پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{1+\tan^2 x}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}=\frac{1}{|\cos x|}=\frac{1}{-\cos x} \qquad (\pi<x<\frac{3\pi}{2})$$

$$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \sin^2\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}$$

به این ترتیب،

$$\sqrt{1+\tan^2 x}(2\sin^2\frac{\pi}{4}-\sin^2 x)=-\frac{1}{\cos x}(2\times\frac{1}{2}-\sin^2 x)$$

$$=-\frac{1}{\cos x}(1-\sin^2 x)=-\frac{1}{\cos x}\times\cos^2 x=-\cos x$$

۲- گزینهٔ ۳ فرض کنید سرعت آب برابر v باشد. در این صورت، سرعت قایق موتوری در جهت حرکت آب $100+v$ و در جهت مخالف حرکت آب برابر $100-v$ است. در نتیجه

$$\frac{1200}{100-v}-\frac{1200}{100+v}=5\Rightarrow\frac{240}{100-v}-\frac{240}{100+v}=1\Rightarrow 240(\frac{1}{100-v}-\frac{1}{100+v})=1$$

$$240(\frac{2v}{100^2-v^2})=1\Rightarrow 100^2-v^2=480v\Rightarrow v^2+480v-100^2=0$$

$$(v-20)(v+500)=0\Rightarrow v=20$$

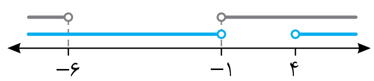
۳- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول توجه کنید که

$$\frac{2x-3}{x+1}>1\Rightarrow\frac{2x-3}{x+1}-1>0\Rightarrow\frac{x-4}{x+1}>0\Rightarrow x>4 \text{ یا } x<-1 \qquad (1)$$

$$\frac{2x-3}{x+1}<3\Rightarrow\frac{2x-3}{x+1}-3<0\Rightarrow\frac{-x-6}{x+1}<0\Rightarrow\frac{x+6}{x+1}>0$$

$$x<-6 \text{ یا } x>-1 \qquad (2)$$

مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر اشتراک جواب‌های (۱) و (۲) است که از روی شکل زیر معلوم می‌شود برابر $\mathbb{R}-[-6,4]$ است.



راه‌حل دوم اعداد ۵ و -7 در نامعادله صدق می‌کنند:

$$1<\frac{2\times5-3}{5+1}=\frac{7}{6}<3\ ,\quad 1<\frac{2\times(-7)-3}{-7+1}=\frac{17}{6}<3$$

بنابراین گزینهٔ (۱) جواب نامعادله است.

۴- گزینهٔ ۳ باید دسته‌های چهارتایی، پنج‌تایی یا شش‌تایی از هشت شئ متمایز انتخاب کند. تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با

$$\binom{8}{4}+\binom{8}{5}+\binom{8}{6}=70+56+28=154$$

۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$3a+\sqrt{2a^2+4a}=2\Rightarrow\sqrt{2a^2+4a}=2-3a\Rightarrow 2a^2+4a=4-12a+9a^2$$

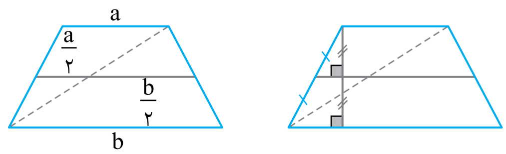
$$7a^2-16a+4=0\Rightarrow(7a-2)(a-2)=0\Rightarrow a=\frac{2}{7}, a=2$$

توجه کنید که اگر $a=2$، تساوی مورد نظر درست نیست (سمت چپ بیشتر از ۲ است). بنابراین $a=\frac{2}{7}$. در نتیجه $\frac{a+1}{a}=1+\frac{1}{a}=1+\frac{7}{2}=4/5$.

۶- گزینهٔ ۲ فرض کنید طول قاعده‌ها a و b باشد (شکل رسم شده را ببینید). در این صورت طول پاره‌خطی که وسط‌های ساق‌ها را به هم وصل می‌کند برابر $\frac{a+b}{2}$ است. توجه کنید که ارتفاع ذوزنقهٔ بالایی و پایینی برابر است. در نتیجه اگر این ارتفاع برابر h باشد، آن‌گاه

$$\frac{\frac{1}{2}h(a+\frac{a+b}{2})}{\frac{1}{2}h(\frac{a+b}{2}+b)}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{a+\frac{a+b}{2}}{\frac{a+b}{2}+b}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{3a+b}{a+3b}=\frac{1}{2}$$

$$6a+2b=a+3b\Rightarrow 5a=b\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{1}{5}$$



۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس

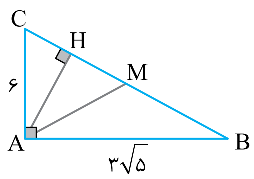
$$BC^2=AB^2+AC^2=(3\sqrt{5})^2+6^2=81\Rightarrow BC=9$$

از طرف دیگر، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$AC^2=CH\times CB\Rightarrow 36=CH\times 9\Rightarrow CH=4$$

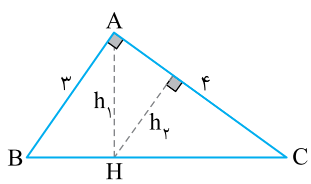
بنابراین $HM=CM-CH=\frac{BC}{2}-CH=\frac{9}{2}-4=\frac{1}{2}$. اکنون توجه کنید که

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMH}}=\frac{BC}{HM}=\frac{9}{\frac{1}{2}}=18$$



۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که طول ضلع دیگر مثلث ABC برابر ۵ است. از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر، دو مثلث متشابه با مثلث اصلی ایجاد می‌کند. بنابراین، با نمادگذاری شکل زیر، مثلث‌های ABC و AHC متشابه‌اند. در نتیجه نسبت ارتفاع‌های آن‌ها برابر نسبت تشابه آن‌هاست یعنی

$$\frac{h_2}{h_1}=\frac{AC}{BC}=\frac{4}{5}.$$



۹- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\sin(\frac{۱۷\pi}{۳})=\sin(۵\pi+\frac{۲\pi}{۳})=-\sin\frac{۲\pi}{۳}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos(-\frac{۱۷\pi}{۶})=\cos(\frac{۱۷\pi}{۶})=\cos(۳\pi-\frac{\pi}{۶})=-\cos\frac{\pi}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan(\frac{۱۹\pi}{۴})=\tan(۵\pi-\frac{\pi}{۴})=-\tan\frac{\pi}{۴}=-۱$$

$$\sin(\frac{-۱۱\pi}{۶})=-\sin(\frac{۱۱\pi}{۶})=-\sin(۲\pi-\frac{\pi}{۶})=-(-\sin\frac{\pi}{۶})=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با

$$(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})+(-۱)(\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۴}$$

۱۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که نمودار تابع مورد نظر از روی نمودار تابع $y=\sin x$ با تبدیلات به دست آمده است. چون نمودار تابع مورد نظر و نمودار تابع سینوس در یک همسایگی راست نقطهٔ صفر بالای محور x هستند، پس مقدار b مثبت است. بنابراین بیشترین مقدار تابع $y=a+b\sin(x+\frac{\pi}{۳})$ برابر $a+b$ است. از روی نمودار معلوم است که این بیشترین مقدار برابر $\sqrt{۳}$ است، پس $a+b=\sqrt{۳}$. از طرف دیگر، چون نقطهٔ $(\pi,-\frac{۳}{۲})$ روی نمودار تابع مورد نظر است. پس

$$y=a+b\sin(\pi+\frac{\pi}{۳})=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow a-b(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=-\frac{۳}{۲}$$

بنابراین

$$\begin{cases}a+b=\sqrt{۳}\\ a-b\frac{\sqrt{۳}}{۲}=-\frac{۳}{۲}\end{cases}\Rightarrow b+b\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\sqrt{۳}+\frac{۳}{۲}$$

$$b(۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\sqrt{۳}(۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲})\Rightarrow b=\sqrt{۳}$$

۱۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$(۰/۴)^{۲x-۱}=(\frac{۱۲۵}{۸})^{x^۲}\Rightarrow(\frac{۲}{۵})^{۲x-۱}=((\frac{۵}{۲})^۳)^{x^۲}\Rightarrow(\frac{۲}{۵})^{۲x-۱}=(\frac{۲}{۵})^{-۳x^۲}$$

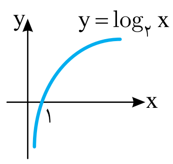
بنابراین

$$۲x-۱=-۳x^۲\Rightarrow ۳x^۲+۲x-۱=۰\Rightarrow(۳x-۱)(x+۱)=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۳},\ x=-۱$$

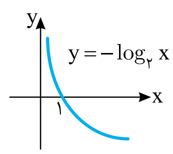
به ازای $x=-۱$، مقدار $۹x+۱$ منفی می‌شود که لگاریتم آن در مبنای ۸ تعریف نمی‌شود. بنابراین $x=\frac{۱}{۳}$ و

$$\log_۸(۹x+۱)=\log_۸(۳+۱)=\log_{۲^۳}۲^۲=\frac{۲}{۳}\log_{۲}^{۲}=\frac{۲}{۳}$$

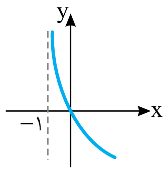
۱۲- گزینهٔ ۲ نمودار تابع $y=\log_۲ x$ به صورت زیر است:



بنابراین نمودار تابع $y=-\log_۲ x$ به صورت زیر است:



اگر این نمودار را یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم به نمودار تابع $y=-\log_۲(x+۱)$ می‌رسیم که همان نمودار داده شده است:



توجه کنید که $y=-\log_۲(x+۱)=\log_۲(x+۱)^{-۱}$، بنابراین

$$U(x)=(x+۱)^{-۱}$$

۱۳- گزینهٔ ۱ برای اینکه تابع f در نقطهٔ $x=-۲$ فقط از چپ پیوسته باشد، باید داشته باشیم:

$$\lim_{x\to(-۲)^-}f(x)=f(-۲)\ ,\qquad \lim_{x\to(-۲)^+}f(x)\neq f(-۲)$$

اکنون توجه کنید که

$$\lim_{x\to(-۲)^-}f(x)=\lim_{x\to(-۲)^-}\frac{۸+x^۳}{|x+۲|}$$

$$=\lim_{x\to(-۲)^-}\frac{(۲+x)(۴-۲x+x^۲)}{-(x+۲)}=\lim_{x\to(-۲)^-}(-(۴-۲x+x^۲))$$

$$=-(۴-۲(-۲)+(-۲)^۲)=-۱۲$$

چون $f(-۲)=a$، پس باید $a=-۱۲$. توجه کنید که $\lim_{x\to(-۲)^+}f(x)=۱۲$ و در نتیجه $\lim_{x\to(-۲)^+}f(x)\neq f(-۲)$.

۱۴- گزینهٔ ۱ فرض کنید A و B به ترتیب پیشامدهای قبولی این فرد در آزمون‌های اول و دوم باشند. در این صورت $P(A)=۰/۷$، $P(B)=۰/۶$ و $P(B|A)=۰/۸$. اکنون توجه کنید که

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\Rightarrow ۰/۸=\frac{P(A\cap B)}{۰/۷}$$

$$P(A\cap B)=۰/۵۶$$

در نتیجه،

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=۰/۷+۰/۶-۰/۵۶=۰/۷۴$$

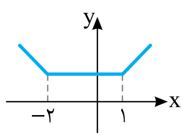
۱۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

گروه اول: $\bar{x}=۸۰,\ \sigma^۲=۲۵\Rightarrow\sigma=۵,\ CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{۵}{۸۰}=\frac{۱}{۱۶}$

گروه دوم: $\bar{x}=۷۲,\ \sigma^۲=۱۶\Rightarrow\sigma=۴,\ CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{۴}{۷۲}=\frac{۱}{۱۸}$

چون ضریب تغییرات گروه دوم کمتر است، پس گروه دوم بهتر است. البته بهتر است که در صورت سؤال پرسیده شود «پراکندگی مسئولیت‌پذیری در کدام گروه کمتر است».

۱۶- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f به صورت زیر است:



از روی این نمودار معلوم است که تابع f روی بازهٔ $(-\infty,-۲)$ اکیداً نزولی است.

۱۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $\sin(\frac{3\pi}{2}-x)=-\cos x$. بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$4\sin x(-\cos x)=1\Rightarrow -2\sin x\cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow \sin 2x=-\frac{1}{2}=\sin(-\frac{\pi}{6})$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله و جواب‌های درون بازهٔ $[0,2\pi]$ به صورت زیر هستند:

$$2x=2k\pi-\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{12},k\in\mathbb{Z}\Rightarrow 0\le k\pi-\frac{\pi}{12}\le 2\pi$$

$$\frac{1}{12}\le k\le 2+\frac{1}{12}\Rightarrow k=1,2$$

$$x=\pi-\frac{\pi}{12},\ x=2\pi-\frac{\pi}{12}\qquad(1)$$

$$2x=2k\pi+\pi+\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=k\pi+\frac{7\pi}{12},k\in\mathbb{Z}\Rightarrow 0\le k\pi+\frac{7\pi}{12}\le 2\pi$$

$$-\frac{7}{12}\le k<2-\frac{7}{12}\Rightarrow k=0,1$$

$$x=\frac{7\pi}{12},\ x=\pi+\frac{7\pi}{12}\qquad(2)$$

مجموع جواب‌های (۱) و (۲) برابر است با $4\pi+\frac{14\pi-2\pi}{12}=5\pi$.

۱۸- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$x^2+10x+16=(x+2)(x+8)$$

بنابراین

$$\lim_{x\to-8}\frac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}}=\frac{1}{6}\lim_{x\to-8}\frac{(x+2)(x+8)}{2+\sqrt[3]{x}}$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to-8}\left(\frac{(x+2)(x+8)}{2+\sqrt[3]{x}}\times\frac{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to-8}\frac{(x+2)(x+8)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{2^3+\sqrt[3]{x}^3}$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to-8}\frac{(x+2)(x+8)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{8+x}$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to-8}((x+2)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}))$$

$$=\frac{1}{6}(-8+2)(4-2(-2)+2^2)=-12$$

راه‌حل دوم با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال به‌دست می‌آید

$$\lim_{x\to-8}\frac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to-8}\frac{2x+10}{6\times\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}=\frac{-16+10}{6\times\frac{1}{3\times(-2)^2}}=\frac{-6}{\frac{1}{2}}=-12$$

۱۹- گزینهٔ ۴ چون تابع در هیچ همسایگی چپ نقطهٔ صفر تعریف نشده است، پس دربارهٔ حد چپ آن در نقطهٔ صفر نمی‌توان حرف زد. از طرف دیگر،

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2-1}{x+x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2-1}{2x}$$

چون $\lim_{x\to0^+}(x^2-1)=-1$ ، $\lim_{x\to0^+}(2x)=0$ و در یک همسایگی راست نقطهٔ صفر مقادیر $2x$ مثبت‌اند، پس

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2-1}{2x}=-\infty$$

۲۰- گزینهٔ ۳ خارج از برنامهٔ درسی

۲۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x\to4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=f'(4)$. از طرف دیگر،

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(5-2x)-(-2)(1+\sqrt{x})}{(5-2x)^2}\Rightarrow f'(4)=\frac{\frac{1}{4}(-3)+2(3)}{(-3)^2}=\frac{7}{12}$$

۲۲- گزینهٔ ۲ چون تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، پس روی $\mathbb{R}$ پیوسته است و در نتیجه در $x=2$ پیوسته و مشتق‌پذیر است:

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^+}f(x)\Rightarrow\lim_{x\to2^-}(-x^2+ax+b)=\lim_{x\to2^+}\frac{1}{x-1}$$

$$-4+2a+b=\frac{1}{2-1}=1\Rightarrow 2a+b=5$$

همچنین،

$$f'_-(2)=f'_+(2)\Rightarrow\lim_{x\to2^-}f'(x)=\lim_{x\to2^+}f'(x)$$

$$\lim_{x\to2^-}(-2x+a)=\lim_{x\to2^+}\frac{-1}{(x-1)^2}\Rightarrow -4+a=-1\Rightarrow a=3$$

بنابراین $b=5-2a=-1$.

۲۳- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$(fog)'(2)=g'(2)\times f'(g(2))\qquad(1)$$

از طرف دیگر، $g'(x)=\frac{2(x-1)-(1)(2x+1)}{(x-1)^2}=\frac{-3}{(x-1)^2}\Rightarrow g'(2)=-3$.

همچنین، $g(2)=5$. بنابراین از تساوی (۱) نتیجه می‌شود $6=(-3)f'(5)$،

پس $f'(5)=-2$.

۲۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

آهنگ تغییر متوسط $=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{8-\frac{1}{4}-(\frac{1}{2}-1)}{3}=\frac{11}{4}$

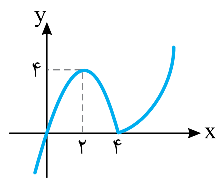
آهنگ تغییر لحظه‌ای $=f'(2)$

از طرف دیگر، $f'(x)=x+\frac{1}{x^2}$، پس $f'(2)=\frac{9}{4}$. بنابراین اختلاف مورد نظر می‌شود $\frac{11}{4}-\frac{9}{4}=\frac{1}{2}=0/5$.

۲۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+4x & x\le4\\ x^2-4x & x>4\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است. از روی این شکل معلوم می‌شود که $(4,0)$ نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f و $(2,4)$ نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است. فاصلهٔ این نقطه‌ها برابر است با $\sqrt{(4-2)^2+(0-4)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.



۲۶- گزینهٔ ۳ اگر مطابق شکل زیر، طول یکی از ضلع‌های مستطیل برابر x باشد، طول ضلع دیگرش می‌شود $\sqrt{12-x}$. بنابراین

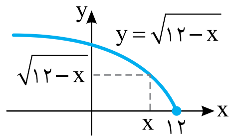
مساحت مستطیل $=x\sqrt{12-x}$

در نتیجه، باید بیشترین مقدار تابع $f(x)=x\sqrt{۱۲-x}$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=(۱)\sqrt{۱۲-x}+x(\frac{-۱}{۲\sqrt{۱۲-x}})$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow\sqrt{۱۲-x}(۲\sqrt{۱۲-x})=x\Rightarrow ۲(۱۲-x)=x\Rightarrow x=۸$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع f، یعنی بیشترین مقدار مساحت مستطیل مورد نظر به ازای $x=۸$ به دست می‌آید و برابر است با $۸\sqrt{۴}=۱۶$.



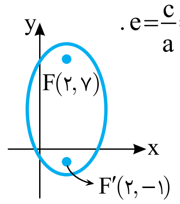
۲۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$FF'=۲c\Rightarrow ۸=۲c\Rightarrow c=۴$$

از طرف دیگر، $۲b=۶$، پس $b=۳$ و در نتیجه

$$a^۲=b^۲+c^۲=۹+۱۶=۲۵\Rightarrow a=۵$$

به این ترتیب $e=\frac{c}{a}=\frac{۴}{۵}=۰/۸$.



۲۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که شکل n ام از مربعی با $n^۲$ دایره و ردیف‌هایی از ۱، ۲، ... و $n-۱$ دایره درست شده است. بنابراین

$$۹^۲+۱+۲+۳+\cdots+۸=۸۱+\frac{۸\times۹}{۲}=۱۱۷$$

۲۹- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=x^۲-۲x-۳=(x-۱)^۲-۴\Rightarrow f(x)+۴=(x-۱)^۲$$

$$x=\sqrt{f(x)+۴}+۱$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=\sqrt{x+۴}+۱$. در نتیجه طول نقطهٔ تقاطع نمودار تابع‌های $f^{-۱}$ و g جواب معادلهٔ زیر است:

$$\sqrt{x+۴}+۱=\frac{x-۹}{۲}\Rightarrow ۲\sqrt{x+۴}+۲=x-۹\Rightarrow ۲\sqrt{x+۴}=x-۱۱ \qquad (۱)$$

$$۴(x+۴)=x^۲-۲۲x+۱۲۱\Rightarrow x^۲-۲۶x+۱۰۵=۰\Rightarrow(x-۵)(x-۲۱)=۰$$

$$x=۵\,,\,x=۲۱$$

توجه کنید که $x=۵$ جواب نیست، زیرا به ازای $x=۵$ سمت چپ معادلهٔ (۱) مثبت ولی سمت راست آن منفی است. بنابراین $x=۲۱$.

