است. بنابراین

$$AA'=\sqrt{(x-x^2)^2+(x^2-x)^2}=\sqrt{2(x^2-x)^2}=\sqrt{2}|x^2-x|$$

از طرف دیگر، چون طول نقطهٔ A بین دو طول متوالی از محل برخورد تابع f با خط نیمساز نواحی اول و سوم (خط $y=x$)، یعنی نقاط $(0,0)$ و $(1,1)$ قرار دارد، پس باید ماکزیمم $AA'$ را در بازهٔ $(0,1)$ پیدا کنیم. برای پیدا کردن ماکزیمم تابع $y=|x^2-x|$ در بازهٔ $(0,1)$ از روش رسم نمودار تابع استفاده می‌کنیم.




بنابراین بیشترین مقدار $AA'$ در بازهٔ $(0,1)$ به‌ازای $x=\frac{1}{2}$ به‌دست می‌آید، که برابر می‌شود با

$$AA'=\sqrt{2}\left|\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right|=\sqrt{2}\times\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

**۶۱- گزینهٔ ۴** ابتدا توجه کنید که

$$(fog)'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)=g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)f'\left(g\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)\right)$$

توجه کنید که $g\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)^2-1}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\frac{9}{8}-1}}=2$. پس باید مقدار $g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)f'(2)$ را حساب کنیم. مقدار $g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)$ را به‌سادگی می‌توان حساب کرد

$$g(x)=(x^2-1)^{-\frac{1}{3}}\Rightarrow g'(x)=\left(-\frac{1}{3}\right)(2x)(x^2-1)^{-\frac{1}{3}-1}$$

$$=-\frac{2}{3}x(x^2-1)^{-\frac{4}{3}}$$

$$g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)=-\frac{2}{3}\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)\left(\frac{9}{8}-1\right)^{-\frac{4}{3}}=-8\sqrt{2}$$

برای پیدا کردن مقدار $f'(2)$ ابتدا ضابطهٔ تابع f را در یک همسایگی نقطهٔ $x=2$ پیدا می‌کنیم. توجه کنید که

$$x\to2\Rightarrow x^2\to4\Rightarrow 4<x^2+\frac{1}{2}<5\Rightarrow\left[x^2+\frac{1}{2}\right]=4$$

در نتیجه $f(x)=(4x)^2+1=16x^2+1\Rightarrow f'(x)=32x\Rightarrow f'(2)=64$

بنابراین $(fog)'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)=(-8\sqrt{2})(64)=4(-128\sqrt{2})$

**۶۲- گزینهٔ ۳** توجه کنید که $g'(x)=2ax+b$ و $g''(x)=2a$.

بنابراین

$$f(x)=\begin{cases}g(x) & x\geq k\\ g'(x) & x<k\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}g'(x) & x\geq k\\ g''(x) & x<k\end{cases}$$

چون تابع f در نقطهٔ $x=k$ مشتق‌پذیر است، پس

$$g(k)=g'(k)\Rightarrow ak^2+bk+c=2ak+b$$

$$g'(k)=g''(k)\Rightarrow 2ak+b=2a\Rightarrow b=2a-2ak$$

اکنون از تساوی $b=2a-2ak$ و شرط $b+c=a$ می‌توان نتیجه گرفت

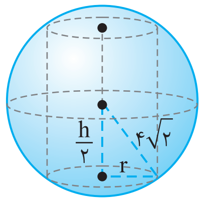
$$ak^2+bk+a-b=2a\Rightarrow ak^2+(2a-2ak)k+a-(2a-2ak)=2a$$

$$a(k^2+2k-2k^2+1-2+2k)=2a\xrightarrow{a\neq0}-k^2+4k-1=2$$

$$k^2-4k+3=0\xrightarrow{\text{اتحاد جملهٔ مشترک}}(k-1)(k-3)=0\Rightarrow k=1\,,\,k=3$$

پس بیشترین مقدار k برابر با ۳ است.

**۶۳- گزینهٔ ۲** شکل مقابل را ببینید.




مساحت جانبی استوانه برابر است با $S=2\pi rh$.

از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$r^2+(\frac{h}{2})^2=(4\sqrt{2})^2\Rightarrow r^2=32-\frac{h^2}{4}$$

$$r=\sqrt{32-\frac{h^2}{4}}$$

$$S=2\pi\sqrt{32-\frac{h^2}{4}}\times h=2\pi\sqrt{\frac{(128-h^2)h^2}{4}}=\pi\sqrt{-h^4+128h^2}$$

برای اینکه S ماکزیمم باشد، باید $-h^4+128h^2$ ماکزیمم باشد. توجه کنید که

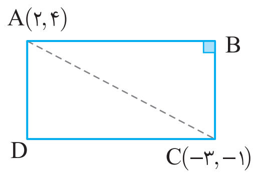
$$y=-h^4+128h^2\Rightarrow y'=-4h^3+256h$$

$$y'=0\Rightarrow -4h(h^2-64)=0\Rightarrow h^2=64$$

بنابراین ماکزیمم S به‌ازای $h^2=64$ به‌دست می‌آید، که برابر است با

$$S=\pi\sqrt{-64^2+128\times 64}=64\pi$$

**۶۴- گزینهٔ ۳** راه‌حل اول




ابتدا معادلهٔ خطی را که ضلع AB روی آن است، می‌نویسیم

$$y-4=3(x-2)\Rightarrow 3x-y-2=0$$

فاصلهٔ نقطهٔ C از خط به‌دست آمده برابر است با

$$CB=\frac{|3(-3)-(-1)-2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

از طرف دیگر، $AC=\sqrt{(2+3)^2+(4+1)^2}=\sqrt{50}$

اکنون با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABC، طول AB را به‌دست می‌آوریم

$$AB^2+BC^2=AC^2\Rightarrow AB^2+10=50\Rightarrow AB=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

پس محیط مستطیل برابر است با $2(\sqrt{10}+2\sqrt{10})=6\sqrt{10}$.

