پاسخ کنکور ۱۴۰۰

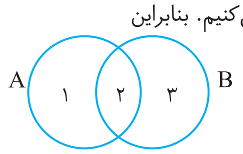
۱- گزینهٔ ۱ می‌توان از جدول ارزش گزاره‌ها استفاده کرد:

p	q	r	$q\vee r$	$p\Rightarrow(q\vee r)$
د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د
د	ن	د	د	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د
ن	ن	ن	ن	د

فضای نمونه‌ای

در هفت مورد گزارهٔ $p\Rightarrow(q\vee r)$ درست است، پس $n(S)=7$. در سه مورد از این هفت مورد r نادرست است. پس احتمال مطلوب برابر است با $\frac{3}{7}$.

۲- گزینهٔ ۱ چون $U=A\cup B$، نمودار ون مسئله به‌صورت زیر است. در این نمودار ناحیه‌ها را شماره‌گذاری می‌کنیم. بنابراین



$A=\{1,2\},\quad B=\{2,3\}$

$U=\{1,2,3\},\quad C=\{1,3\}$

پس

$$A'-B=\{3\}-\{2,3\}=\varnothing$$
$$(A'-B)'\cap C=\{1,2,3\}\cap\{1,3\}=\{1,3\}$$
$$((A'-B)'\cap C)'=\{2\}$$

طبق فرض $B=((A'-B)'\cap C)'$. بنابراین $\{2,3\}=\{2\}$، پس ناحیهٔ ۳ تهی است. در نتیجه $B=\{2\}$ و بنابراین $B\subseteq A$.

۳- گزینهٔ ۳ ابتدا !۲۰ را به حاصل‌ضرب عوامل اول تجزیه می‌کنیم:

$$20!=1\times2\times3\times\cdots\times20$$
$$=2\times3\times2^2\times5\times(2\times3)\times7\times2^3\times3^2\times(2\times5)\times11\times(2^2\times3)\times13$$
$$\times(2\times7)\times(3\times5)\times2^4\times17\times(2\times3^2)\times19\times(2^2\times5)$$
$$=2^{18}\times3^8\times5^4\times7^2\times11^1\times13^1\times17^1\times19^1$$

اکنون به‌دست می‌آید $\sum_{i=1}^{\infty}a_i=18+8+4+2+1+1+1+1=36$

می‌توان از نکتهٔ زیر مسئله را حل کرد:

نکته: تعداد عوامل عدد اول p در عدد !n را می‌توان به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\cdots$$

۴- گزینهٔ ۳ چون تعداد داده‌ها ۲۲ تا است، پس میانه (Q_2) میانگین دو دادهٔ یازدهم و دوازدهم است. اگر $a<13$، آن‌گاه داده‌های یازدهم و دوازدهم برابر ۱۳ هستند. در این صورت میانه برابر $\frac{13+13}{2}=13$ خواهد بود. اما مقدار میانه ۱۳/۵ است. پس $a>13$. بنابراین، چارک اول (Q_1) که میانهٔ یازده دادهٔ اول، یعنی دادهٔ ششم است برابر ۱۳ خواهد بود: $Q_1=13$.
چون $Q_3-Q_1=17$، پس $Q_3=17+13=30$. در نتیجه $a=30$. اکنون $\bar{x}$ و از روی آن σ^2 را به‌دست می‌آوریم:

$$\bar{x}=\frac{3\times11+2\times12+6\times13+3\times14+2\times28+5\times31+1\times30}{22}=19$$

$$\sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{7}f_i(x_i-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{7}f_i}=\frac{3(11-19)^2+2(12-19)^2+6(13-19)^2}{22}$$
$$+\frac{3(14-19)^2+2(28-19)^2+5(31-19)^2+(30-19)^2}{22}=72$$

با توجه به اینکه با افزودن یک مقدار ثابت به همهٔ داده‌ها مقدار واریانس تغییر نمی‌کند پس با افزودن ۴ واحد به همهٔ داده‌ها مقدار واریانس همچنان ۷۲ باقی می‌ماند.