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که $f(x)=(x-۱)^۲-۴$. طول نقطهٔ برخورد نمودار تابع‌های $f^{-۱}$ و g جواب معادلهٔ $f^{-۱}(x)=g(x)$ است. اکنون توجه کنید که

$$f^{-۱}(x)=g(x)\Rightarrow f(f^{-۱}(x))=f(g(x))\Rightarrow x=f(g(x))$$

$$x=(g(x)-۱)^۲-۴\Rightarrow x+۴=(\frac{x-۹}{۲}-۱)^۲\Rightarrow x+۴=(\frac{x-۱۱}{۲})^۲$$

$$۴x+۱۶=x^۲-۲۲x+۱۲۱\Rightarrow x^۲-۲۶x+۱۰۵=۰\Rightarrow(x-۵)(x-۲۱)=۰$$

$$x=۵\,,\,x=۲۱$$

اکنون توجه کنید که $R_{f^{-۱}}=D_f=[۱,+\infty)$، پس مقادیر $f^{-۱}$ مثبت‌اند. اما $g(۵)<۰$، پس $x=۵$ جواب معادلهٔ $f^{-۱}(x)=g(x)$ نیست. بنابراین $x=۲۱$.

۳۰- گزینهٔ ۲ فرض کنید $A_۱$ پیشامد این باشد که مهرهٔ خارج شده سفید باشد و $A_۲$ پیشامد این باشد که مهرهٔ خارج شده سیاه باشد. در این صورت اگر B پیشامد مورد نظر باشد، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(B)=P(A_۱)P(B|A_۱)+P(A_۲)P(B|A_۲)=\frac{۵}{۱۱}\times\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}}+\frac{۶}{۱۱}\times\frac{\binom{۵}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}}$$

$$=\frac{۵}{۱۱}\times\frac{۶}{۴۵}+\frac{۶}{۱۱}\times\frac{۱۰}{۴۵}=\frac{۹۰}{۱۱\times۴۵}=\frac{۲}{۱۱}$$

۳۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{۱+\tan^۲ x}=\sqrt{\frac{۱}{\cos^۲ x}}=\frac{۱}{|\cos x|}=\frac{۱}{-\cos x} \qquad (\frac{\pi}{۲}<x<\pi)$$

بنابراین

$$\frac{\tan x}{\sqrt{۱+\tan^۲ x}}(\frac{۱}{\sin x}-\sin x)=\frac{\tan x}{-\frac{۱}{\cos x}}(\frac{۱-\sin^۲ x}{\sin x})$$

$$=-\tan x\cos x\times\frac{\cos^۲ x}{\sin x}=-\sin x\times\frac{\cos^۲ x}{\sin x}=-\cos^۲ x$$

۳۲- گزینهٔ ۴ فرض می‌کنیم سرعت پرنده در هوای آرام برابر v باشد. چون سرعت باد ۵ کیلومتر در ساعت است، پس سرعت پرنده در جهت موافق باد برابر $v+۵$ و در جهت مخالف باد برابر $v-۵$ است. چون پرنده یک کیلومتر رفته و یک کیلومتر برگشته است، پس مدت زمان رفت $\frac{۱}{v+۵}$ و مدت زمان برگشت $\frac{۱}{v-۵}$ است. به این ترتیب،

$$\frac{۱}{v+۵}+\frac{۱}{v-۵}=\frac{۹}{۶۰}=\frac{۳}{۲۰}\Rightarrow\frac{۲v}{v^۲-۲۵}=\frac{۳}{۲۰}$$

$$۳v^۲-۴۰v-۷۵=۰\Rightarrow(۳v+۵)(v-۱۵)=۰\Rightarrow v=۱۵$$

۳۳- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\frac{۷x-۸}{x^۲-x-۲}>\frac{x}{x-۲}\Rightarrow\frac{۷x-۸}{(x+۱)(x-۲)}-\frac{x}{x-۲}>۰\Rightarrow\frac{۷x-۸-x(x+۱)}{(x+۱)(x-۲)}>۰$$

$$\frac{-x^۲+۶x-۸}{(x+۱)(x-۲)}>۰\Rightarrow\frac{-(x-۲)(x-۴)}{(x+۱)(x-۲)}>۰\Rightarrow\frac{(x-۲)(x-۴)}{(x+۱)(x-۲)}<۰$$

x	$-\infty$		-۱		۲		۴		$+\infty$
$\frac{(x-۲)(x-۴)}{(x+۱)(x-۲)}$		+		−		−	۰	+	

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر $(-۱,۲)\cup(۲,۴)$ می‌شود.

راه‌حل دوم توجه کنید که اعداد صفر و ۳ در نامعادله صدق می‌کنند:

$$\frac{۰-۸}{۰-۰-۲}>\frac{۰}{۰-۲}\Rightarrow ۴>۰ \;,\; \frac{۲۱-۸}{۹-۳-۲}>\frac{۳}{۳-۲}\Rightarrow\frac{۱۳}{۴}>۳$$

بنابراین گزینهٔ (۳) جواب نامعادله است.

۳۴- گزینهٔ ۴ باید سه مدرسه از پنج مدرسه انتخاب کنیم (به $\binom{۵}{۳}$ طریق) و از هر کدام از آن‌ها یک نفر را انتخاب کنیم (هر کدام به $\binom{۴}{۱}$ طریق). بنابراین پاسخ مسئله برابر است با

$$\binom{۵}{۳}\binom{۴}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۴}{۱}=۱۰\times۴\times۴\times۴=۶۴۰$$

۳۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

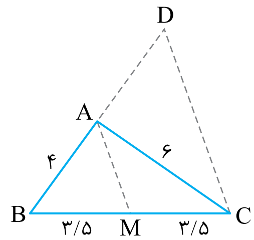
$$۲a+\sqrt{۳a+۱۶}=۱\Rightarrow\sqrt{۳a+۱۶}=۱-۲a\Rightarrow\sqrt{۳a+۱۶}^{۲}=(۱-۲a)^{۲}$$

$$۳a+۱۶=۱-۴a+۴a^{۲}\Rightarrow ۴a^{۲}-۷a-۱۵=۰$$

$$(۴a+۵)(a-۳)=۰\Rightarrow a=-\frac{۵}{۴}\ ,\ a=۳$$

توجه کنید که $a=۳$ در تساوی داده شده صدق نمی‌کند، ولی $a=-\frac{۵}{۴}$ در تساوی داده شده صدق می‌کند. بنابراین $a=-\frac{۵}{۴}$ و $۴a+۹=۴$.

۳۶- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که در مثلث BCD، از نقطهٔ M، وسط ضلع BC، خطی موازی ضلع CD رسم شده است. در نتیجه، این خط از وسط ضلع DB نیز می‌گذرد. یعنی $BD=۲AB=۸$.



راه‌حل دوم چون $AM||DC$، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث BCD،

$$\frac{BA}{BM}=\frac{BD}{BC}\Rightarrow\frac{۴}{۳/۵}=\frac{BD}{۷}\Rightarrow BD=۸$$

۳۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که در مثلث ایجاد شده هم ضلع‌ها به سه قسمت برابر تقسیم می‌شوند. از طرف دیگر، مثلث‌های ABC و AEF متشابه‌اند، پس

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AEF}}=(\frac{۱}{۲})^{۲}\Rightarrow S_{ABC}=\frac{۱}{۴}S_{AEF}\qquad(۱)$$

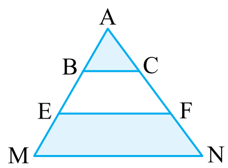
همین‌طور، مثلث‌های AEF و AMN متشابه‌اند، پس

$$\frac{S_{AEF}}{S_{AMN}}=(\frac{۲}{۳})^{۲}\Rightarrow S_{AMN}=\frac{۹}{۴}S_{AEF}$$

$$S_{AMN}-S_{AEF}=\frac{۹}{۴}S_{AEF}-S_{AEF}$$

$$S_{EFNM}=\frac{۵}{۴}S_{AEF}\qquad(۲)$$

اگر تساوی‌های (۱) و (۲) را بر هم تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید

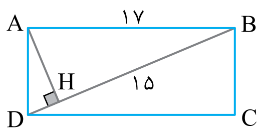


$$\frac{S_{ABC}}{S_{EFNM}}=\frac{۱}{۵}$$

۳۸- گزینهٔ ۱ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه ABD،

$$AB^{۲}=BH\times BD\Rightarrow ۱۷^{۲}=۱۵\times BD\Rightarrow BD=\frac{۱۷^{۲}}{۱۵}=\frac{۲۸۹}{۱۵}=۱۹\frac{۴}{۱۵}$$

پس طول قطر مستطیل $\frac{۴}{۱۵}$ واحد از عدد ۱۹ بیشتر است.



۳۹- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\sin(\frac{۹\pi}{۲}+\alpha)=\cos\alpha\ ,\quad \cos(\frac{۷\pi}{۲}-\alpha)=-\sin\alpha$$

$$\tan(\alpha-\frac{۳\pi}{۲})=-\tan(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=-\cot\alpha$$

بنابراین (چون α ربع سوم است، $\cos\alpha<۰$)

$$\cos^{۲}\alpha=\frac{۱}{۱+\tan^{۲}\alpha}=\frac{۱}{۱+\frac{۱۶}{۹}}=\frac{۹}{۲۵}\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{۳}{۵}$$

$$\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha=\frac{۴}{۳}\times(-\frac{۳}{۵})=-\frac{۴}{۵}$$

$$\cot\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}=\frac{۳}{۴}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $(-\frac{۳}{۵})(\frac{۴}{۵})+\frac{۳}{۴}=۰/۲۷$.

۴۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $y=a+b\sin x$. از روی نمودار تابع معلوم می‌شود که b مثبت است، پس بیشترین مقدار تابع برابر $a+b$ است. چون این مقدار برابر ۳ است، پس $a+b=۳$. همچنین، نمودار تابع از نقطهٔ $(-\frac{۵\pi}{۶},۰)$ گذشته است، پس

$$۰=a+b\sin(-\frac{۵\pi}{۶})=a+b(-\frac{۱}{۲})=a-\frac{b}{۲}$$

بنابراین

$$\begin{cases}a+b=۳\\ a-\frac{b}{۲}=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۱\\ b=۲\end{cases}$$

بنابراین ضابطهٔ تابع مورد نظر $y=۱+۲\sin x$ می‌شود، که مقدار آن به ازای $x=\frac{\pi}{۶}$ برابر است با $۱+۲\sin\frac{\pi}{۶}=۲$.

۴۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $۳^{x^{۲}-۲}=۸۱^{x}=(۳^{۴})^{x}=۳^{۴x}$.

بنابراین

$$x^{۲}-۲=۴x\Rightarrow x^{۲}-۴x-۲=۰$$

$$x=۲-\sqrt{۶},\quad x=۲+\sqrt{۶}$$

چون به ازای $x=۲-\sqrt{۶}$، مقدار $x-۲$ منفی می‌شود و $\log_{۶}(x-۲)$ را می‌خواهیم، پس $x=۲+\sqrt{۶}$ و در نتیجه

$$\log_{۶}(x-۲)=\log_{۶}\sqrt{۶}=\frac{۱}{۲}\log_{۶}۶=\frac{۱}{۲}$$

۴۲- گزینهٔ ۲ چون دامنهٔ تابع بازهٔ $(-\frac{a}{۲},+\infty)$ است و از روی نمودار تابع معلوم می‌شود که این بازه $(\frac{۱}{۲},+\infty)$ است، پس $a=-۱$. از طرف دیگر نمودار تابع از نقطهٔ $(۲,۰)$ گذشته است، پس $y(۲)=۰$:

$$-۱+\log_{b}(۴-۱)=۰$$

$$\log_{b}۳=۱\Rightarrow b=۳$$

بنابراین ضابطهٔ تابع $y=-۱+\log_{۳}(۲x-۱)$ می‌شود. طول نقطهٔ برخورد نمودار تابع مورد نظر با خط $y=۱$ جواب معادلهٔ زیر است:

$$-۱+\log_{۳}(۲x-۱)=۱\Rightarrow\log_{۳}(۲x-۱)=۲$$

$$۲x-۱=۹\Rightarrow x=۵$$

۴۳- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}\frac{x^۲-۴}{۲|x-۲|}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{(x-۲)(x+۲)}{۲(-(x-۲))}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{x+۲}{-۲}=-۲$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x^۲-۴}{۲|x-۲|}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{(x-۲)(x+۲)}{۲(x-۲)}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x+۲}{۲}=۲$$

چون $f(۲)=۲$، پس تابع f در نقطهٔ $x=۲$ فقط از راست پیوسته است.

۴۴- گزینهٔ ۴ فرض کنید A پیشامد موفقیت این فرد و B پیشامد موفقیت دوستش باشد. در این صورت

$$P(A)=۲P(B)\,,\quad P(A\cup B)=\frac{۷}{۹}$$

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{(P(A))^۲}{۲}$$

اکنون توجه کنید که

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$\frac{۷}{۹}=P(A)+\frac{P(A)}{۲}-\frac{(P(A))^۲}{۲}$$

$$(P(A))^۲-۳P(A)+\frac{۱۴}{۹}=۰\Rightarrow P(A)=\frac{۲}{۳}\,,\quad P(A)=\frac{۱۴}{۶}\ \text{(غ.ق.ق)}$$

۴۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $\bar{x}_A=۱۴$ و $\bar{x}_B=۱۴/۵$. بنابراین

$$\sigma_A^۲=\frac{۲^۲+۱^۲+۰^۲+۱^۲+۲^۲}{۵}=۲$$

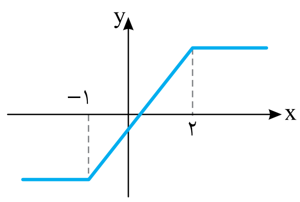
$$\sigma_B^۲=\frac{۲^۲+۱/۵^۲+۱^۲+۱/۵^۲+۳^۲}{۵}=۳/۷$$

چون

$$CV_A=\frac{\sigma_A}{\bar{x}_A}=\frac{\sqrt{۲}}{۱۴}\,,\quad CV_B=\frac{\sigma_B}{\bar{x}_B}=\frac{\sqrt{۳/۷}}{۱۴/۵}$$

پس $CV_A<CV_B$، یعنی دقت عمل A بیشتر است. البته بهتر است در صورت سؤال پرسیده شود «نمرات مهارت» کدام کارگر پراکندگی کمتری دارد.

۴۶- گزینهٔ ۳ نمودار تابع f به صورت زیر است. از روی این نمودار معوم است که تابع f روی بازهٔ $(-۱,۲)$ اکیداً صعودی است.



۴۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\cos ۳x+\cos x=۰\Rightarrow \cos ۳x=-\cos x=\cos(\pi-x)$$

بنابراین $(k\in\mathbb{Z})$

$$۳x=۲k\pi+\pi-x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$$

$$۳x=۲k\pi-(\pi-x)\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۲}$$

چون باید $\cos x\neq ۰$، پس جواب‌های به شکل $k\pi-\frac{\pi}{۲}$ قبول نیستند. در نتیجه، جواب‌های کلی معادلهٔ مورد نظر به صورت $\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$ هستند. $(k\in\mathbb{Z})$.

۴۸- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول توجه کنید که

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۲-\sqrt[۳]{۳x+۲}}{۵x^۲-۱۸x+۱۶}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\left(\frac{۲-\sqrt[۳]{۳x+۲}}{(۵x-۸)(x-۲)}\times\frac{۴+۲\sqrt[۳]{۳x+۲}+\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲}}{۴+۲\sqrt[۳]{۳x+۲}+\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲}}\right)$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{۸-(۳x+۲)}{(۵x-۸)(x-۲)(۴+۲\sqrt[۳]{۳x+۲}+\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲})}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{-۳(x-۲)}{(۵x-۸)(x-۲)(۴+۲\sqrt[۳]{۳x+۲}+\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲})}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{-۳}{(۵x-۸)(۴+۲\sqrt[۳]{۳x+۲}+\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲})}$$

$$=\frac{-۳}{(۲)(۴+۲\times ۲+۲^۲)}=-\frac{۱}{۸}$$

راه‌حل دوم بنابر قاعدهٔ هوپیتال،

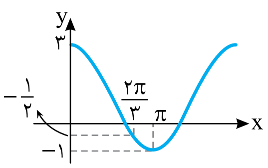
$$\lim_{x\to ۲}\frac{۲-\sqrt[۳]{۳x+۲}}{۵x^۲-۱۸x+۱۶}=\lim_{x\to ۲}\frac{-\frac{۳}{۳\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲}}}{۱۰x-۱۸}=\frac{-\frac{۱}{۲^۲}}{۲۰-۱۸}=-\frac{۱}{۸}$$

۴۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\lim_{x\to \frac{۲\pi}{۳}^+}\sin x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\,,\qquad \lim_{x\to \frac{۲\pi}{۳}^+}(۱+۲\cos x)=۰$$

و در یک همسایگی راست نقطهٔ $\frac{۲\pi}{۳}$، مقادیر $۱+۲\cos x$ منفی هستند. بنابراین

$$\lim_{x\to \frac{۲\pi}{۳}^+}\frac{\sin x}{۱+۲\cos x}=-\infty$$



۵۰- گزینهٔ ۴ خارج از برنامهٔ درسی

۵۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(\frac{۱}{۴}+h)-f(\frac{۱}{۴})}{h}=f'(\frac{۱}{۴})$$

از طرف دیگر،

$$f'(x)=\frac{(-۱)(\sqrt{x})-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(-x-۱)}{(\sqrt{x})^۲}$$

پس

$$f'(\frac{۱}{۴})=\frac{-\frac{۱}{۲}+(۱)(\frac{۱}{۴}+۱)}{\frac{۱}{۴}}=۳$$

۵۲- گزینهٔ ۳ چون تابع f در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر است، پس در این نقطه پیوسته نیز هست. بنابراین

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=f(۲)\Rightarrow \lim_{x\to ۲^+}\frac{۸}{ax+b}=۴\Rightarrow \frac{۸}{۲a+b}=۴\Rightarrow ۲a+b=۲$$

از طرف دیگر $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-۸a}{(ax+b)^۲} & x>۲\\ -۳x^۲+۶ & x<۲\end{cases}$. پس

$$f'_+(۲)=\lim_{x\to ۲^+} f'(x)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{-۸a}{(ax+b)^۲}=\frac{-۸a}{(۲a+b)^۲}=\frac{-۸a}{۲^۲}=-۲a$$

$$f'_-(۲)=\lim_{x\to ۲^-} f'(x)=\lim_{x\to ۲^-}(-۳x^۲+۶)=-۶$$

بنابراین

$$f'_+(۲)=f'_-(۲)\Rightarrow -۲a=-۶\Rightarrow a=۳$$

۵۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f(x)=x\left(\frac{۳x+۱}{x+۲}\right)^{\frac{۱}{۳}}$. پس

$$f'(x)=(۱)\left(\frac{۳x+۱}{x+۲}\right)^{\frac{۱}{۳}}+x\times\frac{۱}{۳}\left(\frac{(۳)(x+۲)-(۱)(۳x+۱)}{(x+۲)^۲}\right)\left(\frac{۳x+۱}{x+۲}\right)^{\frac{۱}{۳}-۱}$$

در نتیجه

$$f'(-۳)=\left(\frac{-۸}{-۱}\right)^{\frac{۱}{۳}}+(-۳)\left(\frac{۱}{۳}\right)\left(\frac{۳(-۱)-(-۸)}{(-۱)^۲}\right)\left(\frac{-۸}{-۱}\right)^{-\frac{۲}{۳}}=۲-۵\times\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}$$

۵۴- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که نقطه‌های ابتدایی و انتهایی نمودار تابع $(۰,f(۰))$ و $(۸,f(۸))$ هستند. شیب خطی که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند برابر است با $\frac{f(۸)-f(۰)}{۸-۰}=\frac{۳-(-۵)}{۸}=۱$. اکنون طول نقطه‌ای را روی نمودار تابع f پیدا می‌کنیم که شیب خط مماس در این نقطه بر نمودار تابع برابر ۱ است:

$$f'(x)=\frac{۹}{(x+۱)^۲}\Rightarrow f'(x)=۱\Rightarrow \frac{۹}{(x+۱)^۲}=۱$$

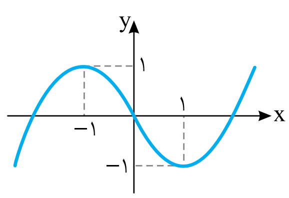
$$(x+۱)^۲=۹\Rightarrow x=۲\ ,\ \ x=-۴\ \ (\text{غ.ق})$$

بنابراین طول نقطهٔ مورد نظر برابر ۲ است و عرض آن برابر است با $f(۲)=۱$. معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $(۲,۱)$ می‌گذرد و شیب آن برابر ۱ است به صورت $y-۱=(۱)(x-۲)$ یعنی $y=x-۱$ است. عرض نقطه‌ای که این خط محور y را قطع می‌کند برابر است با $y=۰-۱=-۱$.

