آزمون‌های مرحله‌ای

۱

ترکیبیات و احتمال

پاسخ تشریحی آزمون‌های فصل اول

پاسخ تشریحی آزمون ۱

۱- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول**: ۴ دانش‌آموز کلاس چهارم در $4!$ حالت ممکن است کنار هم بایستند. بین و دو طرف این چهار دانش‌آموز ۵ جا برای دانش‌آموزان کلاس سوم وجود دارد. پس تعداد حالات برابر است با: $4!\times5\times4=4\times5!=480$

راه‌حل دوم: تعداد حالاتی که دو دانش‌آموز کلاس سوم کنار هم هستند را از کل حالات کم می‌کنیم: $6!-2\times5!=720-240=480$

۲- گزینه‌ی ۱

تعداد راه‌های رفت از A به C و برگشت $=(\underset{A\to C}{1}+\underset{A\to B\to C}{2\times2})(\underset{C\to A}{1}+\underset{C\to B\to A}{1\times1})=5\times2=10$

۳- گزینه‌ی ۳ برای عضو اول از مجموعه‌ی A به تعداد اعضای B انتخاب داریم ولی با توجه به این‌که تابع مورد نظر یک‌به‌یک است، برای عضو دوم یکی از انتخاب‌ها کم می‌شود (۴ تا) و به همین ترتیب برای عضو سوم ۳ انتخاب و برای عضو چهارم ۲ انتخاب داریم پس تعداد تابع یک‌به‌یک برابر است با: $5\times4\times3\times2=5!$

۴- گزینه‌ی ۱ از ۳۶ حالت ممکن در پرتاب دو تاس، در ۶ حالت اعداد دو تاس مساوی هستند. از ۳۰ حالت باقی‌مانده، در نیمی از حالات (۱۵ تا) عدد اول بیش‌تر و در نیم دیگر (۱۵ تا) عدد دوم بیش‌تر است. پس تعداد خواسته شده برابر است با: $15+6=21$

۵- گزینه‌ی ۱ در حالت‌های زیر عدد تاس سفید مضرب عدد تاس سیاه است.

عدد تاس سیاه	۱	۲	۳	۴	۵	۶
عدد تاس سفید	۱ تا ۶	۲-۴-۶	۳-۶	۴	۵	۶

بنابراین تعداد حالات برابر است با: $6+3+2+1+1+1=14$

۶- گزینه‌ی ۴ تعداد حالات در دو حالت کلی که حرف تکراری (A) باشد یا خیر، جداگانه می‌شماریم:

$$\begin{cases}\text{بدون تکرار}:\binom{6}{3}\times3!=\frac{6\times5\times4}{6}\times6=120\\ \text{با تکرار دو }A:\binom{5}{1}\times\frac{3!}{2!}=5\times3=15\end{cases}\xrightarrow{+}120+15=135$$

۷- گزینه‌ی ۴ دو حرف کلمه‌ی مورد نظر A است، پس از ۴ حرف باقیمانده (T، M، L و S) باید ۲ تا را انتخاب کنیم، سپس در کنار هم قرار دهیم:

$$\binom{4}{2}\times\frac{4!}{2!}=6\times\frac{4\times3\times2}{2}=72$$

۸- گزینه‌ی ۳ حالت‌هایی را که دو S کنار هم قرار دارند از کل حالت‌ها کم می‌کنیم:

$$\frac{6!}{2!}-5!=360-120=240$$

توجه کنید برای شمارش حالت‌هایی که Sها کنار هم هستند آن دو را یک شیء در نظر می‌گیریم که همراه با ۴ حرف دیگر، ۵ شیء هستند.

سراسری خارج از کشور - ۹۳

۹- گزینه‌ی ۳ رقم سمت چپ یکی از ارقام ۳، ۵، ۷ یا ۹ است. در بقیه‌ی ارقام ممکن است یک هم به‌کار رفته باشد:

$$\underline{4}\times\underline{4}\times\underline{3}\times\underline{2}=16\times6=96$$

سراسری - ۹۰

۱۰- گزینه‌ی ۲ رمز مورد نظر یا شامل حروف تکراری (N) هست یا خیر:

$$\begin{cases}\text{با تکرار }N:\dfrac{\binom{4}{1}\times3!}{2!}=12\\ \text{بدون تکرار}:\binom{5}{3}\times3!=60\end{cases}\xrightarrow{+}12+60=72$$

۱۱- گزینه‌ی ۲ تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی یک مجموعه‌ی n عضوی برابر $\binom{n}{k}$ است، پس:

$$\binom{n}{۲}=۳۶\Rightarrow\frac{n(n-۱)}{۲}=۳۶\Rightarrow n(n-۱)=۷۲\Rightarrow n=۹$$

پس تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی این مجموعه‌ی ۹ عضوی برابر است با:

$$\binom{۹}{۵}=\frac{۹\times۸\times۷\times۶}{۴\times۳\times۲\times۱}=۹\times۱۴=۱۲۶$$

۱۲- گزینه‌ی ۴ می‌دانیم $\binom{۷}{۴}=\binom{۷}{۳}$، بنابراین داریم:

$$\binom{n+۱}{۴}=۲\binom{۷}{۳}\Rightarrow\binom{n+۱}{۴}=\binom{۷}{۳}+\binom{۷}{۴}$$

با استفاده از قانون پاسکال $\binom{n+۱}{k+۱}=\binom{n}{k+۱}+\binom{n}{k}$ داریم:

$$\binom{۷}{۳}+\binom{۷}{۴}=\binom{۸}{۴}\Rightarrow\binom{n+۱}{۴}=\binom{۸}{۴}\Rightarrow n+۱=۸\Rightarrow n=۷\Rightarrow\binom{n+۱}{n-۱}=\binom{۸}{۶}=\frac{۸\times۷}{۲}=۲۸$$

۱۳- گزینه‌ی ۳ با استفاده از فرمول جایگشت با تکرار داریم:

$$\frac{۶!}{۱!\ ۲!\ ۳!}=۵\times۴\times۳=۶۰$$

۱۴- گزینه‌ی ۴ ۲ اسباب‌بازی به بچه‌ی اول، ۲ تا به بچه‌ی دوم و ۲ تا به بچه‌ی سوم می‌رسد:

$$\binom{۶}{۲}\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۲}=۱۵\times۶\times۱=۹۰$$

۱۵- گزینه‌ی ۴ این افراد به $۵!$ حالت می‌توانند در صف بایستند، ترتیب افراد a، b و d در صف، به $۳!=۶$ حالت می‌تواند باشد. از بین این ۶ حالت در ۲ حالت $b-a-d$ و $d-a-b$، a بین d و b است، پس در $\frac{۲}{۶}$ از $۵!$ حالت ممکن، a بین b و d است.

$$\frac{۲}{۶}\times۵!=\frac{۱۲۰}{۳}=۴۰$$

۱۶- گزینه‌ی ۴ برای آن‌که مهره‌ها هم‌رنگ باشند، ممکن است هر دو مهره سیاه، سفید یا سبز باشند. پس تعداد حالات برابر است با:

$$\binom{۴}{۲}+\binom{۵}{۲}+\binom{۳}{۲}=۶+۱۰+۳=۱۹$$

۱۷- گزینه‌ی ۴ حالت‌های زیر مطلوب است:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{۲ تجربی + ۱ ریاضی}:\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۱}=۱۰\times۳=۳۰\\ \text{۳ تجربی}:\binom{۵}{۳}=\frac{۵\times۴\times۳}{۶}=۱۰\end{array}\right.\xrightarrow{+}۳۰+۱۰=۴۰$$

سراسری خارج از کشور - ۹۰

۱۸- گزینه‌ی ۳ ابتدا سه مدرسه از ۵ مدرسه‌ی A تا E را انتخاب می‌کنیم. سپس از هر مدرسه یک نفر را انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{۵}{۳}\binom{۴}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۴}{۱}=۱۰\times۴^۳=۶۴۰$$

سراسری - ۹۲

۱۹- گزینه‌ی ۲ ابتدا ۲ رقم از ۴ رقم زوج و ۳ رقم از ۵ رقم فرد را انتخاب کرده، سپس با آن‌ها یک عدد ۵ رقمی می‌سازیم:

$$\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۳}\times۵!=۶\times۱۰\times۱۲۰=۷۲۰۰$$

۲۰- گزینه‌ی ۱ تعداد حالاتی که فصل تولد هیچ دو فرزندی یکی نیست را شمرده و از کل حالات کم می‌کنیم:

$$۴^۴-۴!=۲۵۶-۲۴=۲۳۲$$

پاسخ تشریحی آزمون ۲

۱- گزینه‌ی ۴ از هفت حرف موجود، جای حرف N به عنوان حرف وسط مشخص است. جایگشت ۶ حرف دیگر با توجه به تکراری بودن دو E برابر است با:

$$\frac{6!}{2!}=\frac{720}{2}=360$$

۲- گزینه‌ی ۲ تعداد حالات را در دو حالت کلی که عدد صفر رقم راست باشد یا خیر، می‌شماریم:

$$\begin{cases}\underline{4}\times\underline{3}\times\underbrace{\underline{1}}_{\text{صفر}}=12\\ \underbrace{\underline{3}}_{\text{غیرصفر}}\times\underline{3}\times\underbrace{\underline{2}}_{\text{۲ یا ۴}}=18\end{cases}\xrightarrow{+}12+18=30$$

۳- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول**: یکی از شش رقم داده شده در عدد ۵ رقمی استفاده نمی‌شود، این عدد می‌تواند صفر یا ۳ یا اعداد بی‌تکرار (۲ و ۵) باشد:

$$\begin{cases}\text{اگر عدد استفاده نشده صفر باشد:}\ \frac{4\times4!}{2!}=48\\ \text{اگر عدد استفاده نشده ۳ باشد:}\ \frac{3\times4!}{2!}=36\\ \text{اگر عدد استفاده نشده ۲ یا ۵ باشد:}\ 2\frac{3\times4!}{2!2!}=36\end{cases}\xrightarrow{+}48+36+36=120$$

راه‌حل دوم: تعداد اعداد ۵ رقمی ساخته شده با این ۶ رقم برابر تعداد اعداد ۶ رقمی است:

$$\frac{4\times5!}{2!2!}=5!=120$$

۴- گزینه‌ی ۱ هر مسافر می‌تواند در هر یک از ۶ ایستگاه پیاده شود، پس هر مسافر ۶ حق انتخاب دارد. پس برای ۱۰ مسافر، تعداد حالات برابر است با:

$$\underbrace{6\times6\times\cdots\times6}_{\text{۱۰ بار}}=6^{10}$$

۵- گزینه‌ی ۴ کتاب‌های ادبیات دارای $5!$ جایگشت هستند، اگر کتاب‌های ادبیات را با A و کتاب‌های زیست‌شناسی را با Z نمایش دهیم حالات زیر برای یک در میان بودن کتاب‌های زیست‌شناسی ممکن است اتفاق بیفتد:

ZAZAZAAA , AZAZAZAA , AAZAZAZA , AAAZAZAZ

بنابراین تعداد حالات برابر است با: $5!\times4\times3!=5!4!$

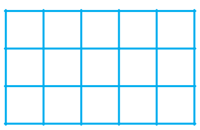
۶- گزینه‌ی ۴ حالت‌های زیر ممکن است اتفاق بیفتد:

$$\begin{cases}\text{۳ رقم ۱ یا ۳ رقم ۴+۳ رقم ۲}\ =2\times\frac{7!}{4!3!}=2\times\frac{7\times6\times5}{6}=2\times35=70\\ \text{۲ رقم ۱ یا ۲ رقم ۴+۳ رقم ۲}\ =2\times\frac{7!}{4!2!}=2\times\frac{7\times6\times5}{2}=210\end{cases}\xrightarrow{+}280$$

۷- گزینه‌ی ۲ دو حالت کلی وجود دارد، یا عدد مورد نظر با ۲ شروع می‌شود یا با ۲ خاتمه می‌یابد، در هریک از ۲ حالت اعداد ۵ و ۸ و ۶، به $3!$ حالت در عدد قرار می‌گیرند:

$$2\times3!=12$$

۸- گزینه‌ی ۲ در مستطیل ۵×۳ روبه‌رو، ۶ خط عمودی و ۴ خط افقی وجود دارد. اگر دو خط افقی و دو خط عمودی انتخاب کنیم، یک و فقط یک مستطیل ساخته می‌شود، پس تعداد مستطیل‌ها برابر است با:



$$\binom{6}{2}\binom{4}{2}=\frac{6\times5}{2}\times\frac{4\times3}{2}=15\times6=90$$

۹- گزینه‌ی ۳ کافی است ۳ رقم متمایز از ۵ رقم داده شده را انتخاب کنیم. با سه عدد انتخاب شده تنها به یک صورت می‌توان عددی ساخت که ترتیب ارقامش صعودی باشد:

$$\binom{5}{3}\times1=10$$

۱۰- گزینه‌ی ۲ مطابق فرمول $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ داریم: $\binom{7}{4}=\binom{7}{3}$، حال با توجه به قاعده‌ی پاسکال ($\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$) داریم:

$$2\binom{7}{3}+\binom{8}{3}+\binom{9}{3}=\binom{7}{3}+\binom{7}{4}+\binom{8}{3}+\binom{9}{3}=\binom{8}{4}+\binom{8}{3}+\binom{9}{3}=\binom{9}{4}+\binom{9}{3}=\binom{10}{4}=\binom{10}{6}$$

۱۱- گزینه‌ی ۳ از پنج حرف، ۳ تا S هستند. پس از ۵ حرف باقیمانده (E ، N ، I ، U ، B) باید ۲ تا را انتخاب کرده، سپس تعداد جایگشت آن‌ها را محاسبه کنیم:

$$\binom{۵}{۲}\times\frac{۵!}{۳!}=۱۰\times۵\times۴=۲۰۰$$

۱۲- گزینه‌ی ۴ با شرایط مسأله یا ۴ پرسش از اول انتخاب می‌شود یا هر ۵ پرسش اول پاسخ داده می‌شود:

$$\binom{۵}{۴}\binom{۵}{۴}+\binom{۵}{۵}\binom{۵}{۳}=۵\times۵+۱\times۱۰=۳۵$$

۱۳- گزینه‌ی ۴ ابتدا یک رقم از ۴ رقم زوج و ۳ رقم از ۵ رقم فرد را انتخاب کرده، سپس با آن‌ها یک عدد چهار رقمی می‌سازیم:

$$\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۳}\times۴!=۴\times۱۰\times۲۴=۹۶۰$$

۱۴- گزینه‌ی ۲ ابتدا توپ‌های زرد را کنار هم قرار می‌دهیم، این کار به !۴ قابل انجام است، مابین و دو طرف این ۴ توپ زرد، ۵ جای خالی برای قرار گرفتن توپ‌های قرمز به‌وجود می‌آید:

◯ زرد ◯ زرد ◯ زرد ◯ زرد ◯

$$\text{تعداد حالات}:\underbrace{۴!}_{\text{جایگشت توپ‌های زرد}}\times\underbrace{\binom{۵}{۳}}_{\text{انتخاب مکان توپ‌های قرمز}}\times\underbrace{۳!}_{\text{جایگشت توپ‌های قرمز}}=\frac{۵!}{۳!\times۲!}\times۳!\times۴!=۵!\times۱۲$$

۱۵- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول**: یک جفت کفش را انتخاب می‌کنیم، سـپس از ۶ لنگه کفش باقی‌مانده، دو لنگه را با توجه به این‌که تشـکیل جفت ندهند، انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{۴}{۱}\times\frac{\binom{۶}{۱}\binom{۴}{۱}}{۲!}=۴\times\frac{۶\times۴}{۲}=۴۸$$

راه‌حل دوم: سه جفت کفش را انتخاب می‌کنیم از یکی هر دو لنگه، از دو تای دیگر هرکدام یک لنگه را انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{۴}{۳}\times\binom{۳}{۱}\times\binom{۲}{۱}\times\binom{۲}{۱}=۴\times۳\times۲\times۲=۴۸$$