**راه‌حل دوم** ابتدا معادلات اضلاع AB و BC را می‌نویسیم

$$AB: 3x-y-2=0$$

$$BC\perp AB\Rightarrow m_{BC}=-\frac{1}{m_{AB}}=-\frac{1}{3}\Rightarrow y-(-1)=-\frac{1}{3}(x-(-3))$$

$$BC: x+3y+6=0$$

محل تلاقی اضلاع AB و BC همان نقطهٔ B است.

$$\begin{cases}3x-y-2=0\\ x+3y+6=0\end{cases}\Rightarrow B(0,-2)$$

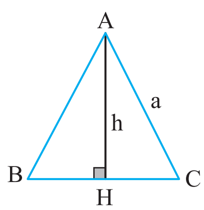
اکنون طول پاره‌خط‌های AB و BC را به‌دست می‌آوریم و سپس محیط مستطیل را محاسبه می‌کنیم.

$$AB=\sqrt{(2-0)^2+(4+2)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

$$BC=\sqrt{(0+3)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$

در نتیجه $\text{محیط مستطیل}=2(AB+BC)=2(2\sqrt{10}+\sqrt{10})=6\sqrt{10}$

**۶۵- گزینهٔ ۲** توجه کنید که $\frac{\sqrt{3}}{2}a=h$، پس $a=\frac{2}{\sqrt{3}}h$، در نتیجه $3a=\frac{3\times 2h}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}h$، یعنی




$2\sqrt{3}h=3a=$ محیط مثلث. از طرف دیگر، چون محیط مثلث برابر $\sqrt{270}$ است، پس

$$2\sqrt{3}h=\sqrt{270}\Rightarrow h=\frac{\sqrt{270}}{2\sqrt{3}}=\frac{3}{2}\sqrt{10}$$

اگر مختصات نقطهٔ A به‌صورت $(a,b)$ باشد، آن‌گاه

$$h=AH=\frac{|3a-b-5|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|3a-b-5|}{\sqrt{10}}=\frac{3}{2}\sqrt{10}$$

$$|3a-b-5|=\frac{3}{2}\sqrt{10}\times\sqrt{10}=15 \qquad (*)$$

از طرف دیگر، شیب خطی که ضلع BC روی آن است، برابر ۳ است. چون AH بر BC عمود است، پس شیب خطی که ارتفاع AH روی آن است، قرینهٔ معکوس ۳، یعنی برابر $-\frac{1}{3}$ است. به این ترتیب،

$$\frac{b-1}{a-2}=-\frac{1}{3}\Rightarrow 3b-3=2-a\Rightarrow a=5-3b$$

بنابراین اگر در تساوی $(*)$ به‌جای a قرار دهیم $5-3b$، به‌دست می‌آید

$$|3(5-3b)-b-5|=15$$

$$|10-10b|=15\Rightarrow\begin{cases}10-10b=15\\ 10-10b=-15\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{13}{2}\\ b=\frac{5}{2}\Rightarrow a=-\frac{5}{2}\end{cases}$$

در نتیجه A می‌تواند یکی از نقطه‌های $(\frac{13}{2},-\frac{1}{2})$ و $(-\frac{5}{2},\frac{5}{2})$ باشد.

**۶۶- گزینهٔ ۲** **راه‌حل اول** با استفاده از اتحاد مزدوج می‌توان نوشت

$$(a+\frac{1}{a}+\sqrt{2})^2(a+\frac{1}{a}-\sqrt{2})^2=((a+\frac{1}{a})^2-(\sqrt{2})^2)^2$$

$$=(a^2+\frac{1}{a^2}+2-2)^2=(a^2+\frac{1}{a^2})^2=a^4+\frac{1}{a^4}+2$$

اکنون توجه کنید که $a=\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}\Rightarrow a^4=7-4\sqrt{3}$

$$\frac{1}{a^4}=\frac{1}{7-4\sqrt{3}}\times\frac{7+4\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}=\frac{7+4\sqrt{3}}{49-48}=7+4\sqrt{3}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$a^4+\frac{1}{a^4}+2=(7-4\sqrt{3})+(7+4\sqrt{3})+2=16$$

**راه‌حل دوم** ابتدا توجه کنید که

$$a=\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}=\sqrt[4]{(2-\sqrt{3})^2}=\sqrt{2-\sqrt{3}}\Rightarrow a^2=2-\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{a^2}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}\times\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$$

بنابراین

$$(a+\frac{1}{a}+\sqrt{2})^2(a+\frac{1}{a}-\sqrt{2})^2=((a+\frac{1}{a})^2-(\sqrt{2})^2)^2=(a^2+\frac{1}{a^2}+2-2)^2$$

$$=(a^2+\frac{1}{a^2})^2=(2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3})^2=16$$