۵۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}-x^۲-۲x & x\le ۰\\ x^۲-۲x & x>۰\end{cases}$$

پس نمودار تابع f به صورت زیر است. بنابراین نقطه‌های ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی تابع f نقطه‌های $(-۱,۱)$ و $(۱,-۱)$ هستند که فاصلهٔ آن‌ها برابر است با $\sqrt{(-۱-۱)^۲+(۱+۱)^۲}=۲\sqrt{۲}$.

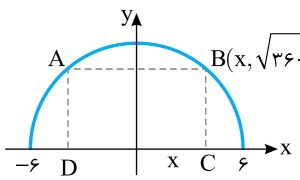


۵۶- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** فرض می‌کنیم مستطیل موردنظر ABCD باشد و طول نقطهٔ C برابر x باشد (شکل زیر را ببینید). چون نقطهٔ B روی دایرهٔ $x^۲+y^۲=۳۶$ است، پس عرض نقطهٔ B برابر است با $\sqrt{۳۶-x^۲}$. به این ترتیب، $S_{ABCD}=۲x\sqrt{۳۶-x^۲}$. باید بیشترین مقدار تابع $f(x)=۲x\sqrt{۳۶-x^۲}$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=۲\sqrt{۳۶-x^۲}-\frac{۲x^۲}{\sqrt{۳۶-x^۲}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۳۶-x^۲=x^۲\Rightarrow x^۲=۱۸\Rightarrow x=۳\sqrt{۲}\ (x>۰)$$

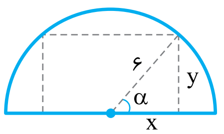
بنابراین بیشترین مقدار تابع f، یعنی بیشترین مساحت مستطیل ABCD، به ازای $x=۳\sqrt{۲}$ به‌دست می‌آید و برابر است با $۲(۳\sqrt{۲})\sqrt{۳۶-۱۸}=۳۶$.



راه‌حل دوم با نمادگذاری شکل زیر، فرض می‌کنیم طول ضلع‌های مستطیل ۲x و y باشند. در این صورت $x=۶\cos\alpha$ و $y=۶\sin\alpha$. بنابراین

$$\text{مساحت مستطیل}=۲xy=۲(۶\cos\alpha)(۶\sin\alpha)=۳۶\sin ۲\alpha\le ۳۶$$

توجه کنید که تساوی وقتی به دست می‌آید که $۲\alpha=۹۰^\circ$، یعنی $\alpha=۴۵^\circ$.



۵۷- گزینهٔ ۱ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. فاصلهٔ مرکز دایره تا خط $۲x-۳y+۱=۰$ برابر است با

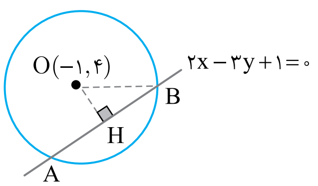
$$OH=\frac{|۲(-۱)-۳(۴)+۱|}{\sqrt{۲^۲+(-۳)^۲}}=\frac{۱۳}{\sqrt{۱۳}}=\sqrt{۱۳}$$

چون $HB=\frac{AB}{۲}=\sqrt{۷}$، پس بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHB،

$$OB^۲=OH^۲+HB^۲=(\sqrt{۱۳})^۲+(\sqrt{۷})^۲=۲۰\Rightarrow OB=۲\sqrt{۵}$$

یعنی شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر $۲\sqrt{۵}$ است. بنابراین معادلهٔ این دایره به صورت $(x+۱)^۲+(y-۴)^۲=۲۰$ است. طول نقطه‌های برخورد این دایره با خط $y=۲$ جواب معادلهٔ زیر هستند:

$$(x+۱)^۲+(۲-۴)^۲=۲۰\Rightarrow (x+۱)^۲=۱۶\Rightarrow x=-۵\ ,\ x=۳$$



۵۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که شکل nام از مستطیلی با $۲\times(n+۱)$ دایره و نواری با n دایره درست شده است. بنابراین تعداد دایره‌های شکل nام برابر است با $۲(n+۱)+n=۳n+۲$. پس تعداد دایره‌های شکل دوازدهم برابر است با $۳\times ۱۲+۲=۳۸$.

۵۹- گزینهٔ (۴) ابتدا توجه کنید که $(g^{-۱}of^{-۱})(۸)=g^{-۱}(f^{-۱}(۸))$. اکنون فرض کنید $f^{-۱}(۸)=a$. در این صورت

$$f(a)=۸\Rightarrow \frac{۲}{۵}a-۴=۸\Rightarrow a=۳۰$$

اکنون فرض کنید $g^{-۱}(۳۰)=b$. در این صورت

$$g(b)=۳۰\Rightarrow b^۳+b=۳۰\Rightarrow b=۳$$

بنابراین

$$(g^{-۱}of^{-۱})(۸)=g^{-۱}(f^{-۱}(۸))=g^{-۱}(۳۰)=۳$$

۶۰- گزینهٔ (۲) فرض کنید A، B و C به‌ترتیب پیشامد انتخاب بسته‌های ریاضی، تجربی و علوم انسانی باشند. اگر پیشامد برنده شدن بهروز X باشد، آن‌گاه

$$P(X)=P(A)P(X|A)+P(B)P(X|B)+P(C)P(X|C)$$

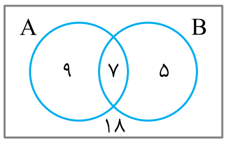
$$=\frac{۵}{۱۸}\times ۰/۷+\frac{۷}{۱۸}\times ۰/۸+\frac{۶}{۱۸}\times ۰/۹=\frac{۳۵}{۱۸۰}+\frac{۵۶}{۱۸۰}+\frac{۵۴}{۱۸۰}=\frac{۱۴۵}{۱۸۰}=\frac{۲۹}{۳۶}$$

۶۱- گزینهٔ (۴) اگر گروه ورزش را با A و گروه روزنامهٔ دیواری را با B نمایش دهیم، آن‌گاه $n(A)=۱۶$، $n(B)=۱۲$ و $n(A-B)=۹$. بنابراین

$$n(A\cap B)=n(A)-n(A-B)=۱۶-۹=۷$$

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۱۶+۱۲-۷=۲۱$$

بنابراین $۳۹-۲۱=۱۸$ نفر عضو هیچ یک از دو گروه نیستند. نمودار زیر تعداد افراد هر گروه را نشان می‌دهد.



۶۲- گزینهٔ (۲) ابتدا توجه کنید که

$$A=\sqrt[۵]{۴\sqrt[۳]{۱۶}}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-\frac{۴}{۳}}=۲^{\frac{۲}{۵}}\times ۲^{\frac{۴}{۱۵}}\times ۲^{\frac{۴}{۳}}=۲^{۲}=۴$$

بنابراین

$$(۲A)^{-\frac{۱}{۳}}=۸^{-\frac{۱}{۳}}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۸}}=\frac{۱}{۲}=۰/۵$$

۶۳- گزینهٔ (؟) ابتدا توجه کنید که معادلهٔ

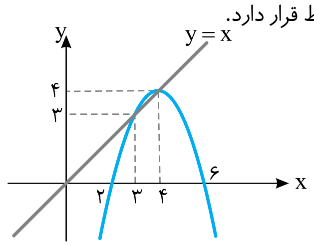
$$(۲m-۱)x^۲+۶x+m-۲=۰$$

به ازای $m=\frac{۱}{۲}$ درجهٔ دوم نیست و به صورت $۶x-\frac{۳}{۲}=۰$ درمی‌آید که تنها جواب آن $\frac{۱}{۴}$ است. چون $\frac{۱}{۲}$ در هر چهار گزینه وجود دارد، پس هیچ کدام از گزینه‌ها جواب نیستند ولی منظور طراح سؤال حالتی بوده که دلتای معادله مثبت است. در این صورت

$$\Delta=۳۶-۴(۲m-۱)(m-۲)>۰\Rightarrow(m+۱)(۲m-۷)<۰\Rightarrow -۱<m<۳/۵$$

یعنی منظور طراح، گزینهٔ (۳) بوده است.

۶۴- گزینهٔ (۱) **راه‌حل اول** اگر نمودار تابع $y=-x^۲+۲x+۵$ را سه واحد به طرف x های مثبت سپس دو واحد به طرف y های منفی انتقال دهیم، نمودار تابع $f(x)=-(x-۳)^۲+۲(x-۳)+۵-۲$ به دست می‌آید. ساده شدهٔ ضابطهٔ این تابع به صورت $f(x)=-x^۲+۸x-۱۲$ است. بنابراین می‌خواهیم بازه‌ای را معین کنیم که در آن بازه نمودار تابع f بالای خط $y=x$ قرار دارد. به نمودار این تابع و خط $y=x$ توجه کنید. در بازهٔ $(۳,۴)$ نمودار تابع f بالای این خط قرار دارد.



راه‌حل دوم برای اینکه بدانیم در چه بازه‌ای نمودار تابع f بالای خط $y=x$ قرار دارد، کافی است نامعادلهٔ $f(x)>x$ را حل کنیم:

$$-x^۲+۸x-۱۲>x\Rightarrow x^۲-۷x+۱۲<۰$$

$$(x-۳)(x-۴)<۰\Rightarrow ۳<x<۴$$

راه‌حل سوم در تابع

$$f(x)=-x^۲+۸x-۱۲$$

مقادیر $f(۳)$ و $f(۴)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(۳)=-۹+۲۴-۱۲=۳\,,\quad f(۴)=-۱۶+۳۲-۱۲=۴$$

بنابراین در نقاط $x=۳$ و $x=۴$ نمودار تابع f بالای خط $y=x$ قرار ندارد، بلکه منطبق بر این خط است. پس گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) که شامل عدد ۳ یا ۴ هستند، جواب نیستند و گزینهٔ (۱) جواب است.

۶۵- گزینهٔ (۴) فرض کنید بهروز به تنهایی در t ساعت این کار را انجام می‌دهد. بنابراین فرهاد در $t+۹$ ساعت این کار را انجام می‌دهد. پس بهروز در هر ساعت $\frac{۱}{t}$ از این کار و فرهاد در هر ساعت $\frac{۱}{t+۹}$ از این کار را انجام می‌دهند. اگر هر دو با هم کار کنند، در هر ساعت به مقدار $\frac{۱}{t}+\frac{۱}{t+۹}$ از این کار را انجام می‌دهند. چون با هم در ۲۰ ساعت کار را تمام می‌کنند، پس در یک ساعت $\frac{۱}{۲۰}$ کار را با هم انجام می‌دهند. بنابراین

$$\frac{۱}{t}+\frac{۱}{t+۹}=\frac{۱}{۲۰}\Rightarrow ۲۰(t+۹)+۲۰t=t(t+۹)\Rightarrow t^۲-۳۱t-۱۸۰=۰$$

$$(t-۳۶)(t+۵)=۰\Rightarrow t=۳۶,\ t=-۵\ (\text{غ.ق.ق})$$

۶۶- گزینهٔ (۱) ابتدا توجه کنید که

$$f^{-۱}=\{(۲,۱),(۵,۲),(۴,۳),(۶,۴)\}$$

بنابراین

$$(gof^{-۱})(۲)=g(۱)=\text{تعریف نشده}\,,\quad (gof^{-۱})(۵)=g(۲)=۳$$

$$(gof^{-۱})(۴)=g(۳)=۱\,,\quad (gof^{-۱})(۶)=g(۴)=۲$$

بنابراین

$$D_{gof^{-۱}}=\{۵,۴,۶\}$$

در نتیجه

$$D_{\frac{g}{gof^{-۱}}}=D_g\cap D_{gof^{-۱}}-\{x|(gof^{-۱})(x)=۰\}=\{۴,۵\}$$

در توابع داده شده در گزینه‌ها فقط تابع گزینهٔ (۱) دامنه‌اش $\{۴,۵\}$ است.

۶۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که اگر $g(x)=x^{۲}-x$، آن‌گاه $g(۱)=۰$ و $g(۲)=۲$. بنابراین

$$f(x)=-۲+(\frac{۱}{۲})^{Ax+B}\ ,\quad f(۱)=۰\ ,\quad f(۲)=۲$$

بنابراین

$$f(۱)=-۲+(\frac{۱}{۲})^{A+B}=۰\Rightarrow ۲^{-A-B}=۲\Rightarrow -A-B=۱\Rightarrow A+B=-۱$$

$$f(۲)=-۲+(\frac{۱}{۲})^{۲A+B}=۲\Rightarrow ۲^{-۲A-B}=۴\Rightarrow -۲A-B=۲\Rightarrow ۲A+B=-۲$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}A+B=-۱\\ ۲A+B=-۲\end{cases}$ نتیجه می‌شود $A=-۱$ و $B=۰$. در نتیجه

$$f(x)=-۲+(\frac{۱}{۲})^{-x}\Rightarrow f(۳)=-۲+(\frac{۱}{۲})^{-۳}=۶$$

۶۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\tan\frac{۱۱\pi}{۴}=\tan(۳\pi-\frac{\pi}{۴})=-\tan\frac{\pi}{۴}=-۱$$

$$\sin\frac{۱۵\pi}{۴}=\sin(۴\pi-\frac{\pi}{۴})=-\sin\frac{\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos\frac{۱۳\pi}{۴}=\cos(۳\pi+\frac{\pi}{۴})=-\cos\frac{\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

بنابراین

$$\tan\frac{۱۱\pi}{۴}+\sin\frac{۱۵\pi}{۴}\cos\frac{۱۳\pi}{۴}=-۱+(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})=-\frac{۱}{۲}$$

۶۹- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(۲)=۲a-۱$$

$$\lim_{x\to ۲^-}f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(ax-۱)=۲a-۱$$

$$\lim_{x\to ۲^+}f(x)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳x-۶}{x-\sqrt{x+۲}}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳(x-۲)(x+\sqrt{x+۲})}{(x-\sqrt{x+۲})(x+\sqrt{x+۲})}$$

$$=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳(x-۲)(x+\sqrt{x+۲})}{x^{۲}-x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳(x-۲)(x+\sqrt{x+۲})}{(x-۲)(x+۱)}$$

$$=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳(x+\sqrt{x+۲})}{x+۱}=\frac{۳(۲+۲)}{۲+۱}=۴$$

بنابراین برای اینکه تابع f در $x=۲$ پیوسته باشد باید تساوی $۲a-۱=۴$ برقرار باشد که نتیجه می‌شود $a=\frac{۵}{۲}$. توجه کنید که حد راست تابع را می‌توانید به کمک قاعدهٔ هوپیتال نیز به دست آورید:

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳x-۶}{x-\sqrt{x+۲}}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳}{۱-\frac{۱}{۲\sqrt{x+۲}}}=\frac{۳}{۱-\frac{۱}{۴}}=۴$$

۷۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $f(x)=۱+\frac{a}{۲}\sin ۲bx$. بنابراین دورهٔ تناوب تابع f برابر $\frac{۲\pi}{|۲b|}$ و حداکثر مقدار تابع برابر $۱+|\frac{a}{۲}|$ است. با توجه به نمودار تابع f دورهٔ تناوب برابر $\frac{۳\pi}{۴}-(-\frac{\pi}{۴})=\pi$ و حداکثر مقدار تابع برابر $\frac{۳}{۲}$ است.

بنابراین

$$\frac{۲\pi}{|۲b|}=\pi\Rightarrow|b|=۱\ ,\qquad ۱+|\frac{a}{۲}|=\frac{۳}{۲}\Rightarrow|a|=۱$$

با توجه به اینکه نمودار تابع f در اطراف نقطهٔ $x=۰$ صعودی است، مقادیر a و b هم‌علامت‌اند. بنابراین $a=۱$ و $b=۱$ یا $a=-۱$ و $b=-۱$. پس $a+b$ می‌تواند برابر ۲ یا ۲- باشد که فقط حالت $a+b=۲$ در گزینه‌ها وجود دارد.

۷۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که مطابق اتحاد چاق و لاغر

$$\sin^{۳}x+\cos^{۳}x=(\sin x+\cos x)(\sin^{۲}x+\cos^{۲}x-\sin x\cos x)$$

$$=(\sin x+\cos x)(۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x)$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به صورت زیر است:

$$(\sin x+\cos x)(۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x)=۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x$$

$$(\sin x+\cos x-۱)(۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x)=۰$$

$$\begin{cases}\sin x+\cos x-۱=۰\\ ۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x=۰\Rightarrow\sin ۲x=۲\ (\text{غ.ق.ق.})\end{cases}$$

معادلهٔ $\sin x+\cos x-۱=۰$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ جواب‌های $x=۰$، $x=\frac{\pi}{۲}$ و $x=۲\pi$ را دارد که مجموع آن‌ها برابر $\frac{۵\pi}{۲}$ است.

۷۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x\to ۲}(۲x-۵)=-۱$. بنابراین اولاً باید $\lim_{x\to ۲}(x^{۲}+ax+b)$ برابر صفر باشد ثانیاً باید علامت عبارت $x^{۲}+ax+b$ در یک همسایگی نقطهٔ $x=۲$ مثبت باشد. پس $x^{۲}+ax+b$ باید برابر $(x-۲)^{۲}$ باشد، در نتیجه

$$x^{۲}+ax+b=x^{۲}-۴x+۴\Rightarrow a=-۴,\ b=۴$$

پس $a+b=۰$.

۷۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$g(x)=x+\sqrt{x}\Rightarrow\begin{cases}g(۱)=۲\\ g'(x)=۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\Rightarrow g'(۱)=۱+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}\end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow f'(۲)=\frac{۴}{۳}$$

بنابراین

$$(fog)'(۱)=g'(۱)f'(g(۱))=g'(۱)f'(۲)=\frac{۳}{۲}\times\frac{۴}{۳}=۲$$

۷۴- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که در یک همسایگی چپ نقطهٔ $x=۲$ علامت عبارت $x^{۲}-۲x$ منفی است، بنابراین $|x^{۲}-۲x|=۲x-x^{۲}$. در واقع تابع f به صورت زیر است

$$\begin{cases}x^{۲}-۲x & x\le ۰\\ ۲x-x^{۲} & ۰<x<۲\\ \frac{۱}{۲}x^{۲}+ax+b & x\ge ۲\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}۲x-۲ & x<۰\\ ۲-۲x & ۰<x<۲\\ x+a & x>۲\end{cases}$$

چون تابع f در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر است، پس $f'_+(۲)=f'_-(۲)$. بنابراین

$$۲+a=۲-۴\Rightarrow a=-۴$$

از طرف دیگر تابع f در نقطهٔ $x=۲$ پیوسته است. پس

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^-} f(x)=f(۲)$$

بنابراین

$$۲+۲a+b=۴-۴\Rightarrow b=-۲a-۲=۶$$

در نتیجه $a+b=۲$.

۷۵- گزینهٔ ۴ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[۰,۲]$ برابر است با

$$\frac{f(۲)-f(۰)}{۲-۰}=\frac{۱۲-۲}{۲}=۵$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در $x=\frac{۳}{۴}$ برابر است با $f'(\frac{۳}{۴})$:

$$f'(x)=\sqrt{۴x+۱}+\frac{۴(x+۲)}{۲\sqrt{۴x+۱}}\Rightarrow f'(\frac{۳}{۴})=۲+\frac{۱۱}{۴}=\frac{۱۹}{۴}$$

بنابراین آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[۰,۲]$ از آهنگ لحظه‌ای آن در $x=\frac{۳}{۴}$ به اندازهٔ $\frac{۱}{۴}$ بیشتر است.

۷۶- گزینهٔ ۱ بازهٔ $(x+۱,۲x-۱)$ یک همسایگی عدد ۳ است، بنابراین بایستی

$$x+۱<۳<۲x-۱$$

مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های $x+۱<۳$ و $۳<۲x-۱$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x+۱<۳\Rightarrow x<۲ \quad (۱)$$

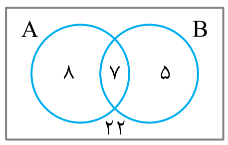
$$۳<۲x-۱\Rightarrow x>۲ \quad (۲)$$

اشتراک مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های (۱) و (۲) برابر تهی است.