۱۶- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول**: ابتدا ۳ منطقه از ۶ منطقه را انتخاب می‌کنیم و از هر منطقه یک نفر را برای عضویت در تیم انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{۶}{۳}\times\binom{۱۵}{۱}\times\binom{۱۵}{۱}\times\binom{۱۵}{۱}=\frac{۶\times۵\times۴}{۶}\times۱۵^{۳}=۲۰\times۱۵^{۳}=۲۲۵\times۳۰۰=۶۷۵۰۰$$

راه‌حل دوم: ابتدا یک نفر از ۹۰ نفر را انتخاب می‌کنیم، سـپس از همه‌ی افراد باقی‌مانده که با نفر اول هم‌گروه نبودند (۷۵ نفر) یک نفر انتخاب می‌کنیم و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم، با تقسیم بر !۳ حالت‌های تکراری را حذف می‌کنیم:

$$\frac{\binom{۹۰}{۱}\binom{۷۵}{۱}\binom{۶۰}{۱}}{۳!}=\frac{۹۰\times۷۵\times۶۰}{۳!}=۶۷۵۰۰$$

۱۷- گزینه‌ی ۳ **راه‌حـل اول**: مثلث‌هــا را می‌توان با انتخاب ۲ نقطه روی نیم‌دایره و یک نقطه روی خط یا ۲ نقطه روی خط و یک نقطه روی نیم‌دایره یا ۳ نقطه روی نیم‌دایره ساخت:

$$\binom{۴}{۲}\binom{۴}{۱}+\binom{۴}{۱}\binom{۴}{۲}+\binom{۴}{۳}=۲\times۶\times۴+۴=۵۲$$

راه‌حل دوم: با هر ۳ نقطه‌ی انتخابی از ۸ نقطه می‌توان مثلث ساخت به جز حالاتی که هر ۳ نقطه روی خط قرار گرفته باشند:

$$\binom{۸}{۳}-\binom{۴}{۳}=\frac{۸\times۷\times۶}{۶}-۴=۵۶-۴=۵۲$$

۱۸- گزینه‌ی ۲ تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی یک مجموعه‌ی n عضوی برابر $\binom{n}{k}$ است، پس:

$$\binom{n}{۳}=۵n\Rightarrow\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۶}=۵n\xrightarrow{n\neq۰}(n-۱)(n-۲)=۳۰\Rightarrow n-۱=۶\Rightarrow n=۷$$

$$\Rightarrow \text{تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی}=\binom{۷}{۳}=\frac{۷\times۶\times۵}{۶}=۳۵$$

۱۹- گزینه‌ی ۴ یا ۵ دانش‌آموز ســال اول روی ۷ صندلی ردیف اول و ۴ دانش‌آموز ســال سوم روی ۷ صندلی ردیف دوم می‌نشینند، یا برعکس. در هر دو صورت ۳ دانش‌آموز سال دوم آزادند روی هرکدام از ۵ صندلی باقی‌مانده بنشینند:

$$۲\times\binom{۷}{۵}\times۵!\times\binom{۷}{۴}\times۴!\times\binom{۵}{۳}\times۳!=۲\times\frac{۷!}{۲!}\times\frac{۷!}{۳!}\times\frac{۵!}{۲!}=۱۰(۷!)^۲$$

۲۰- گزینه‌ی ۱ برای آن‌که هم دانشجو و هم دانش‌آموز در گروه باشند، یا دو دانش‌آموز و یک دانشجو در گروه هستند، یا دو دانشجو و یک دانش‌آموز؛

$$\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۱}+\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۱}=۱۰\times۴+۶\times۵=۷۰$$

پاسخ تشریحی آزمون ۳

۱- گزینه‌ی ۱ در حالت‌های زیر جمع اعداد رو شده‌ی تاس یکی از اعداد اول ۲، ۳، ۵، ۷ و ۱۱ است.

(۱,۱) , (۱,۲) , (۲,۱) , (۱,۴) , (۴,۱) , (۲,۳) , (۳,۲)

(۱,۶) , (۶,۱) , (۲,۵) , (۵,۲) , (۴,۳) , (۳,۴) , (۵,۶) , (۶,۵)

بنابراین احتمال خواسته شده برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۵}{۶^۲}=\frac{۵}{۱۲}$$

۲- گزینه‌ی ۳ با توجه به ناسازگار بودن دو پیشامد، برای داشتن ۲ فرزند پسر یا داشتن ۳ فرزند دختر در یک خانواده با ۴ فرزند داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{\binom{۴}{۲}}{۲^۴}+\frac{\binom{۴}{۳}}{۲^۴}=\frac{۶+۴}{۱۶}=\frac{۵}{۸}$$

سراسری - ۹۰

۳- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول**: وجود موش اول و ســوم در ســؤال تأثیری ندارد، پس اصلاً آن‌ها را در نظر نمی‌گیریم. از بین دو موش احتمال آن‌که اولی سیاه و دومی سفید باشد، برابر است با:

$$P(A)=\frac{۶\times۵}{۱۱\times۱۰}=\frac{۳}{۱۱}$$

راه‌حل دوم: با در نظر گرفتن همه‌ی موش‌ها احتمال برابر است با:

$$P(A)=\frac{۹\times۶\times۸\times۵}{۱۱\times۱۰\times۹\times۸}=\frac{۳}{۱۱}$$

۴- گزینه‌ی ۲ هر دو مهره سفید یا هر دو مهره سیاه هستند، داریم:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۵}{۲}+\binom{۵}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}}=\frac{۱۰+۱۰}{۴۵}=\frac{۲۰}{۴۵}=\frac{۴}{۹}$$

۵- گزینه‌ی ۲ احتمال خواسته شده برابر است با:

$$P(A)=\frac{\binom{۱}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۱}}{\binom{۹}{۴}}=\frac{۱\times۲\times۳\times۳}{\frac{۹\times۸\times۷\times۶}{۴\times۳\times۲\times۱}}=\frac{۱۸}{۱۸\times۷}=\frac{۱}{۷}$$

۶- گزینه‌ی ۲ اعداد حاصل از دو کارت اگر به صورت ۴۵، ۳۴، ۲۳، ۱۲ یا ۵۴، ۴۳، ۳۲، ۲۱ باشند، اعداد متوالی هستند.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۸}{۵\times۴}=\frac{۲}{۵}=۰/۴$$

۷- گزینه‌ی ۳ احتمال آن که هر دو کارت سبزرنگ یا هر دو کارت سفیدرنگ باشند برابر است با:

$$P(A)=\frac{۴\times۳+۳\times۲}{۷\times۶}=\frac{۱۸}{۷\times۶}=\frac{۳}{۷}$$

سراسری - ۹۱

۸- گزینه‌ی ۳ از بین اعداد دو رقمی ساخته شده توسط ارقام ۱ تا ۵، فقط اعداد زیر مضرب ۳ هستند:

۱۲, ۱۵, ۲۱, ۲۴, ۳۳, ۴۲, ۴۵, ۵۱, ۵۴

بنابراین احتمال خواسته شده برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۹}{۵\times ۵}=\frac{۹}{۲۵}=\frac{۹\times ۴}{۱۰۰}=۰/۳۶$$

۹- گزینه‌ی ۴ از پیشامد متمم استفاده می‌کنیم، احتمال آن‌که دو عقربه روی شماره‌های هم‌نام قرار گیرند، برابر است با:

$$P(A')=\frac{۵}{۹\times ۵}=\frac{۱}{۹}$$

بنابراین احتمال خواسته شده برابر است با:

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۱}{۹}=\frac{۸}{۹}$$

۱۰- گزینه‌ی ۱ احتمال خواسته شده برابر است با:

$$P(A)=\frac{\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۴}}{\binom{۹}{۶}}=\frac{۶\times ۵}{\frac{۹\times ۸\times ۷}{۶}}=\frac{۳۰}{۱۲\times ۷}=\frac{۵}{۱۴}$$

۱۱- گزینه‌ی ۲ با توجه به قوانین ژنتیک احتمال آن‌که RH خون هر فرزند منفی باشـد، برابر $(۰/۴)^{۲}$ یعنی ۰/۱۶ اسـت. برای آن‌که اولین RH خون منفی در فرزند دوم باشد، می‌بایست فرزند اول دارای RH مثبت و دومی منفی باشد، با توجه به مستقل بودن RH خون دو فرزند از هم داریم:

$$P(A)=(۱-۰/۱۶)۰/۱۶=۰/۸۴\times ۰/۱۶=۰/۱۳۴۴$$

۱۲- گزینه‌ی ۲ احتمال متمم پیشامد خواسته شده یعنی این‌که ماه تولد هیچ دو نفری مثل هم نباشد، برابر است با:

$$P(A')=\frac{۱۲\times ۱۱\times ۱۰\times ۹}{۱۲^{۴}}=\frac{۱۱\times ۵}{۱۲\times ۴\times ۲}=\frac{۵۵}{۹۶}\Rightarrow P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۵۵}{۹۶}=\frac{۴۱}{۹۶}$$

سراسری خارج از کشور - ۹۲

۱۳- گزینه‌ی ۴ ابتدا احتمال اشتراک دو پیشامد را محاسبه می‌کنیم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow ۰/۸+۰/۴-P(A\cap B)=۰/۹\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۳$$

با توجه به این‌که دو مجموعه‌ی $A-B$ و $B-A$ با هم اشتراکی ندارند، داریم:

$$P((A-B)\cup(B-A))=P(A-B)+P(B-A)=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-۲P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow ۰/۸+۰/۴-۲\times ۰/۳=۰/۶$$

۱۴- گزینه‌ی ۴ رقم صفر در ابتدای عدد قرار نمی‌گیرد، پس تعداد اعداد چهاررقمی ساخته شده توسط ۰، ۱، ۲ و ۳ برابر است با:

$$\underline{۳}\times\underline{۳}\times\underline{۲}\times\underline{۱}=۱۸$$

با توجه به این‌که جمع ارقام ۳، ۲، ۱ و ۰ مضربی از ۳ است، پس عدد ساخته شده در هر صورت مضرب ۳ است، پس برای آن‌که مضرب ۶ باشد کافی است زوج باشد، یعنی رقم یکان عدد، ۲ یا صفر باشد.

$$\underline{۳}\times\underline{۲}\times\underline{۱}\times\underset{\text{صفر}}{\underline{۱}}=۶$$

$$\underline{۲}\times\underline{۲}\times\underline{۱}\times\underset{۲}{\underline{۱}}=۴$$

پس احتمال خواسته شده برابر است با:

$$P(A)=\frac{۶+۴}{۱۸}=\frac{۱۰}{۱۸}=\frac{۵}{۹}$$

سراسری خارج از کشور - ۸۹

۱۵- گزینه‌ی ۲ ابتدا $P(A\cap B)$ را پیدا می‌کنیم:

$$P(A\cap B')=۰/۲\Rightarrow P(A-B)=۰/۲\Rightarrow P(A)-P(A\cap B)=۰/۲\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۶-۰/۲=۰/۴$$

بنابراین احتمال خواسته شده برابر است با:

$$P(B\cap A')=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=۰/۷-۰/۴=۰/۳$$

۱۶- گزینه‌ی ۴ از پیشامد متمم استفاده می‌کنیم، احتمال این‌که هر دو مهره هم‌رنگ (هر دو سبز یا هر دو سفید) باشند، برابر است با:

$$P(A')=\frac{۴\times ۶+۱\times ۲}{۱۰\times ۸}=\frac{۲۶}{۸۰}=\frac{۱۳}{۴۰}\Rightarrow P(A)=۱-P(A')=\frac{۲۷}{۴۰}$$

۱۷- گزینه‌ی ۴ احتمال متمم پیشامد خواسته شده، یعنی احتمال آن‌که هیچ‌کدام از موش‌ها سفید نباشند، برابر است با:

$$P(A')=\frac{\binom{۶}{۳}}{\binom{۱۱}{۳}}=\frac{\frac{۶\times ۵\times ۴}{۳\times ۲}}{\frac{۱۱\times ۱۰\times ۹}{۳\times ۲}}=\frac{۲۰}{۱۶۵}=\frac{۴}{۳۳}$$

بنابراین احتمال خواسته شده برابر است با:

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۴}{۳۳}=\frac{۲۹}{۳۳}$$

سراسری خارج از کشور - ۹۱

۱۸- گزینه‌ی ۲ در حالات زیر مجموع اعداد مضرب ۳ است.

$$\{۱,۲\},\{۱,۵\},\{۲,۴\},\{۳,۶\},\{۴,۵\}$$

پس احتمال موردنظر برابر است با:

$$P(A)=\frac{۵}{\binom{۶}{۲}}=\frac{۵}{۱۵}=\frac{۱}{۳}$$

۱۹- گزینه‌ی ۱ تحصیلات ابتدایی را با A و مهارت قالی‌بافی را با B نمایش می‌دهیم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=۰/۶+۰/۲۵-۰/۶\times ۰/۲۵=۰/۸۵-۰/۱۵=۰/۷$$

توجه کنید که رابطه‌ی $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ با توجه به مستقل بودن داشتن مهارت قالی‌بافی با داشتن تحصیلات ابتدایی نوشته شده است.

سراسری - ۹۰

۲۰- گزینه‌ی ۱ پیشامد مضرب ۵ بودن را با A و مضرب ۶ بودن را با B نشان می‌دهیم. $A\cap B$ پیشامد آن است که عدد، مضرب هر دو عدد ۵ و ۶ یعنی مضرب ۳۰ باشد. احتمال خواسته شده برابر است با:

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{[\frac{۶۰۰}{۵}]-[\frac{۱۰۰}{۵}]-([\frac{۶۰۰}{۳۰}]-[\frac{۱۰۰}{۳۰}])}{۶۰۰-۱۰۱+۱}=\frac{۱۲۰-۲۰-(۲۰-۳)}{۵۰۰}=\frac{۱۰۰-۱۷}{۵۰۰}=\frac{۸۳}{۵۰۰}=۰/۱۶۶$$

پاسخ تشریحی آزمون ٤

۱- گزینه‌ی ۲ در حالت‌های زیر اختلاف دو عدد ظاهر شده در تاس برابر ۲ است.

$$(۱,۳),(۳,۱),(۲,۴),(۴,۲),(۳,۵),(۵,۳),(۴,۶),(۶,۴)$$

بنابراین احتمال خواسته شده برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۸}{۶^۲}=\frac{۸}{۳۶}=\frac{۲}{۹}$$

۲- گزینه‌ی ۳ اگر تاس اول ۵ یا ۶ بیاید، برای تاس دوم ۶ حالت متصور است، اگر تاس دوم ۵ یا ۶ بیاید نیز برای تاس اول ۶ حالت ممکن است اتفاق بیفتد، با حذف ۴ حالت تکراری (که دو بار شمرده شده‌اند) از این ۲۴ حالت $((۶,۶),(۶,۵),(۵,۶),(۵,۵))$ احتمال موردنظر برابر است با:

$$P(A)=\frac{۲۴-۴}{۶^۲}=\frac{۲۰}{۳۶}=\frac{۵}{۹}$$

۳- گزینه‌ی ۲ اگـر رابطه‌ی نوشـته شـده تابع باشـد، برای هر کـدام از اعضای A به تعـداد اعضای B حق انتخـاب داریم، پس تعـداد توابع برابر $\underbrace{۸\times ۸\times \cdots \times ۸}_{\text{۶ بار}}=۸^۶$ است.