**۶۷- گزینهٔ ۳** فرض می‌کنیم پول اولیهٔ علی $x$ و پول اولیهٔ اکرم $y$ باشد.

در این صورت

$$\begin{cases} x+y=100 \\ (x-10)(y+10)=475 \end{cases}$$

از معادلهٔ اول به‌دست می‌آید $x=100-y$ و در نتیجه معادلهٔ دوم را می‌توان این‌طور نوشت

$$(100-y-10)(y+10)=475 \Rightarrow (100-(y+10))(y+10)=475$$

$$100(y+10)-(y+10)^2=475 \Rightarrow (y+10)^2-100(y+10)+475=0$$

اگر فرض کنیم $y+10=A$، معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$A^2-100A+475=0$$

از اتحاد جملهٔ مشترک استفاده و سمت چپ معادله را تجزیه می‌کنیم.

$$(A-5)(A-95)=0 \begin{cases} A=5 \Rightarrow y+10=5 \Rightarrow y=-5 \ \text{(غ.ق.ق)} \\ A=95 \Rightarrow y+10=95 \Rightarrow y=85 \ \text{تومان} \end{cases}$$

**۶۸- گزینهٔ ۱** **راه‌حل اول** توجه کنید که چون $x_1$ و $x_2$ جواب‌های معادلهٔ $x^2-x-4=0$ هستند، پس $x_1+x_2=1$ و $x_1x_2=-4$. اکنون می‌توانیم مجموع جواب‌های معادلهٔ جدید را به‌صورت زیر حساب کنیم:

$$S=(x_1^3+\frac{1}{x_2})+(x_2^3+\frac{1}{x_1})=x_1^3+x_2^3+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$$

با استفاده از اتحاد $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ و نیز مخرج مشترک گرفتن، عبارت را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$S=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)+\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=1-3(-4)(1)+\frac{1}{-4}=\frac{51}{4}$$

همچنین حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ جدید به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$P=(x_1^3+\frac{1}{x_2})(x_2^3+\frac{1}{x_1})=x_1^3x_2^3+x_1^2+x_2^2+\frac{1}{x_1x_2}$$

$$=(x_1x_2)^3+(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+\frac{1}{x_1x_2}=(-4)^3+1-2(-4)+\frac{1}{-4}$$

$$=-\frac{221}{4}$$

بنابراین معادلهٔ جدید به صورت $x^2-\frac{51}{4}x-\frac{221}{4}=0$ است، که اگر دو طرف آن را در ۴ ضرب کنیم، می‌شود $4x^2-51x-221=0$.

**راه‌حل دوم** توجه کنید که

$$\xrightarrow{\times x} x^3=x^2+4x=(x+4)+4x=5x+4$$

$$x=x^2-4 \Rightarrow x^2=x+4$$

بنابراین $x_1^3=5x_1+4$ و $x_2^3=5x_2+4$. از طرف دیگر،

$$x_1x_2=-4 \Rightarrow \frac{1}{x_1}=-\frac{x_2}{4}, \quad \frac{1}{x_2}=-\frac{x_1}{4}$$

اکنون می‌توانیم مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ جدید را به‌صورت زیر به‌دست آوریم:

$$S=(x_1^3+\frac{1}{x_2})+(x_2^3+\frac{1}{x_1})=(5x_1+4-\frac{x_1}{4})+(5x_2+4-\frac{x_2}{4})$$

$$=\frac{19}{4}(x_1+x_2)+8=\frac{19}{4}(1)+8=\frac{51}{4}$$

$$P=(x_1^3+\frac{1}{x_2})(x_2^3+\frac{1}{x_1})=(5x_1+4-\frac{x_1}{4})(5x_2+4-\frac{x_2}{4})$$

$$=(\frac{19}{4}x_1+4)(\frac{19}{4}x_2+4)=(\frac{19}{4})^2x_1x_2+19(x_1+x_2)+16=-\frac{221}{4}$$

بنابراین معادلهٔ جدید به‌صورت زیر است:

$$x^2-\frac{51}{4}x-\frac{221}{4}=0 \Rightarrow 4x^2-51x-221=0$$

**۶۹- گزینهٔ ۱** **راه‌حل اول** می‌توان نوشت

$$f(\frac{\pi}{12})=32\cos^2\frac{\pi}{12}\cos^2\frac{2\pi}{12}\cos^2\frac{4\pi}{12}\cos^2\frac{8\pi}{12}\cos^2\frac{16\pi}{12}$$

$$=32\cos^2\frac{\pi}{12}\cos^2\frac{\pi}{6}\cos^2\frac{\pi}{3}\cos^2\frac{2\pi}{3}\cos^2\frac{4\pi}{3}$$

$$=32\cos^2\frac{\pi}{12}(\frac{\sqrt{3}}{2})^2(\frac{1}{2})^2(-\frac{1}{2})^2(-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{8}\cos^2\frac{\pi}{12}$$