۷۷- گزینهٔ ۴ اگر گروه آزمایشگاهی را A و گروه فوتبال را B بنامیم. آن‌گاه $n(A)=۱۵$، $n(B)=۱۲$ و $n(A\cap B)=۷$. بنابراین

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۱۲+۱۵-۷=۲۰$$

بنابراین $۴۲-۲۰=۲۲$ نفر عضو هیچ یک از دو گروه نیستند. نمودار زیر تعداد افراد هر گروه را نشان می‌دهد.



۷۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$A=\sqrt[۵]{۹\sqrt{۳}}(۱۲)^{-۱/۵}=۳^{\frac{۲}{۵}}\times ۳^{\frac{۱}{۱۰}}\times ۳^{-\frac{۳}{۲}}\times ۲^{-۳}=۳^{-۱}\times ۲^{-۳}=\frac{۱}{۲۴}$$

بنابراین $(۱+A^{-۱})^{\frac{۱}{۲}}=(۱+۲۴)^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۲۵}=۵$.

۷۹- گزینهٔ ۲ برای اینکه سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$ همواره پایین محور x قرار بگیرد، باید $a<۰$ و $b^۲-۴ac<۰$. بنابراین در سهمی به معادلهٔ $y=(۱-m)x^۲+۲(m-۳)x-۱$ باید شرایط زیر برقرار باشد:

$$۱-m<۰\Rightarrow m>۱$$

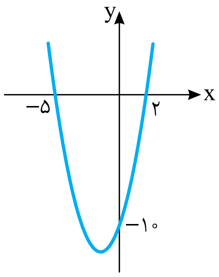
$$۴(m-۳)^۲+۴(۱-m)<۰\Rightarrow m^۲-۷m+۱۰<۰$$

$$(m-۲)(m-۵)<۰\Rightarrow ۲<m<۵$$

بنابراین اگر $۲<m<۵$، آن‌گاه سهمی مورد نظر همواره پایین محور xها قرار دارد.

۸۰- گزینهٔ ۱ اگر نمودار تابع $y=x^۲-x-۳$ را دو واحد به طرف xهای منفی سپس نُه واحد به طرف yهای منفی انتقال دهیم، نمودار تابع $f(x)=(x+۲)^۲-(x+۲)-۳-۹$ به دست می‌آید. سادهٔ شدهٔ ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x)=x^۲+۳x-۱۰=(x+۵)(x-۲)$ است. نمودار تابع f به صورت زیر است و واضح است که در بازهٔ $(-۵,۲)$ نمودار تابع f زیر محور xها قرار دارد. توجه کنید که اگر نمودار تابع f زیر محور xها قرار داشته باشد، آن‌گاه $f(x)<۰$. بنابراین

$$(x+۵)(x-۲)<۰\Rightarrow -۵<x<۲$$



۸۱- گزینهٔ ۱ مجموع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{۱}{۲\times ۵}+\frac{۱}{۵\times ۸}+\frac{۱}{۸\times ۱۱}+\cdots+\frac{۱}{۱۷\times ۲۰}$$

$$=\frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}-\frac{۱}{۱۱}+\cdots+\frac{۱}{۱۷}-\frac{۱}{۲۰})=\frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲۰})=\frac{۳}{۲۰}=۰/۱۵$$

۸۲- گزینهٔ ۲ اگر $x\ge\frac{۱}{۲}$، آن‌گاه معادله به صورت $۲x-۱+x+۲=۳$ در می‌آید که جواب آن $x=\frac{۲}{۳}$ است. اگر $-۲<x<\frac{۱}{۲}$، آن‌گاه معادله به صورت $-۲x+۱+x+۲=۳$ در می‌آید که $x=۰$ جواب آن است. اگر $x\le -۲$، آن‌گاه معادله به صورت $-۲x+۱-x-۲=۳$ در می‌آید که $x=-\frac{۴}{۳}$ جواب آن است ولی قابل قبول نیست. بنابراین جواب‌های معادله $x=\frac{۲}{۳}$ و $x=۰$ هستند که مجموع آن‌ها برابر $\frac{۲}{۳}$ است.

۸۳- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$g^{-۱}=\{(۳,۲),(۲,۴),(۶,۵),(۱,۳)\}$$

$$f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۶)\}$$

بنابراین

$$g^{-۱}of=\{(۱,۴),(۴,۵)\}\Rightarrow (g^{-۱}of)-f=\{(۱,۲),(۴,-۱)\}$$

بنابراین برد تابع $(g^{-۱}of)-f$ مجموعهٔ $\{۲,-۱\}$ است.

۸۴- گزینهٔ ۳ نمودار تابع $f(x)=۳^{Ax+B}$ نمودار تابع $y=x^۲$ را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع می‌کند. پس نمودار تابع f از نقاط $(۱,۱)$ و $(۳,۹)$ عبور می‌کند. بنابراین

$$f(۱)=۱\Rightarrow ۳^{A+B}=۱\Rightarrow A+B=۰$$

$$f(۳)=۹\Rightarrow ۳^{۳A+B}=۹\Rightarrow ۳A+B=۲$$

از حل دستگاه معادلات بالا نتیجه می‌شود $A=1$ و $B=-1$ و در نتیجه $f(x)=3^{x-1}$. پس عرض نقطهٔ تلاقی نمودار تابع f با محور yها برابر $f(0)=\frac{1}{3}$ است.

۸۵- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\tan\frac{17\pi}{6}=\tan(3\pi-\frac{\pi}{6})=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin\frac{11\pi}{3}=\sin(4\pi-\frac{\pi}{3})=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{10\pi}{3}=\cos(3\pi+\frac{\pi}{3})=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$

بنابراین

$$\tan\frac{17\pi}{6}\sin\frac{11\pi}{3}+\cos\frac{10\pi}{3}=(-\frac{\sqrt{3}}{3})(-\frac{\sqrt{3}}{2})-\frac{1}{2}=\frac{3}{6}-\frac{1}{2}=0$$

۸۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(1)=a+b\,,\quad \lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(ax+b)=a+b$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}x[x]=\lim_{x\to 1^-}0=0$$

تابع f در $x=1$ پیوسته است، پس $a+b=0$. از طرف دیگر

$$f(-1)=-a+b\,,\quad \lim_{x\to(-1)^-}f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}(ax+b)=-a+b$$

$$\lim_{x\to(-1)^+}f(x)=\lim_{x\to(-1)^+}x[x]=\lim_{x\to(-1)^+}(-x)=1$$

تابع f در $x=-1$ پیوسته است، پس $-a+b=1$. از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}a+b=0\\-a+b=1\end{cases}$ نتیجه می‌شود $a=-\frac{1}{2}$ و $b=\frac{1}{2}$.

۸۷- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید

$$f(x)=\tan(\pi x)-\cot(\pi x)$$

$$=\frac{\sin(\pi x)}{\cos(\pi x)}-\frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}=\frac{\sin^2(\pi x)-\cos^2(\pi x)}{\sin(\pi x)\cos(\pi x)}$$

$$=\frac{-\cos(2\pi x)}{\frac{1}{2}\sin(2\pi x)}=-2\cot(2\pi x)=-2\tan(\frac{\pi}{2}-2\pi x)$$

پس دورهٔ تناوب تابع برابر $\frac{\pi}{|-2\pi|}=\frac{1}{2}$ است.

۸۸- گزینهٔ ۴ معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin^4x+\cos^4x=\frac{1}{2}\Rightarrow(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x=\frac{1}{2}$$

$$1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\frac{1}{2}\Rightarrow\sin^2 2x=1\Rightarrow\sin 2x=\pm 1$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر هستند

$$2x=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\,,\quad k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[0,2\pi]$ عبارتند از $\frac{\pi}{4}$، $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$، $\pi+\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ که مجموع آن‌ها برابر 4π است.

۸۹- گزینهٔ ۴ خط $y=3x-5$ در نقطهٔ $(2,1)$ بر نمودار تابع y مماس است. پس $g(2)=1$ و $g'(2)=3$. از طرف دیگر،

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{2x-2}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{2}f'(1)=\frac{2}{3}\Rightarrow f'(1)=\frac{4}{3}$$

بنابراین

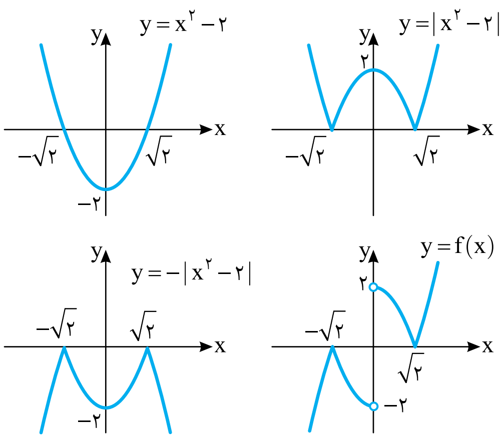
$$(fog)'(2)=g'(2)f'(g(2))=g'(2)f'(1)=3\times\frac{4}{3}=4$$

۹۰- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول تابع f در $x=0$ تعریف نشده پس در این نقطه مشتق‌پذیر نیست. عبارت x^3-2x در ضابطهٔ f داخل قدرمطلق قرار دارد و این عبارت در $x=0$ و $x=\pm\sqrt{2}$ برابر صفر می‌شود و در نتیجه تابع f در این نقاط مشتق‌پذیر نیست. بنابراین در سه نقطه تابع f مشتق ندارد.

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{|x^3-2x|}{x}=\frac{|x||x^2-2|}{x}=\begin{cases}|x^2-2| & x>0\\-|x^2-2| & x<0\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است. واضح است که در $x=0$، $x=\sqrt{2}$ و $x=-\sqrt{2}$ تابع f مشتق‌پذیر نیست.



۹۱- گزینهٔ ۲ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[0,4]$ برابر است با

$$\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{(3+\frac{1}{5})-(1+1)}{4}=\frac{3}{10}$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در $x=\frac{3}{2}$ برابر $f'(\frac{3}{2})$ است:

$$f(x)=\sqrt{2x+1}+\frac{1}{x+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}-\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$f'(\frac{3}{2})=\frac{1}{2}-\frac{4}{25}=\frac{17}{50}$$

بنابراین اختلاف $\frac{3}{10}$ و $\frac{17}{50}$ مورد سؤال است که برابر $0/04$ است.

۹۲- گزینهٔ ۴ با توجه به نمودار تابع f معلوم است که این تابع فقط در $x=3$ اکسترمم نسبی دارد. از طرف دیگر،

$$f(x)=x^4+ax^3+bx^2$$

$$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx=x(4x^2+3ax+2b)$$

علامت $f'(x)$ در $x=0$ نباید تغییر کند و فقط در $x=3$ باید تغییر کند.

بنابراین باید $b=0$ و

$$f'(x)=x(4x^2+3ax)=x^2(4x+3a)\ ,\quad f'(3)=0 \Rightarrow a=-4$$

بنابراین

$$f(x)=x^4-4x^3 \Rightarrow f(-2)=48$$

۹۳- گزینهٔ ۴ ابتدا دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x-1}$ را به دست می‌آوریم:

$$x-1\neq 0 \Rightarrow x\neq 1\ ,\ 9-x^2\geq 0 \Rightarrow x^2\leq 9$$

$$-3\leq x\leq 3\ ,\ D_f=[-3,1)\cup(1,3]$$

برای این که بازهٔ $(k-2,3k+2)$ زیرمجموعهٔ دامنهٔ تابع f باشد یا باید زیرمجموعهٔ $[-3,1)$ باشد یا باید زیرمجموعهٔ $(1,3]$ باشد. پس دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول $(k-2,3k+2)\subseteq[-3,1)$. در این حالت باید $k-2\geq -3$ و $3k+2\leq 1$. پس $-1\leq k\leq -\frac{1}{3}$.

حالت دوم $(k-2,3k+2)\subseteq(1,3]$. در این حالت باید $k-2\geq 1$ و $3k+2\leq 3$ که ممکن نیست. بنابراین $k\in[-1,-\frac{1}{3}]$ که در گزینهٔ (۴) بازهٔ $[-1,-\frac{1}{3})$ آمده است.

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{5-\sqrt{6}}=\frac{(2\sqrt{2}+3\sqrt{3})(5+\sqrt{6})}{(5-\sqrt{6})(5+\sqrt{6})}=\frac{10\sqrt{2}+4\sqrt{3}+15\sqrt{3}+9\sqrt{2}}{25-6}$$

$$=\frac{19\sqrt{2}+19\sqrt{3}}{19}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

از طرف دیگر،

$$2(\sqrt[4]{9}-1)^{-1}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1}=\sqrt{3}+1$$

بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با $\sqrt{2}+\sqrt{3}-(\sqrt{3}+1)=\sqrt{2}-1$

۲- گزینهٔ ۳ اعداد مربع کامل به‌صورت زیر هستند:

$$1^2,2^2,3^2,\ldots,8^2,9^2,\ldots$$

بنابراین آخرین عدد دستهٔ هشتم عدد 8^2 و آخرین عدد دستهٔ نهم عدد 9^2 است. همچنین اولین عدد دستهٔ نهم 8^2+1 است. پس واسطهٔ حسابی بین 8^2+1 و 9^2 را باید حساب کنیم که برابر است با $\frac{8^2+1+9^2}{2}=73$

۳- گزینهٔ ۲ چون چندجمله‌ای $p(x)$ بر x^2-1 بخش‌پذیر است، پس بر $x-1$ و $x+1$ هم بخش‌پذیر است. یعنی $p(-1)=p(1)=0$. از طرف دیگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $Q(x)$ بر $x-2$ برابر $Q(2)$ است. بنابراین

$$Q(x)=p(x-1)+p(1-x)\Rightarrow Q(2)=p(1)+p(-1)=0$$

توجه در صورت سؤال نوشته شده است «حاصل تقسیم $Q(x)$ بر $x-2$» که معلوم نیست چیه! ولی احتمالاً منظور همین «باقی‌مانده» بوده است.

۴- گزینهٔ ۱ مجموع جواب‌ها و حاصل‌ضرب جواب‌ها در معادلهٔ $3x^2+(2m-1)x+2-m=0$ به‌ترتیب برابر $\frac{1-2m}{3}$ و $\frac{2-m}{3}$ هستند، پس

$$\frac{1-2m}{3}=\frac{3}{2-m}\Rightarrow(1-2m)(2-m)=9\Rightarrow 2m^2-5m-7=0$$

$$(m+1)(2m-7)=0\Rightarrow m=-1\,,\,m=\frac{7}{2}$$

به‌ازای $m=-1$ معادله به‌صورت $3x^2-3x+3=0$ در می‌آید که جواب ندارد، پس فقط $m=\frac{7}{2}$ قابل قبول است.

۵- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$1<\frac{x+1}{2x-1}<3\Rightarrow -1<\frac{x+1}{2x-1}-2<1\Rightarrow -1<\frac{-3x+3}{2x-1}<1$$

$$\left|\frac{-3x+3}{2x-1}\right|<1\Rightarrow|3x-3|<|2x-1|$$

بنابراین نامعادله به‌صورت زیر حل می‌شود:

$$(3x-3)^2<(2x-1)^2\Rightarrow(3x-3)^2-(2x-1)^2<0$$

$$(3x-3+2x-1)(3x-3-2x+1)<0$$

$$(5x-4)(x-2)<0\Rightarrow\frac{4}{5}<x<2\Rightarrow x\in(0/8,2)$$

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که عدد ۱ در نامعادله صدق می‌کند، زیرا $1<\frac{1+1}{2-1}<3$.

همچنین عدد $\frac{3}{2}$ در نامعادله صدق می‌کند $1<\frac{\frac{3}{2}+1}{2(\frac{3}{2})-1}<3\Leftrightarrow 1<\frac{5}{4}<3$

این اعداد فقط عضو بازهٔ گزینهٔ (۴) هستند.

راه‌حل سوم نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{x+1}{2x-1}<3\Rightarrow\frac{x+1-6x+3}{2x-1}<0\Rightarrow\frac{-5x+4}{2x-1}<0\Rightarrow x\in(-\infty,\frac{1}{2})\cup(\frac{4}{5},+\infty)$$

$$\frac{x+1}{2x-1}>1\Rightarrow\frac{x+1-2x+1}{2x-1}>0\Rightarrow\frac{-x+2}{2x-1}>0\Rightarrow x\in(\frac{1}{2},2)$$

از اشتراک دو مجموعهٔ جواب به‌دست آمده نتیجه می‌شود

$$x\in(\frac{4}{5},2)=(0/8,2)$$

۶- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** مختصات نقاط را در معادلهٔ سهمی قرار می‌دهیم:

$$y=ax^2+bx+c$$

$$\begin{cases}x=0\\y=5\end{cases}\Rightarrow 0+0+c=5\Rightarrow c=5\,,\quad\begin{cases}x=1\\y=11\end{cases}\Rightarrow a+b+c=11\Rightarrow a+b=6$$

$$\begin{cases}x=-2\\y=5\end{cases}\Rightarrow 4a-2b+c=5\Rightarrow 4a-2b=0\Rightarrow b=2a$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}a+b=6\\b=2a\end{cases}$ نتیجه می‌شود $a=2$ و $b=4$. پس معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=2x^2+4x+5$ است که از نقطهٔ $(-1,3)$ می‌گذرد.

راه‌حل دوم چون سهمی به معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$ از نقاط $(0,5)$، $(-2,5)$ و $(1,11)$ می‌گذرد، پس سهمی به معادلهٔ $y=ax^2+bx+c-5$ از نقاط $(0,0)$، $(-2,0)$ و $(1,6)$ می‌گذرد و معادلهٔ سهمی‌ای که از این نقاط می‌گذرد به صورت $y=a(x-0)(x+2)=a(x^2+2x)$ است. این سهمی از نقطهٔ $(1,6)$ می‌گذرد. پس $6=a(1+2)\Rightarrow a=2$

بنابراین معادلهٔ سهمی اولیه به‌صورت $y=2x^2+4x+5$ است که از نقطهٔ $(-1,3)$ می‌گذرد.

راه‌حل سوم چون عرض نقاط $(-2,5)$ و $(0,5)$ یکسان است، پس طول رأس این سهمی برابر -1 است. بنابراین معادلهٔ سهمی به‌شکل کلی $y=m(x+1)^2+n$ است. این سهمی از نقاط $(0,5)$ و $(1,11)$ می‌گذرد. پس

$(0,5)\in$ سهمی $\Rightarrow m+n=5$

$(1,11)\in$ سهمی $\Rightarrow 4m+n=11$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}m+n=5\\4m+n=11\end{cases}$ به‌دست می‌آید $m=2$ و $n=2$. در نتیجه معادلهٔ سهمی به صورت $y=2(x+1)^2+3$ است که از نقطهٔ $(-1,3)$ می‌گذرد.

۷- گزینهٔ ۳ اگر نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را دوازده واحد به راست ببریم، نمودار تابع $y=\sqrt{x-۱۲}$ به‌دست می‌آید. اگر این نمودار را دو واحد به بالا انتقال دهیم، نمودار تابع $y=\sqrt{x-۱۲}+۲$ حاصل می‌شود. نقطهٔ برخورد نمودار توابع $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\sqrt{x-۱۲}+۲$ مد نظر است که طول آن از حل معادلهٔ $f(x)=g(x)$ به‌دست می‌آید:

$$\sqrt{x}=\sqrt{x-۱۲}+۲\Rightarrow\sqrt{x}-۲=\sqrt{x-۱۲}\Rightarrow x+۴-۴\sqrt{x}=x-۱۲$$

$$۱۶=۴\sqrt{x}\Rightarrow ۴=\sqrt{x}\Rightarrow x=۱۶$$

پس نقطهٔ مورد نظر $A(۱۶,۴)$ است که فاصلهٔ آن از مبدأ مختصات برابر است با $\sqrt{۱۶^۲+۴^۲}=۴\sqrt{۱۷}$

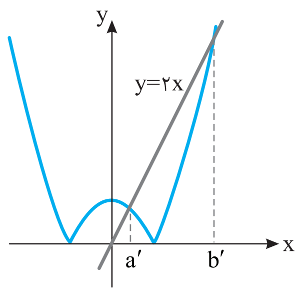
توجه این سؤال خارج از مباحث کتاب درسی رشتهٔ تجربی است. چون حل هندسی معادلات در کتاب درسی رشتهٔ تجربی وجود ندارد.