اگر تابع مورد نظر یک به یک باشد، در هر مرحله یکی از حق انتخاب‌ها کم می‌شود، یعنی تعداد توابع یک به یک برابر است با: $\underbrace{۸\times ۷\times ۶\times ۵\times ۴\times ۳}_{\text{۶ عدد}}$، پس داریم:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۸\times ۷\times ۶\times \cdots \times ۳}{۸^۶}=\frac{۸!}{۸^۶\times ۲}=\frac{۸!}{۲^{۱۸}\times ۲}=\frac{۸!}{۲^{۱۹}}$$

۴- گزینه‌ی ۲ احتمال این که هر ۴ مهره سفید یا هر ۴ تا سیاه باشند، برابر است با:

$$p(A)=\frac{\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۲}+\binom{۳}{۲}\binom{۲}{۲}}{\binom{۸}{۲}\binom{۶}{۲}}=\frac{۱۰\times ۶+۳\times ۱}{۲۸\times ۱۵}=\frac{۶۳}{۲۸\times ۱۵}=\frac{۳}{۲۰}=۰/۱۵$$

۵- گزینه‌ی ۴ تعداد زیر مجموعه‌های ۶ عضوی یک مجموعه‌ی ده عضوی برابر است با $\binom{۱۰}{۶}$ از طرفی مجموعه‌ی موردنظر شامل ۲ و ۳ هست ولی شامل ۴ نیست، پس باید از ۷ عضو باقیمانده‌ی A، ۴ عضو انتخاب کرد که با ۲ و ۳ تشکیل یک مجموعه‌ی ۶ عضوی دهند.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۷}{۴}}{\binom{۱۰}{۶}}=\frac{\frac{۷\times۶\times۵}{۳\times۲\times۱}}{\frac{۱۰\times۹\times۸\times۷}{۴\times۳\times۲\times۱}}=\frac{۷\times۵}{۱۰\times۳\times۷}=\frac{۱}{۶}$$

۶- گزینه‌ی ۱ در حالت کلی می‌دانیم $P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)$، همچنین می‌دانیم اگر A زیرمجموعه‌ی B باشد، آن‌گاه $A\cap B=A$، پس در حالت $A\subset B$، فرمول فوق به $P(B-A)=P(B)-P(A)$ تبدیل می‌شود.

۷- گزینه‌ی ۲ برای محاسبه‌ی تعداد حالاتی که ۳ حرف A کنار هم هستند، آن ۳ را با هم یک شیء درنظر می‌گیریم که با ۴ حرف P، D، N و M تشکیل ۵ شیء می‌دهند. در این صورت احتمال مطلوب برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۵!}{\frac{۷!}{۳!}}=\frac{۳!\times۵!}{۷!}=\frac{۶}{۷\times۶}=\frac{۱}{۷}$$

۸- گزینه‌ی ۴ اگر پیشامد A، ۲ بودن شماره‌ی گوی قرمز و پیشامد B، ۲ بودن شماره‌ی گوی آبی باشد، احتمال آن که لااقل شماره‌ی یکی از آن‌ها ۲ باشد، برابر است با:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۵}=\frac{۴+۵-۱}{۲۰}=\frac{۸}{۲۰}=\frac{۲}{۵}=۰/۴$$

توجه کنید که پیشامد A و پیشامد B مستقل هستند، پس: $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

۹- گزینه‌ی ۱ اگر عدد اول خارج شده زوج باشد، تعداد حالت‌های یکی درمیان برابر است با:

جایگشت اعداد فرد

$$\underline{۳}\times۳\times\underline{۲}\times۲\times\underline{۱}\times۱=۳!\times۳!$$

جایگشت اعداد زوج

اگر عدد اول خارج شده فرد باشد نیز همین تعداد به‌دست می‌آید، پس احتمال خواسته شده برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲\times۳!\times۳!}{۶!}=\frac{۲\times۶\times۶}{۶\times۱۲۰}=\frac{۱}{۱۰}=۰/۱$$

۱۰- گزینه‌ی ۲ در حالت‌های زیر مجموع اعداد دو کارت برابر ۱۱ است:

$$\{۲,۹\},\{۳,۸\},\{۴,۷\},\{۵,۶\}$$

بنابراین احتمال این که مجموع اعداد دو کارت برابر ۱۱ باشد، برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{\binom{۹}{۲}}=\frac{۱}{۹}$$

۱۱- گزینه‌ی ۳ از پیشامد متمم استفاده می‌کنیم، احتمال آن که در این عدد سه رقمی هیچ دو رقمی یکسان نباشد برابر است با:

$$P(A')=\frac{۵\times۴\times۳}{۵\times۵\times۵}=\frac{۱۲}{۲۵}$$

بنابراین احتمال خواسته شده برابر است با:

$$P(A)=۱-p(A')=۱-\frac{۱۲}{۲۵}=\frac{۱۳}{۲۵}=\frac{۱۳\times۴}{۱۰۰}=\frac{۵۲}{۱۰۰}=۰/۵۲$$

۱۲- گزینه‌ی ۳ با استفاده از پیشامد متمم، احتمال این که در پرتاب ۲ سکه، حداقل یکی رو بیاید برابر است با:

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۱}{۲^۲}=۱-\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}$$

با توجه به مستقل بودن پرتاب سکه‌ها و تاس، احتمال خواسته شده برابر است با:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{۳}{۴}\times\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۴}$$

سراسری خارج از کشور – ۹۱

۱۳- گزینه‌ی ۴ **راه‌حل اول**: از پیشامد متمم استفاده می‌کنیم. اگر رنگ مهره‌ها فقط از دو رنگ نباشد، یا هر سه از یک رنگ هستند، یا رنگ هر سه متفاوت است.

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۱}+\binom{۴}{۳}+\binom{۵}{۳}+\binom{۴}{۳}}{\binom{۱۳}{۳}}=۱-\frac{۴\times۵\times۴+۴+۱۰+۴}{\frac{۱۳\times۱۲\times۱۱}{۳\times۲}}=۱-\frac{۸۰+۱۸}{۲۶\times۱۱}=\frac{۲۸۶-۹۸}{۲۸۶}=\frac{۱۸۸}{۲۸۶}=\frac{۹۴}{۱۴۳}$$

راه‌حل دوم: تعداد حالاتی که مهره‌ها از دو رنگ هستند را به صورت مستقیم محاسبه می‌کنیم. به این ترتیب که در هر حالت تعداد حالات این که ۲ مهره از یک رنگ باشند و مهره‌ی سوم رنگی متفاوت داشته باشد را می‌شماریم.

$$P(A)=\frac{\binom{۴}{۲}\binom{۹}{۱}+\binom{۵}{۲}\binom{۸}{۱}+\binom{۴}{۲}\binom{۹}{۱}}{\binom{۱۳}{۳}}=\frac{۶\times۹+۱۰\times۸+۶\times۹}{\frac{۱۳\times۱۲\times۱۱}{۳\times۲}}=\frac{۵۴\times۲+۸۰}{۲۸۶}=\frac{۱۸۸}{۲۸۶}=\frac{۹۴}{۱۴۳}$$

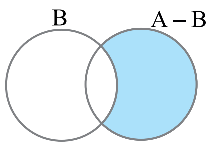
۱۴- گزینه‌ی ۳ احتمال آن که عقربه‌ی A روی شماره‌ی فرد قرار بگیرد برابر $\frac{۲}{۴}$ و احتمال آن که عقربه‌ی B روی شماره‌ی فرد قرار بگیرد برابر $\frac{۳}{۵}$ است. احتمال آن که لااقل یکی از آن‌ها روی شماره‌ی فرد قرار گیرد برابر است با:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=\frac{۲}{۴}+\frac{۳}{۵}-\frac{۲}{۴}\times\frac{۳}{۵}=\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۵}-\frac{۳}{۱۰}=\frac{۵+۶-۳}{۱۰}=۰/۸$$

توجه کنید که رابطه‌ی $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ با توجه به مستقل بودن چرخش دو عقربه‌ی A و B نوشته شده است.

۱۵- گزینه‌ی ۳ احتمال رخ ندادن B سه برابر احتمال رخ دادن آن است، پس:

$$P(B')=۳P(B)\Rightarrow ۱-P(B)=۳P(B)\Rightarrow P(B)=\frac{۱}{۴}$$



با توجه به نمودار ون روبه‌رو می‌دانیم دو پیشامد $A-B$ و B دو پیشامد ناسازگار هستند و داریم $(A-B)\cup B=A\cup B$ پس:

$$P(A\cup B)=P((A-B)\cup B)=P(A-B)+P(B)=\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۴}=\frac{۵}{۱۲}$$

۱۶- گزینه‌ی ۴ **راه‌حل اول**: در حالت‌های زیر مجموع اعداد ظاهر شده برابر ۹ است.

$(۳,۶),(۶,۳),(۴,۵),(۵,۴)$

بنابراین احتمال پیشامد A برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۳۶}$$

از رابطه‌ی $P(A)=۲P(B)$ نتیجه می‌شود $P(B)=\frac{۲}{۳۶}$.

از بین اعداد داده شده در گزینه‌ها، فقط احتمال آن که مجموع اعداد ظاهر شده برابر ۱۱ باشد برابر $\frac{۲}{۳۶}$ است:

$$B=\{(۵,۶),(۶,۵)\}$$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۲}{۳۶}$$

راه‌حل دوم: در پرتاب دو تاس احتمال آن که مجموع شماره‌ی دو تاس برابر n باشد برابر $P(x=n)=\frac{۶-|۷-n|}{۳۶}$ می‌باشد.

بنابراین داریم:

$$P(A)=\frac{۶-|۷-۹|}{۳۶}=\frac{۴}{۳۶}\Rightarrow P(B)=\frac{۲}{۳۶}\Rightarrow\frac{۶-|۷-n|}{۳۶}=\frac{۲}{۳۶}\Rightarrow ۶-|۷-n|=۲\Rightarrow|۷-n|=۴\Rightarrow ۷-n=\pm۴\Rightarrow n=۱۱ \text{ یا } n=۳$$

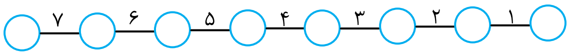
۱۷- گزینه‌ی ۴ از پیشامد متمم استفاده می‌کنیم، احتمال این که عدد رو شده در تمام تاس‌ها متفاوت باشد، برابر است با:

$$P(A')=\frac{۶\times۵\times۴\times۳}{۶^۴}=\frac{۶۰}{۶^۳}=\frac{۱۰}{۳۶}=\frac{۵}{۱۸}$$

بنابراین احتمال خواسته شده برابر است با:

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۵}{۱۸}=\frac{۱۳}{۱۸}$$

۱۸- گزینه‌ی ۱ دانش‌آموزان تجربی به تعداد $7!$ حالت در یک صف قرار می‌گیرند، بین و طرفین آن‌ها مطابق شکل زیر ۸ جا برای قرار گرفتن دانش‌آموزان ریاضی قرار دارد، در این صورت، دانش‌آموزان ریاضی کنار هم قرار نخواهند گرفت.



$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{7!\times\binom{8}{5}\times 5!}{12!}=\frac{\frac{7!\,8!\,5!}{5!\,3!}}{12!}=\frac{7\times6\times5\times4}{12\times11\times10\times9}=\frac{7}{11\times9}=\frac{7}{99}$$

۱۹- گزینه‌ی ۴ پیشامد موفقیت آقای (الف) را با A و پیشامد موفقیت آقای (ب) را با B نشان می‌دهیم.

$$\begin{cases}P(A-B)=0/3\Rightarrow P(A)-P(A\cap B)=0/3\\ P(B-A)=0/15\Rightarrow P(B)-P(A\cap B)=0/15\end{cases}\Rightarrow P(A)-P(B)=0/15$$

ضمناً $P(A)$ پنجاه درصد بیش‌تر از $P(B)$ است، پس:

$$\begin{cases}P(A)=1/5P(B)\\ P(A)=P(B)+0/15\end{cases}\Rightarrow 1/5P(B)=P(B)+0/15\Rightarrow 0/5P(B)=0/15\Rightarrow P(B)=\frac{15}{50}=0/3\Rightarrow P(A)=0/45$$

$$P(A-B)=0/3\Rightarrow 0/45-P(A\cap B)=0/3\Rightarrow P(A\cap B)=0/15$$

احتمال آن که هیچ کدام وارد مجلس نشوند برابر $P(A'\cap B')$ است.

$$P(A'\cap B')=P((A\cup B)')=1-P(A\cup B)=1-(P(A)+P(B)-P(A\cap B))=1-(0/45+0/3-0/15)=0/4$$

۲۰- گزینه‌ی ۳ اگر پیشامد مضرب ۴ بودن عدد موردنظر را با A و پیشامد مضرب ۵ بودن را با B نشان دهیم، پیشامد آن که عدد موردنظر مضرب ۴ و مضرب ۵ نباشد، $A'\cap B'$ است:

$$P(A'\cap B')=P((A\cup B)')=1-(P(A\cup B))=1-(P(A)+P(B)-P(A\cap B))$$

ضمناً می‌دانیم احتمال این که عدد موردنظر مضرب ۴، ۵ و هردوی آن‌ها (مضرب ۲۰) باشد به ترتیب برابر است با:

$$P(A)=\frac{\left[\frac{500}{4}\right]-\left[\frac{200}{4}\right]}{500-201+1}=\frac{125-50}{300}=\frac{1}{4}$$

$$P(B)=\frac{\left[\frac{500}{5}\right]-\left[\frac{200}{5}\right]}{300}=\frac{100-40}{300}=\frac{1}{5}$$

$$P(A\cap B)=\frac{\left[\frac{500}{20}\right]-\left[\frac{200}{20}\right]}{300}=\frac{25-10}{300}=\frac{1}{20}$$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P(A'\cap B')=1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{20}\right)=1-\frac{5+4-1}{20}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}=0/6$$

پاسخ تشریحی آزمون ۵

۱- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول**: زوج بودن عدد به‌دست آمده را با A و ظاهر شدن ۴ یا ۶ را با B نمایش می‌دهیم:

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}}=\frac{2}{3}$$

راه‌حل دوم: می‌دانیم عدد زوج به‌دست آمده، یعنی ۲ یا ۴ یا ۶. احتمال این‌که این عدد ۴ یا ۶ باشد، برابر است با $\frac{2}{3}$.

۲- گزینه‌ی ۳ مجموعاً $20+80+10=110$ دانشجوی دختر وجود دارد، احتمال مهندس بودن یکی از آنان برابر است با:

$$P(A)=\frac{20}{110}=\frac{2}{11}$$

پس احتمال آن‌که وی دانشجوی مهندسی نباشد، برابر است با:

$$P(A')=1-P(A)=1-\frac{2}{11}=\frac{9}{11}$$

۳- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول:** با توجه به این‌که یکی از فرزندان این خانواده‌ی سه فرزندی پسر است، این حالت که هر سه فرزند دختر باشند از فضای نمونه‌ای حذف می‌شود، پس فضای نمونه‌ای $۲^{۳}-۱$ عضو دارد. احتمال این‌که دو فرزند دختر در این خانواده باشد، برابر است با:

$$\frac{\binom{۳}{۲}}{۲^{۳}-۱}=\frac{۳}{۷}$$

راه‌حل دوم: اگر A پیشامد این باشد که دو فرزند خانواده دختر باشند و B پیشامد پسر بودن لااقل یکی از فرزندان باشد، احتمال خواسته شده $P(A|B)$ است.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{۳}{۸}}{۱-\frac{۱}{۸}}=\frac{۳}{۷}$$

سراسری خارج از کشور - ۸۹

۴- گزینه‌ی ۴ **راه‌حل اول:** احتمال سفید بودن دومی را در دو حالت سفید یا سیاه بودن اولی محاسبه می‌کنیم.

$$P=\underset{\text{سفید بودن اولی}}{\frac{۶}{۱۵}}\times\underset{\text{سفید بودن دومی}}{\frac{۵}{۱۴}}+\underset{\text{سیاه بودن اولی}}{\frac{۹}{۱۵}}\times\underset{\text{سفید بودن دومی}}{\frac{۶}{۱۴}}=\frac{۶}{۱۵}(\frac{۵}{۱۴}+\frac{۹}{۱۴})=\frac{۲}{۵}\times ۱=\frac{۲}{۵}$$

راه‌حل دوم: از آن‌جا که راجع به مهره‌ی اول خارج شده هیچ اطلاعی نداریم، احتمال سفید بودن دومین مهره برابر احتمال سفید بودن یک مهره یعنی $\frac{۶}{۱۵}$ یا $\frac{۲}{۵}$ است.