اکنون برای اینکه $\cos^2\frac{\pi}{12}$ را حساب کنیم، از اتحاد مثلثاتی $\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$ استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$f(\frac{\pi}{12})=\frac{3}{8}\cos^2\frac{\pi}{12}=\frac{3}{8}(\frac{1}{2}(1+\cos\frac{\pi}{6}))=\frac{3}{16}(1+\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{6+3\sqrt{3}}{32}$$

$$=\frac{6+\sqrt{27}}{32}$$

**راه‌حل دوم** $f(x)=32(\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x\cos 16x)^2$

اکنون عبارت داخل پرانتز را در $\sin x$ ضرب و تقسیم می‌کنیم

$$f(x)=32(\frac{\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x\cos 16x}{\sin x})^2$$

از اتحاد مثلثاتی $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$ به‌دست می‌آید

$$f(x)=32(\frac{\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x\cos 4x\cos 8x\cos 16x}{\sin x})^2$$

به‌طور مشابه $\sin 2x\cos 2x=\frac{1}{2}\sin 4x$، پس

$$f(x)=32(\frac{\frac{1}{4}\sin 4x\cos 4x\cos 8x\cos 16x}{\sin x})^2$$

به‌طور مشابه با انجام سه مرحلهٔ دیگر عبارت را به ساده‌ترین صورت می‌نویسیم.

$$f(x)=32(\frac{\frac{1}{8}\sin 8x\cos 8x\cos 16x}{\sin x})^2=32(\frac{\frac{1}{16}\sin 16x\cos 16x}{\sin x})^2$$

$$=32(\frac{\frac{1}{32}\sin 32x}{\sin x})^2=\frac{\sin^2 32x}{32\sin^2 x}$$

بنابراین

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sin^2\frac{32\pi}{12}}{32\sin^2\frac{\pi}{12}}=\frac{\sin^2\left(3\pi-\frac{4\pi}{12}\right)}{32\sin^2\frac{\pi}{12}}=\frac{\sin^2\frac{\pi}{3}}{32\times\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi}{12}\right)}$$

$$=\frac{\frac{3}{4}}{16\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{3}{32(2-\sqrt{3})}=\frac{3(2+\sqrt{3})}{32(4-3)}=\frac{6+\sqrt{27}}{32}$$

**۷۰- گزینهٔ ۳** توجه کنید که

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha\,,\quad \sin(\alpha-\pi)=-\sin\alpha$$

از طرف دیگر، $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$. چون انتهای کمان $\alpha$ در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی است، پس $\sin\alpha<0$، یعنی $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{3}$. در نتیجه

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}}=-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{|\tan^2\alpha-1|}=\frac{\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{5}}{3}}{\left|\frac{5}{4}-1\right|}=\frac{\frac{2-\sqrt{5}}{3}}{\frac{1}{4}}=\frac{4(2-\sqrt{5})}{3}$$

**۷۱- گزینهٔ ۲** معادلهٔ مثلثاتی را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$5\sin^2x+2\cos3x+2=0\Rightarrow5\sin^2x+2(\cos3x+1)=0$$

$$5\sin^2x+2\left(2\cos^2\frac{3x}{2}\right)=0\Rightarrow5\sin^2x+4\cos^2\frac{3x}{2}=0$$

چون $5\sin^2x$ و $4\cos^2\frac{3x}{2}$ غیرمنفی‌اند، پس باید هر دو برابر صفر باشند، بنابراین جواب‌های مشترک معادله‌های مثلثاتی $\sin^2x=0$ و $\cos^2\frac{3x}{2}=0$ جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی مورد نظر هستند:

$$\sin^2x=0\Rightarrow\sin x=0\Rightarrow x=k\pi\,,k\in\mathbb{Z}$$

$$\cos^2\frac{3x}{2}=0\Rightarrow\cos\frac{3x}{2}=0\Rightarrow\frac{3x}{2}=(2k+1)\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=(2k+1)\frac{\pi}{3},k\in\mathbb{Z}$$

برای اینکه جواب‌های در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ را پیدا کنیم، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

| $k$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $k\pi$ | $\cancel{-2\pi}$ | $-\pi$ | $0$ | $\pi$ | $\cancel{2\pi}$ |
| $(2k+1)\frac{\pi}{3}$ | $-\pi$ | $-\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\pi$ | $\cancel{\frac{5\pi}{3}}$ |

از این جدول معلوم می‌شود که جواب‌های مورد نظر $x=-\pi$ و $x=\pi$ هستند که تعداد آن‌ها دوتاست.

**۷۲- گزینهٔ ۴** **راه‌حل اول** باید نامعادلهٔ $|x^2-2|-x>0$ را حل کنیم:

$$|x^2-2|-x>0\Rightarrow|x^2-2|>x$$

توجه کنید که همواره $|x^2-2|\geq0$، پس تمام xهای منفی و نیز $x=0$ در این نامعادله صدق می‌کنند:
$x\in(-\infty,0]$ (۱)

اکنون فرض می‌کنیم x مثبت باشد. در این صورت

$$|x^2-2|>x\Rightarrow\begin{cases}x^2-2>x\Rightarrow x^2-x-2=\underbrace{(x+1)}_{+}(x-2)>0\\ x^2-2<-x\Rightarrow x^2+x-2=(x-1)\underbrace{(x+2)}_{+}<0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x-2>0\\x-1<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in(2,+\infty)&(2)\\x\in(0,1)&(3)\end{cases}$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر، یعنی دامنهٔ تابع f برابر اجتماع جواب‌های (۱)، (۲) و (۳) است:

$$D_f=(-\infty,0]\cup(0,1)\cup(2,+\infty)=(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$$

**راه‌حل دوم** توجه کنید که عدد ۲ در دامنهٔ تابع f نیست، زیرا $f(2)=\log_4(|4-2|-2)=\log_4 0$ که تعریف نشده است. بنابراین گزینه‌های (۲) و (۳) حذف می‌شوند. زیرا عدد ۲ عضو آن‌ها هست. همچنین عدد صفر در دامنهٔ تابع f هست، زیرا $f(0)=\log_4(|0-2|-0)=\log_4 2=\frac{1}{2}$.