۸- گزینهٔ ۱ نمودار تابع‌های $f(x)=|۲x^۲-۴|=۲|x^۲-۲|$ و $g(x)=۲x$ به‌صورت زیر است. واضح است که در بازهٔ (a',b') نمودار تابع f زیر نمودار تابع g قرار دارد. پس کافی است نقاط a' و b' را معلوم کنیم که جواب معادلهٔ $f(x)=g(x)$ هستند:

$$۲|x^۲-۲|=۲x\Rightarrow|x^۲-۲|=x$$

$$x\ge ۰\Rightarrow\begin{cases}x^۲-۲=x\\ x^۲-۲=-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^۲-x-۲=۰\Rightarrow x=۲\,,\,x=-۱\ (\text{غ.ق.ق})\\ x^۲+x-۲=۰\Rightarrow x=۱\,,\,x=-۲\ (\text{غ.ق.ق})\end{cases}$$

بنابراین بیشترین مقدار $b-a$ وقتی است که $a=a'=۱$ و $b=b'=۲$ و در نتیجه $b-a=۱$.



توجه این سؤال خارج از مباحث کتاب درسی رشتهٔ تجربی است. چون حل هندسی معادلات و نامعادلات در کتاب درسی رشتهٔ تجربی وجود ندارد.

۹- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید $D_f=D_g=\mathbb{R}$، بنابراین $D_{gof}=\mathbb{R}$. از طرف دیگر،

$$(gof)(x)=g(f(x))=-f^۲(x)+۴f(x)=۴-(f(x)-۲)^۲$$

$$=۴-(۲x-[۲x]-۲)^۲$$

اکنون توجه کنید که

$$۰\le ۲x-[۲x]<۱\Rightarrow -۲\le ۲x-[۲x]-۲<-۱$$

$$۱<(۲x-[۲x]-۲)^۲\le ۴\Rightarrow -۴\le-(۲x-[۲x]-۲)^۲<-۱$$

$$۰\le ۴-(۲x-[۲x]-۲)^۲<۳\Rightarrow ۰\le(gof)(x)<۳$$

بنابراین برد تابع gof بازهٔ $[۰,۳)$ است.

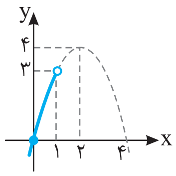
راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$۰\le ۲x-[۲x]<۱\Rightarrow ۰\le f(x)<۱$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(t)=-t^۲+۴t,\quad ۰\le t<۱$$

بنابراین نمودار تابع g به صورت زیر است و در نتیجه $۰\le g(t)<۳$، یعنی

$$R_{gof}=[۰,۳)$$



۱۰- گزینهٔ ۳ چون $g(x)=f^{-۱}(x)$، پس

$$g(۶)+g(۱۲)=f^{-۱}(۶)+f^{-۱}(۱۲)$$

از طرف دیگر، $f(x)=x+\sqrt{x}$، $f(۴)=۴+۲=۶$ و $f(۹)=۹+۳=۱۲$.
بنابراین $f^{-۱}(۶)=۴$ و $f^{-۱}(۱۲)=۹$ و در نتیجه حاصل عبارت خواسته شده برابر ۱۳ است.

۱۱- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** فرض می‌کنیم نمودار تابع $f^{-۱}$ در نقطهٔ $(a,-a)$ که $a>۰$ نیمساز ناحیهٔ چهارم را قطع کند. در این صورت $f^{-۱}(a)=-a$ و در نتیجه $f(-a)=a$. بنابراین

$$-a-\frac{۲}{-a}=a\Rightarrow ۲a=\frac{۲}{a}\Rightarrow a^۲=۱\Rightarrow a=۱$$

راه‌حل دوم ابتدا تابع وارون تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$y=x-\frac{۲}{x},\quad x<۰\Rightarrow y=\frac{x^۲-۲}{x}\Rightarrow xy=x^۲-۲\Rightarrow x^۲-yx-۲=۰$$

$$\begin{cases}x=\dfrac{y+\sqrt{y^۲+۸}}{۲}>۰\ (\text{غ.ق.ق})\\ x=\dfrac{y-\sqrt{y^۲+۸}}{۲}\end{cases}$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=\frac{x-\sqrt{x^۲+۸}}{۲}$. طول نقطهٔ برخورد نمودار تابع $f^{-۱}$ با نیمساز ناحیهٔ دوم (خط $y=-x$) از حل معادلهٔ $f^{-۱}(x)=-x$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{x-\sqrt{x^۲+۸}}{۲}=-x\Rightarrow\sqrt{x^۲+۸}=۳x\quad(x>۰)$$

$$x^۲+۸=۹x^۲\Rightarrow x^۲=۱\Rightarrow x=۱,\ x=-۱\quad(\text{غ.ق.ق})$$

۱۲- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\log_۴ ۳=\frac{۸}{۱۰}\Rightarrow\frac{۱}{۲}\log_۲ ۳=\frac{۴}{۵}\Rightarrow\log_۲ ۳=\frac{۸}{۵}$$

بنابراین

$$\log_{۱۲} ۶=\frac{\log_۲ ۶}{\log_۲ ۱۲}=\frac{\log_۲ ۳+\log_۲ ۲}{\log_۲ ۳+۲\log_۲ ۲}=\frac{\frac{۸}{۵}+۱}{\frac{۸}{۵}+۲}=\frac{۱۳}{۱۸}$$

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$\log_۴ ۳=۰/۸=\frac{۴}{۵}\Rightarrow ۴^{\frac{۴}{۵}}=۳\Rightarrow ۴^۴=۳^۵\Rightarrow ۲^۸=۳^۵$$

(دقت کنید که این تساوی به صورت تقریبی داده شده است و تساوی درستی نیست.)

بنابراین

$$\log_{12}6=\log_{12}3+\log_{12}2=\log_{2^2\times3}3+\log_{2^2\times3}2$$

$$=4\log_{(2^8\times3^4)}3+5\log_{(2^{10}\times3^5)}2=4\log_{(3^5\times3^4)}3+5\log_{(2^{10}\times2^8)}2$$

$$=4\log_{3^9}3+5\log_{2^{18}}2=\frac{4}{9}\log_3 3+\frac{5}{18}\log_2 2=\frac{4}{9}+\frac{5}{18}=\frac{13}{18}$$

۱۳- گزینهٔ ۲ از نمودار تابع f معلوم است که $f(-\frac{1}{3})=0$ و $f(0)=-2$. بنابراین

$$f(x)=-4+2^{ax+b}\Rightarrow\begin{cases}f(0)=-4+2^b=-2\\ f(-\frac{1}{3})=-4+2^{-\frac{a}{3}+b}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}2^b=2\Rightarrow b=1\\ 2^{-\frac{a}{3}+1}=4\Rightarrow-\frac{a}{3}+1=2\Rightarrow a=-3\end{cases}$$

پس

$$f(x)=-4+2^{-3x+1}\Rightarrow f(-\frac{5}{3})=-4+2^6=60$$

۱۴- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** فرض کنید $f^{-1}(2)=a>0$. در این صورت $f(a)=2$ و در نتیجه

$$\frac{2^a+(\frac{1}{2})^a}{2}=2\Rightarrow 2^a+\frac{1}{2^a}=4$$

با فرض $b=2^a>0$ معادله به‌صورت زیر در می‌آید:

$$b+\frac{1}{b}=4\Rightarrow b^2-4b+1=0\Rightarrow b=2+\sqrt{3},\ b=2-\sqrt{3}\ (\text{غ.ق.ق})$$

(اگر $b=2-\sqrt{3}$، آن‌گاه $a=\log_2(2-\sqrt{3})<0$ که با توجه به دامنهٔ داده شده قابل قبول نیست.) پس $2^a=2+\sqrt{3}\Rightarrow a=\log_2(2+\sqrt{3})$

راه‌حل دوم تابع وارون تابع $f(x)=\frac{2^x+(\frac{1}{2})^x}{2}$ با دامنهٔ $[0,+\infty)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{2^x+(\frac{1}{2})^x}{2}\Rightarrow 2y=2^x+\frac{1}{2^x}$$

اگر فرض کنیم $t=2^x>0$، آن‌گاه

$$2y=t+\frac{1}{t}\Rightarrow t^2-2yt+1=0\Rightarrow t=y\pm\sqrt{y^2-1}\Rightarrow 2^x=y\pm\sqrt{y^2-1}$$

چون $x\geq0$، پس فقط $y+\sqrt{y^2-1}$ قابل قبول است. بنابراین

$$x=\log_2(y+\sqrt{y^2-1})\Rightarrow f^{-1}(x)=\log_2(x+\sqrt{x^2-1})$$

در نتیجه $f^{-1}(2)=\log_2(2+\sqrt{3})$.

۱۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\tan300^\circ=\tan(360^\circ-60^\circ)=-\tan60^\circ=-\sqrt{3}$$

$$\cos210^\circ=\cos(180^\circ+30^\circ)=-\cos30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan480^\circ=\tan(450^\circ+30^\circ)=\tan(5\times90^\circ+30^\circ)=-\cot30^\circ=-\sqrt{3}$$

$$\sin840^\circ=\sin(810^\circ+30^\circ)=\sin(9\times90^\circ+30^\circ)=\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین

$$\tan300^\circ\cos210^\circ+\tan480^\circ\sin840^\circ$$

$$=(-\sqrt{3})(-\frac{\sqrt{3}}{2})+(-\sqrt{3})(\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}=0$$

۱۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$y=a+b\sin(\frac{\pi}{2}+x)=a+b\cos x$$

پس ماکزیمم تابع برابر $a+|b|$ است که با توجه به شکل برابر ۳ است. از طرف دیگر نمودار تابع از نقطهٔ $(\frac{7\pi}{3},0)$ عبور می‌کند. پس

$$a+b\cos\frac{7\pi}{3}=0\Rightarrow a+b\cos(2\pi+\frac{\pi}{3})=0\Rightarrow a+b\cos\frac{\pi}{3}=0$$

$$a+\frac{b}{2}=0\Rightarrow a=-\frac{b}{2}$$

بنابراین

$$a+|b|=3\Rightarrow-\frac{b}{2}+|b|=3$$

با توجه به نمودار تابع واضح است که b مقداری منفی است، پس

$$-\frac{b}{2}-b=3\Rightarrow b=-2$$

۱۷- گزینهٔ ۴ حداکثر مقدار و حداقل مقدار تابع $y=a\sin(bx)+c$ به‌ترتیب برابر $|a|+c$ و $-|a|+c$ است که روی شکل برابر ۱ و ۳− نشان داده شده است. پس

$$\begin{cases}|a|+c=1\\ -|a|+c=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=-1\\ |a|=2\end{cases}$$

از طرف دیگر، دورهٔ تناوب تابع برابر $\frac{2\pi}{|b|}$ است که روی شکل برابر $\frac{9\pi}{2}-(-\frac{3\pi}{2})=6\pi$ نشان داده شده است. پس

$$\frac{2\pi}{|b|}=6\pi\Rightarrow|b|=\frac{1}{3}$$

پس

$$|\frac{a}{b}|=\frac{2}{\frac{1}{3}}=6\Rightarrow\frac{a}{b}=\pm6$$

ولی چون نمودار رسم شده در یک همسایگی راست صفر نزولی است، a و b باید غیرهم‌علامت باشند، پس $\frac{a}{b}=-6$.

۱۸- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin(2x-\frac{\pi}{4})=\cos(x+\frac{\pi}{4})\Rightarrow\sin(2x-\frac{\pi}{4})=\sin(\frac{\pi}{2}-x-\frac{\pi}{4})$$

$$\sin(2x-\frac{\pi}{4})=\sin(\frac{\pi}{4}-x)$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases}2x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{4}-x\\ 2x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{4}+x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\\ x=(2k+1)\pi\end{cases}\quad(k\in\mathbb{Z})$$

چون شرط $x\neq k\pi$ قرار داده شده است، پس $x=(2k+1)\pi$ قابل قبول نیست.

۱۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که در یک همسایگی چپ نقطهٔ $x=-2$ تابع $y=[x]$ با تابع $y=-3$ برابر است. بنابراین

$$\lim_{x\to(-2)^-}\frac{[x]+3}{x+2}=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{-3+3}{x+2}=\lim_{x\to(-2)^-}0=0$$

۲۰- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax-\sqrt[3]{x^2-1}}{4x^n-12}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{4x^n}=\frac{1}{6}\Rightarrow\begin{cases}n=1\\ a=\frac{2}{3}\end{cases}$$

بنابراین **راه‌حل اول**

$$\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}\frac{\frac{2}{3}x-\sqrt[3]{x^2-1}}{4x-12}=\frac{1}{12}\lim_{x\to3}\frac{2x-3\sqrt[3]{x^2-1}}{x-3}$$

$$=\frac{1}{12}\lim_{x\to3}\left(\frac{8x^3-27(x^2-1)}{x-3}\times\frac{1}{4x^2+6x\sqrt[3]{x^2-1}+9\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{12}\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(8x^2-3x-9)}{x-3}$$

$$\times\lim_{x\to3}\frac{1}{4x^2+6x\sqrt[3]{x^2-1}+9\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$$

$$=\frac{1}{12}\lim_{x\to3}(8x^2-3x-9)\times\frac{1}{36+36+36}$$

$$=\frac{1}{12}\times(72-9-9)\times\frac{1}{36\times3}=\frac{1}{24}$$

راه‌حل دوم به کمک قاعدهٔ هوپیتال مقدار حد خواسته شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}\frac{\frac{2}{3}x-\sqrt[3]{x^2-1}}{4x-12}=\lim_{x\to3}\frac{\frac{2}{3}-\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}}{4}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}-\frac{2\times3}{3\times4}}{4}=\frac{1}{24}$$

توجه این سؤال خارج از مباحث کتاب درسی رشتهٔ تجربی است. چون حد تابع رادیکالی در بی‌نهایت در کتاب درسی رشتهٔ تجربی وجود ندارد.

۲۱- گزینهٔ ۳ چون تابع f در نقطهٔ $x=-2$ مشتق‌پذیر است، پس در این نقطه پیوسته نیز هست. بنابراین

$$f'_-(-2)=f'_+(-2),\quad f(-2)=\lim_{x\to(-2)^-}f(x)=\lim_{x\to(-2)^+}f(x)$$

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{5-2x} & x\le-2\\ -\frac{1}{2}x^2+bx+c & x>-2\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{\sqrt{5-2x}} & x\le-2\\ -x+b & x>-2\end{cases}$$

$$\begin{cases}f'_-(-2)=-\frac{1}{\sqrt{5+4}}=-\frac{1}{3}\\ f'_+(-2)=-(-2)+b=b+2\end{cases}\Rightarrow b+2=-\frac{1}{3}\Rightarrow b=-\frac{7}{3}$$

$$\begin{cases}f(-2)=\sqrt{5+4}=3\\ \lim_{x\to(-2)^+}f(x)=\lim_{x\to(-2)^+}\left(-\frac{1}{2}x^2+bx+c\right)=-2-2b+c=c+\frac{8}{3}\end{cases}$$

$$c+\frac{8}{3}=3\Rightarrow c=\frac{1}{3}$$

۲۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\left(\frac{\sqrt[3]{x^2+2x}}{x^2-x}\right)^3=\frac{x^2+2x}{(x^2-x)^3}=\frac{x(x+2)}{x^3(x-1)^3}=\frac{x+2}{x^2(x-1)^3}$$

بنابراین

$$f'(x)=\frac{x^2(x-1)^3-(2x(x-1)^3+3(x-1)^2x^2)(x+2)}{(x^2(x-1)^3)^2}$$

در نتیجه

$$f'(2)=\frac{4\times1^3-(4(1)^3+3(1)^2\times4)(4)}{(4(1)^3)^2}=-\frac{15}{4}$$

۲۳- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=x+\sqrt{4x-x^2}\Rightarrow f'(x)=1+\frac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}}=\frac{\sqrt{4x-x^2}+2-x}{\sqrt{4x-x^2}}$$

واضح است که $x=0$ و $x=4$ نقاط بحرانی تابع‌اند ولی چون تابع f در یک همسایگی آن‌ها تعریف نمی‌شود، پس این نقاط اکسترمم نسبی تابع نیستند. بنابراین باید معادلهٔ $f'(x)=0$ را حل کنیم تا طول نقاط اکسترمم نسبی به‌دست آید:

$$\sqrt{4x-x^2}+2-x=0\Rightarrow\sqrt{4x-x^2}=x-2,\quad x>2$$

$$4x-x^2=x^2-4x+4\Rightarrow2x^2-8x+4=0$$

$$x^2-4x+2=0\Rightarrow x=2+\sqrt{2},\ x=2-\sqrt{2}\ (\text{غ.ق.ق})$$

بنابراین نقطهٔ $A(2+\sqrt{2},2+2\sqrt{2})$ نقطهٔ اکسترمم (ماکزیمم) نسبی تابع f است که فاصلهٔ آن از نیمساز ناحیهٔ اول برابر است با

$$\frac{|2+2\sqrt{2}-(2+\sqrt{2})|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$$

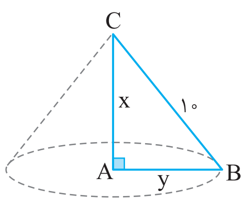
۲۴- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $x^2+y^2=10$. پس $y^2=10-x^2$.
اگر مثلث را حول ضلع AC دوران دهیم، مخروطی به‌دست می‌آید که شعاع قاعدهٔ آن برابر y و ارتفاع آن برابر x است، پس حجم حاصل برابر $V=\frac{\pi}{3}y^2x$ خواهد بود. بنابراین می‌خواهیم حداکثر مقدار تابع $V(x)=\frac{\pi}{3}x(10-x^2)$ حاصل شود.

$$V(x)=\frac{\pi}{3}(10x-x^3)\Rightarrow V'(x)=\frac{\pi}{3}(10-3x^2)$$

$$V'(x)=0\Rightarrow x=\sqrt{\frac{10}{3}}\Rightarrow y^2=10-\frac{10}{3}\Rightarrow y=\sqrt{2}\sqrt{\frac{10}{3}}$$

بنابراین

$$\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{\frac{10}{3}}}{\sqrt{\frac{10}{3}}}=\frac{\sqrt{2}}{1}$$



۲۵- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** فرض کنید فرد A و فرد B نخواهند با هم در مهمانی شرکت کنند. تعداد حالت‌های مورد نظر به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند

$$\underbrace{\binom{7}{4}}_{\text{A دعوت شود و B دعوت نشود}}+\underbrace{\binom{7}{4}}_{\text{B دعوت شود و A دعوت نشود}}+\underbrace{\binom{7}{5}}_{\text{A و B هیچ کدام دعوت نشوند}}=2\times35+21=91$$

راه‌حل دوم تعداد حالت‌هایی که دو فرد A و B با هم به مهمانی دعوت می‌شوند، برابر $\binom{7}{3}$ است و تعداد کل حالت‌های دعوت ۵ نفر از ۹ نفر برابر $\binom{9}{5}$ است، پس تعداد حالت‌هایی که دو نفر A و B با هم به مهمانی دعوت نشوند، برابر است با

$$\binom{9}{5}-\binom{7}{3}=126-35=91$$

۲۶- گزینهٔ ۳ تعداد حالت‌های قرار گرفتن ۸ کتاب در کنار یکدیگر برابر $8!$ است و تعداد حالت‌هایی که ۳ کتاب انگلیسی کنار هم و ۵ کتاب فارسی کنار هم قرار می‌گیرند، برابر $2\times5!\times3!$ است. پس احتمال پیشامد مطلوب برابر است با

$$\frac{2\times5!\times3!}{8!}=\frac{1}{28}$$

۲۷- گزینهٔ ۲ ابتدا ۱۰ واحد از داده‌ها کم می‌کنیم، سپس میانگین و انحراف معیار داده‌های جدید را به‌دست می‌آوریم. توجه کنید که میانگین داده‌های اصلی ۱۰ واحد بیشتر از میانگین داده‌های جدید خواهد بود ولی انحراف معیار تغییری نخواهد کرد. ۰,۰,۰,۰,۰,۱,۱,۱,۱,۴,۴,۴,۴,۴,۴,۴

$$\bar{x}=\frac{4\times1+7\times4}{16}=2$$

$$\sigma^2=\frac{5(0-2)^2+4(1-2)^2+7(4-2)^2}{16}=\frac{13}{4}\Rightarrow\sigma=\frac{\sqrt{13}}{2}$$

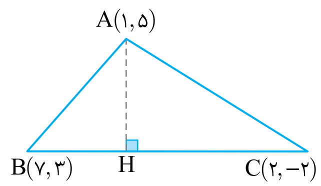
بنابراین میانگین داده‌های اصلی برابر ۱۲ و انحراف معیار آن‌ها برابر $\frac{\sqrt{13}}{2}$ است و در نتیجه ضریب تغییرات آن‌ها برابر است با $cv=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{\frac{\sqrt{13}}{2}}{12}=\frac{\sqrt{13}}{24}\simeq 0/15$.