سراسری - ۹۲

۵- گزینه‌ی ۴ با استفاده از فرمول احتمال شرطی داریم:

$$P(B|A')=\frac{P(B\cap A')}{P(A')}=\frac{P(B-A)}{۱-P(A)}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{۱-P(A)}$$

با توجه به این‌که می‌دانیم $A\subset B$، پس $A\cap B=A$ پس داریم:

$$P(B|A')=\frac{P(B)-P(A)}{۱-P(A)}=\frac{\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۳}}{۱-\frac{۱}{۳}}=\frac{\frac{۵}{۱۲}}{\frac{۲}{۳}}=\frac{۵}{۸}$$

۶- گزینه‌ی ۴ احتمال بومی بودن ۳ نفر از ۴ نفر برابر است با:

$$P=\binom{۴}{۳}(۰/۶)^{۳}\times(۱-۰/۶)=۴\times(۰/۶)^{۳}\times ۰/۴=۱/۶\times ۰/۲۱۶=۰/۳۴۵۶$$

۷- گزینه‌ی ۴ متمم دختر بودن لااقل دو نفر از فرزندان، این است که تعداد دخترها صفر یا یک باشد، پس احتمال خواسته شده برابر است با:

$$P=۱-(\frac{\binom{۵}{۰}}{۲^{۵}}+\frac{\binom{۵}{۱}}{۲^{۵}})=۱-\frac{۱+۵}{۳۲}=\frac{۳۲-۶}{۳۲}=\frac{۲۶}{۳۲}=\frac{۱۳}{۱۶}$$

۸- گزینه‌ی ۱ این‌که حداقل ۲ عدد از ۵ عدد دانه‌ی کاشته شده جوانه بزنند، یعنی تعداد دانه‌های جوانه زده صفر یا یک نباشد، پس با استفاده از احتمال دوجمله‌ای داریم:

$$P=۱-(\binom{۵}{۰}(۰/۸)^{۰}(۰/۲)^{۵}+\binom{۵}{۱}(۰/۸)^{۱}(۰/۲)^{۴})=۱-((\frac{۱}{۵})^{۵}+۵\times\frac{۴}{۵}\times(\frac{۱}{۵})^{۴})=۱-\frac{۱+۲۰}{۵^{۵}}=۱-\frac{۲۱\times ۲^{۵}}{۱۰^{۵}}=۱-\frac{۲۱\times ۳۲}{۱۰^{۵}}=۱-۰/۰۰۶۷۲=۰/۹۹۳۲۸$$

سراسری - ۸۹

۹- گزینه‌ی ۱ دو پیشامد مستقل هستند، پس احتمال A به شرط B برابر احتمال A می‌باشد، پس:

$$P(A|B)=\frac{۳}{۱۰}\Rightarrow P(A)=۰/۳\quad,\quad P(B|A)=\frac{۴}{۱۰}\Rightarrow P(B)=۰/۴$$

بنابراین داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=۰/۳+۰/۴-۰/۳\times ۰/۴=۰/۷-۰/۱۲=۰/۵۸$$

۱۰- گزینه‌ی ۱ در حالت‌های زیر جمع شماره‌ها کم‌تر از ۶ است:

$$(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴)\quad,\quad(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳)\quad,\quad(۳,۱),(۳,۲)\quad,\quad(۴,۱)$$

در ۵ حالت از حالت‌های بالا یکی از تاس‌ها ۲ آمده است. پس احتمال خواسته شده برابر $\frac{۵}{۱۰}=\frac{۱}{۲}$ است.

۱۱- گزینه‌ی ۲ احتمال پاسخ صحیح تصادفی به یک سؤال ۵ گزینه‌ای برابر $\frac{۱}{۵}$ است، پس احتمال جواب صحیح به ۳ پرسش از ۵ تا برابر است با:

$$P=\binom{۵}{۳}(\frac{۱}{۵})^{۳}(\frac{۴}{۵})^{۲}=۱۰\times\frac{۴^{۲}}{۵^{۵}}=\frac{۱۰\times۲^{۴}\times۲^{۵}}{۱۰^{۵}}=\frac{۲^{۹}}{۱۰^{۴}}=\frac{۵۱۲}{۱۰۰۰۰}=۰/۰۵۱۲$$

سراسری - ۹۲

۱۲- گزینه‌ی ۲ احتمال آن که لامپ انتخابی نهایی از جعبه‌ی اول بوده باشد، برابر $\frac{۸}{۱۴}$ و احتمال آن‌که از جعبه‌ی دوم بوده باشد برابر $\frac{۶}{۱۴}$ است، پس احتمال معیوب بودن لامپ انتخابی از جعبه‌ی جدید برابر است با:

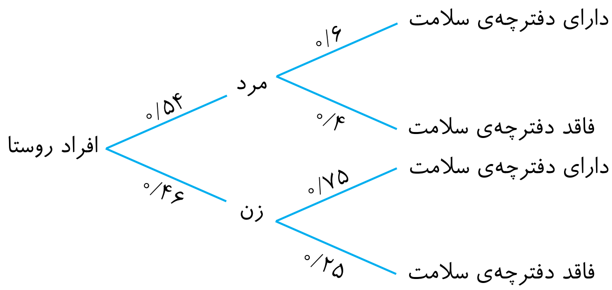
$$\frac{۸}{۱۴}\times\frac{۴}{۲۴}+\frac{۶}{۱۴}\times\frac{۳}{۱۵}=\frac{۴}{۷}\times\frac{۱}{۶}+\frac{۳}{۷}\times\frac{۱}{۵}=\frac{۲}{۲۱}+\frac{۳}{۳۵}=\frac{۱۰+۹}{۷\times۳\times۵}=\frac{۱۹}{۱۰۵}$$

۱۳- گزینه‌ی ۴ برای آن‌که برای اولین بار در بار X ام موفقیت حاصل شود، می‌بایست در $X-۱$ بار قبلی شکست خورده باشیم، احتمال هر بار شکست متمم احتمال موفقیت یعنی $۱-P$ است، پس تابع احتمال خواسته شده برابر است با:

$$\underbrace{(۱-P)^{X-۱}}_{\text{پیروزی در } X-۱ \text{ بار قبلی}}\underbrace{P}_{\text{پیروزی در بار آخر}}$$

۱۴- گزینه‌ی ۲ با توجه به نمودار درختی زیر، احتمال این‌که یک فرد، دفترچه‌ی سلامت داشته باشد، برابر است با:

$$P=۰/۵۴\times۰/۶+۰/۴۶\times۰/۷۵=۰/۳۲۴+۰/۳۴۵=۰/۶۶۹$$



سراسری خارج از کشور - ۹۰

۱۵- گزینه‌ی ۳ با استفاده از قانون جمع احتمالات $P(A\cap B)$ را پیدا می‌کنیم:

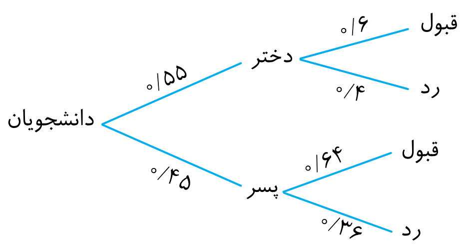
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow\frac{۱}{۳}+\frac{۲}{۵}-P(A\cap B)=\frac{۷}{۱۵}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۱}{۳}+\frac{۲}{۵}-\frac{۷}{۱۵}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۴}{۱۵}$$

بنابراین با استفاده از فرمول احتمال شرطی داریم:

$$P(A|B)+P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}+\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{\frac{۴}{۱۵}}{\frac{۲}{۵}}+\frac{\frac{۴}{۱۵}}{\frac{۱}{۳}}=\frac{۲}{۳}+\frac{۴}{۵}=\frac{۲۲}{۱۵}$$

۱۶- گزینه‌ی ۲ طبق نمودار درختی روبه‌رو احتمال این‌که یک دانشــجوی سال اول، تمام واحدهای درسی خود را گذرانده باشد، برابر است با:

$$P=۰/۵۵\times۰/۶+۰/۴۵\times۰/۶۴=۰/۳۳+۰/۲۸۸=۰/۶۱۸=۶۱/۸٪$$



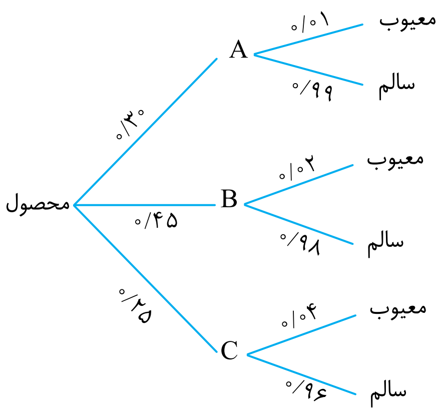
۱۷- گزینه‌ی ۴ برای آن‌که جمع کل احتمالات برابر یک باشد، داریم:

$$\frac{a+۱}{۲۱}+\frac{۱}{۳}+\frac{a}{۷}+\frac{۵}{۲۱}=۱\Rightarrow\frac{a+۱+۷+۳a+۵}{۲۱}=۱\Rightarrow۴a+۱۳=۲۱\Rightarrow۴a=۸\Rightarrow a=۲$$

بنابراین داریم:

$$P(X\geq۳)=P(X=۳)+P(X=۴)=\frac{۲}{۷}+\frac{۵}{۲۱}=\frac{۱۱}{۲۱}$$

۱۸- گزینه‌ی ۲ مطابق نمودار درختی روبه‌رو، احتمال سالم بودن یک محصول برابر است با:



$$P=۰/۳\times ۰/۹۹+۰/۴۵\times ۰/۹۸+۰/۲۵\times ۰/۹۶=\frac{۳۰(۱۰۰-۱)+۴۵(۱۰۰-۲)+۲۵(۱۰۰-۴)}{۱۰۰۰۰}$$

$$=\frac{۳۰۰۰-۳۰+۴۵۰۰-۹۰+۲۵۰۰-۱۰۰}{۱۰۰۰۰}=\frac{۱۰۰۰۰-۲۲۰}{۱۰۰۰۰}=۱-\frac{۲۲}{۱۰۰۰}=۱-۰/۰۲۲=۰/۹۷۸$$

۱۹- گزینه‌ی ۴ مهره‌ای که از ظرف دوم خارج می‌شود به احتمال $\frac{۷}{۱۲}$ از ظرف اول و به احتمال $\frac{۵}{۱۲}$ از ظرف دوم است، پس احتمال سفید بودن آن برابر است با:

$$P=\frac{۷}{۱۲}\times\frac{۶}{۲۴}+\frac{۵}{۱۲}\times\frac{۳}{۱۸}=\frac{۷}{۴۸}+\frac{۵}{۷۲}=\frac{۲۱+۱۰}{۱۴۴}=\frac{۳۱}{۱۴۴}$$

۲۰- گزینه‌ی ۱ احتمال انتخاب هرکدام از جعبه‌ها $\frac{۱}{۲}$ است، پس احتمال سفید بودن هر دو مهره برابر است با:

$$P=\frac{۱}{۲}\times\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۲}}+\frac{۱}{۲}\times\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۹}{۲}}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۶}{۲۱}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۳۶}=\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۲۴}=\frac{۲۴+۷}{۷\times ۲۴}=\frac{۳۱}{۱۶۸}$$

پاسخ تشریحی آزمون ۶

۱- گزینه‌ی ۲ می‌دانیم مجموع اعداد ظاهر شده، کم‌تر از ۷ یعنی از ۲ تا ۶ است، پس یکی از حالت‌های زیر اتفاق افتاده است:

$$(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۱,۵),(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۲,۴),(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳),(۴,۱),(۴,۲),(۵,۱)$$

در حالت‌های زیر از زوج مرتب‌های بالا، هر دو عدد زوج است.

$$(۲,۲),(۲,۴),(۴,۲)$$

بنابراین احتمال خواسته شده برابر است با:

$$P(A)=\frac{۳}{۵+۴+۳+۲+۱}=\frac{۳}{۱۵}=\frac{۱}{۵}=۰/۲$$

۲- گزینه‌ی ۲ در یک‌بار پرتاب دو تاس سالم با هم، احتمال زوج بودن هر دو عدد رو شده برابر است با:

$$p=\frac{۳\times ۳}{۶\times ۶}=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین احتمال این‌که در یک یا دو یا سه بار پرتاب دو تاس، برای اولین بار هر دو عدد زوج بیاید برابر است با:

$$\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۴}+(\frac{۳}{۴})^{۲}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۱۶}+\frac{۹}{۶۴}=\frac{۱۶+۱۲+۹}{۶۴}=\frac{۳۷}{۶۴}$$

سراسری - ۹۱

۳- گزینه‌ی ۲ مهره‌های سفید را با W و مهره‌های سیاه را با B نمایش می‌دهیم، در حالت‌های زیر مجموع مهره‌ها برابر ۶ است.

$$(B_۱,B_۵),(W_۱,W_۵),(B_۱,W_۵),(W_۱,B_۵),(B_۲,B_۴),(W_۲,W_۴),(B_۲,W_۴),(W_۲,B_۴),(B_۳,W_۳)$$

در این ۹ حالت، در چهار حالت مهره‌ها همرنگ هستند، پس احتمال خواسته شده برابر $\frac{۴}{۹}$ است.

۴- گزینه‌ی ۳ احتمال خرید هر نفر از فروشگاه ۰/۶ و احتمال عدم خرید توسط او $۰/۴=۰/۶-۱$ است، پس احتمال خرید کردن ۳ نفر از ۴ نفر برابر است با:

$$\binom{۴}{۳}(۰/۶)^{۳}(۰/۴)=۴\times ۰/۲۱۶\times ۰/۴=۱/۶\times ۰/۲۱۶=۰/۳۴۵۶$$

سراسری خارج از کشور - ۹۰

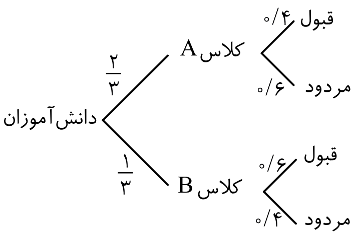
۵- گزینه‌ی ۲ با توجه به فرمول اتحاد شرطی داریم:

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}\Rightarrow ۰/۷=\frac{P(B\cap A)}{۰/۲}\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۱۴$$

برای یافتن احتمال خواسته شده با استفاده از فرمول‌های احتمال داریم:

$$P(B'|A')=\frac{P(B'\cap A')}{P(A')}=\frac{P\left((A\cup B)'\right)}{P(A')}=\frac{۱-P(A\cup B)}{۱-P(A)}=\frac{۱-\left(P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right)}{۱-P(A)}=\frac{۱-(۰/۲+۰/۲۲-۰/۱۴)}{۱-۰/۲}=\frac{۰/۷۲}{۰/۸}=۰/۹$$

۶- گزینه‌ی ۲ تعداد داوطلبان کلاس A دو برابر تعداد داوطلبان کلاس B اســت، پس احتمال آن‌که داوطلبی از کلاس A باشد برابر $\frac{۲}{۳}$ و احتمال آن‌که از کلاس B باشد $\frac{۱}{۳}$ است.



اگر پیشامد قبول شدن را C و پیشامد از کلاس A بودن را A بنامیم، احتمال خواسته شده برابر است با:

$$p(A|C)=\frac{p(A\cap C)}{p(C)}=\frac{\frac{۲}{۳}\times ۰/۴}{\frac{۲}{۳}\times ۰/۴+\frac{۱}{۳}\times ۰/۶}=\frac{\frac{۸}{۳۰}}{\frac{۸}{۳۰}+\frac{۶}{۳۰}}=\frac{۸}{۱۴}=\frac{۴}{۷}$$

مقدار دقیق عدد $\frac{۴}{۷}$ برابر $۰/\overline{۵۷۱۴۲۸}$ است که تقریباً برابر ۰/۵۷ است.

۷- گزینه‌ی ۲ کوچک‌ترین عدد روشده برابر ۳ باشد، برابر حالاتی است که لااقل یکی از اعداد روشده ۳ باشد و تاس دیگر عددی بزرگ‌تر یا مساوی ۳ (۳، ۴، ۵ یا ۶) باشد.

$$P(X=۳)=\frac{۴+۴-۱}{۳۶}=\frac{۷}{۳۶}$$

توجه کنید که حالت $(۳,۳)$ را دوبار شمرده بودیم که یک‌بار از تعداد حالات کم کردیم.