۵- گزینهٔ ۳ داده‌ها به صورت زیر هستند:

پایهٔ تحصیلی	سن	جنسیت
↓	↓	↓
۱۲ حالت	۱۲ حالت	۲ حالت

اکنون دادهٔ صدم را به‌دست می‌آوریم:

۱۰۷ □ ⇐ ۱۲ حالت
۱۰۸ □ ⇐ ۱۲ حالت
⋮ ⋮ ⋮ ⋮
۱۱۴ □ ⇐ ۱۲ حالت

⇐ $8\times12=96$ عدد

عدد ۱۰۰	عدد ۹۹	عدد ۹۸	عدد ۹۷
۱۱۵۰۴	۱۱۵۰۳	۱۱۵۰۲	۱۱۵۰۱

سن صدمین عضو برابر ۱۵ است.

۶- گزینهٔ ؟ طبق اصل ضرب، کارت اول و دوم را به $21\times20=420$ طریق از کیسه بیرون می‌آوریم. اعداد روی کارت را به‌ترتیب در کنار هم قرار می‌دهیم و عدد به وجود آمده را در مجموعهٔ A قرار می‌دهیم. تعدادی از این اعداد دو بار تکرار می‌شوند. به‌عنوان مثال عدد ۱۲۱ یک بار با بیرون آمدن ۱۲ به عنوان کارت اول و ۱ به عنوان کارت دوم و بار دیگر با بیرون آمدن ۱ به عنوان کارت اول و ۲۱ به عنوان کارت دوم تولید می‌شود. همهٔ اعداد تکراری در A به‌صورت زیر هستند:

۲۱۱	۱۱۱
۲۱۲	۱۱۲
⋮	⋮
۲۱۹ (۹ تا)	۱۱۹
	۱۲۱ (۱۰ تا)

حالت‌های تکراری

در نتیجه $n(A)=420-19=401$. اکنون باید عددهایی را به‌دست آوریم که مضرب ۶ هستند (مجموعهٔ B). برای مشخص کردن تعداد عددهای مضرب ۶ اعداد ۱ تا ۲۱ را به ۳ دسته افراز می‌کنیم:

$$x=3k\Rightarrow3,6,9,12,15,18,21$$
$$x=3k+1\Rightarrow1,4,7,10,13,16,19$$
$$x=3k+2\Rightarrow2,5,8,11,14,17,20$$

برای اینکه عدد ساخته شده که از کنار هم قرار دادن دو کارت خارج شده به‌دست می‌آید مضرب ۶ باشد باید آن عدد زوج باشد و بر ۳ بخش‌پذیر باشد.
در نتیجه کارت‌ها به‌صورت زیر است

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{3k}\,\overset{\text{زوج}}{\boxed{3k}}\Rightarrow 6\times3\\ \boxed{3k+1}\,\overset{\text{زوج}}{\boxed{3k+2}}\Rightarrow 7\times4\\ \boxed{3k+2}\,\overset{\text{زوج}}{\boxed{3k+1}}\Rightarrow 7\times3\end{array}\right\}\Rightarrow \text{مجموع}=18+28+21=67$$

در این حالت هم دو عدد ۱۱۴ و ۲۱۶ دو بار تکرار می‌شوند. بنابراین

$$n(B)=67-2=65$$

در نتیجه $P(B)=\frac{n(B)}{n(A)}=\frac{65}{401}$. (دقت کنید که در این سؤال فضای نمونه‌ای با A نمایش داده شده است.)

۷- گزینهٔ ۲ عددهای مضرب $18=2\times3^2$ که مربع کامل هستند به فرم $(6k)^2$ هستند.

$$10^4\le(6k)^2<10^5\Rightarrow100\le6k<100\sqrt{10}\Rightarrow100\le6k<316$$

$$17\le k\le52$$

بنابراین برای k، $52-16=36$ مقدار به‌دست می‌آید.

۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که اگر عددی را به حاصل‌ضرب عوامل اول تجزیه کنیم و حاصل‌ضرب $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_n^{\alpha_n}$ به‌دست آید، تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت این عدد برابر است با

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_n+1)$$

در نتیجه

$$\text{تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت } x=(m+1)(n+1)$$

چون $\frac{x}{40}=\frac{2^m\times5^n}{2^3\times5}=2^{m-3}\times5^{n-1}$ ، $(m\ge3\,,n\ge1)$ ، پس

$$\text{تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت }\frac{x}{40}=(m-2)n$$

اکنون بنابر فرض می‌نویسیم

$$(m+1)(n+1)-(m-2)n=12\Rightarrow m+3n=11$$

چون حداقل مقدار x مد نظر است، پس

$$m=5\,,n=2\Rightarrow x=2^5\times5^2=800$$

۹- گزینهٔ ۳ چون $\overline{aba}$ بر ۱۲ بخش‌پذیر است، پس

$$\overline{aba}\overset{12}{\equiv}0\Rightarrow 100a+10b+a\overset{12}{\equiv}0\Rightarrow101a+10b\overset{12}{\equiv}0$$

$$\xrightarrow{101\overset{12}{\equiv}5}5a+10b\overset{12}{\equiv}0\xrightarrow{\div5}a+2b\overset{12}{\equiv}0\Rightarrow a\overset{12}{\equiv}-2b$$

اکنون با توجه به اینکه a رقمی زوج و غیرصفر است، می‌توان نوشت

$$b=1\Rightarrow a\overset{12}{\equiv}-2\ \times$$

$$b=2\Rightarrow a\overset{12}{\equiv}-4\Rightarrow a=8\rightarrow828$$

$$b=3\Rightarrow a\overset{12}{\equiv}-6\Rightarrow a=6\rightarrow636$$

$$b=4\Rightarrow a\overset{12}{\equiv}-8\Rightarrow a=4\rightarrow444$$

$b=5\Rightarrow a\overset{12}{\equiv}-10\Rightarrow a=2\rightarrow252$ کوچک‌ترین عدد

$$b=6\Rightarrow a\overset{12}{\equiv}-12\ \times$$

$$b=7\Rightarrow a\overset{12}{\equiv}-14\ \times$$

$b=8\Rightarrow a\overset{12}{\equiv}-16\Rightarrow a=8\rightarrow888$ بزرگ‌ترین عدد

$$b=9\Rightarrow a\overset{12}{\equiv}-18\overset{12}{\equiv}6\Rightarrow a=6\rightarrow696$$

در نتیجه میانگین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد سه رقمی به‌صورت $\overline{aba}$ برابر $\frac{888+252}{2}=570$ است.

۱۰- گزینهٔ ۲ بنابر الگوریتم تقسیم،

$$\left.\begin{array}{l}a=11q+r\\q=r+3\end{array}\right\}\Rightarrow a=11(r+3)+r=12r+33\Rightarrow0\le r<11\Rightarrow n(S)=11$$

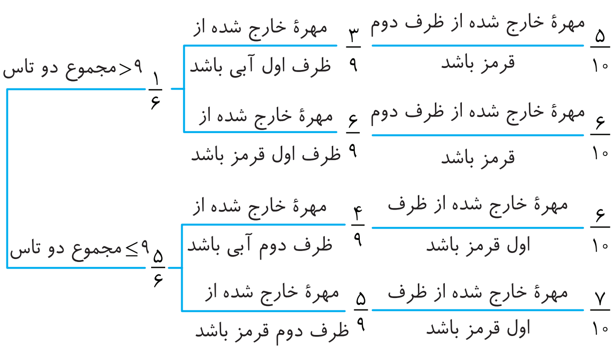
اکنون به‌دست می‌آید $a-9=12r+24\overset{24}{\equiv}0\Rightarrow12r\overset{24}{\equiv}0\xrightarrow{\div12}r\overset{2}{\equiv}0$
یعنی r باید زوج باشد. در نتیجه $n(A)=6$. در نهایت به‌دست می‌آید