۲۸- گزینهٔ ۴ ابتدا معادلهٔ خط BC را به‌دست می‌آوریم:

$$m_{BC}=\frac{3-(-2)}{7-2}=1$$

$$y-y_B=m_{BC}(x-x_B)\Rightarrow y-3=1\times(x-7)$$

پس معادلهٔ خط BC به‌صورت $x-y-4=0$ است. طول ارتفاع AH برابر فاصلهٔ نقطهٔ A از خط BC است که برابر است با $\frac{|1-5-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$.

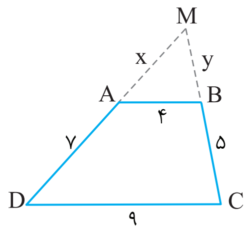


۲۹- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** مطابق شکل زیر و با استفاده از تعمیم قضیهٔ تالس می‌توان نوشت

$$\triangle MDC: AB||DC\Rightarrow\frac{MA}{MD}=\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{DC}\Rightarrow\frac{x}{x+7}=\frac{y}{y+5}=\frac{4}{9}$$

بنابراین $9x=4x+28\Rightarrow x=\frac{28}{5},\quad 9y=4y+20\Rightarrow y=4$

بنابراین محیط مثلث MAB برابر است با $x+y+4=\frac{28}{5}+4+4=13/6$.



راه‌حل دوم چون $AB||DC$ ، پس بنابر قضیهٔ اساسی تشابه، مثلث‌های MAB و MDC متشابه‌اند. پس نسبت محیط‌های آن‌ها برابر نسبت تشابه آن‌هاست.

$$\frac{\text{محیط}(MAB)}{\text{محیط}(MDC)}=\frac{AB}{DC}=\frac{4}{9}$$

$$\xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{تفضیل در}}\frac{\text{محیط}(MAB)}{\text{محیط}(MDC)-\text{محیط}(MAB)}$$

$$=\frac{4}{9-4}\Rightarrow\frac{\text{محیط}(MAB)}{AD+DC+BC-AB}=\frac{4}{5}$$

$$\text{محیط}(MAB)=\frac{4}{5}(7+9+5-4)=\frac{4}{5}\times17=13/6$$

توجه برخلاف ادعای سؤال، چهارضلعی ABCD یک ذوزنقه است. در واقع، اگر ABCD متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه $AB=DC$ و $AD=BC$ که چنین نیست!

۳۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، $BC=\sqrt{3+4}=\sqrt{7}$

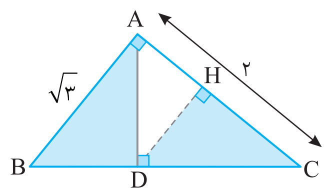
اکنون بنابر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC،

$$BD\times BC=AB^2\Rightarrow BD\sqrt{7}=\sqrt{3}^2\Rightarrow BD=\frac{3}{\sqrt{7}}$$

در نتیجه $DC=BC-BD=\sqrt{7}-\frac{3}{\sqrt{7}}=\frac{4}{\sqrt{7}}$

اکنون توجه کنید که مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABD و CDH متشابه هستند (زز) و نسبت مساحت آن‌ها برابر مربع نسبت اندازهٔ اضلاع آن‌هاست:

$$\frac{S_{CDH}}{S_{ABD}}=\left(\frac{CD}{AB}\right)^2=\left(\frac{\frac{4}{\sqrt{7}}}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{\frac{16}{7}}{3}=\frac{16}{21}$$



۳۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{\sqrt{27}-1}{4+\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}-1}{4+\sqrt{3}}\times\frac{4-\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}=\frac{12\sqrt{3}-9-4+\sqrt{3}}{16-3}$$

$$=\frac{13\sqrt{3}-13}{13}=\sqrt{3}-1$$

همچنین $(2-\sqrt{3})^{-1}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$

بنابراین $\frac{\sqrt{27}-1}{4+\sqrt{3}}+(2-\sqrt{3})^{-1}=\sqrt{3}-1+2+\sqrt{3}=2\sqrt{3}+1$

۳۲- گزینهٔ ۴ جملات سوم، هفتم و شانزدهم دنبالهٔ حسابی را به ترتیب a، $a+4d$ و $a+13d$ در نظر می‌گیریم. چون این اعداد جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی‌اند، پس

$$a(a+13d)=(a+4d)^2 \Rightarrow a^2+13ad=a^2+8ad+16d^2$$

$$5ad=16d^2 \Rightarrow a=\frac{16}{5}d$$

(توجه کنید که $d\neq 0$. چون در غیر این صورت، $q=1$ که در گزینه‌ها وجود ندارد.) بنابراین قدرنسبت دنبالهٔ هندسی برابر است با

$$r=\frac{a+4d}{a}=\frac{\frac{16}{5}d+4d}{\frac{16}{5}d}=\frac{36d}{16d}=\frac{9}{4}$$

۳۳- گزینهٔ ۱ چون باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x-4$ و $x+2$ به ترتیب ۳ و ۱ است، پس $p(4)=3$ و $p(-2)=1$. باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $A(x)=p(x^2)+4p(-x)$ بر $x-2$ برابر $A(2)$ است و برابر است با $A(2)=p(4)+4p(-2)=3+4\times1=7$

۳۴- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** چون معادله دو جواب مثبت دارد، پس شرایط $\Delta>0$، $\frac{c}{a}>0$ و $-\frac{b}{a}>0$ برقرار هستند. در اینجا $a=2$، $b=m$ و $c=m+6$. پس

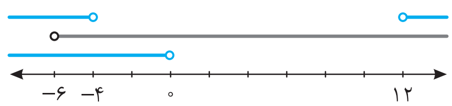
$$\Delta=b^2-4ac=m^2-4\times2(m+6)>0 \Rightarrow m^2-8m-48>0$$

$$(m-12)(m+4)>0 \Rightarrow m>12 \text{ یا } m<-4 \quad (1)$$

$$\frac{c}{a}>0 \Rightarrow \frac{m+6}{2}>0 \Rightarrow m>-6 \quad (2)$$

$$-\frac{b}{a}>0 \Rightarrow -\frac{m}{2}>0 \Rightarrow m<0 \quad (3)$$

با توجه به شکل زیر، اشتراک مجموعهٔ جواب‌های (۱)، (۲) و (۳) به صورت $m\in(-6,-4)$ است.



راه‌حل دوم توجه کنید که به ازای $m=-5$ معادله به صورت $2x^2-5x+1=0$ در می‌آید که به وضوح دو جواب مثبت دارد چون $\Delta=17>0$، $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}>0$ و $-\frac{b}{a}=\frac{5}{2}>0$. پس گزینه‌های (۱) و (۲) جواب نیستند. از طرف دیگر به ازای $m=-1$ معادله به صورت $2x^2-x+5=0$ در می‌آید که جواب ندارد، زیرا $\Delta=-39<0$. پس گزینهٔ (۳) هم جواب نیست و گزینهٔ (۴) جواب است.

۳۵- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{2x-1}{x+1}<3 \Rightarrow \frac{2x-1-3x-3}{x+1}<0 \Rightarrow \frac{x+4}{x+1}>0$$

$$x\in(-\infty,-4)\cup(-1,+\infty) \quad (1)$$

$$\frac{2x-1}{x+1}>-1 \Rightarrow \frac{2x-1+x+1}{x+1}>0 \Rightarrow \frac{3x}{x+1}>0$$

$$x\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty) \quad (2)$$

از اشتراک (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $x\in(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)=\mathbb{R}-[-4,0]$

راه‌حل دوم نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$-1<\frac{2x-1}{x+1}<3 \Rightarrow -2<\frac{2x-1}{x+1}-1<2 \Rightarrow -2<\frac{x-2}{x+1}<2$$

$$\left|\frac{x-2}{x+1}\right|<2 \Rightarrow |x-2|<2|x+1| \Rightarrow x^2-4x+4<4x^2+8x+4$$

$$x^2+4x>0 \Rightarrow x\in(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$$

راه‌حل سوم واضح است که $x=0$ در نامعادله صدق نمی‌کند، پس گزینهٔ (۴) جواب نیست. از طرف دیگر، $x=-5$ در نامعادله صدق می‌کند، پس گزینه‌های (۱) و (۲) جواب درست نیستند، بنابراین گزینهٔ (۳) جواب است.

۳۶- گزینهٔ ۲ چون رأس سهمی نقطهٔ $(-1,9)$ است، پس معادلهٔ آن به صورت $y=a(x+1)^2+9$ است. این سهمی از نقطهٔ $(3,1)$ می‌گذرد، پس

$$1=a(3+1)^2+9 \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

پس معادلهٔ سهمی به صورت $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2+9$ است که از نقطهٔ $(5,-9)$ می‌گذرد:

$$-\frac{1}{2}(5+1)^2+9=-18+9=-9$$

۳۷- گزینهٔ ۱ اگر نمودار تابع $y=x^2-2x\,,(x>1)$ را نسبت به محور x قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-x^2+2x$ به‌دست می‌آید. اگر نمودار اخیر را شانزده واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $y=-x^2+2x+16$ به‌دست می‌آید. نقطهٔ برخورد نمودار تابع اخیر و نمودار تابع اولیه به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$x^2-2x=-x^2+2x+16 \Rightarrow x^2-2x-8=0$$

$$(x-4)(x+2)=0 \Rightarrow x=4, x=-2 \quad (\text{غ.ق.ق})$$

بنابراین باید فاصلهٔ نقطهٔ $A(4,8)$ از مبدأ مختصات را پیدا کنیم که برابر است با

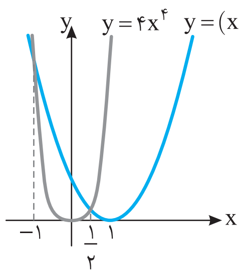
$$OA=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$$

۳۸- گزینهٔ ۲ در نقاطی که طول آن‌ها عضو مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $(x-1)^2>4x^4$ باشد، نمودار تابع $y=(x-1)^2$ بالاتر از نمودار تابع $y=4x^4$ قرار دارد:

$$4x^4<(x-1)^2 \Rightarrow (2x)^2-(x-1)^2<0 \Rightarrow (2x^2+x-1)(2x^2-x+1)<0$$

عبارت $2x^2-x+1$ همواره مثبت است، زیرا $\Delta=1-8<0$. بنابراین باید نامعادلهٔ $2x^2+x-1<0$ را حل کنیم: $(x+1)(2x-1)<0 \Rightarrow -1<x<\frac{1}{2}$

در بازهٔ $(-1,\frac{1}{2})$ چنین اتفاقی می‌افتد. در نتیجه بیشترین مقدار $b-a$ برابر $\frac{1}{2}-(-1)=\frac{3}{2}$ است. توجه کنید که نمودار تابع‌های $y=(x-1)^2$ و $y=4x^4$ به صورت زیر است:

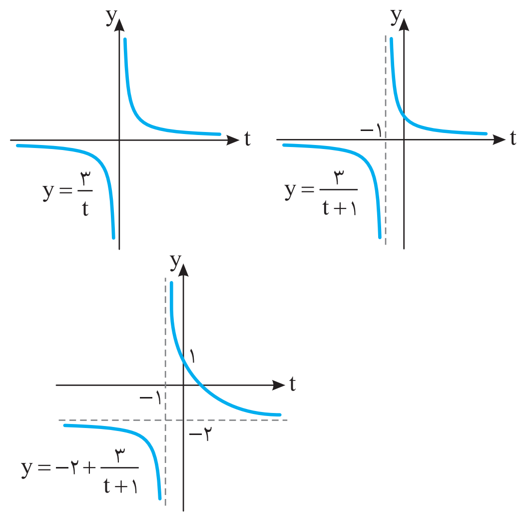


۳۹- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$۰\le x-[x]<۱\Rightarrow -۱<[x]-x\le ۰\Rightarrow -۱<f(x)\le ۰$$

بنابراین تابع gof با تابع $y=\frac{۱-۲t}{t+۱}$ که دامنهٔ آن بازهٔ $(-۱,۰]$ است، برابر است. برد این تابع را به‌دست می‌آوریم:

راه‌حل اول نمودار تابع به صورت زیر رسم می‌شود: $y=\frac{۱-۲t}{t+۱}=-۲+\frac{۳}{t+۱}$



واضح است که برد تابع gof بازهٔ $[۱,+\infty)$ است.

راه‌حل دوم به کمک نابرابری‌ها برد تابع را به‌دست می‌آوریم: $y=-۲+\frac{۳}{t+۱}$

$$-۱<t\le ۰\Rightarrow ۰<t+۱\le ۱\Rightarrow \frac{۱}{t+۱}\ge ۱\Rightarrow \frac{۳}{t+۱}\ge ۳\Rightarrow -۲+\frac{۳}{t+۱}\ge ۱\Rightarrow y\ge ۱$$

بنابراین برد تابع بازهٔ $[۱,+\infty)$ است. توجه کنید که به ازای هر $y\ge ۱$ مقداری مانند t وجود دارد که $y=-۲+\frac{۳}{t+۱}$. این مقدار به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$y+۲=\frac{۳}{t+۱}\Rightarrow t+۱=\frac{۳}{y+۲}\Rightarrow t=-۱+\frac{۳}{y+۲}$$

راه‌حل سوم تابع $g(t)=\frac{۱-۲t}{t+۱}$ روی بازهٔ $(-۱,۰]$ پیوسته و نزولی است. بنابراین برد آن برابر است با $[g(۰),\lim\limits_{t\to(-۱)^+}g(t))=[۱,+\infty)$

۴۰- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$f(x)=x+۲\sqrt{x}=(\sqrt{x}+۱)^۲-۱$$

بنابراین تابع وارون تابع f به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$y=(\sqrt{x}+۱)^۲-۱\Rightarrow(\sqrt{x}+۱)^۲=y+۱\quad (y\ge -۱)$$

$$\sqrt{x}+۱=\sqrt{y+۱}\Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{y+۱}-۱$$

$$x=(\sqrt{y+۱}-۱)^۲\Rightarrow f^{-۱}(x)=(\sqrt{x+۱}-۱)^۲$$

بنابراین

$$g(x)=f^{-۱}(x)=(\sqrt{x+۱}-۱)^۲\quad (x\ge -۱)$$

$$g(۳)+g(۱۵)=f^{-۱}(۳)+f^{-۱}(۱۵)=۱+۹=۱۰$$

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$f(x)=x+۲\sqrt{x}\Rightarrow\begin{cases}f(۱)=۳\Rightarrow f^{-۱}(۳)=۱\\ f(۹)=۱۵\Rightarrow f^{-۱}(۱۵)=۹\end{cases}$$

بنابراین

$$g(x)=f^{-۱}(x)\Rightarrow g(۳)+g(۱۵)=f^{-۱}(۳)+f^{-۱}(۱۵)=۱+۹=۱۰$$

۴۱- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** ابتدا تابع وارون تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$y=x-\frac{۱}{۲x},\quad x>۰$$

$$y=\frac{۲x^۲-۱}{۲x}\Rightarrow ۲xy=۲x^۲-۱\Rightarrow ۲x^۲-۲yx-۱=۰$$

$$\begin{cases}x=\frac{۲y+\sqrt{۴y^۲+۸}}{۴}\\ x=\frac{۲y-\sqrt{۴y^۲+۸}}{۴}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{y+\sqrt{y^۲+۲}}{۲}\\ x=\frac{y-\sqrt{y^۲+۲}}{۲}<۰\ (\text{غ.ق.ق})\end{cases}$$

بنابراین

$$f^{-۱}(x)=\frac{x+\sqrt{x^۲+۲}}{۲}$$

طول نقطهٔ برخورد نمودار تابع $f^{-۱}$ با نیمساز ناحیهٔ دوم (خط $y=-x$) از حل معادلهٔ $f^{-۱}(x)=-x$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{x+\sqrt{x^۲+۲}}{۲}=-x\Rightarrow\sqrt{x^۲+۲}=-۳x\quad (x<۰)$$

$$x^۲+۲=۹x^۲\Rightarrow x^۲=\frac{۱}{۴}\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\ (\text{غ.ق.ق}),\ x=-\frac{۱}{۲}$$

راه‌حل دوم فرض کنید نقطهٔ $(a,-a)$ نقطهٔ برخورد نمودار تابع $f^{-۱}$ با خط $y=-x$ (نیمساز ناحیهٔ دوم) باشد $(a<۰)$. بنابراین

$$f^{-۱}(a)=-a\Rightarrow f(-a)=a\Rightarrow -a-\frac{۱}{-۲a}=a$$

$$۲a=\frac{۱}{۲a}\Rightarrow ۴a^۲=۱\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

۴۲- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که $\log_۳ ۲=\frac{۵}{۸}$، پس $\log_۲ ۳=\frac{۸}{۵}$. بنابراین

$$\log_{۱۸}۸=\frac{\log_۲ ۸}{\log_۲ ۱۸}=\frac{۳\log_۲ ۲}{\log_۲ ۹+\log_۲ ۲}=\frac{۳}{۲\log_۲ ۳+۱}=\frac{۳}{۲\times\frac{۸}{۵}+۱}=\frac{۵}{۷}$$

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$\log_۳ ۲=\frac{۵}{۸}\Rightarrow ۳^{\frac{۵}{۸}}=۲\Rightarrow ۳^۵=۲^۸\Rightarrow ۳^{۱۰}=۲^{۱۶}$$

(دقت کنید که این تساوی به صورت تقریبی داده شده است و تساوی درستی نیست.)