۸- گزینه‌ی ۳ برای آن‌که حداکثر بعد از پرتاب سوم سکه، مجاز به پرتاب تاس باشیم یعنی دوبار اول یا دوم یا سوم، اولین بار سکه رو آمده است که احتمال آن برابر است با:

$$\underbrace{\frac{۱}{۲}}_{\text{بار اول رو}}+\underbrace{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}}_{\text{بار اول پشت و بار دوم رو}}+\underbrace{(\frac{۱}{۲})^۲\times\frac{۱}{۲}}_{\text{دو بار اول پشت و بار سوم رو}}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}=\frac{۷}{۸}$$

از آن‌جا که احتمال آن‌که در پرتاب یک تاس عدد روشده مضرب ۳ باشد برابر $\frac{۲}{۶}$ است، پس احتمال خواسته شده برابر ضرب این دو احتمال است:

$$\frac{۷}{۸}\times\frac{۲}{۶}=\frac{۷}{۲۴}$$

۹- گزینه‌ی ۱ اگر پیشامد A قرمز بودن رنگ مهره‌ی اول و پیشامد B قرمز بودن رنگ مهره‌ی دوم باشد، احتمال خواسته شده $P(A|B)$ است:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{۵}{۹}\times\frac{۴}{۸}}{\frac{۵}{۹}\times\frac{۴}{۸}+\frac{۴}{۹}\times\frac{۵}{۸}}=\frac{\frac{۵}{۹}\times\frac{۱}{۲}}{\frac{۵}{۹}(\frac{۴}{۸}+\frac{۴}{۸})}=\frac{۱}{۲}$$

برای پیدا کردن $P(B)$ دو حالت در نظر گرفتیم، اولی قرمز و دومی قرمز یا اولی آبی و دومی قرمز.

توجه: برای پیدا کردن $P(B)$ با توجه به این‌که اطلاعی از رنگ مهره‌ی اول خارج شده نداریم می‌توانیم احتمال قرمز بودن مهره‌ی اول را در نظر بگیریم:

$$P(B)=\frac{۵}{۹}$$

۱۰- گزینه‌ی ۱ می‌دانیم اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند A' و B نیز مستقل هستند، پس:

$$P(A|B)+P(A'|B)=P(A)+P(A')=۱$$

۱۱- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول:** با توجه به این‌که نسبت به دو مهره‌ی اول اطلاعی نداریم، احتمال سفید بودن مهره‌ی سوم برابر احتمال سفید بودن یک مهره در بار اول خارج کردن. یعنی $\frac{۳}{۷}$ است.

راه‌حل دوم: بسته به این‌که مهره‌های اول و دوم از چه رنگ بوده‌اند، حالت‌های زیر متصور است.

$$P=\underbrace{\frac{۳}{۷}\times\frac{۲}{۶}}_{\text{دو سفید}}\times\frac{۱}{۵}+\underbrace{\frac{۴}{۷}\times\frac{۳}{۶}}_{\text{دو سیاه}}\times\frac{۳}{۵}+\underbrace{۲\times\frac{۴}{۷}\times\frac{۳}{۶}}_{\text{یک سفید، یک سیاه}}\times\frac{۲}{۵}=\frac{۱}{۳۵}+\frac{۶}{۳۵}+\frac{۸}{۳۵}=\frac{۱۵}{۳۵}=\frac{۳}{۷}$$

۱۲- گزینه‌ی ۲ احتمال انتقال بیماری به ۴ نفر از ۶ نفر برابر است با:

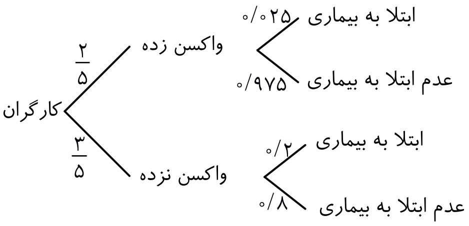
$$\binom{۶}{۴}(۰/۲)^۴\times(۱-۰/۲)^۲=\frac{۶\times۵}{۲}\times(\frac{۱}{۵})^۴(\frac{۴}{۵})^۲=\frac{۱۵\times۴^۲}{۵^۶}=\frac{۳\times۲^۴\times۲^۵}{۵^۵\times۲^۵}=\frac{۳\times۲^۹}{۱۰^۵}=\frac{۳\times۵۱۲}{۱۰۰۰۰۰}=۰/۰۱۵۳۶$$

۱۳- گزینه‌ی ۲ A و B دو پیشامد مستقل هستند، پس $P(A\cap B)=P(A)P(B)$، ضمناً با استفاده از قاعده‌ی جمع احتمالات داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)\Rightarrow ۰/۸=P(A)+۰/۳-۰/۳P(A)\Rightarrow ۰/۷P(A)=۰/۵\Rightarrow P(A)=\frac{۵}{۷}$$

از طرفی می‌دانیم اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، $P(A|B)=P(A)$ پس $P(A|B)=\frac{۵}{۷}$.

۱۴- گزینه‌ی ۱ با توجه به نمودار روبه‌رو احتمال انتقال بیماری به کارگر مورد نظر برابر است با:



$$P=\frac{۲}{۵}\times\frac{۲۵}{۱۰۰۰}+\frac{۳}{۵}\times\frac{۲}{۱۰}=\frac{۱}{۱۰۰}+\frac{۱۲}{۱۰۰}=۰/۱۳$$

سراسری - ۸۹

۱۵- گزینه‌ی ۳ احتمال موفقیت در هر آزمایش برابر p و احتمال شکست برابر $۱-p$ است. اگر $n-$ اُمین موفقیت در $X-$ اُمین آزمایش اتفاق بیفتد، تابع احتمال برابر است با:

$$\underbrace{\binom{X-۱}{n-۱}(۱-p)^{X-۱-(n-۱)}p^{(n-۱)}}_{\text{احتمال دوجمله‌ای } n-۱ \text{ پیروزی در } X-۱ \text{ بار قبلی}}\times \underbrace{p}_{\text{پیروزی در بار آخر}}=\binom{X-۱}{n-۱}(۱-p)^{X-n}p^n=\binom{X-۱}{n-۱}(۱-p)^{X-n}p^n$$

۱۶- گزینه‌ی ۳ تعداد موش‌های سفید خارج شده (X) می‌تواند صفر، یک یا دو باشد، احتمال هر کدام از آن‌ها برابر است با:

$$P(X=۰)=\frac{\binom{۴}{۰}\binom{۶}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}}=\frac{۱\times\frac{۶\times۵}{۲}}{\frac{۱۰\times۹}{۲}}=\frac{۱۵}{۴۵}=\frac{۱}{۳}=\frac{۵}{۱۵}$$

$$P(X=۱)=\frac{\binom{۴}{۱}\binom{۶}{۱}}{\binom{۱۰}{۲}}=\frac{۴\times۶}{۴۵}=\frac{۸}{۱۵}$$

$$P(X=۲)=\frac{\binom{۴}{۲}\binom{۶}{۰}}{\binom{۱۰}{۲}}=\frac{۶}{۴۵}=\frac{۲}{۱۵}$$

بیش‌ترین مقدار مربوط به احتمال خارج شدن یک موش سفید برابر $\frac{۸}{۱۵}$ است.

سراسری - ۹۱

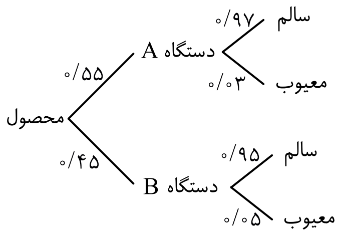
۱۷- گزینه‌ی ۲

$$P(X\le ۳)=P(X=۱)+P(X=۲)+P(X=۳)=\underbrace{\frac{۳}{۵}}_{\text{اولی سفید}}+\underbrace{\frac{۲}{۵}\times\frac{۳}{۵}}_{\text{اولی سیاه و دومی سفید}}+\underbrace{\frac{۲}{۵}\times\frac{۲}{۵}\times\frac{۳}{۵}}_{\text{دوتای اول سیاه و سومی سفید}}=\frac{۳}{۵}(۱+\frac{۲}{۵}+\frac{۴}{۲۵})=\frac{۳}{۵}\left(\frac{۲۵+۱۰+۴}{۲۵}\right)=\frac{۳\times ۳۹}{۵\times ۲۵}=\frac{۱۱۷}{۱۲۵}$$

۱۸- گزینه‌ی ۴ اگر سکه‌ی اول پرتابی رو بیاید، تاس می‌ریزیم پس دقیقاً یک سکه رو ظاهر شده و مطلوب ما می‌باشد. اگر سکه‌ی اول پشت بیاید، سه سکه‌ی دیگر می‌ریزیم، احتمال رو آمدن دقیقاً یک سکه در پرتاب سه سکه برابر است با $\frac{\binom{۳}{۱}}{۲^۳}$ و بنابراین احتمال کل برابر است با $P=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۸}=\frac{۱۱}{۱۶}$.

۱۹- گزینه‌ی ۱ اگر C را پیشامد معیوب بودن محصول درنظر بگیریم، با توجه به نمودار درختی روبه‌رو، احتمال معیوب بودن یک محصول برابر است با:

$$P(C)=۰/۵۵\times ۰/۰۳+۰/۴۵\times ۰/۰۵=۰/۰۳۹$$



بنابراین اگر بدانیم محصول معیوب است، احتمال آن‌که از دستگاه A باشد، برابر است با:

$$P(A|C)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=\frac{۰/۵۵\times ۰/۰۳}{۰/۰۳۹}=\frac{۰/۰۱۶۵}{۰/۰۳۹}=\frac{\frac{۱۶۵}{۱۰۰۰۰}}{\frac{۳۹}{۱۰۰۰}}=\frac{\frac{۱۱\times ۱۵}{۱۰}}{۱۳\times ۳}=\frac{۱۱}{۲۶}$$

۲۰- گزینه‌ی ۴ از پیشـامد متمم اسـتفاده می‌کنیم، اگر مجموع دو عدد تاس، عددی کم‌تر یا مسـاوی ۱۰ نباشد، پس مجموع دو تاس روشده ۱۱ یا ۱۲ است که حالت‌های زیر را شامل می‌شود: $(۶,۵)\quad(۵,۶)\quad(۶,۶)$

$$\Rightarrow P(A')=P(X=۱۱)+P(X=۱۲)=\frac{۲}{۳۶}+\frac{۱}{۳۶}=\frac{۱}{۱۲}\Rightarrow P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۱}{۱۲}=\frac{۱۱}{۱۲}$$

نکته: تابع توزیع احتمال مجموع دو تاس به صورت زیر است: $P(X=n)=\frac{۶-|۷-n|}{۳۶}$

پاسخ تشریحی آزمون ۷

۱- گزینه‌ی ۴ **راه‌حل اول:** رقم سمت راست یک عدد زوج یکی از اعداد ۰ یا ۲ یا ۴ یا ۶ است. تعداد حالات را در دو بخش زیر می‌شماریم:

رقم سمت راست صفر: $\boxed{۶}\times\boxed{۵}\times\boxed{۴}\times\boxed{۱}=۱۲۰$

رقم سمت راست ۲ یا ۴ یا ۶: $\boxed{۵}\times\boxed{۵}\times\boxed{۴}\times\boxed{۳}=۳۰۰$

بنابراین تعداد کل حالات برابر است با: $۱۲۰+۳۰۰=۴۲۰$

راه‌حل دوم: تعداد کل اعداد را به‌دست آورده و تعداد اعداد فرد را از آن کم می‌کنیم:

$$(\boxed{۶}\times\boxed{۶}\times\boxed{۵}\times\boxed{۴})-(\boxed{۵}\times\boxed{۵}\times\boxed{۴}\times\boxed{۳})=۷۲۰-۳۰۰=۴۲۰$$

۲- گزینه‌ی ۴ رمز مورد نظر یا شامل ۲ حرف تکراری A هست یا خیر.

$$\begin{cases}\text{باتکرار A}=\binom{۴}{۲}\times\frac{۴!}{۲!}=۶\times ۱۲=۷۲\\ \text{بی‌تکرار}=\binom{۵}{۴}\times ۴!=۵\times ۲۴=۱۲۰\end{cases}\xrightarrow{+}۷۲+۱۲۰=۱۹۲$$

۳- گزینه‌ی ۱ با توجه به فرمول‌های ترتیب و ترکیب داریم:

$$\frac{P(n,4)}{C(n-1,4)}=26\Rightarrow\frac{\frac{n!}{(n-4)!}}{\frac{(n-1)!}{4!(n-5)!}}=26\Rightarrow\frac{n}{n-4}=\frac{26}{24}\Rightarrow\frac{n}{n-4}=\frac{13}{12}\Rightarrow 12n=13n-52\Rightarrow n=52$$

۴- گزینه‌ی ۱ اگر خطوط مورد نظر موازی یا همرس نباشند، با هر ۳ خط می‌توان یک مثلث منحصربه‌فرد رسم کرد، تعداد این مثلث‌ها برابر است با:

تعداد حالات انتخاب ۳ خط از بین ۵ خط: $\binom{5}{3}=10$

۵- گزینه‌ی ۳ ابتدا ۵ حرف بی‌صدای r، t، p، m و c را کنار هم قرار می‌دهیم. این کار به $5!$ حالت قابل انجام است. بین و در طرفین این حروف ۶ مکان برای حروف صدادار e، o و u به‌وجود می‌آید، پس تعداد حالات برابر است با:

$$5!\times\binom{6}{3}\times 3!=120\times\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times6=120\times120=14400$$

۶- گزینه‌ی ۳ برای آن‌که زیرمجموعه‌ی ۵ عضوی، شامل عدد ۱ و فاقد اعداد ۲ و ۳ باشد، می‌بایست از بین اعداد $\{4,5,\dots,10\}$ ، ۴ عدد انتخاب کنیم تا با عدد یک تشکیل یک مجموعه‌ی ۵ عضوی دهند، تعداد حالات برابر است با:

$$\binom{7}{4}=\frac{7\times6\times5\times4}{4\times3\times2\times1}=35$$

۷- گزینه‌ی ۳ کلمات را بر حسب آن‌که شامل چه تعداد حرف تکراری «الف» هستند، حالت‌بندی می‌کنیم و تعداد هرکدام را جداگانه می‌شماریم:

هر ۳ حرف (الف): ۱

شامل ۲ حرف (الف): $\binom{3}{1}\times\frac{3!}{2!}=9$

شامل ۳ حرف مختلف: $\binom{4}{3}\times3!=24$

بنابراین تعداد کل حالات برابر $1+9+24=34$ است.