$$P(A)=\frac{6}{11}$$

۱۱- گزینهٔ ۳ اگر عدد $n!$ بر ۳۶ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه کمترین مقدار ممکن برای n عدد ۶ است. پس $10-m\ge6\Rightarrow4\ge m$
یعنی بزرگ‌ترین عدد طبیعی m برابر ۴ است. در نتیجه باید باقی‌ماندهٔ 4^{123} بر ۱۵ را به‌دست آوریم:

$$\left.\begin{array}{l}4^2\overset{15}{\equiv}1\xrightarrow{\text{به توان } 61}(4^2)^{61}\overset{15}{\equiv}1\Rightarrow4^{122}\overset{15}{\equiv}1\\4\overset{15}{\equiv}4\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ضرب طرفین}}4^{123}\overset{15}{\equiv}4$$

۱۲- گزینهٔ ۳ از اطلاعات مسئله نمودار درختی زیر به‌دست می‌آید



اکنون بنابر قانون احتمال کل به‌دست می‌آید

$$P=\frac{1\times3\times5+1\times6\times6+5\times4\times6+5\times5\times7}{6\times9\times10}=\frac{346}{6\times9\times10}=\frac{173}{270}$$

۱۳- گزینهٔ ۴ چون جواب‌های معادلهٔ داده شده صحیح نامنفی است، پس x_4 باید مقسوم‌علیه عدد ۱۰ باشد:

$$x_4=1\Rightarrow x_1+x_2+x_3=10$$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی $=\binom{12}{2}=66$

$$x_4=2\Rightarrow x_1+x_2+x_3=5$$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی $=\binom{7}{2}=21$

$$x_4=5\Rightarrow x_1+x_2+x_3=2$$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی $=\binom{4}{2}=6$

$$x_4=10\Rightarrow x_1+x_2+x_3=1$$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی $=\binom{3}{2}=3$

در نتیجه بنابر اصل جمع،

تعداد کل جواب‌های صحیح و نامنفی $=66+21+6+3=96$

۱۴- گزینهٔ ۲ می‌دانیم در هر گراف همبند از مرتبهٔ p و اندازهٔ q، $q\geq p-1$. پس در هر گراف همبند از مرتبهٔ ۷، $q\geq 7-1=6$. گراف زیر مثالی از یک گراف همبند مرتبهٔ ۷ با اندازهٔ ۶ و $\Delta=3$ است. بنابراین پاسخ عدد ۶ است.

۱۵- گزینهٔ ۴ چون در ستون دوم عددهای ۱، ۲ و ۳ وجود دارد، پس گزینه‌های (۲) و (۳) رد می‌شوند. از طرف دیگر ستون چهارم این مربع لاتین به صورت $\begin{bmatrix}5\\4\\1\\2\\3\end{bmatrix}$ است و چون عدد ۳ با b هم‌سطر هستند، بنابراین $b\neq 3$. در نتیجه گزینهٔ (۱) هم نمی‌تواند درست باشد. پس گزینهٔ (۴) درست است. این مربع لاتین به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

۲	۴	۳	۵	۱
۵	۳	۱	۴	۲
۴	۲	۵	۱	۳
۳	۱	۴	۲	۵
۱	۵	۲	۳	۴

۱۶- گزینهٔ ۲و۴ گزینه‌ها را یکی یکی بررسی می‌کنیم.

گزینهٔ (۱) رأس g را احاطه نمی‌کند.

گزینهٔ (۲) این مجموعه احاطه‌گر مینیمال است.

گزینهٔ (۳) رأس‌های e و g را احاطه نمی‌کند.

گزینهٔ (۴) این مجموعه احاطه‌گر است و با حذف هر عضو، دیگر احاطه‌گر نیست. بنابراین مینیمال نیز هست.