بنابراین

$$\log_{۱۸}۸=\log_{۳^۲\times ۲}۲^۳=۳\log_{۳^۲\times ۲}۲=۳\times ۵\log_{۳^{۱۰}\times ۲^۵}۲$$

$$=۱۵\log_{۲^{۱۶}\times ۲^۵}۲=۱۵\log_{۲^{۲۱}}۲=\frac{۱۵}{۲۱}\log_۲ ۲=\frac{۵}{۷}$$

۴۳- گزینهٔ ۱ با توجه به نمودار تابع واضح است که $f(۰)=-۶$ و $f(\frac{۱}{۲})=۰$. بنابراین

$$f(x)=-۹+(\frac{۱}{۳})^{ax+b}$$

$$\begin{cases} f(۰)=-۹+(\frac{۱}{۳})^{b}=-۶ \\ f(\frac{۱}{۲})=-۹+(\frac{۱}{۳})^{\frac{۱}{۲}a+b}=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳^{-b}=۳\Rightarrow b=-۱ \\ ۳^{-\frac{a}{۲}+۱}=۹\Rightarrow -\frac{a}{۲}+۱=۲\Rightarrow a=-۲ \end{cases}$$

پس $f(x)=-۹+(\frac{۱}{۳})^{-۲x-۱}\Rightarrow f(۲)=-۹+(\frac{۱}{۳})^{-۵}=۲۳۴$

۴۴- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** تابع وارون تابع $f(x)=\dfrac{۲^x-(\frac{۱}{۲})^x}{۲}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{۲^x-(\frac{۱}{۲})^x}{۲}\Rightarrow ۲y=۲^x-\frac{۱}{۲^x}$$

اگر فرض کنیم $t=۲^x>۰$، آن‌گاه

$$۲y=t-\frac{۱}{t}\Rightarrow t^۲-۲yt-۱=۰\Rightarrow \begin{cases} t=y+\sqrt{y^۲+۱} \\ t=y-\sqrt{y^۲+۱}<۰ \ \text{(غ.ق.ق)} \end{cases}$$

$$۲^x=y+\sqrt{y^۲+۱}\Rightarrow x=\log_۲(y+\sqrt{y^۲+۱})$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=\log_۲(x+\sqrt{x^۲+۱})\Rightarrow f^{-۱}(۲)=\log_۲(۲+\sqrt{۵})$

راه‌حل دوم فرض کنید $f^{-۱}(۲)=a$. پس $f(a)=۲$ و در نتیجه

$$\frac{۲^a-(\frac{۱}{۲})^a}{۲}=۲\Rightarrow ۲^a-\frac{۱}{۲^a}=۴\Rightarrow (۲^a)^۲-۴\times ۲^a-۱=۰$$

اگر فرض کنیم $۲^a=b>۰$، آن‌گاه

$$b^۲-۴b-۱=۰\Rightarrow b=۲+\sqrt{۵}\,,\, b=۲-\sqrt{۵}<۰ \ \text{(غ.ق.ق)}$$

بنابراین $۲^a=۲+\sqrt{۵}\Rightarrow a=\log_۲(۲+\sqrt{۵})$

۴۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\tan ۲۸۵^\circ=\tan(۲۷۰^\circ+۱۵^\circ)=-\cot ۱۵^\circ$$

$$\tan(-۱۶۵^\circ)=\tan(-۱۸۰^\circ+۱۵^\circ)=\tan ۱۵^\circ$$

$$\sin ۱۰۹۵^\circ=\sin(۱۰۸۰^\circ+۱۵^\circ)=\sin(۶\times ۱۸۰^\circ+۱۵^\circ)=\sin ۱۵^\circ$$

$$\cos ۲۵۵^\circ=\cos(۲۷۰^\circ-۱۵^\circ)=-\sin ۱۵^\circ$$

بنابراین

$$\tan ۲۸۵^\circ \tan(-۱۶۵^\circ)-\sin ۱۰۹۵^\circ \cos ۲۵۵^\circ$$
$$=(-\cot ۱۵^\circ)(\tan ۱۵^\circ)-(\sin ۱۵^\circ)(-\sin ۱۵^\circ)$$
$$=-۱+\sin^۲ ۱۵^\circ=-\cos^۲ ۱۵^\circ$$

۴۶- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل معلوم است که نمودار تابع $f(x)=a+b\sin(x+\frac{\pi}{۳})$ از نقطهٔ $(\frac{\pi}{۲},۰)$ می‌گذرد و حداکثر مقدار آن برابر $\frac{۳}{۲}$ است. پس

$$f(\frac{\pi}{۲})=۰\Rightarrow a+b\sin(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۳})=۰\Rightarrow a+b\cos\frac{\pi}{۳}=۰\Rightarrow a+\frac{b}{۲}=۰$$

$$a=-\frac{b}{۲}\Rightarrow a+|b|=\frac{۳}{۲}\Rightarrow -\frac{b}{۲}+|b|=\frac{۳}{۲}$$

همچنین با توجه به وضعیت نمودار واضح است که b باید منفی باشد. پس

$$-\frac{b}{۲}-b=\frac{۳}{۲}\Rightarrow b=-۱\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

۴۷- گزینهٔ ۱ با توجه به نمودار واضح است که کمترین مقدار تابع برابر -۳ است، پس $-|a|+c=-۳$. از طرف دیگر نمودار تابع از نقطهٔ $(\frac{\pi}{۶},۱)$ عبور می‌کند، پس $۱=a\sin(\frac{b\pi}{۶})+c$. همچنین دورهٔ تناوب تابع برابر $\frac{۵\pi}{۶}-\frac{\pi}{۶}=\frac{۲\pi}{۳}$ است. پس $\frac{۲\pi}{۳}=\frac{۲\pi}{|b|}$ و در نتیجه $|b|=۳$. با توجه به نمودار معلوم است که a و b باید هم‌علامت باشند، پس دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول اگر a و b مثبت باشند، آن‌گاه $b=۳$ و در نتیجه

$$\begin{cases} -a+c=-۳ \\ a\sin\frac{\pi}{۲}+c=۱ \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} -a+c=-۳ \\ a+c=۱ \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} a=۲ \\ c=-۱ \end{cases}$$

حالت دوم اگر a و b منفی باشند، آن‌گاه $b=-۳$ و در نتیجه

$$\begin{cases} a+c=-۳ \\ a\sin(\frac{-\pi}{۲})+c=۱ \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} a+c=-۳ \\ -a+c=۱ \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} a=-۲ \\ c=-۱ \end{cases}$$

۴۸- گزینهٔ ۳ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$۴\sin ۳x\cos ۳x=۱\Rightarrow ۲\sin ۶x=۱\Rightarrow \sin ۶x=\sin\frac{\pi}{۶}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} ۶x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶} \\ ۶x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶} \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۳۶} \\ x=\frac{k\pi}{۳}+\frac{۵\pi}{۳۶} \end{cases},\ k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[۰,\frac{\pi}{۲})$ به‌ازای $k=۰$ و $k=۱$ حاصل می‌شوند:

$$x=\frac{\pi}{۳۶}, x=\frac{۵\pi}{۳۶}, x=\frac{۱۳\pi}{۳۶}, x=\frac{۱۷\pi}{۳۶}$$

بنابراین معادله در بازهٔ $[۰,\frac{\pi}{۲}]$ چهار جواب دارد.

۴۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که اگر $x\neq\frac{\pi}{۲}$، آن‌گاه

$$\frac{۲\sin^۲ x-\sin x-۱}{\cos^۲ x}=\frac{(\sin x-۱)(۲\sin x+۱)}{(۱-\sin x)(۱+\sin x)}=\frac{-۲\sin x-۱}{۱+\sin x}$$

بنابراین

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{-۲\sin x-۱}{۱+\sin x}=\frac{-۲-۱}{۱+۱}=-\frac{۳}{۲}$$

برای اینکه تابع f در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۲}$ پیوسته باشد، باید

$$f(\frac{\pi}{۲})=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} f(x)\Rightarrow a=-\frac{۳}{۲}$$

۵۰- گزینهٔ ۲ چون حد تابع f در بی‌نهایت برابر ۲ شده است، پس درجهٔ چندجمله‌ای صورت کسر $f(x)$ با درجهٔ چندجمله‌ای مخرج آن برابر است. اکنون دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد.

حالت اول $a=0$ و $n=2$. در این صورت

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-6x^2+1}{7x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2}{7x^2}=-\frac{2}{7}$$

بنابراین حالت اول قابل قبول نیست.

حالت دوم $n=3$ و $a\neq 0$. در این صورت

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-6x^2+1}{ax^3+7x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3}{ax^3}=\frac{4}{a}=2\Rightarrow a=2$$

بنابراین

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x^3-6x^2+1}{2x^3+7x^2-2}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(2x-1)(2x^2-2x-1)}{(2x-1)(x^2+4x+2)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x^2-2x-1}{x^2+4x+2}=\frac{-\frac{3}{2}}{\frac{17}{4}}=-\frac{6}{17}$$

۵۱- گزینهٔ ۴ سؤال با این ادبیات دارای بی‌شمار جواب است. کافی است معادلهٔ دو خط را که از نقطهٔ $A(2,m)$ می‌گذرند، بنویسیم که هر کدام بر نمودار یکی از تابع‌های داده شده مماس باشند. بی‌شمار نقطهٔ A مانند می‌توان پیدا کرد و بی‌شمار مقدار برای a و b وجود دارد. ولی احتمالاً منظور طراح سؤال این بوده که نمودار دو تابع $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$ و $g(x)=ax^2+bx$ از نقطهٔ $(2,m)$ بگذرند و یک خط در این نقطه بر هر دو نمودار مماس باشد.

در این صورت

$$f(2)=g(2)\Rightarrow 4=4a+2b\Rightarrow 4a=4-2b$$
$$f'(2)=g'(2)\Rightarrow -3=4a+b\Rightarrow 4a=-3-b$$

بنابراین $4-2b=-3-b\Rightarrow b=7$

توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x+2}{x-1}\Rightarrow f'(x)=\frac{-3}{(x-1)^2}$$
$$g(x)=ax^2+bx\Rightarrow g'(x)=2ax+b$$

۵۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\sqrt[3]{\left(\frac{2x-x^2}{3x+5}\right)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{2\left(\frac{2x-x^2}{3x+5}\right)'}{3\sqrt[3]{\frac{2x-x^2}{3x+5}}}$$

از طرف دیگر،

$$y=\frac{2x-x^2}{3x+5}\Rightarrow y'=\frac{(2-2x)(3x+5)-3(2x-x^2)}{(3x+5)^2}$$

بنابراین

$$f'(x)=\frac{2\left((2-2x)(3x+5)-3(2x-x^2)\right)}{3(3x+5)^2\sqrt[3]{\frac{2x-x^2}{3x+5}}}$$

$$f'(-2)=\frac{2\left((2+4)(-6+5)-3(-4-4)\right)}{3(-6+5)^2\sqrt[3]{\frac{-4-4}{-6+5}}}=6$$

۵۳- گزینهٔ ۱ ابتدا نقاط بحرانی تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x^2+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{(2x+2)(x^2+1)-2x(x^2+2x-3)}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{-2(x^2-4x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x^2-4x-1=0\Rightarrow x=2+\sqrt{5},\ x=2-\sqrt{5}$$

اکنون به جدول تعیین علامت $f'(x)$ توجه کنید:

x	$-\infty$		$2-\sqrt{5}$		$2+\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
			min		max		

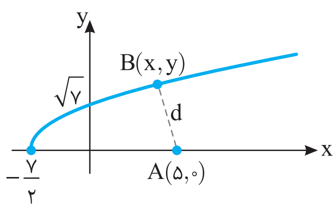
بنابراین $x=2+\sqrt{5}$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است. مقدار ماکزیمم نسبی تابع f برابر است با

$$f(2+\sqrt{5})=\frac{(2+\sqrt{5})^2+2(2+\sqrt{5})-3}{(2+\sqrt{5})^2+1}=\frac{4+5+4\sqrt{5}+4+2\sqrt{5}-3}{4+5+4\sqrt{5}+1}$$
$$=\frac{6\sqrt{5}+10}{4\sqrt{5}+10}=\frac{3\sqrt{5}+5}{2\sqrt{5}+5}\times\frac{2\sqrt{5}-5}{2\sqrt{5}-5}$$
$$=\frac{30-15\sqrt{5}+10\sqrt{5}-25}{20-25}=\frac{5-5\sqrt{5}}{-5}=\sqrt{5}-1$$

۵۴- گزینهٔ ۱ مطابق شکل زیر فاصلهٔ نقطهٔ A از نقطهٔ B روی نمودار تابع $y=\sqrt{2x+7}$ برابر است با

$$d=\sqrt{(x-5)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-5)^2+(\sqrt{2x+7}-0)^2}$$
$$=\sqrt{x^2-10x+25+2x+7}=\sqrt{x^2-8x+32}$$

کمترین مقدار عبارت $x^2-8x+32$ به‌ازای $x=4$ به‌دست می‌آید که برابر ۱۶ است. پس کمترین مقدار d برابر ۴ است.



۵۵- گزینهٔ ۴ اگر افراد را به صورت جایگاه‌هایی فرض کنیم که می‌خواهیم کتاب‌ها را در آن‌ها قرار دهیم، توزیع کتاب‌ها به یکی از دو صورت زیر خواهد بود:

۱ | ۲ | ۲ یا ۱ | ۱ | ۳

- اگر به یک نفر سه کتاب برسد، تعداد حالت‌ها به صورت زیر است:

یکی از سه نفر را به ۳ حالت انتخاب می‌کنیم و سه تا از پنج کتاب را به $\binom{5}{3}$ حالت انتخاب می‌کنیم و کتاب‌ها را به او می‌دهیم. سپس دو کتاب باقی‌مانده به دو حالت بین دو نفر دیگر توزیع کنیم. پس در این صورت تعداد حالت‌ها برابر $3\binom{5}{3}\times 2=60$ است.

• اگر به دو نفر دو کتاب برسد، تعداد حالت‌ها به صورت زیر است:
یک نفر از سه نفر را انتخاب می‌کنیم و یک کتاب از پنج کتاب را انتخاب می‌کنیم و به او می‌دهیم که این کار به ۳×۵ حالت انجام‌پذیر است. سپس یک نفر از دو نفر دیگر را انتخاب می‌کنیم و دو کتاب از چهار کتاب را انتخاب می‌کنیم و به او می‌دهیم که این کار به $۲\binom{۴}{۲}=۱۲$ حالت انجام‌پذیر است ولی همهٔ حالت‌های ممکن دو بار شمرده می‌شوند. مثلاً اگر شخص (۱) انتخاب شود و کتاب‌های A و B را دریافت کند، کتاب‌های C و D به شخص (۲) می‌رسند و اگر شخص (۲) انتخاب شود و کتاب‌های C و D را دریافت کند، کتاب‌های A و B به شخص (۱) می‌رسد که این دو حالت یکسان هستند. پس تعداد حالت‌های غیر تکراری برابر ۶ است. (توجه کنید که دو کتاب باقی‌مانده به یک حالت به نفر آخر داده می‌شوند). در این صورت تعداد کل حالت‌ها برابر $۶\times۱۵=۹۰$ است. بنابراین کل حالت‌های ممکن برابر $۶۰+۹۰=۱۵۰$ است.

۵۶- گزینهٔ ۳ تعداد کل حالت‌هایی ۱۰ نفر در یک صف می‌ایستند، برابر $۱۰!$ است که در $۲\times۹!$ حالت آن دو نفر خاص کنار هم ایستاده‌اند. پس احتمال کنار هم ایستادن این دو نفر برابر است با $\frac{۲\times۹!}{۱۰!}=\frac{۲}{۱۰}=\frac{۱}{۵}$. بنابراین احتمال اینکه این دو نفر کنار هم نباشند، برابر $\frac{۴}{۵}$ است.

۵۷- گزینهٔ ۲ اگر ۸ واحد از تمام داده‌ها کم کنیم، داده‌های جدید به صورت زیر در می‌آیند:

$$\begin{array}{ccccccc} ۵, & ۷, & ۸, & ۸, & ۸, & ۱۰, & ۱۰ \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ -۳ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۲ & ۲ \end{array}$$

میانگین داده‌های جدید برابر است با $\frac{(-۳)+(-۱)+۰+۰+۰+۲+۲}{۷}=۰$

پس میانگین داده‌های اصلی برابر ۸ است. اکنون واریانس داده‌های جدید را حساب می‌کنیم که با واریانس داده‌های اصلی برابر است:

$$\sigma^۲=\frac{(-۳-۰)^۲+(-۱-۰)^۲+(۰-۰)^۲+(۰-۰)^۲+(۰-۰)^۲+(۲-۰)^۲+(۲-۰)^۲}{۷}$$
$$=\frac{۹+۱+۴+۴}{۷}=\frac{۱۸}{۷}$$

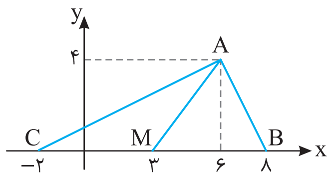
پس ضریب تغییرات داده‌ها برابر است با

$$cv=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{\sqrt{\frac{۱۸}{۷}}}{۸}=\frac{۳}{۸}\sqrt{\frac{۲}{۷}}\simeq\frac{۳}{۸}\times۰/۵۳۴=۰/۲۰$$

۵۸- گزینهٔ ۲ ابتدا رئوس مثلث را مشخص می‌کنیم.

$$\begin{cases}y=۰\\ ۲y-x=۲\end{cases}\Rightarrow x=-۲,\quad \begin{cases}y=۰\\ y+۲x=۱۶\end{cases}\Rightarrow x=۸$$
$$\begin{cases}۲y-x=۲\\ y+۲x=۱۶\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۶\\ y=۴\end{cases}$$

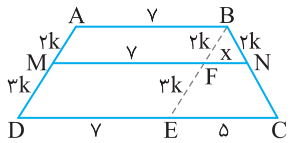
پس مثلث مورد نظر به صورت زیر است و اندازهٔ میانهٔ AM را می‌خواهیم.
چون نقطهٔ M (۳,۰) است، پس $AM=\sqrt{(۶-۳)^۲+(۴-۰)^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=۵$



۵۹- گزینهٔ ۳ از نقطهٔ B خطی موازی AD رسم می‌کنیم تا MN و DC را به ترتیب در F و E قطع کند (شکل مقابل را ببینید). چهارضلعی‌های ABFM، MFED و ABED متوازی‌الاضلاع هستند. اندازهٔ اضلاع بر این اساس روی شکل نشان داده شده‌اند. در مثلث BEC طبق تعمیم قضیهٔ تالس می‌توان نوشت:

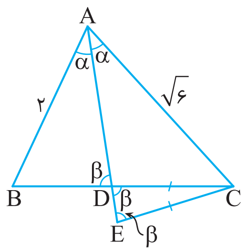
$$FN\|EC\Rightarrow\frac{FN}{EC}=\frac{BF}{BE}\Rightarrow\frac{x}{۵}=\frac{۲k}{۲k+۳k}\Rightarrow x=۲$$

بنابراین $MN=۷+۲=۹$.

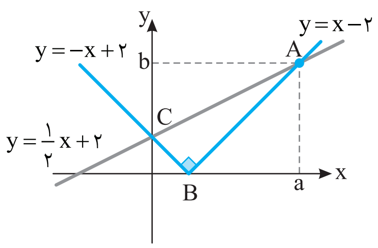


۶۰- گزینهٔ ۲ مطابق شکل مقابل مثلث‌های ABD و ACE دو زاویهٔ برابر به اندازه‌های α و β دارند. پس این دو مثلث متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها برابر است با $\frac{AB}{AC}=\frac{۲}{\sqrt{۶}}$. از طرف دیگر نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر مربع نسبت تشابه آن‌هاست. پس

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACE}}=(\frac{۲}{\sqrt{۶}})^۲=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$$



۶۱- گزینهٔ ۴ نمودار دو تابع $f(x)=\sqrt{x^۲-۴x+۴}=|x-۲|$ و $g(x)=\frac{۱}{۲}x+۲$ به‌صورت زیر است. مطابق شکل داده شده مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC مد نظر است.



$$x-۲=\frac{۱}{۲}x+۲\Rightarrow x=۸\Rightarrow a=۸\Rightarrow b=۸-۲=۶$$

بنابراین رئوس مثلث نقاط A(۸,۶)، B(۲,۰) و C(۰,۲) هستند. پس

$$AB=\sqrt{(۸-۲)^۲+(۶-۰)^۲}=۶\sqrt{۲},\quad BC=\sqrt{(۲-۰)^۲+(۰-۲)^۲}=۲\sqrt{۲}$$

پس مساحت مثلث ABC برابر است با

$$S=\frac{۱}{۲}AB\times BC=\frac{۱}{۲}\times۶\sqrt{۲}\times۲\sqrt{۲}=۱۲$$

۶۲- گزینهٔ ۱ فرض کنید $(g^{-1}of^{-1})(20)=a$، بنابراین

$$g^{-1}(f^{-1}(20))=a\Rightarrow g(a)=f^{-1}(20)\Rightarrow f(g(a))=20$$

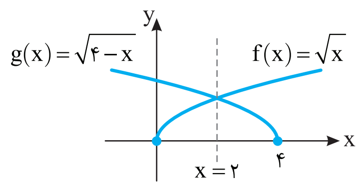
واضح است که $f(16)=20$، زیرا

$$f(x)=x+\sqrt{x}\Rightarrow f(16)=16+\sqrt{16}=16+4=20$$

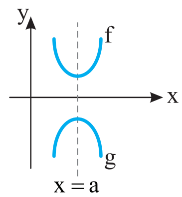
پس $f^{-1}(20)=16$. بنابراین

$$g(a)=16\Rightarrow\frac{9a+6}{1-a}=16\Rightarrow 9a+6=16-16a\Rightarrow a=\frac{2}{5}$$

۶۳- گزینهٔ ۳ اگر قرینهٔ نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ نسبت به محور y را رسم کنیم، نمودار تابع $y=\sqrt{-x}$ به‌دست می‌آید. اگر نمودار جدید را چهار واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=\sqrt{-(x-4)}$ به‌دست می‌آید. بنابراین نمودار دو تابع اولیه و نهایی به‌صورت زیر است. با توجه به شکل معلوم است که نمودار تابع g قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به خط $x=2$ است.