بنابراین گزینهٔ (۱) حذف می‌شود، زیرا عدد صفر عضو آن نیست. در نتیجه گزینهٔ (۴) درست است.

**۷۳- گزینهٔ ۲** ابتدا نشان می‌دهیم تابع $f(x)=\sqrt{x+3}-1$ با دامنهٔ $D_f=[-3,+\infty)$ اکیداً صعودی است. می‌توان نوشت

$$x_1,x_2\geq-3:x_1<x_2\Rightarrow x_1+3<x_2+3\Rightarrow\sqrt{x_1+3}<\sqrt{x_2+3}$$

$$\sqrt{x_1+3}-1<\sqrt{x_2+3}-1\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

چون تابع f اکیداً صعودی است، پس نمودار تابع f نمودار تابع وارون خود را روی خط $y=x$ قطع می‌کند. در نتیجه باید معادلهٔ $\sqrt{x+3}-1=x$ را حل کنیم تا طول نقطهٔ M به‌دست بیاید:

$$\sqrt{x+3}-1=x\Rightarrow\sqrt{x+3}=x+1\xrightarrow{\text{دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم}}$$

$$x+3=(x+1)^2\Rightarrow x+3=x^2+2x+1\Rightarrow x^2+x-2=0$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد جملهٔ مشترک}}(x-1)(x+2)=0\Rightarrow x=1,x=-2$$

توجه کنید که $x=-2$ در معادلهٔ مورد نظر صدق نمی‌کند. بنابراین $x=1$ و عرض نقطهٔ M برابر است با $f(1)=\sqrt{1+3}-1=2-1=1$

در نتیجه فاصلهٔ نقطهٔ M از مبدأ مختصات برابر است با $OM=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

**۷۴- گزینهٔ ۱** توجه کنید که هر بار که توپ بالا می‌رود، به همان اندازه هم پایین می‌آید. بنابراین مجموع مورد نظر برابر است با

$$S=6+2(0/8\times6+(0/8)^2\times6+\cdots+(0/8)^{99}\times6)$$

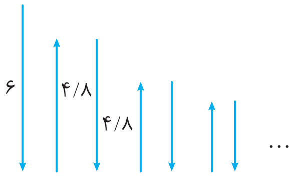
$$=6+2\times6(0/8+(0/8)^2+\cdots+(0/8)^{99})$$

عبارت داخل پرانتز مجموع ۹۹ جملهٔ نخست یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_1=0/8$ و قدرنسبت $q=0/8$ است. بنابراین

$$S=6+12\times0/8\times\frac{(0/8)^{99}-1}{0/8-1}$$

توجه کنید که می‌توانیم از $(0/8)^{99}$ صرف‌نظر کنیم، زیرا عددی بسیار کوچک است. بنابراین

$$S\simeq 6+12\times 0/8\times\frac{1}{1-0/8}=54\ \text{متر}$$




**۷۵- گزینهٔ ۱** ابتدا توجه کنید که ۳ واحد انتقال در امتداد محور x در جهت منفی معادل ۳ واحد انتقال به چپ و ۲ واحد انتقال در امتداد محور y در جهت منفی معادل ۲ واحد انتقال به پایین است. اکنون به تبدیلات زیر توجه کنید:

$$y=2^{x+|x|}\xrightarrow{\text{۳ واحد به چپ}}y=2^{x+3+|x+3|}$$
$$\xrightarrow{\text{۲ واحد به پایین}}y=2^{x+3+|x+3|}-2$$

بنابراین با انجام انتقال‌های خواسته شده، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=2^{x+3+|x+3|}-2$ به‌دست می‌آید. برای یافتن طول نقطهٔ تلاقی نمودار این تابع با محور x باید جواب معادلهٔ زیر را پیدا کنیم:

$$2^{x+3+|x+3|}-2=0\Rightarrow 2^{x+3+|x+3|}=2^1\Rightarrow x+3+|x+3|=1$$
$$|x+3|=-x-2\Rightarrow\begin{cases}x+3=-x-2\Rightarrow x=-\frac{5}{2}\\ -(x+3)=-x-2\quad \text{جواب ندارد}\end{cases}$$

**۷۶- گزینهٔ ۳** **راه‌حل اول** مقدار x را برابر ۹ قرار می‌دهیم و معادله را ساده می‌کنیم.

$$2\log_9 a+\log_a\sqrt{9}=2\Rightarrow 2\log_{3^2}a+\log_a 3=2$$
$$2\times(\frac{1}{2}\log_3 a)+\log_a 3=2\Rightarrow\log_3 a+\frac{1}{\log_3 a}=2$$