۱۷- گزینهٔ ۲ گزارهٔ $(p\vee q)\Rightarrow r$ زمانی نادرست است که $p\vee q$ درست و r نادرست باشد. $p\vee q$ زمانی درست است که حداقل یکی از گزاره‌های p یا q درست باشند و این اتفاق در سه حالت رخ می‌دهد:

p	q	$p\vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د

بنابراین فضای نمونه‌ای سه حالت دارد، یعنی $n(S)=3$. در این سه حالت (جدول را ببینید) فقط یک حالت وجود دارد که q نادرست است، یعنی $n(A)=1$. در نتیجه $P(A)=\frac{1}{3}$.

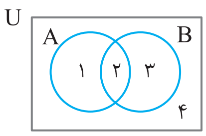
توجه: می‌توانستیم با نوشتن جدول ارزش گزاره‌ها هم مسئله را حل کنیم:

p	q	r	$p\vee q$	$(p\vee q)\Rightarrow r$
د	د	د	د	د
د	د	ن	د	ن
د	ن	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	د	د
ن	د	ن	د	ن
ن	ن	د	ن	د
ن	ن	ن	ن	د

فضای نمونه‌ای

۱۸- گزینهٔ ۱ برای مجموعه‌ها نمودار ون رسم می‌کنیم و ناحیه‌ها را عددگذاری می‌کنیم. با توجه به این نمودار،

$$A=\{1,2\},\quad B=\{2,3\},\quad C=\{1,3\}$$



اکنون می‌توان نوشت

$$(A'\cap B')'\cap C'=(A\cup B)\cap C'=\{1,2,3\}\cap\{2,4\}=\{2\}=A\cap B$$

۱۹- گزینهٔ ۱ می‌توان ثابت کرد $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$:

$$n\binom{n-1}{k-1}=n\times\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$=\frac{k(n!)}{k!(n-k)!}=k\binom{n}{k}$$

اکنون می‌توان نوشت

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}=n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}$$

$$=n\underbrace{\left[\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}+\cdots+\binom{n-1}{n-1}\right]}_{\text{تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ } n-1 \text{ عضوی}}=n2^{n-1}$$

۲۰- گزینهٔ ؟ ایـن تسـت نادرسـت اسـت. چـون بـرای a مقـدار منحصربه‌فردی به‌دست نمی‌آید و به ازای هر $a<۱۳$ میانه برابر ۱۳ است.

۲۱- گزینهٔ ۴ بنابر اصل جمع تعداد کل مردها برابر است با

$$۱\times۱۰۱\times۸۵=۸۵۸۵$$

$$\underset{\text{جنسیت}}{\underline{\ ۱\ }}\times\underset{\text{افراد هم‌سن}}{\underline{\ ۱۰۱\ }}\times\underset{\text{سن}}{\underline{\ ۸۵\ }}=۸۵۸۵$$

برای پیدا کردن نفر ده هزارم باید $۱۰۰۰۰-۸۵۸۵=۱۴۱۵$ اُمین زن را به‌دست آوریم. پس اولین رقم سمت چپ برابر ۲ است. با ثابت گرفتن سه رقم بعدی که مربوط به تعداد افراد هم‌سن است، داریم:

$$۸۵\ \text{حالت} \Rightarrow \underset{\text{سن}}{\bigcirc}\ \underset{\text{افراد هم‌سن}}{\underline{\ \ }\,\underline{\ \ }\,\underline{\ \ }}\ ۲$$

چون $۱۴۱۵=۸۵\times۱۶+۵۵=۱۳۶۰+۵۵$ و

$$\left.\begin{matrix} ۸۵\ \text{حالت} \Rightarrow \underset{\text{سن}}{\bigcirc}\ ۲۰۰۱ \\ \vdots \qquad \vdots \\ ۸۵\ \text{حالت} \Rightarrow \underset{\text{سن}}{\bigcirc}\ ۲۰۱۶ \end{matrix}\right\} \Rightarrow ۱۳۶۰\ \text{نفر}$$

بنابرایـن ۱۴۱۵ اُمیـن فـرد کـدی بـه صـورت $\bigcirc۲۰۱۷$ دارد و چـون کد $۱+۱۳۶۰=۱۳۶۱$ اُمین فرد $۰۱\,۲۰۱۷$ است، پس کد $۵۵+۱۳۶۰=۱۴۱۵$ اُمین فرد $۵۵\,۲۰۱۷=۲۰۱۷۵۵$ اسـت. پس سـن مورد انتظار بـرای ده هزارمین عضو مجموعه ۵۵ سال است.