توجه ادبیات سؤال ایراد دارد چون پرسیده شده است: «منحنی اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام خط متقارن هستند؟» این سؤال یعنی نمودار توابع f و g هر دو نسبت به خط $x=a$ متقارن هستند و مقدار a چند است؟ (شکل زیر را ببینید) در حالی که مقصود طراح این بوده است که قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به خط $x=a$ نمودار تابع g می‌شود و a چند است؟ از طرف دیگر سؤال خارج از مباحث کتاب درسی است. چیزی که سؤال پرسیده مثلاً این طوری می‌شود:



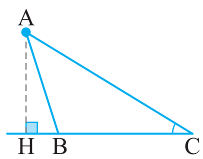
۶۴- گزینهٔ ۴ ابتدا $\cot\hat{C}$ را با معلوم بودن $\sin\hat{C}$ به‌دست می‌آوریم:

$$1+\cot^2\hat{C}=\frac{1}{\sin^2\hat{C}}\Rightarrow 1+\cot^2\hat{C}=\frac{169}{25}$$

$$\cot^2\hat{C}=\frac{144}{25}\Rightarrow\cot\hat{C}=\frac{12}{5}$$

بنابراین در مثلث AHC می‌توان نوشت:

$$\cot\hat{C}=\frac{CH}{AH}\Rightarrow\frac{12}{5}=\frac{9}{AH}\Rightarrow AH=3/75$$



۶۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$A=\cos(\frac{11\pi}{4}+\alpha)=\cos(3\pi-\frac{\pi}{4}+\alpha)=-\cos(\alpha-\frac{\pi}{4})$$

$$=-(\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)$$

از طرف دیگر، $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{10}$، پس

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\frac{2}{100}=\frac{49}{50}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{-7}{5\sqrt{2}}=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$$

توجه کنید که انتهای کمان نظیر زاویهٔ α در ربع دوم قرار دارد و $\cos\alpha$ منفی است. در نتیجه $A=-\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{10}-\frac{7\sqrt{2}}{10})=\frac{3}{5}$.

۶۶- گزینهٔ ۳ تعداد اعداد واقع در نوزده دستهٔ اول برابر است با:

$$1+2+\cdots+19=\frac{19\times20}{2}=190$$

بنابراین عدد اول دستهٔ بیستم ۱۹۱ و عدد آخر آن ۲۱۰ است. مجموع این اعداد برابر است با

$$(1+\cdots+210)-(1+\cdots+190)=\frac{210\times211}{2}-\frac{190\times191}{2}$$

$$=22155-18145=4010$$

۶۷- گزینهٔ ۱ مقدار جرم باقی‌مانده در بازه‌های زمانی ۳۰ روزهٔ متوالی به‌صورت زیر است.

- در ابتدا $a=24$ گرم موجود است.
- پس از ۳۰ روز مقدار باقی‌مانده برابر است با $a-\frac{1}{10}a=\frac{9}{10}a$
- پس از ۳۰ روز دیگر مقدار باقی‌مانده برابر است با

$$\frac{9}{10}a-\frac{1}{10}(\frac{9}{10}a)=\frac{81}{100}a=(\frac{9}{10})^2a$$

- پس از ۳۰ روز دیگر مقدار باقی‌مانده برابر $(\frac{9}{10})^3a$ خواهد بود.

بنابراین پس از n بازهٔ زمانی ۳۰ روزه مقدار باقی‌مانده از جرم برابر است با

$$(\frac{9}{10})^na=24(\frac{9}{10})^n$$

چون ۸ گرم از ماده قرار است باقی بماند، پس

$$24(\frac{9}{10})^n=8\Rightarrow(\frac{9}{10})^n=\frac{1}{3}\Rightarrow(\frac{10}{9})^n=3$$

$$n=\log_{\frac{10}{9}}3=\frac{1}{\log_3(\frac{10}{9})}=\frac{1}{\log_3 10-\log_3 9}=\frac{1}{\frac{1}{\log 3}-2}=\frac{1}{\frac{100}{48}-2}=12$$

پس برای باقی‌ماندن ۸ گرم از این عنصر ۱۲ تا ۳۰ روز طی می‌شود که برابر ۳۶۰ روز است.

۶۸- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to1}\frac{(2x+5)-7\sqrt{x}}{2x-\sqrt{3x+1}}=\lim_{x\to1}(\frac{(2x+5)^2-49x}{4x^2-(3x+1)}\times\frac{2x+\sqrt{3x+1}}{(2x+5)+7\sqrt{x}})$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{4x^2-29x+25}{4x^2-3x-1}\times\lim_{x\to1}\frac{2x+\sqrt{3x+1}}{(2x+5)+7\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(4x-25)}{(x-1)(4x+1)}\times\frac{2+2}{2+5+7}=\frac{4}{14}\lim_{x\to1}\frac{4x-25}{4x+1}=\frac{2}{7}\times(-\frac{21}{5})=-1/2$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to1}\frac{2x+5-7\sqrt{x}}{2x-\sqrt{3x+1}}=\lim_{x\to1}\frac{2-\frac{7}{2\sqrt{x}}}{2-\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}}=\frac{2-\frac{7}{2}}{2-\frac{3}{2\times2}}=-1/2$$

۶۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که تابع f به‌صورت زیر است:

$$|x-۱|<۱\Rightarrow -۱<x-۱<۱\Rightarrow ۰<x<۲$$

$$f(x)=\begin{cases}(x-۱)[x] & ۰<x<۲\\ x^{۲}+ax+b & x\le ۰ \text{ یا } x\ge ۲\end{cases}$$

چون تابع f در نقاط $x=۰$ و $x=۲$ پیوسته است، پس

$$f(۰)=\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^+} f(x)$$

$$b=\lim_{x\to ۰^-}(x^{۲}+ax+b)=\lim_{x\to ۰^+}((x-۱)[x])\Rightarrow b=۰$$

$$f(۲)=\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^-} f(x)$$

$$۴+۲a+b=\lim_{x\to ۲^+}(x^{۲}+ax+b)=\lim_{x\to ۲^-}((x-۱)[x])$$

$$۴+۲a=(۲-۱)\times ۱\Rightarrow a=-\frac{۳}{۲}$$

۷۰- گزینهٔ ۴ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[۵,۶]$ برابر است با

$$\frac{f(۶)-f(۵)}{۶-۵}=\frac{۳-۴}{۱}=-۱$$

از طرف دیگر آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع در نقطهٔ x برابر $f'(x)$ است.

$$f(x)=\sqrt{۲۱-x^{۲}+۴x}\Rightarrow f'(x)=\frac{-۲x+۴}{۲\sqrt{۲۱-x^{۲}+۴x}}=\frac{-x+۲}{\sqrt{۲۱-x^{۲}+۴x}}$$

بنابراین

$$\frac{-x+۲}{\sqrt{۲۱-x^{۲}+۴x}}=-۱\quad (*)\Rightarrow ۲۱-x^{۲}+۴x=(x-۲)^{۲}$$

$$۲۱-x^{۲}+۴x=x^{۲}+۴-۴x\Rightarrow ۲x^{۲}-۸x-۱۷=۰$$

$$x=۲+\frac{۵\sqrt{۲}}{۲},\quad x=۲-\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}\ (\text{غ.ق.ق})$$

توجه کنید که طبق معادلهٔ $(*)$ مقدار x باید بیشتر از ۲ باشد.

۷۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{۵x-۴}{\sqrt{x}}=۵\sqrt{x}-\frac{۴}{\sqrt{x}}\Rightarrow f(۴)=۵\times ۲-\frac{۴}{۲}=۸$$

$$f'(x)=\frac{۵}{۲\sqrt{x}}+\frac{۲}{x\sqrt{x}}\Rightarrow m=f'(۴)=\frac{۵}{۴}+\frac{۲}{۸}=\frac{۳}{۲}$$

معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $(۴,۸)$ با شیب $\frac{۳}{۲}$ می‌گذرد، به‌صورت زیر است:

$$y-۸=\frac{۳}{۲}(x-۴)\Rightarrow y=\frac{۳}{۲}x+۲$$

اگر قرار دهیم $x=۰$، عرض نقطهٔ تقاطع با محور y برابر ۲ به‌دست می‌آید.

۷۲- گزینهٔ ۱ چندجمله‌ای $P(x)$ بر $۲x-۱$ بخش‌پذیر است. پس $P(\frac{۱}{۲})=۰$. بنابراین

$$P(\tfrac{۱}{۲})=۲(\tfrac{۱}{۲})^{۴}+a(\tfrac{۱}{۲})^{۳}+۲(\tfrac{۱}{۲})^{۲}-۳(\tfrac{۱}{۲})=۰\Rightarrow a=۷$$

$$P(x)=۲x^{۴}+۷x^{۳}+۲x^{۲}-۳x$$

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x+۲$ برابر است با

$$P(-۲)=۲(-۲)^{۴}+۷(-۲)^{۳}+۲(-۲)^{۲}-۳(-۲)=-۱۰$$

۷۳- گزینهٔ ۴ طول نقاط تقاطع نمودار تابع‌های $f(x)=|x-۲|+|x+۱|$ و $g(x)=x+۷$ از معادلهٔ $f(x)=g(x)$ به‌دست می‌آید. پس

$$f(x)=g(x)\Rightarrow |x-۲|+|x+۱|=x+۷$$

$$x\ge ۲\Rightarrow x-۲+x+۱=x+۷\Rightarrow x=۸$$

$$-۱\le x\le ۲\Rightarrow -x+۲+x+۱=x+۷\Rightarrow x=-۴\ (\text{غ.ق.ق})$$

$$x\le -۱\Rightarrow -x+۲-x-۱=x+۷\Rightarrow x=-۲$$

بنابراین $A(۸,۱۵)$ و $B(-۲,۵)$ نقاط تقاطع هستند که فاصلهٔ آن‌ها برابر است با $AB=\sqrt{(۸+۲)^{۲}+(۱۵-۵)^{۲}}=۱۰\sqrt{۲}$

۷۴- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** فرض کنید $(f^{-۱}og^{-۱})(-۹)=a$، پس

$$f^{-۱}(g^{-۱}(-۹))=a\Rightarrow f(a)=g^{-۱}(-۹)$$

$$a\ge ۲\Rightarrow a^{۲}-۴a+۹=g^{-۱}(-۹)$$

$$g(a^{۲}-۴a+۹)=-۹\Rightarrow \frac{۳-(a^{۲}-۴a+۹)}{۲}=-۹$$

$$a^{۲}-۴a-۱۲=۰\Rightarrow (a-۶)(a+۲)=۰\Rightarrow a=۶\ ,\ a=-۲\ (\text{غ.ق.ق})$$

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$y=f(x)=x^{۲}-۴x+۹\Rightarrow y=(x-۲)^{۲}+۵\Rightarrow y-۵=(x-۲)^{۲}$$

$$|x-۲|=\sqrt{y-۵}\xrightarrow{x\ge ۲} x-۲=\sqrt{y-۵}$$

$$x=۲+\sqrt{y-۵}\Rightarrow f^{-۱}(x)=۲+\sqrt{x-۵}$$

از طرف دیگر،

$$y=g(x)=\frac{۳-x}{۲}\Rightarrow ۲y=۳-x\Rightarrow x=۳-۲y\Rightarrow g^{-۱}(x)=۳-۲x$$

بنابراین

$$(f^{-۱}og^{-۱})(-۹)=f^{-۱}(g^{-۱}(-۹))=f^{-۱}(۳-۲(-۹))$$

$$=f^{-۱}(۲۱)=۲+\sqrt{۲۱-۵}=۶$$

۷۵- گزینهٔ ۲ اگر بخواهیم قرینهٔ نمودار تابع $f(x)=(x-۱)^{۲}$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کنیم، ابتدا باید آن را نسبت به محور x سپس نسبت به محور y قرینه کنیم (یا ابتدا نسبت به محور y سپس نسبت به محور x قرینه کنیم). ضابطهٔ این تابع به صورت $y=-f(-x)$ خواهد بود. اگر این نمودار را چهار واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $g(x)=-f(-x)+۴$ رسم می‌شود. طول نقاط تلاقی نمودار تابع‌های f و g از معادلهٔ $f(x)=g(x)$ به‌دست می‌آید:

$$f(x)=g(x)\Rightarrow (x-۱)^{۲}=-(-x-۱)^{۲}+۴$$

$$x^{۲}-۲x+۱=-x^{۲}-۲x-۱+۴$$

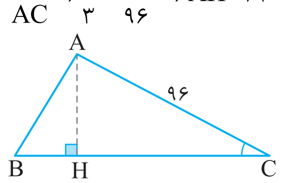
$$x^{۲}=۱\Rightarrow x=\pm ۱$$

۷۶- گزینهٔ ۳ ابتدا از $۱+\cot^{۲}\hat{C}=\frac{۱}{\sin^{۲}\hat{C}}$ مقدار $\sin\hat{C}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$۱+(\frac{\sqrt{۵}}{۲})^{۲}=\frac{۱}{\sin^{۲}\hat{C}}\Rightarrow \sin^{۲}\hat{C}=\frac{۴}{۹}\Rightarrow \sin\hat{C}=\frac{۲}{۳}$$

بنابراین

$$\triangle AHC: \sin\hat{C}=\frac{AH}{AC}\Rightarrow \frac{۲}{۳}=\frac{AH}{۹۶}\Rightarrow AH=۶۴$$



۷۷- گزینهٔ ۱ با توجه به مثلث قائم‌الزاویهٔ مقابل که در آن $\tan\alpha=\frac{۱}{۷}$، نتیجه می‌شود

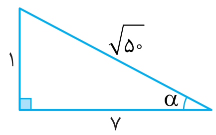
$$\sin\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۵۰}},\quad \cos\alpha=\frac{۷}{\sqrt{۵۰}}$$

بنابراین

$$\sin(\frac{۱۳\pi}{۴}+\alpha)=\sin(۳\pi+(\frac{\pi}{۴}+\alpha))=-\sin(\frac{\pi}{۴}+\alpha)$$

$$=-\sin\frac{\pi}{۴}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{۴}\sin\alpha=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sin\alpha+\cos\alpha)$$

$$=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}(\frac{۱}{\sqrt{۵۰}}+\frac{۷}{\sqrt{۵۰}})=-\frac{۴}{۵}$$



۷۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که تعداد اعداد نوشته شده در چهل دستهٔ اول برابر است با $۱+۲+۳+\cdots+۴۰=\frac{۴۰}{۲}(۱+۴۰)=۸۲۰$

بنابراین آخرین عدد واقع در دستهٔ چهلم همان هشتصدوبیستمین عدد طبیعی فرد است که برابر است با $۲\times۸۲۰-۱=۱۶۳۹$.

۷۹- گزینهٔ ۲ مقدار مادهٔ خالص در محلول در روزهای متوالی به صورت زیر است (فرض می‌کنیم محلول ۱۰۰ درصد خالص داریم).

روز اول: ۱۰۰ (غلظت ٪۱۰۰)

روز دوم: $۱۰۰-۴=۹۶$ (غلظت ٪۹۶)

روز سوم: $۹۶-\frac{۹۶}{۱۰۰}\times۴=۹۶(۱-\frac{۴}{۱۰۰})$ (غلظت: ٪۹۲/۱۶)

روز چهارم: ...

اکنون توجه کنید که همین مقادیر را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$۱۰۰,۱۰۰(۱-\frac{۴}{۱۰۰}),۱۰۰(۱-\frac{۴}{۱۰۰})^۲,\ldots$$

بنابراین در روز $(n+۱)$ ام، یعنی پس از گذشت n روز مقدار مادهٔ خالص برابر $۱۰۰(۱-\frac{۴}{۱۰۰})^n$ خواهد بود که باید $\frac{۱}{۳}$ مادهٔ خالص اولیه، یعنی $\frac{۱۰۰}{۳}$ لیتر باشد. پس

$$۱۰۰(۱-\frac{۴}{۱۰۰})^n=\frac{۱}{۳}\times۱۰۰\Rightarrow(\frac{۲۴}{۲۵})^n=\frac{۱}{۳}$$

$$n=\log_{\frac{۲۴}{۲۵}}(\frac{۱}{۳})=\frac{-\log۳}{\log\frac{۲۴}{۲۵}}=\frac{-\log۳}{\log۲۴-\log۲۵}$$

$$=\frac{-\log۳}{\log۸+\log۳-\log(\frac{۱۰۰}{۴})}=\frac{-\log۳}{۳\log۲+\log۳-\log۱۰۰+\log۴}$$

$$=\frac{-\log۳}{۵\log۲+\log۳-۲}=\frac{-۰/۴۸}{۵\times۰/۳+۰/۴۸-۲}=۲۴$$

۸۰- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $x\to۰^-$، آن‌گاه

$$\sqrt{۱-\cos x}=\sqrt{۲\sin^۲\frac{x}{۲}}=\sqrt{۲}|\sin\frac{x}{۲}|=-\sqrt{۲}\sin\frac{x}{۲}$$

از طرف دیگر،

$$\sqrt{۲+۳x}-\sqrt{۲-x}=\frac{(\sqrt{۲+۳x}-\sqrt{۲-x})(\sqrt{۲+۳x}+\sqrt{۲-x})}{\sqrt{۲+۳x}+\sqrt{۲-x}}$$

$$=\frac{۲+۳x-(۲-x)}{\sqrt{۲+۳x}+\sqrt{۲-x}}=\frac{۴x}{\sqrt{۲+۳x}+\sqrt{۲-x}}$$

بنابراین

$$\lim_{x\to۰^-}\frac{\sqrt{۲+۳x}-\sqrt{۲-x}}{\sqrt{۱-\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to۰^-}\frac{۴x}{-\sqrt{۲}\sin\frac{x}{۲}}\times\lim_{x\to۰^-}\frac{۱}{\sqrt{۲+۳x}+\sqrt{۲-x}}$$

$$=\frac{۴}{-\sqrt{۲}\times\frac{۱}{۲}}\times\frac{۱}{\sqrt{۲}+\sqrt{۲}}=-۲$$

۸۱- گزینهٔ ۲ دامنهٔ تابع بازهٔ $[-۲,۲]$ در نظر گرفته شده است، بنابراین تابع در نقاط $x=۲$ و $x=-۲$ حد ندارد و پیوسته نیست. در نقاط غیرصحیح بازهٔ $(-۲,۲)$، توابع $y=[x]$ و $y=\sin\pi x$ پیوسته‌اند. بنابراین حاصل‌ضرب آن‌ها، یعنی تابع $f(x)=[x]\sin\pi x$ نیز پیوسته است. در نقاط صحیح این بازه (یعنی $x=۰$، $x=۱$ و $x=-۱$) تابع $y=[x]$ ناپیوسته است ولی چون تابع $y=\sin\pi x$ پیوسته است و مقدار آن برابر صفر است، تابع f پیوسته خواهد بود. بنابراین تابع f فقط در دو نقطهٔ $x=۲$ و $x=-۲$ ناپیوسته است.

۸۲- گزینهٔ ۴ اگر نمودار تابع‌های $f(x)=x\sqrt{x}$ و $g(x)=x^۲+ax+b$ در نقطهٔ مشترک $x=۴$ بر یک خط مماس باشند، آن‌گاه

$$\begin{cases} f(۴)=g(۴)\Rightarrow ۸=۱۶+۴a+b\Rightarrow b=-۸-۴a \\ f'(۴)=g'(۴)\Rightarrow ۳=۸+a\Rightarrow a=-۵\Rightarrow b=۱۲ \end{cases}$$

توجه کنید که

$$f(x)=x\sqrt{x}=x^{\frac{۳}{۲}}\Rightarrow f'(x)=\frac{۳}{۲}x^{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow f'(۴)=\frac{۳}{۲}\times۲=۳$$

$$g(x)=x^۲+ax+b\Rightarrow g'(x)=۲x+a\Rightarrow g'(۴)=۸+a$$

۸۳- گزینهٔ ۱ ابتدا $f'(۲)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$۰\le x<۴\Rightarrow f(x)=\sqrt{x^۲+۶x}\Rightarrow f'(x)=\frac{۲x+۶}{۲\sqrt{x^۲+۶x}}\Rightarrow f'(۲)=\frac{۵}{۴}$$

اکنون توجه کنید که در یک همسایگی نقطهٔ $x=۵$، تساوی $[\frac{x}{۴}]=۱$ برقرار است. پس در این همسایگی می‌توان نوشت

$$f(x)=x^۲-۹x\Rightarrow f'(x)=۲x-۹\Rightarrow f'(۵)=۱۰-۹=۱$$

بنابراین $f'(۲)-f'(۵)=\frac{۱}{۴}$.