دو طرف معادله را در $\log_3 a$ ضرب می‌کنیم:

$$(\log_3 a)^2+1=2\log_3 a\Rightarrow(\log_3 a)^2-2\log_3 a+1=0$$

اکنون با استفاده از اتحاد مربع تفاضل دو جمله می‌توان نوشت

$$(\log_3 a-1)^2=0\Rightarrow\log_3 a=1\Rightarrow a=3^1=3$$

**راه‌حل دوم** می‌توان نوشت

$$2\log_x a+\log_a\sqrt{x}=2\Rightarrow\log_{x^{\frac{1}{2}}}a+\log_a\sqrt{x}=2$$
$$\log_{\sqrt{x}}a+\log_a\sqrt{x}=2\Rightarrow\log_{\sqrt{x}}a+\frac{1}{\log_{\sqrt{x}}a}=2$$

چون هر عدد حقیقی و معکوسش هم‌علامت هستند و مجموع $\log_{\sqrt{x}}a$ و معکوسش برابر عددی مثبت است، پس $\log_{\sqrt{x}}a>0$. همچنین، چون مجموع عدد حقیقی مثبت $\log_{\sqrt{x}}a$ و معکوسش برابر ۲ است، پس این عدد برابر ۱ است. بنابراین

$$\log_{\sqrt{x}}a=1\xrightarrow{x=9}\log_{\sqrt{9}}a=1\Rightarrow\log_3 a=1\Rightarrow a=3^1=3$$

**۷۷- گزینهٔ ۳** **راه‌حل اول** چون خط $x=2$ محور تقارن سهمی است و سهمی از نقطهٔ $(0,0)$ می‌گذرد، پس سهمی از نقطهٔ $(4,0)$ نیز می‌گذرد. بنابراین معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=a(x-0)(x-4)$ یا $y=ax(x-4)$ است. چون این سهمی از نقطهٔ $(2,1)$ نیز می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ سهمی صدق می‌کنند. بنابراین

$$1=a\times 2(2-4)\Rightarrow a=-\frac{1}{4}$$

در نتیجه $f(x)=-\frac{1}{4}x(x-4)$، از طرف دیگر، چون خط راست مورد نظر از نقطه‌های $(0,1)$ و $(4,0)$ می‌گذرد، معادلهٔ آن به‌صورت زیر است:

$$y-0=\frac{0-1}{4-0}(x-4)\Rightarrow y=-\frac{1}{4}(x-4)$$

بنابراین $g(x)=-\frac{1}{4}(x-4)$. اکنون توجه کنید که

$$\lim_{x\to4^-}\frac{f(x)+g(x)}{4-x}=\lim_{x\to4^-}\frac{-\frac{1}{4}x(x-4)-\frac{1}{4}(x-4)}{4-x}$$
$$=\lim_{x\to4^-}\frac{-\frac{1}{4}(x-4)(x+1)}{-(x-4)}=\lim_{x\to4^-}\frac{x+1}{4}=\frac{5}{4}$$

**راه‌حل دوم** چون $f(4)=g(4)=0$، پس حد مورد نظر را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\lim_{x\to4^-}\frac{f(x)+g(x)}{4-x}=-\lim_{x\to4^-}\frac{(f(x)-f(4))+(g(x)-g(4))}{x-4}$$
$$=-(\lim_{x\to4^-}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}+\lim_{x\to4^-}\frac{g(x)-g(4)}{x-4})=-(f'_-(4)+g'_-(4))$$

از طرف دیگر، سهمی f و خط راست g همه‌جا مشتق‌پذیرند. پس مقدار حد مورد نظر برابر است با $-(f'(4)+g'(4))$. اکنون توجه کنید که

$$f(x)=-\frac{1}{4}x(x-4)=-\frac{1}{4}x^2+x\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{2}x+1\Rightarrow f'(4)=-1$$
$$g'(4)=m=-\frac{1}{4}$$

در نتیجه مقدار حد مورد نظر برابر است با $-(-1-\frac{1}{4})=\frac{5}{4}$.

**۷۸- گزینهٔ ۱** ابتدا ضابطهٔ تابع $f^{-1}$ را پیدا می‌کنیم. برای این کار x را بر حسب y به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\Rightarrow\sqrt{x}+1=y\sqrt{x}-y\Rightarrow\sqrt{x}-y\sqrt{x}=-y-1$$
$$\sqrt{x}(1-y)=-(y+1)\Rightarrow\sqrt{x}=\frac{y+1}{y-1}\Rightarrow x=(\frac{y+1}{y-1})^2$$

بنابراین $f^{-1}(x)=(\frac{x+1}{x-1})^2$. به این ترتیب

$$(f^{-1})'(x)=2(\frac{x+1}{x-1})(\frac{-2}{(x-1)^2})=\frac{-4(x+1)}{(x-1)^3}$$
$$\text{شیب خط مماس}=(f^{-1})'(2)=\frac{-4(2+1)}{(2-1)^3}=-12$$

**۷۹- گزینهٔ ۱** توجه کنید که

$$(fog)(x)=f(g(x))=\begin{cases} f(۱)=۰ & x>۰\\ f(۰)=۰ & x=۰ \\ f(-۱)=۰ & x<۰\end{cases}$$

بنابراین $(fog)(x)=۰$. در نتیجه

$$((fof)og)(x)=(fo(fog))(x)=f((fog)(x))=f(۰)=۰$$

یعنی $(fof)og$ تابع ثابت صفر است، پس نقطهٔ ناپیوستگی ندارد.