۲۲- گزینهٔ ۱ ابتدا تعداد فضای نمونه‌ای را به‌دست می‌آوریم:

$$n(S)=\underset{\text{کارت اول عدد زوج}}{\underset{\downarrow}{۶}}\times۱۱+\underset{\text{کارت اول عدد فرد}}{\underset{\downarrow}{۶}}\times۶=۱۰۲$$

(توجـه کنیـد کـه بعـد از خـارج کـردن کارت اول دیگـر آن را در کیسـه قرار نمی‌دهیـم). اگر کارت اول زوج باشـد و کارت دومـی که خارج می‌کنیم ۴، ۸ یا ۱۲ باشـد، عدد مطلوب مضرب ۴ اسـت. اما توجه کنید که ۴۴، ۸۸ و ۱۲۱۲ امکان‌پذیر نیست. در این حالت $۶\times۳-۳=۱۵$ عدد به‌دست می‌آید. اگر عدد اول فـرد باشـد، عدد روی تـاس تنها می‌تواند ۲ و ۶ باشـد و در این حالت عدد تکراری نداریم. در نتیجه در این حالت هم $۶\times۲=۱۲$ حالت به‌دسـت می‌آید. در نتیجه $n(A)=۱۵+۱۲=۲۷$ و احتمال مطلوب برابر است با

$$P(A)=\frac{۲۷}{۱۰۲}=\frac{۹}{۳۴}$$

۲۳- گزینهٔ ۲ اعـداد مضـرب ۹ کـه مکعـب کامـل باشـند به‌صورت $(۳k)^۳$ هستند. چون عددهای سه و چهاررقمی را می‌خواهیم، پس

$$۱۰^۲\le(۳k)^۳<۱۰^۴\Rightarrow\sqrt[۳]{۱۰^۲}\le۳k<\sqrt[۳]{۱۰^۴}\Rightarrow۴/۴۱\le۳k<۲۱$$

$$۱/۴۷\le k<۷\Rightarrow۲\le k\le۶$$

پس $۶-۱=۵$ عدد با این ویژگی وجود دارد.

۲۴- گزینهٔ ۴ ابتدا عدد x را به حاصل‌ضرب عوامل اول تجزیه می‌کنیم:

$$x=۲^{m+n}\times۳^m\times۵^n$$

عدد $۱۵x$ هم به صورت زیر است:

$$۱۵x=۲^{m+n}\times۳^{m+۱}\times۵^{n+۱}$$

اکنون بنابر فرض مسئله می‌توان نوشت

$$۳۵+(m+n+۱)(m+۱)(n+۱)=(m+n+۱)(m+۲)(n+۲)$$

با ساده کردن این برابری به‌دست می‌آید

$$(m+n)^۲+۴(m+n)-۳۲=۰\Rightarrow m+n=-۸\ ,\ m+n=۴$$

چـون x عـددی صحیـح اسـت، $m+n=-۸$ قابـل قبـول نیسـت. بنابراین $m+n=۴$. در نتیجه

$$x\ \text{کوچک‌ترین مقدار}\Rightarrow m=۴\ ,\ n=۰\Rightarrow x_{min}=۲^۴\times۳^۴$$

$$x\ \text{بزرگ‌ترین مقدار}\Rightarrow m=۰\ ,\ n=۴\Rightarrow x_{max}=۲^۴\times۵^۴$$

در نهایت به‌دست می‌آید

$$x_{max}-x_{min}=۲^۴(۵^۴-۳^۴)=۱۶\times۵۴۴=۸۷۰۴$$

۲۵- گزینهٔ ؟ می‌دانیـم $۱۰\overset{۱۱}{\equiv}-۱$، $۱۰^۲\overset{۱۱}{\equiv}۱$، $۱۰^۳\overset{۱۱}{\equiv}-۱$، $۱۰^۴\overset{۱۱}{\equiv}۱$ و $۱۰^۵\overset{۱۱}{\equiv}-۱$.