۸- گزینه‌ی ۳ پیشامد آن‌که در یک خانواده با n فرزند، حداقل یک فرزند دختر موجود باشد، متمم پیشامدی است که در خانواده هیچ فرزند دختری موجود نباشد و همه‌ی فرزندان پسر باشند:

$$P(A)=1-P(A')=1-(\frac{1}{2})^n\xrightarrow{P(A)>0/99}1-(\frac{1}{2})^n>0/99\Rightarrow(\frac{1}{2})^n<\frac{1}{100}\Rightarrow 2^n>100\Rightarrow n\ge7$$

۹- گزینه‌ی ۲ پیشامد A را استفاده از تفنگ X و پیشامد B را به هدف زدن در نظر می‌گیریم. احتمال خواسته شده برابر است با:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}}{(\frac{1}{3}\times\frac{3}{10})+(\frac{1}{3}\times\frac{5}{10})+(\frac{1}{3}\times\frac{7}{10})}=\frac{0/1}{\frac{3+5+7}{30}}=\frac{0/1}{\frac{15}{30}}=\frac{1}{5}=0/2$$

۱۰- گزینه‌ی ۴ برای آن‌که اعداد به‌صورت صعودی مرتب شوند، کافی است اعداد سه تاس متمایز باشند. مثلاً اگر اعداد ۱، ۲ و ۳ در پرتاب ۳ تاس ظاهر شود، فقط به یک حالت می‌توانند به‌صورت صعودی قرار گیرند، پس:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{6}{3}}{6^3}=\frac{\frac{6\times5\times4}{6}}{6\times6\times6}=\frac{20}{6\times36}=\frac{5}{6\times9}=\frac{5}{54}$$

۱۱- گزینه‌ی ۴ **راه‌حل اول:** با توجه به این‌که A و B مستقل هستند داریم $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ پس:

$$\frac{P(A-B)}{P(A)}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A)-P(A)P(B)}{P(A)}=\frac{P(A)(1-P(B))}{P(A)}=1-P(B)$$

راه‌حل دوم: از جایی‌که دو پیشامد A و B مستقل هستند، دو پیشامد A و B' نیز مستقل هستند، پس:

$$\frac{P(A-B)}{P(A)}=\frac{P(A\cap B')}{P(A)}=\frac{P(A)P(B')}{P(A)}=P(B')=1-P(B)$$

۱۲- گزینه‌ی ۱ اگر مجموع اعداد ۲ تاس اعداد ۲، ۳، ۵، ۷ یا ۱۱ باشند، مجموع آن‌ها عددی اول است که تعداد حالات هرکدام به ترتیب برابر است با ۱، ۲، ۴، ۶، ۲، پس احتمال خواسته شده برابر است با:

$$P=\frac{۱+۲+۴+۶+۲}{۶^۲}=\frac{۱۵}{۳۶}=\frac{۵}{۱۲}$$

۱۳- گزینه‌ی ۳ اگر فرض سؤال را با علائم ریاضی بنویسیم، داریم:

$$P(A|B)=۴P(B|A)\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=۴\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

با توجه به این‌که دو پیشامد A و B ناسازگار نیستند، پس $P(A\cap B)\neq ۰$ و می‌توان آن را از دو طرف تساوی ساده کرد:

$$\frac{۱}{P(B)}=\frac{۴}{P(A)}\Rightarrow P(A)=۴P(B)$$

۱۴- گزینه‌ی ۱ برای آن‌که وی بیش از ۹ امتیاز کسب کند، باید ۴ یا ۵ پرتاب وی گل شود. احتمال این کار برابر است با:

$$\binom{۵}{۴}(۰/۸)^۴(۰/۲)+\binom{۵}{۵}(۰/۸)^۵=۵\times\frac{۴^۴}{۵^۴}\times\frac{۱}{۵}+\frac{۴^۵}{۵^۵}=\frac{۲^۴\times۴^۴}{۲^۴\times۵^۴}+\frac{۴^۵\times۲^۵}{۵^۵\times۲^۵}=\frac{۱۰\times۲^{۱۲}+۲^{۱۵}}{۱۰^۵}=\frac{۲^{۱۲}(۱۰+۸)}{۱۰^۵}=\frac{۴۰۹۶\times۱۸}{۱۰^۵}=۰/۷۳۷۲۸$$

۱۵- گزینه‌ی ۳ با استفاده از قوانین احتمالات می‌دانیم:

$$\begin{cases}P(A|B)=۰/۲\Rightarrow\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{۱}{۵}\Rightarrow P(B)=۵P(A\cap B)\\ P(B|A)=۰/۲۵\Rightarrow\dfrac{P(B\cap A)}{P(A)}=\dfrac{۱}{۴}\Rightarrow P(A)=۴P(A\cap B)\\ P(A\cup B)=۰/۸\Rightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۰/۸\end{cases}\Rightarrow ۴P(A\cap B)+۵P(A\cap B)-P(A\cap B)=۰/۸$$

$$\Rightarrow ۸P(A\cap B)=۰/۸\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۱$$

حال برای محاسبه‌ی $P(A-B)$ داریم:

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=۴P(A\cap B)-P(A\cap B)=۳P(A\cap B)=۳\times۰/۱=۰/۳$$

۱۶- گزینه‌ی ۱ تعداد کل اعداد دو رقمی با ارقام متمایز برابر $۸۱=۹\times۹$ است. برای آن‌که این عدد مضرب ۵ باشد، باید رقم آخر صفر یا ۵ باشد، پس دو حالت داریم:

$$\boxed{۸}\times\underset{\substack{\uparrow\\ \text{رقم آخر}\\ \text{۵ باشد}}}{\boxed{۱}}=۸\quad,\quad\boxed{۹}\times\underset{\substack{\uparrow\\ \text{رقم آخر}\\ \text{صفر باشد}}}{\boxed{۱}}=۹$$

بنابراین ۱۷ عدد دو رقمی با ارقام متمایز مضرب ۵ وجود دارد، از این تعداد اعداد ۱۵، ۴۵، ۷۵، ۳۰، ۶۰ و ۹۰، مضرب ۳ هستند، پس:

$$P=\frac{۱۷-۶}{۸۱}=\frac{۱۱}{۸۱}$$

۱۷- گزینه‌ی ۳ احتمال را در دو حالت این‌که مهره‌ی انتقالی و مهره‌ی آخر هر دو سبز یا هر دو قرمز باشند به‌دست می‌آوریم:

$$P=\frac{۴}{۹}\times\frac{۴}{۹}+\frac{۵}{۹}\times\frac{۶}{۹}=\frac{۱۶+۳۰}{۸۱}=\frac{۴۶}{۸۱}$$

۱۸- گزینه‌ی ۴ احتمال آن‌که پنالتی به A برسد برابر $\frac{۴}{۶}$ و احتمال آن‌که به B برسد برابر $\frac{۲}{۶}$ است. بنابراین احتمال گل شدن هر پنالتی برابر است با:

$$P=\frac{۲}{۶}\times\frac{۶}{۱۰}+\frac{۴}{۶}\times\frac{۷۵}{۱۰۰}=\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۵}+\frac{۲}{۳}\times\frac{۳}{۴}=\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۲}=۰/۷$$

بنابراین احتمال گل شدن ۲ پنالتی از ۴ پنالتی برابر است با:

$$\binom{۴}{۲}\times(۰/۷)^۲\times(۰/۳)^۲=۶\times\frac{۴۹}{۱۰۰}\times\frac{۹}{۱۰۰}=\frac{۴۹\times۵۴}{۱۰۰۰۰}=۰/۲۶۴۶$$

۱۹- گزینه‌ی ۳ می‌دانیم اعداد ۳ تاس، با هم متمایز هستند، پس تعداد کل حالات برابر است با $\binom{۶}{۳}\times۳!$. ضمناً در حالت‌های زیر مجموع ۲ تاس برابر دیگری است:

$$(۱,۲,۳),(۱,۳,۴),(۱,۴,۵),(۱,۵,۶),(۲,۳,۵),(۲,۴,۶)$$

توجه کنید جایگشت هر یک از حالت‌های بالا برابر $۳!$ است، پس احتمال خواسته شده برابر است با:

$$P=\frac{۶\times۳!}{\binom{۶}{۳}\times۳!}=\frac{۶}{\frac{۶\times۵\times۴}{۶}}=\frac{۶}{۲۰}=۰/۳$$

۲۰- گزینه‌ی ۳ از ۳۶ حالت ممکن در پرتاب ۲ تاس در ۱۲ حالت زیر اختلاف دو عدد بزرگ‌تر یا مساوی ۳ است:

$$(۱,۴),(۴,۱),(۱,۵),(۵,۱),(۱,۶),(۶,۱),(۲,۵),(۵,۲),(۲,۶),(۶,۲),(۳,۶),(۶,۳)$$

بنابراین احتمال خواسته شده برابر است با:

$$P(X\geq۳)=\frac{۱۲}{۳۶}=\frac{۱}{۳}$$

آزمون‌های مرحله‌ای

۲

تعیین علامت، معادله و نامعادله

پاسخ تشریحی آزمون ۸

۱- گزینه‌ی ۱ با توجه به جدول تعیین علامت، $p(x)$ دارای ریشه‌ی مضاعف ۳ است، پس $p(x)$ به‌صورت $a(x-۳)^۲$ می‌باشد.

$$p(x)=a(x-۳)^۲=a(x^۲-۶x+۹)=ax^۲-۶ax+۹a$$

با توجه به این‌که $p(x)=ax^۲+۱۲x+b$، پس:

$$\begin{cases}-۶a=۱۲\Rightarrow a=-۲\\ ۹a=b\end{cases}\Rightarrow b=-۱۸\Rightarrow a+b=-۲۰$$

۲- گزینه‌ی ۳ با کمک جدول تعیین علامت نامعادله را حل می‌کنیم:

$$\frac{x+۲}{۳x-۲}>۱\Rightarrow\frac{x+۲}{۳x-۲}-۱>۰\Rightarrow\frac{x+۲-۳x+۲}{۳x-۲}>۰\Rightarrow\frac{-۲x+۴}{۳x-۲}>۰$$

x		$\frac{۲}{۳}$		۲	
$-۲x+۴$	$+$		$+$	۰	$-$
$۳x-۲$	$-$	۰	$+$		$+$
$\frac{-۲x+۴}{۳x-۲}$	$-$	$\Vert$	$+$	۰	$-$

$$\Rightarrow\frac{۲}{۳}<x<۲$$

۳- گزینه‌ی ۲ با استفاده از جدول تعیین علامت داریم:

$$\frac{a-b}{x-b}\geq۱\Rightarrow\frac{a-b-x+b}{x-b}\geq۰\Rightarrow\frac{a-x}{x-b}\geq۰$$

x		a		b	
$p(x)$	$-$	۰	$+$	$\Vert$	$-$

$$\Rightarrow a\leq x<b$$

۴- گزینه‌ی ۲ به کمک جدول تعیین علامت، نامعادله‌ی مورد نظر را حل می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۲x-۶x^۲}\geq۶\Rightarrow\frac{۱}{۲x-۶x^۲}-۶\geq۰\Rightarrow\frac{۱-۱۲x+۳۶x^۲}{۲x-۶x^۲}\geq۰\Rightarrow\frac{۳۶x^۲-۱۲x+۱}{۲x(۱-۳x)}\geq۰$$

x		۰		$\frac{۱}{۶}$		$\frac{۱}{۳}$	
$۳۶x^۲-۱۲x+۱$	$+$		$+$	۰	$+$		$+$
$۲x(۱-۳x)$	$-$	۰	$+$		$+$	۰	$-$
$p(x)$	$-$	$\Vert$	$+$	۰	$+$	$\Vert$	$-$

$$\Rightarrow۰<x<\frac{۱}{۳}$$

۵- گزینه‌ی ۲ به روش تعیین علامت، نامعادله‌ی مورد نظر را حل می‌کنیم:

$$\frac{x^۲-۱۴x+۴۹}{-۲x^۲+۶x+۸}\geq۰\Rightarrow p(x)=\frac{(x-۷)^۲}{-۲(x+۱)(x-۴)}\geq۰$$

x		-۱		۴		۷	
$(x-۷)^۲$	$+$		$+$		$+$	۰	$+$
$(x+۱)(x-۴)$	$+$	۰	$-$	۰	$+$		$+$
$p(x)$	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	۰	$-$

$$\Rightarrow x\in(-۱,۴)\cup\{۷\}$$

اعداد صحیح ۰، ۱، ۲، ۳ و ۷ در مجموعه‌ی جواب هستند.

۶- گزینه‌ی ۱ **راه‌حل اول**: دو نامعادله را جداگانه حل کرده، سپس جواب‌ها را اشتراک می‌گیریم:

$$\text{I}:\frac{۲x+۱}{x-۱}\leq۱\Rightarrow\frac{۲x+۱}{x-۱}-۱\leq۰\Rightarrow\frac{x+۲}{x-۱}\leq۰\Rightarrow-۲\leq x<۱$$

$$\text{II}:-۱\leq\frac{۲x+۱}{x-۱}\Rightarrow\frac{۲x+۱}{x-۱}+۱\geq۰\Rightarrow\frac{۳x}{x-۱}\geq۰\Rightarrow x\leq۰ \text{ یا } x>۱$$

اشتراک جواب‌های I و II برابر بازه‌ی $[-۲,۰]$ است و داریم: $a+b=-۲$.

راه‌حل دوم: از قدرمطلق کمک می‌گیریم:

$$-۱\leq\frac{۲x+۱}{x-۱}\leq۱\Rightarrow\left|\frac{۲x+۱}{x-۱}\right|\leq۱\Rightarrow\frac{|۲x+۱|}{|x-۱|}\leq۱\xrightarrow{|x-۱|>۰}|۲x+۱|\leq|x-۱|\Rightarrow(۲x+۱)^۲-(x-۱)^۲\leq۰\Rightarrow$$

$$(۲x+۱-x+۱)(۲x+۱+x-۱)\leq۰\Rightarrow(x+۲)(۳x)\leq۰\Rightarrow-۲\leq x\leq۰$$

۷- گزینه‌ی ۱ ضابطه‌ی تابع gof برابر است با:

$$gof(x)=\frac{-۱}{۲}f+۲=\frac{-۱}{۲}(x^{۲}+۳x)+۲=\frac{-x^{۲}}{۲}-\frac{۳}{۲}x+۲$$

طول نقاطی از این تابع که بالای محور xها قرار دارند، مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $gof(x)>۰$ می‌باشد.

$$gof(x)>۰\Rightarrow\frac{-x^{۲}}{۲}-\frac{۳}{۲}x+۲>۰\Rightarrow -x^{۲}-۳x+۴>۰$$

x		-۴		۱	
$-x^{۲}-۳x+۴$	$-$	۰	$+$	۰	$-$

$\Rightarrow -۴<x<۱$

سراسری - ۹۱

۸- گزینه‌ی ۳ برای آن‌که $f(x)$ بالاتر از خط $y=۳(x-۱)$ نباشد باید داشته باشیم:

$$\frac{۱}{۲}x+۲\le ۳(x-۱)\Rightarrow\frac{۱}{۲}x+۲\le ۳x-۳\Rightarrow ۵\le\frac{۵}{۲}x\Rightarrow x\ge ۲\Rightarrow x\in[۲,+\infty)$$

بنابراین $x_{۰}=۲$ است و داریم:

$$f(x_{۰})=f(۲)=\frac{۱}{۲}\times ۲+۲=۱+۲=۳$$

۹- گزینه‌ی ۲ برای آن‌که تابع $f(x)$ پایین‌تر از تابع $g(x)$ باشد، باید نامعادله‌ی زیر را حل کنیم:

$$f(x)<g(x)\Rightarrow x^{۲}-۴x<۴x-۳x^{۲}\Rightarrow ۴x^{۲}-۸x<۰\Rightarrow x^{۲}-۲x<۰\Rightarrow x(x-۲)<۰\Rightarrow ۰<x<۲\Rightarrow x\in(۰,۲)$$

بنابراین $b-a=۲$.

۱۰- گزینه‌ی ۴ برای آن‌که تابع همواره زیر محور xها قرار داشته باشد، باید نابرابری $y<۰$ به ازای تمام مقادیر x برقرار باشد:

$$y<۰\Rightarrow(m-۱)x^{۲}-۲\sqrt{۲}x+m<۰$$

$$\begin{cases}\Delta'<۰\Rightarrow(\sqrt{۲})^{۲}-m(m-۱)<۰\Rightarrow -m^{۲}+m+۲<۰\Rightarrow m<-۱ \text{ یا } m>۲\\ a<۰\Rightarrow m-۱<۰\Rightarrow m<۱\end{cases}\Rightarrow m<-۱$$

۱۱- گزینه‌ی ۳ با جایگذاری $x=-۱$ در عبارت $p(x)=(m+۱)x^{۲}+۴mx+m-۳$ داریم:

$$p(-۱)=(m+۱)-۴m+m-۳=-۲m-۲=-۲(m+۱)$$

با توجه به این‌که ضریب $x^{۲}$ در معادله‌ی درجه دوم نیز $(m+۱)$ می‌باشد، داریم:

$$p(-۱)\times(m+۱)=-۲(m+۱)^{۲}<۰$$

با توجه به این‌که عبارت $p(-۱)\times(m+۱)$ همواره منفی است، پس علامت $p(-۱)$ همواره با ضریب $x^{۲}$ مخالفت می‌کند، یعنی بین دو ریشه‌ی معادله است.