**۸۰- گزینهٔ ۲** ابتدا توجه کنید که مطابق جدول تعیین علامت زیر، عبارت $۳-x^۲$ روی بازهٔ $[-۱/۵,\sqrt{۳}]$ نامنفی است.

| $x$ | $-\infty$ | $-\sqrt{۳}$ | $-۱/۵$ | $\sqrt{۳}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $۳-x^۲$ | $-$ | $۰$ | $+$ | $۰$ | $-$ |

بنابراین $|۳-x^۲|=۳-x^۲$ و در نتیجه $f(x)=x(۳-x^۲)=۳x-x^۳$

چون تابع f در هر نقطه از بازهٔ $(-۱/۵,\sqrt{۳})$ مشتق‌پذیر است، پس طول‌های نقاط بحرانی آن در این بازه از حل معادلهٔ $f'(x)=۰$ به‌دست می‌آیند. اکنون توجه کنید که

$$f'(x)=۳-۳x^۲=۳(۱-x^۲),\quad f'(x)=۰\Rightarrow ۱-x^۲=۰\Rightarrow x=\pm ۱$$

بنابراین باید مقادیر $f(\pm ۱)$، $f(-۱/۵)$ و $f(\sqrt{۳})$ را با هم مقایسه کنیم:

$$f(۱)=۲,\quad f(-۱)=-۲,\quad f(-۱/۵)=-\frac{۹}{۸},\quad f(\sqrt{۳})=۰$$

در نتیجه مینیمم مطلق تابع f برابر است با $f(-۱)=-۲$ (توجه کنید که چون مقادیر f به‌ازای عددهای مثبت، مثبت‌اند، پس کافی بود مقادیر تابع f را فقط برای عددهای منفی حساب می‌کردیم).

**۸۱- گزینهٔ ۲** اگر نقطهٔ A $(x,\sqrt[۳]{-x})$، یعنی نقطهٔ $(x,-\sqrt[۳]{x})$ باشد، آن‌گاه $A'$، یعنی قرینهٔ A نسبت به نیمساز نواحی دوم و چهارم نقطهٔ $(\sqrt[۳]{x},-x)$ است. بنابراین

$$AA'=\sqrt{(x-\sqrt[۳]{x})^۲+(-\sqrt[۳]{x}+x)^۲}=\sqrt{۲(x-\sqrt[۳]{x})^۲}=\sqrt{۲}|x-\sqrt[۳]{x}|$$

چون $x\in[۰,۱]$، پس $x\le\sqrt[۳]{x}$ و در نتیجه $AA'=\sqrt{۲}(\sqrt[۳]{x}-x)$. بنابراین باید ماکزیمم مطلق تابع $g(x)=\sqrt{۲}(\sqrt[۳]{x}-x)$ را روی بازهٔ $[۰,۱]$ پیدا کنیم. توجه کنید که

$$g'(x)=\sqrt{۲}(\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}-۱)$$

$$g'(x)=۰\Rightarrow\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}-۱=۰\Rightarrow\sqrt[۳]{x^۲}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow x=\frac{۱}{\sqrt{۲۷}}=\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}$$

چون $g(۱)=g(۰)=۰$، پس ماکزیمم مطلق تابع g به‌ازای $x=\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}$ به‌دست می‌آید و برابر است با (توجه کنید که $\sqrt[۳]{x^۲}=\frac{۱}{۳}$، پس $\sqrt[۳]{x}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$)

$$g(\frac{۱}{۳\sqrt{۳}})=\sqrt{۲}(\frac{۱}{\sqrt{۳}}-\frac{۱}{۳\sqrt{۳}})=\sqrt{۲}\times\frac{۲}{۳\sqrt{۳}}=\frac{۴}{۳\sqrt{۶}}$$

**۸۲- گزینهٔ ۴** ابتدا توجه کنید که وقتی $x\to(\frac{\sqrt{۵}}{۲})^-$، آن‌گاه $g(x)\to ۲^+$. پس در یک همسایگی چپ $x=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$، ضابطهٔ تابع f به‌صورت $f(x)=(۲x)^۳$ است، اکنون می‌توان نوشت

$$(fog)'_-(\frac{\sqrt{۵}}{۲})=g'(\frac{\sqrt{۵}}{۲})f'_+(g(\frac{\sqrt{۵}}{۲}))=g'(\frac{\sqrt{۵}}{۲})f'_+(۲)$$

مقدار $g'(\frac{\sqrt{۵}}{۲})$ را به‌سادگی می‌توان حساب کرد

$$g(x)=(x^۲-۱)^{-\frac{۱}{۲}}\Rightarrow g'(x)=-\frac{۱}{۲}(۲x)(x^۲-۱)^{-\frac{۳}{۲}}=\frac{-x}{\sqrt{(x^۲-۱)^۳}}$$

$$g'(\frac{\sqrt{۵}}{۲})=\frac{-\frac{\sqrt{۵}}{۲}}{(\frac{۱}{۲})^۳}=-۴\sqrt{۵}$$

از طرف دیگر،

$$f(x)=(۲x)^۳=۸x^۳\Rightarrow f'(x)=۲۴x^۲\Rightarrow f'_+(۲)=۹۶$$

پس

$$(fog)'_-(\frac{\sqrt{۵}}{۲})=(-۴\sqrt{۵})\times ۹۶=(-۴۸\sqrt{۵})(۸)$$

یعنی $(fog)'_-(\frac{\sqrt{۵}}{۲})$ هشت برابر $-۴۸\sqrt{۵}$ است.