چون $\overline{abaaba}=a\times۱۰^۵+b\times۱۰^۴+a\times۱۰^۳+a\times۱۰^۲+b\times۱۰+a$ ، بنابراین عدد $\overline{abaaba}$ همواره بر ۱۱ بخش‌پذیر است:

$$\overline{abaaba}\overset{۱۱}{\equiv}-a+b-a+a-b+a\overset{۱۱}{\equiv}۰$$

همچنیـن $۱۰\overset{۸}{\equiv}۲$ ، $۱۰^۲\overset{۸}{\equiv}۴$ ، $۱۰^۳\overset{۸}{\equiv}۰$ ، $۱۰^۴\overset{۸}{\equiv}۰$ و $۱۰^۵\overset{۸}{\equiv}۰$ ، پـس بخش‌پذیری آن بر ۸ را بررسی می‌کنیم:

$$\overline{abaaba}\overset{۸}{\equiv}۴a+۲b+a\overset{۸}{\equiv}۵a+۲b\overset{۸}{\equiv}۰\Rightarrow۲b\overset{۸}{\equiv}-۵a+۸a\Rightarrow۲b\overset{۸}{\equiv}۳a$$

a زوج است، بنابراین

$$a=۲\Rightarrow b\overset{۴}{\equiv}۳\Rightarrow b=۳,۷\Rightarrow۲۳۲۲۳۲\ ,\ ۲۷۲۲۷۲$$

$$a=۴\Rightarrow b\overset{۴}{\equiv}۲\Rightarrow b=۲,۶\Rightarrow۴۲۴۴۲۴\ ,\ ۴۶۴۴۶۴$$

$$a=۶\Rightarrow b\overset{۴}{\equiv}۱\Rightarrow b=۱,۵,۹\Rightarrow۶۱۶۶۱۶,۶۵۶۶۵۶,۶۹۶۶۹۶$$

$$a=۸\Rightarrow b\overset{۴}{\equiv}۰\Rightarrow b=۰,۴,۸\Rightarrow۸۰۸۸۰۸\ ,\ ۸۴۸۸۴۸\ ,\ ۸۸۸۸۸۸$$

پس تعداد عددهای مورد نظر برابر ۱۰ است.

۲۶- گزینهٔ ۳ بنابر الگوریتم تقسیم

$$a=۱۳q+r\ ,\quad ۰\le r<۱۳\ ,\quad q+r=۱۷$$

قرار می‌دهیم $q=۱۷-r$: $\quad a=۱۳(۱۷-r)+r=۲۲۱-۱۲r$

بنابر فرض،

$$a-۸\overset{۳۶}{\equiv}۲۱\Rightarrow۲۲۱-۱۲r-۸\overset{۳۶}{\equiv}۲۱\Rightarrow۱۲r\overset{۳۶}{\equiv}۱۹۲\Rightarrow r\overset{۳}{\equiv}۱۶\Rightarrow r\overset{۳}{\equiv}۱$$

به ازای $r=۱,۴,۷,۱۰$ این رابطه برقرار است. پس احتمال مورد نظر برابر $\frac{۴}{۱۳}$ است.