۱۲- گزینه‌ی ۱ برای آن‌که عدد ۲ بین ریشه‌های این معادله باشد، باید مقدار عبارت به ازای ۲، در جدول تعیین علامت، مخالف علامت ضریب $x^{۲}$ باشد:

x		$x_{۱}$	۲	$x_{۲}$	
$-x^{۲}+(m+۲)x+۲$	$-$	۰	$+$	۰	$-$

$$\Rightarrow p(۲)>۰\Rightarrow -۴+۲m+۴+۲>۰\Rightarrow ۲m+۲>۰\Rightarrow m>-۱$$

۱۳- گزینه‌ی ۴ نقطه‌ای به طول ۱ روی محور xها، نقطه‌ی $(۱,۰)$ است که در هر دو تابع صدق می‌کند، پس:

$$\begin{cases}f(x)=x^{۳}+ax^{۲}+b\xrightarrow{(۱,۰)}۱+a+b=۰\\ y+۲x=b\xrightarrow{(۱,۰)}۰+۲\times ۱=b\Rightarrow b=۲\end{cases}\Rightarrow a=-۳$$

برای یافتن نقاط دیگر تقاطع، معادله‌ی خط و منحنی را مساوی قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases}y=-۲x+۲\\ y=x^{۳}-۳x^{۲}+۲\end{cases}\Rightarrow x^{۳}-۳x^{۲}+۲=-۲x+۲\Rightarrow x^{۳}-۳x^{۲}+۲x=۰\Rightarrow x(x-۱)(x-۲)=۰\Rightarrow x=۰,۱,۲$$

سراسری - ۸۹

۱۴- گزینه‌ی ۳ دو طرف معادله را در عبارت $x(x-۲)$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{x}{x-۲}+\frac{۱}{x}=۳\Rightarrow x^{۲}+x-۲=۳x(x-۲)\Rightarrow x^{۲}+x-۲=۳x^{۲}-۶x\Rightarrow ۲x^{۲}-۷x+۲=۰$$

این معادله دارای ۲ ریشه است که جزء مقادیر غیرقابل قبول $(x=۰,۲)$ نیستند. پس حاصل‌ضرب آن‌ها برابر است با:

$$p=x_{۱}x_{۲}=\frac{c}{a}=\frac{۲}{۲}=۱$$

۱۵- گزینه‌ی ۳ $x=۱$ ریشه‌ی معادله‌ی داده شده است، پس در آن صدق می‌کند.

$$\frac{۲}{a-۳}+\frac{۲x+۱}{a+۱}=\frac{x+۴}{a-۱}\xrightarrow{x=۱}\frac{۲}{a-۳}+\frac{۳}{a+۱}=\frac{۵}{a-۱}\Rightarrow\frac{۲a+۲+۳a-۹}{(a-۳)(a+۱)}=\frac{۵}{a-۱}\Rightarrow(۵a-۷)(a-۱)=۵(a^{۲}-۲a-۳)$$

$$\Rightarrow ۵a^{۲}-۱۲a+۷=۵a^{۲}-۱۰a-۱۵\Rightarrow ۲a=۲۲\Rightarrow a=۱۱$$

۱۶- گزینه‌ی ۱ معادله را به‌صورت $\sqrt{x-2}=4-x$ بازنویسی می‌کنیم. با توجه به این‌که زیر رادیکال و حاصل رادیکال عددی نامنفی است، پس داریم $2\le x\le 4$، حال به حل معادله می‌پردازیم:

$$\sqrt{x-2}=4-x\Rightarrow x-2=16-8x+x^2\Rightarrow x^2-9x+18=0\Rightarrow (x-6)(x-3)=0\Rightarrow x=3 \text{ یا } x=6$$

با توجه به محدوده‌ی $2\le x\le 4$، $x=6$ غیرقابل قبول است و فقط $x=3$ در معادله صدق می‌کند.

۱۷- گزینه‌ی ۲ اگر از تغییر متغیر $x^2+4x+3=a$ استفاده کنیم:

$$a=\sqrt{a+2}\Rightarrow a^2-a-2=0\Rightarrow (a-2)(a+1)=0\Rightarrow a=2,-1$$

با توجه به این‌که a باید نامنفی باشد، پس $a=-1$ غیرقابل قبول است. برای $a=2$ داریم:

$$x^2+4x+3=2\Rightarrow x^2+4x+1=0\Rightarrow x_1x_2=\frac{c}{a}=1$$

۱۸- گزینه‌ی ۴ در معادله‌ی $\sqrt{4x-3}=2-3x$، می‌دانیم زیر رادیکال و حاصل آن اعدادی نامنفی هستند. پس:

$$4x-3\ge 0\Rightarrow x\ge\frac{3}{4}\qquad ,\qquad 2-3x\ge 0\Rightarrow x\le\frac{2}{3}$$

با توجه به این‌که محدوده‌های به‌دست آمده با هم اشتراک ندارند، پس معادله جواب ندارد.

۱۹- گزینه‌ی ۴ $x=4$ در معادله‌ی داده شده صدق می‌کند، پس:

$$4+a=\sqrt{20-16}\Rightarrow 4+a=\sqrt{4}\Rightarrow a=-2$$

پس معادله به‌صورت $x-2=\sqrt{5x-x^2}$ است، اکنون به حل این معادله می‌پردازیم:

$$x-2=\sqrt{5x-x^2}\Rightarrow x^2-4x+4=5x-x^2\Rightarrow 2x^2-9x+4=0\Rightarrow (2x-1)(x-4)=0\Rightarrow x=\frac{1}{2} \text{ یا } x=4$$

$x=\frac{1}{2}$ در معادله‌ی $x-2=\sqrt{5x-x^2}$ صدق نمی‌کند و غیرقابل قبول است. پس معادله ریشه‌ی دیگری ندارد.

توجه: چون زیر رادیکال و حاصل رادیکال اعدادی نامنفی هستند، پس:

$$\begin{cases} x-2\ge 0\Rightarrow x\ge 2 \\ 5x-x^2\ge 0\Rightarrow 0\le x\le 5\end{cases}\Rightarrow x\in[2,5]$$

بنابراین $x=\frac{1}{2}$ در محدوده‌ی مورد قبول نیست.

۲۰- گزینه‌ی ۲

$$\sqrt[3]{9x}\le x\Rightarrow 9x\le x^3\Rightarrow x^3-9x\ge 0\Rightarrow x(x^2-9)\ge 0$$

x		-3		0		3	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2-9	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
x^3-9x	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\Rightarrow -3\le x\le 0$ یا $x\ge 3$

اعداد صحیح منفی -3 ، -2 و -1 در این محدوده قرار دارند، که مجموع آن‌ها برابر است با -6.

پاسخ تشریحی آزمون ۹

۱- گزینه‌ی ۲ با توجه به جدول تعیین علامت $p(x)$، جدول تعیین علامت y به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$p(x-1)$	$+$	0	$-$
$(x-2)$	$-$	0	$+$
y	$-$	0	$-$

۲- گزینه‌ی ۳ جدول تعیین علامت عبارت داده شده برابر است با:

x		-6		-1		1	
$(x+6)^3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$-x^2-5x+6$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$p(x)$	$-$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$

بنابراین مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $p(x)\ge 0$، برابر $(-1,1]\cup\{-6\}$ است و اعداد صحیح -6 ، 0 و 1، در آن صدق می‌کنند.

۳- گزینه‌ی ۲

$$\frac{۲}{x-۲}\geq\frac{۱-x}{x}\Rightarrow\frac{۲x-(x-۲)(۱-x)}{(x-۲)x}\geq۰\Rightarrow\frac{x^{۲}-x+۲}{(x-۲)x}\geq۰$$

x		۰		۲	
$x^{۲}-x+۲$	+		+		+
$x(x-۲)$	+	۰	−	۰	+
$p(x)$	+	‖	−	‖	+

بنابراین جواب نامعادله به‌صورت $(-\infty,۰)\cup(۲,+\infty)$ است که اعداد صحیح صفر، ۱ و ۲ در آن قرار ندارند.

۴- گزینه‌ی ۲

$$\frac{x^{۲}+x+۲}{x^{۲}-۳x+۲}-۱<۰\Rightarrow\frac{x^{۲}+x+۲-x^{۲}+۳x-۲}{x^{۲}-۳x+۲}<۰\Rightarrow\frac{۴x}{(x-۱)(x-۲)}<۰$$
$$\Rightarrow x\in(-\infty,۰)\cup(۱,۲)$$

x		۰		۱		۲	
$۴x$	−	۰	+		+		+
$(x-۱)(x-۲)$	+		+	۰	−	۰	+
p	−	۰	+	‖	−	‖	+

۵- گزینه‌ی ۲ با استفاده از تعیین علامت، نامعادله‌ی داده شده را حل می‌کنیم:

$$x^{۲}\leq\frac{۲}{x^{۲}}-۱\Rightarrow x^{۲}-\frac{۲}{x^{۲}}+۱\leq۰\Rightarrow\frac{x^{۴}-۲+x^{۲}}{x^{۲}}\leq۰\Rightarrow\frac{(x^{۲}+۲)(x^{۲}-۱)}{x^{۲}}\leq۰\xrightarrow[x^{۲}>۰]{x^{۲}+۲>۰}x^{۲}-۱\leq۰\Rightarrow x\in[-۱,۱]-\{۰\}$$

مجموعه‌ی جواب فقط شامل دو عدد صحیح ±۱ است. توجه کنید صفر ریشه‌ی مخرج و غیرقابل قبول است.

۶- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول**: دو نامعادله را جداگانه حل می‌کنیم:

$$\frac{x+۴}{۲x+۳}-\frac{۲}{۳}>۰\Rightarrow\frac{-x+۶}{۶x+۹}>۰\Rightarrow\frac{-۳}{۲}<x<۶\qquad(II)$$

$$\frac{x+۴}{۲x+۳}-۱<۰\Rightarrow\frac{-x+۱}{۲x+۳}<۰\Rightarrow x>۱\ \text{یا}\ x<\frac{-۳}{۲}\qquad(I)$$

اشتراک دو جواب I و II بازه‌ی $(۱,۶)$ است و داریم: $b-a=۵$.

راه‌حل دوم: به‌جای دو نامعادله می‌توان، نامعادله‌ی روبه‌رو را حل کرد: $\left(\frac{x+۴}{۲x+۳}-۱\right)\left(\frac{x+۴}{۲x+۳}-\frac{۲}{۳}\right)<۰\Rightarrow\frac{-x+۱}{۲x+۳}\times\frac{-x+۶}{۶x+۹}<۰\Rightarrow\frac{(x-۱)(x-۶)}{۳(۲x+۳)^{۲}}<۰\Rightarrow۱<x<۶$

۷- گزینه‌ی ۲ برای آن‌که تابع $f(x)$ پایین‌تر از خط $y=۲$ باشد، باید نامساوی $f(x)<۲$ برقرار باشد، پس:

$$\frac{۳x^{۲}-۲x}{x^{۲}+۴}<۲\xrightarrow{x^{۲}+۴>۰}۳x^{۲}-۲x<۲x^{۲}+۸\Rightarrow x^{۲}-۲x-۸<۰\Rightarrow(x-۴)(x+۲)<۰\Rightarrow-۲<x<۴$$

بنابراین $f(x)$ در بازه‌ی $(-۲,۴)$ زیر خط $y=۲$ است و داریم: $b-a=۴-(-۲)=۶$.

۸- گزینه‌ی ۱ ابتدا ضابطه‌ی $y=fog(x)$ را معین می‌کنیم:

$$fog(x)=(۲g-۳)^{۲}=(۲x+۴-۳)^{۲}=(۲x+۱)^{۲}=۴x^{۲}+۴x+۱$$

با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول زیر مختصات نقطه‌ی تقاطع را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases}y=x+۲\\ y=۴x^{۲}+۴x+۱\end{cases}\Rightarrow x+۲=۴x^{۲}+۴x+۱\Rightarrow۴x^{۲}+۳x-۱=۰\Rightarrow x=\frac{-۳\pm\sqrt{۹+۱۶}}{۸}\Rightarrow x=\frac{۱}{۴},-۱$$

فقط $x=-۱$ در گزینه‌ها موجود است.

سراسری – ۹۲

۹- گزینه‌ی ۴ برای آن‌که تابع $f(x)$ همواره بالاتر از نمودار تابع $g(x)$ باشد، باید نامساوی $f(x)>g(x)$ به ازای تمامی x برقرار باشد:

$$f(x)>g(x)\Rightarrow\frac{۱}{۲}x^{۲}+kx+۱>x-۱\Rightarrow\frac{۱}{۲}x^{۲}+(k-۱)x+۲>۰$$

برای آن‌که نامعادله‌ی فوق همواره برقرار باشد، باید داشته باشیم:

$a>۰\Rightarrow\frac{۱}{۲}>۰$ همواره برقرار است.

$$\Delta<۰\Rightarrow(k-۱)^{۲}-\frac{۴}{۲}\times۲<۰\Rightarrow k^{۲}-۲k-۳<۰\Rightarrow-۱<k<۳$$

۱۰- گزینه‌ی ۳ با توجه به نمودار f جدول تعیین علامت عبارت $y=\frac{۴-x^{۲}}{f(x)}$ به‌صورت مقابل است:

x		-۲		-۱		۰		۲	
$۴-x^{۲}$	−	۰	+		+		+	۰	−
$f(x)$	+	۰	−	۰	−	۰	+		+
y	−	‖	−	‖	−	‖	+	۰	−

عبارت y فقط در محدوده‌ی $(۰,۲)$ مثبت است.

۱۱- گزینه‌ی ۴ برای آن‌که عبارت درجه دومی همواره نامثبت باشد، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}a<۰\Rightarrow m+۱<۰\Rightarrow m<-۱\\ \Delta'\leq۰\Rightarrow۱۶-(m+۱)^{۲}\leq۰\Rightarrow(m+۱)^{۲}\geq۱۶\Rightarrow m+۱\geq۴,\ m+۱\leq-۴\Rightarrow m\geq۳,\ m\leq-۵\end{cases}\Rightarrow m\leq-۵$$

۱۲- گزینه‌ی ۲ برای آن‌که نمودار سهمی بر محور طول‌ها مماس باشد، می‌بایست $\Delta=0$ و برای آن‌که رو به پایین باشد، باید a منفی باشد.

$a<0\Rightarrow m<0$

$$\Delta=0\Rightarrow(m+2)^2-4m^2=0\Rightarrow m^2+4m+4-4m^2=0\Rightarrow -3m^2+4m+4=0\Rightarrow m=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{-3}\Rightarrow m=2,\frac{-2}{3}$$

با توجه به شرط $m<0$، فقط مقدار $\frac{-2}{3}$ برای m مورد قبول است.

۱۳- گزینه‌ی ۳ عدد $x=-1$ بین دو ریشه‌ی معادله قرار دارد، پس علامت عبارت $p(x)=mx^2-x+m+1$ به ازای $x=-1$ مخالف علامت ضریب x^2، یعنی m می‌باشد:

$$p(-1)\times m<0\Rightarrow(m+1+m+1)m<0\Rightarrow 2(m+1)m<0\Rightarrow -1<m<0$$

۱۴- گزینه‌ی ۴ $x=\frac{1}{2}$ در معادله‌ی داده شده صدق می‌کند، پس:

$$2+\frac{1}{\frac{1}{4}-\frac{a}{2}}=\frac{a}{\frac{1}{2}-a}\Rightarrow 2=\frac{-2}{\frac{1}{2}-a}+\frac{a}{\frac{1}{2}-a}\Rightarrow 2(\frac{1}{2}-a)=a-2\Rightarrow 3a=3\Rightarrow a=1$$

بنابراین معادله به‌صورت $2+\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{x-1}$ درمی‌آید، برای یافتن ریشه‌ی دیگر داریم:

$$2+\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{x-1}\Rightarrow\frac{2x^2-2x+1}{x^2-x}=\frac{x}{x^2-x}\xrightarrow{x\neq 0,1}2x^2-2x+1=x\Rightarrow 2x^2-3x+1=0\Rightarrow x=\frac{1}{2},1\ \text{غ ق ق}$$

با توجه به این‌که $x=1$ ریشه‌ی مخرج نیز هست، تنها ریشه‌ی قابل قبول معادله $x=\frac{1}{2}$ است.

۱۵- گزینه‌ی ۲ معادله را از حالت کسری خارج کرده و حل می‌کنیم:

$$\frac{x}{x^2+1}=\frac{2}{3x-1}\Rightarrow 3x^2-x=2x^2+2\Rightarrow x^2-x-2=0\Rightarrow(x-2)(x+1)=0\Rightarrow x=-1,2$$

دو عدد ۲ و ۱− ریشه‌های معادله هستند که تفاضل آن‌ها برابر $2-(-1)=3$ است.

۱۶- گزینه‌ی ۳ برای آن‌که معادله‌ی $x\sqrt{x-2}-x=0$ تعریف شده باشد، داریم $x\geq 2$، ضمناً داریم:

$$x\sqrt{x-2}-x=0\Rightarrow x(\sqrt{x-2}-1)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0 & \text{غ ق ق}\\ \sqrt{x-2}=1\Rightarrow x=3\end{cases}$$

این معادله تنها یک ریشه‌ی مثبت $(x=3)$ دارد.