**۸۳- گزینهٔ ۱** توجه کنید که $g'(x)=۲ax+۵$ و $g''(x)=۲a$.

بنابراین

$$f(x)=\begin{cases}g(x)&x\le ۲\\g'(x)&x>۲\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}g'(x)&x\le ۲\\g''(x)&x>۲\end{cases}$$

چون تابع f در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر است، پس

$$\left.\begin{array}{l} g(۲)=g'(۲)\Rightarrow ۴a+۱۰+b=۴a+۵\Rightarrow b=-۵\\ g'(۲)=g''(۲)\Rightarrow ۴a+۵=۲a\Rightarrow a=-\frac{۵}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow a+b=-\frac{۱۵}{۲}$$

**۸۴- گزینهٔ ۳** هر نقطه روی سهمی $y^۲=۴x$ به‌صورت $A(\frac{t^۲}{۴},t)$ است. فاصلهٔ نقطهٔ A از نقطهٔ $M(۳,۰)$ برابر است با

$$AM=\sqrt{(\frac{t^۲}{۴}-۳)^۲+(t-۰)^۲}=\sqrt{\frac{t^۴}{۱۶}-\frac{۳}{۲}t^۲+۹+t^۲}$$

$$=\sqrt{\frac{t^۴-۸t^۲+۱۴۴}{۱۶}}=\frac{۱}{۴}\sqrt{(t^۲-۴)^۲+۱۲۸}$$

بنابراین کمترین مقدار AM به‌ازای $t^۲=۴$ به‌دست می‌آید و برابر است با

$$\frac{۱}{۴}\sqrt{۱۲۸}=۲\sqrt{۲}$$

**۸۵- گزینهٔ ۴** ابتدا توجه کنید که چون عرض از مبدأ خط مورد نظر برابر $-۱$ است، پس این خط از نقطهٔ $(۰,-۱)$ می‌گذرد. بنابراین معادلهٔ این خط به‌صورت زیر است:

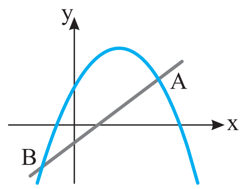
$$y-۰=\frac{۰+۱}{۱-۰}(x-۱)\Rightarrow y=x-۱$$

طول نقطه‌های برخورد این خط و سهمی داده شده، یعنی A و B جواب‌های معادلهٔ زیر هستند:

$$-x^۲+۲x+۱=x-۱\Rightarrow x^۲-x-۲=۰\xrightarrow{\text{اتحاد جملهٔ مشترک}}$$

$$(x+۱)(x-۲)=۰\Rightarrow x_A=۲, x_B=-۱$$

چون این نقطه‌ها روی خط $y=x-۱$ هستند، پس عرض آن‌ها برابر است با $y_A=۲-۱=۱$ و $y_B=-۱-۱=-۲$. بنابراین نقطه‌های مورد نظر $A(۲,۱)$ و $B(-۱,-۲)$ هستند که نقطهٔ وسط آن‌ها $M(\frac{۲-۱}{۲},\frac{۱-۲}{۲})$، یعنی $M(\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲})$ است. از طرف دیگر، رأس سهمی $y=-x^۲+۲x+۱$ نقطهٔ $(۱,۲)$ است. بنابراین فاصلهٔ مورد نظر برابر است با $\sqrt{(۱-\frac{۱}{۲})^۲+(۲+\frac{۱}{۲})^۲}=\frac{\sqrt{۲۶}}{۲}$. پس این فاصله $\frac{۱}{۲}$ برابر $\sqrt{۲۶}$ است.




**۸۶- گزینهٔ ۲** فرض کنید مختصات نقطهٔ A به‌صورت $(a,b)$ باشد. چون مثلث ABC متساوی‌الساقین است، پس میانهٔ AM ارتفاع نیز هست، یعنی خط AM بر خط BC عمود است. اما شیب خط BC برابر $m_{BC}=-\frac{۱}{۲}$ است و شیب خط AM برابر $m_{AM}=\frac{b-۲}{a-۳}$ است. اکنون می‌توان نوشت

$$BC\perp AM\Rightarrow m_{BC}\times m_{AM}=-۱$$

$$-\frac{۱}{۲}\times\frac{b-۲}{a-۳}=-۱\Rightarrow b-۲=۲(a-۳)\Rightarrow b=۲a-۴$$

از طرف دیگر، فاصلهٔ نقطهٔ A از خط BC برابر با $۵\sqrt{۵}$ است. بنابراین

$$\frac{|a+۲b-۷|}{\sqrt{۱^۲+۲^۲}}=۵\sqrt{۵}\xrightarrow{b=۲a-۴}\frac{|a+۴a-۸-۷|}{\sqrt{۵}}=۵\sqrt{۵}$$

$$|۵a-۱۵|=۲۵\Rightarrow\begin{cases}۵a-۱۵=۲۵\\ ۵a-۱۵=-۲۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۸\\ a=-۲\end{cases}$$

در نتیجه طول نقطهٔ A هرکدام از دو مقدار ۸ و $-۲$ می‌تواند باشد که با توجه به گزینه‌ها، $a=-۲$ درست است.