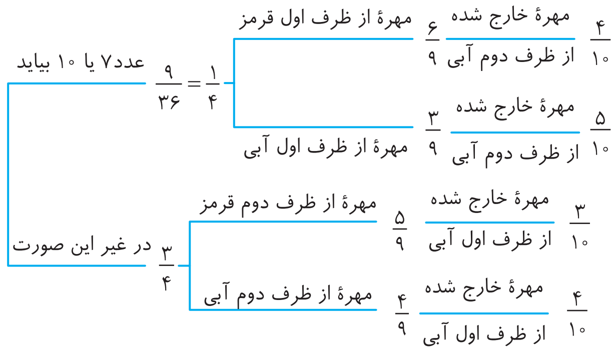
۲۷- گزینهٔ ۴ کوچک‌تریـن مقـدار m کـه بـه ازای آن $m!$ بـر ۳۰ بخش‌پذیر است عدد ۵ است. پس باید باقی‌ماندهٔ $۵^{۳۳۲}$ را بر ۳۱ به‌دست آوریم. بنابر قضیهٔ فرما اگر p عددی اول باشد و $(a,p)=۱$ ، آن‌گاه $a^{p-۱}\overset{p}{\equiv}۱$. در نتیجه

$$\left.\begin{matrix} ۵^{۳۰}\overset{۳۱}{\equiv}۱\Rightarrow(۵^{۳۰})^{۱۱}\overset{۳۱}{\equiv}۱\Rightarrow۵^{۳۳۰}\overset{۳۱}{\equiv}۱ \\ ۵^۲\overset{۳۱}{\equiv}۲۵ \end{matrix}\right\}\Rightarrow۵^{۳۳۲}\overset{۳۱}{\equiv}۲۵$$

توجه کنید که می‌توان باقی‌ماندهٔ $۵^{۳۳۲}$ بر ۳۱ را بدون قضیهٔ فرما هم به‌دست آورد:

$$۵^۳\overset{۳۱}{\equiv}۱\Rightarrow(۵^۳)^{۱۱۰}\overset{۳۱}{\equiv}۱\Rightarrow۵^{۳۳۰}\overset{۳۱}{\equiv}۱\Rightarrow۵^۲\times۵^{۳۳۰}\overset{۳۱}{\equiv}۲۵\Rightarrow۵^{۳۳۲}\overset{۳۱}{\equiv}۲۵$$

۲۸- گزینهٔ ۲ از نمودار درختی زیر استفاده می‌کنیم:



اکنون بنابر قانون احتمال کل به‌دست می‌آید

$$P=\frac{۱\times۶\times۴+۱\times۳\times۵+۳\times۵\times۳+۳\times۴\times۴}{۴\times۹\times۱۰}=\frac{۲۴+۱۵+۴۵+۴۸}{۴\times۹\times۱۰}$$

$$=\frac{۱۳۲}{۴\times۹\times۱۰}=\frac{۱۱}{۳۰}$$

۲۹- گزینهٔ ۴ ابتدا تعداد جواب‌های طبیعی هریک از دو معادله را به‌دست می‌آوریم:

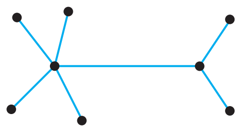
$$x_۱+x_۲+x_۳=۹\Rightarrow \text{تعداد جواب‌های طبیعی}=\binom{۸}{۲}=۲۸$$

$$x_۴+x_۵=۷\Rightarrow \text{تعداد جواب‌های طبیعی}=\binom{۶}{۱}=۶$$

اکنون بنابر اصل ضرب، تعداد جواب‌های طبیعی دستگاه معادلات برابر است با

$$۲۸\times۶=۱۶۸$$

۳۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که درخت یک گراف همبند فاقد دور است و با شرایط داده شده گراف را به‌صورت مقابل رسم می‌کنیم. در این گراف هیچ رأس درجهٔ ۲ وجود ندارد.



۳۱- گزینهٔ ۱ مربع لاتین داده شده را به‌صورت زیر کامل می‌کنیم:

۲	۴	۳	۵	۱
b = ۵	۳	۱	۴	۲
۴	۲	۵	۱	۳
۳	۱	۴	۲	۵
۱	۵	۲	۳	a = ۴

۳۲- گزینهٔ ۲ با انتخاب مجموعهٔ $\{۱۴,۱۵,۱۶\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم به‌دست می‌آید و عدد احاطه‌گری برابر ۳ است.