۱۷- گزینه‌ی ۱ عبارات $\sqrt{x^2-4}$ و $3(x^2-5x+6)^2$ هر دو نامنفی هستند، پس برای آن‌که حاصل‌جمع این دو عبارت صفر باشد، باید هر دو صفر باشند:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-4}=0\Rightarrow(x-2)(x+2)=0\Rightarrow x=2\ \text{یا}\ x=-2\\ 3(x^2-5x+6)^2=0\Rightarrow(x-2)(x-3)=0\Rightarrow x=2\ \text{یا}\ x=3\end{cases}\Rightarrow x=2$$

پس این معادله دارای یک ریشه‌ی مثبت $x=2$ است.

۱۸- گزینه‌ی ۴ زیر رادیکال‌ها و حاصل‌جمع دو رادیکال مثبت است، پس:

$$1-5x\geq 0\Rightarrow x\leq\frac{1}{5}\quad,\quad 9-x^2\geq 0\Rightarrow -3\leq x\leq 3\quad,\quad x-2\geq 0\Rightarrow x\geq 2$$

این ۳ محدوده با هم اشتراک ندارند، پس معادله نمی‌تواند جواب داشته باشد.

۱۹- گزینه‌ی ۱ نامعادله را به‌صورت $\sqrt{x}<12-x$ می‌نویسیم. واضح است که باید داشته باشیم: $x\geq 0$، ضمناً $12-x$ از $\sqrt{x}$ بزرگ‌تر است، با توجه به نامنفی بودن $\sqrt{x}$، داریم:

$$12-x>0\Rightarrow x<12\xrightarrow{x\geq 0}0\leq x<12$$

اکنون به حل نامعادله می‌پردازیم:

$$\sqrt{x}<12-x\Rightarrow x<(12-x)^2\Rightarrow x^2-25x+144>0\Rightarrow(x-9)(x-16)>0\Rightarrow x>16\ \text{یا}\ x<9$$

از اشتراک محدوده‌ی به‌دست آمده با شرط x، $(0\leq x<12)$ محدوده‌ی جواب بازه‌ی $[0,9)$ است که مجموع اعداد صحیح این بازه برابر است با:

$$0+1+2+3+\cdots+8=\frac{8\times 9}{2}=36$$

۲۰- گزینه‌ی ۲ برای آن‌که رادیکال‌ها تعریف شده باشند داریم $x\geq 0$، اکنون به حل نامعادله می‌پردازیم:

$$3\sqrt{x+7}>4\sqrt{x}\Rightarrow 9(x+7)>16x\Rightarrow 9x+63>16x\Rightarrow 7x<63\Rightarrow x<9$$

پس مجموعه‌ی جواب نامعادله $0\leq x<9$ است و ۹ عدد صحیح در آن صدق می‌کند.

۳

معادله‌ی درجه دوم و تابع درجه دوم

پاسخ تشریحی آزمون‌های فصل سوم

پاسخ تشریحی آزمون ۱۰

۱- گزینه‌ی ۳ اگر عدد را x فرض کنیم، داریم:

$$x+\frac{2}{x}=-4\Rightarrow x^2+2=-4x\Rightarrow x^2+4x+2=0$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16-8}}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=-2+\sqrt{2}\\ x=-2-\sqrt{2}\end{cases}$$

که عدد $-2+\sqrt{2}$ در گزینه‌ها وجود دارد.

۲- گزینه‌ی ۴ برای این‌که نمودار تابع محور طول‌ها را در دو نقطه قطع کند باید معادله‌ی $(m-1)x^2-4x+m-4=0$ دارای دو ریشه باشد. پس داریم:

$$\Delta>0\Rightarrow 16-4(m-1)(m-4)>0\Rightarrow 4-(m^2-5m+4)>0\Rightarrow m^2-5m<0\Rightarrow m(m-5)<0\Rightarrow 0<m<5$$

m		0		5	
m^2-5m	$+$	0	$-$	0	$+$

۳- گزینه‌ی ۴ ضابطه‌ی دو تابع را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$x^2-x-1=mx+2m-1\Rightarrow x^2-(m+1)x-2m=0$$

وجود ریشه برای معادله‌ی اخیر را بررسی می‌کنیم:

$$\Delta=(m+1)^2+8m=m^2+10m+1$$

عبارت Δ به ازای مقادیر مختلف m می‌تواند صفر، مثبت یا منفی باشد، پس معادله می‌تواند صفر، یک یا دو ریشه داشته باشد.

۴- گزینه‌ی ۴ ضابطه‌ی تابع را ساده می‌کنیم:

$$y=m(x^2-3x+2)+x+1=mx^2+(1-3m)x+2m+1$$

برای این‌که نمودار بالای محور xها و مماس بر آن باشد، باید داشته باشیم:

$$\Delta=0\quad,\quad m>0$$

پس می‌توان نوشت:

$$\Delta=(1-3m)^2-4m(2m+1)=0\Rightarrow 1+9m^2-6m-8m^2-4m=0\Rightarrow m^2-10m+1=0$$

ریشه‌های معادله هر دو مثبت هستند (زیرا مجموع و حاصل‌ضرب آن‌ها مثبت است.) پس هر دو مقدار قابل قبول هستند و مجموع آن‌ها برابر ۱۰ است.

۵- گزینه‌ی ۲ در معادله‌ی $x^2-3x-1=0$ داریم: $S=\alpha+\beta=3$ و $P=\alpha\beta=-1$، پس می‌توان نوشت:

$$\alpha^3-\alpha^2+\beta^3-\beta^2=(\alpha^3+\beta^3)-(\alpha^2+\beta^2)=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)-((\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta)$$

$$=S^3-3PS-(S^2-2P)=27-3(-1)\times 3-9+2(-1)=25$$

۶- گزینه‌ی ۳ مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$x^2-3x+1=0\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=3\\ \alpha\beta=\frac{c}{a}=1\end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{\alpha}{\beta+2}+\frac{\beta}{\alpha+2}=\frac{\alpha^2+2\alpha+\beta^2+2\beta}{\alpha\beta+2\alpha+2\beta+4}=\frac{\alpha^2+\beta^2+2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4}=\frac{3^2-2+2\times 3}{1+2\times 3+4}=\frac{13}{11}$$

۷- گزینه‌ی ۱ مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$x^{۲}-۸x+۴=۰\Rightarrow\begin{cases}x_۱+x_۲=-\frac{b}{a}=۸\\ x_۱x_۲=\frac{c}{a}=۴\end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$\sqrt{x_۱}+\sqrt{x_۲}=\sqrt{(\sqrt{x_۱}+\sqrt{x_۲})^{۲}}=\sqrt{x_۱+x_۲+۲\sqrt{x_۱x_۲}}=\sqrt{۸+۲\sqrt{۴}}=\sqrt{۱۲}=۲\sqrt{۳}$$

۸- گزینه‌ی ۱ می‌دانیم ریشه‌های هر معادله در آن صدق می‌کنند. پس داریم:

$$(x+۲)^{۲}-x-۵=۰\Rightarrow\begin{cases}(\alpha+۲)^{۲}-\alpha-۵=۰\Rightarrow(\alpha+۲)^{۲}=\alpha+۵\\ (\beta+۲)^{۲}-\beta-۵=۰\Rightarrow(\beta+۲)^{۲}=\beta+۵\end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$A=(\alpha+۲)^{۲}+(\beta+۲)^{۲}=\alpha+\beta+۱۰$$

معادله را ساده می‌کنیم:

$$x^{۲}+۴x+۴-x-۵=۰\Rightarrow x^{۲}+۳x-۱=۰\Rightarrow\alpha+\beta=-۳\Rightarrow A=-۳+۱۰=۷$$

۹- گزینه‌ی ۴ با توجه به معادله‌ی $x^{۲}-۷x+۳=۰$ داریم: $\alpha+\beta=۷$ و $\alpha\beta=۳$، پس داریم:

$$\alpha\beta=۳\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{۳}{\beta}\\ \beta=\frac{۳}{\alpha}\end{cases}$$

$$\Rightarrow(\alpha+\frac{۳}{\beta})^{۲}+(\beta+\frac{۳}{\alpha})^{۲}=(\alpha+\alpha)^{۲}+(\beta+\beta)^{۲}=۴(\alpha^{۲}+\beta^{۲})=۴((\alpha+\beta)^{۲}-۲\alpha\beta)=۴(۷^{۲}-۲\times۳)=۴\times۴۳=۱۷۲$$

۱۰- گزینه‌ی ۱ ریشه‌های هر معادله در آن صدق می‌کنند:

$$x^{۲}-۲x-۴=۰\Rightarrow\alpha^{۲}-۲\alpha-۴=۰\Rightarrow\alpha^{۲}-۴=۲\alpha$$

بنابراین داریم:

$$(\alpha^{۲}-۴)^{۲}+۴\beta^{۲}=(۲\alpha)^{۲}+۴\beta^{۲}=۴(\alpha^{۲}+\beta^{۲})=۴((\alpha+\beta)^{۲}-۲\alpha\beta)\xrightarrow[\alpha\beta=-۴]{\alpha+\beta=۲}۴(۲^{۲}-۲(-۴))=۴۸$$

۱۱- گزینه‌ی ۲ معادله را به‌صورت $mx^{۲}+۳x+(m^{۲}-۲)=۰$ می‌نویسیم. اگر α و β ریشه‌های این معادله باشند و α و β معکوس یک‌دیگر باشند، داریم:

$$\alpha\beta=۱\Rightarrow\frac{m^{۲}-۲}{m}=۱\Rightarrow m^{۲}-۲=m\Rightarrow m^{۲}-m-۲=۰\Rightarrow(m+۱)(m-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}m=-۱\\ m=۲\end{cases}$$

به ازای $m=۲$ معادله به‌صورت $۲x^{۲}+۳x+۲=۰$ خواهد بود که در این‌صورت $\Delta=۹-۱۶<۰$ خواهد شد و معادله دارای ریشه‌ی حقیقی نخواهد بود. پس $m=۲$ قابل قبول نیست و $m=-۱$ صحیح است.

سراسری خارج از کشور - ۹۰

۱۲- گزینه‌ی ۲ با توجه به معادله‌ی $x^{۲}-۲x+k=۰$ داریم: $x_۱+x_۲=۲$ و $x_۱x_۲=k$، پس می‌توان نوشت:

$$x_۱+۴x_۲=۳\Rightarrow x_۱+x_۲+۳x_۲=۳\Rightarrow۲+۳x_۲=۳\Rightarrow x_۲=\frac{۱}{۳}\Rightarrow x_۱=۲-x_۲=۲-\frac{۱}{۳}=\frac{۵}{۳}$$

بنابراین داریم:

$$x_۱x_۲=k\Rightarrow\frac{۱}{۳}\times\frac{۵}{۳}=k\Rightarrow k=\frac{۵}{۹}$$

۱۳- گزینه‌ی ۱ در معادله‌ی $x^{۲}-۲kx-۲=۰$ داریم: $x_۱+x_۲=۲k$ و $x_۱x_۲=-۲$، پس می‌توان نوشت:

$$x_۱^{۲}+x_۲^{۲}=۱۲\Rightarrow(x_۱+x_۲)^{۲}-۲x_۱x_۲=۱۲\Rightarrow(۲k)^{۲}-۲(-۲)=۱۲\Rightarrow۴k^{۲}=۸\Rightarrow k^{۲}=۲\Rightarrow k=\pm\sqrt{۲}$$

۱۴- گزینه‌ی ۲ در معادله‌ی $x^{۲}-mx+۸=۰$ داریم: $x_۱+x_۲=m$ و $x_۱x_۲=۸$، پس می‌توان نوشت:

$$x_۱=x_۲^{۲}\Rightarrow x_۲^{۳}=۸\Rightarrow x_۲=۲\Rightarrow x_۱=۴\Rightarrow m=x_۱+x_۲=۴+۲=۶$$

۱۵- گزینه‌ی ۱ می‌دانیم اختلاف ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم از رابطه‌ی $|x_۱-x_۲|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ به‌دست می‌آید. پس داریم:

$$|x_۱-x_۲|=۱\Rightarrow\frac{\sqrt{\Delta}}{۱}=۱\Rightarrow\Delta=۱\Rightarrow۲۵-۴m=۱\Rightarrow m=۶$$

از طرفی داریم:

$$x_۱x_۲=\frac{c}{a}=m=۶$$

۱۶- گزینه‌ی ۴ از رابطه‌ی $x_1x_2=\frac{c}{a}$ استفاده می‌کنیم:

$$x^2-3x-2m=0 \Rightarrow x_1x_2=-2m \Rightarrow \tan^2\alpha.\cot^2\alpha=-2m \Rightarrow -2m=1 \Rightarrow m=-\frac{1}{2}$$

۱۷- گزینه‌ی ۳ رابطه‌ی داده شده را به‌صورت $4a-2b+c=0$ می‌نویسیم. واضح است که این رابطه از قرار دادن $x=-2$ در معادله به‌دست آمده است، پس یکی از ریشه‌های معادله -2 است و از آن‌جا که ضرب ریشه‌ها $\frac{c}{a}$ است، داریم:

$$x_1x_2=\frac{c}{a} \Rightarrow -2x_2=\frac{c}{a} \Rightarrow x_2=-\frac{c}{2a}$$

۱۸- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول:** اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2-2x-1=0$ باشند، داریم: $\alpha+\beta=2$ و $\alpha\beta=-1$.

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی جدید باشند، داریم:

$$\begin{cases} x_1=\frac{1}{\alpha}+1 \\ x_2=\frac{1}{\beta}+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=\frac{1}{\alpha}+1+\frac{1}{\beta}+1=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+2=\frac{2}{-1}+2=0 \\ x_1x_2=(\frac{1}{\alpha}+1)(\frac{1}{\beta}+1)=\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+1=\frac{1}{-1}+\frac{2}{-1}+1=-2 \end{cases}$$

بنابراین معادله به‌صورت $x^2-2=0$ خواهد بود.

راه‌حل دوم: اگر ریشه‌های معادله‌ی $x^2-2x-1=0$ را برابر x و ریشه‌های معادله‌ی جدید را برابر y فرض کنیم داریم:

$$y=\frac{1}{x}+1 \Rightarrow y-1=\frac{1}{x} \Rightarrow x=\frac{1}{y-1} \Rightarrow (\frac{1}{y-1})^2-\frac{2}{y-1}-1=0 \Rightarrow 1-2(y-1)-(y-1)^2=0 \Rightarrow 1-2y+2-y^2+2y-1=0$$

$$\Rightarrow y^2-2=0$$

۱۹- گزینه‌ی ۲ اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-3x-1=0$ باشند، داریم: $\alpha+\beta=\frac{3}{2}$ و $\alpha\beta=-\frac{1}{2}$ و در معادله‌ای که ریشه‌های آن $x_1=\frac{\alpha^2}{\beta}$ و $x_2=\frac{\beta^2}{\alpha}$ باشند، داریم:

$$S=x_1+x_2=\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\frac{(\frac{3}{2})^3-3(-\frac{1}{2})(\frac{3}{2})}{-\frac{1}{2}}=-\frac{45}{4}$$

$$P=x_1x_2=\frac{\alpha^2}{\beta}\times\frac{\beta^2}{\alpha}=\alpha\beta=-\frac{1}{2}$$

بنابراین معادله به‌صورت زیر است:

$$x^2-Sx+P=0 \Rightarrow x^2+\frac{45}{4}x-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow 4x^2+45x-2=0$$

۲۰- گزینه‌ی ۳ برای این‌که نمودار تابع محور طول‌ها را در طرفین محور عرض‌ها قطع کند، کافی است ضرب ریشه‌های معادله منفی باشد. یعنی:

$$\frac{c}{a}<0 \Rightarrow \frac{2m-3}{m}<0 \Rightarrow 0<m<\frac{3}{2}$$

توجه کنید که وقتی $\frac{c}{a}<0$ شرط $\Delta>0$ برقرار است.

پاسخ تشریحی آزمون ۱۱

۱- گزینه‌ی ۲ اگر طول و عرض مستطیل را به ترتیب x و y بنامیم، داریم: $x=3y-3$ و از طرفی می‌دانیم: $xy=60$، پس داریم:

$$y(3y-3)=60 \Rightarrow 3y^2-3y-60=0$$

$$y^2-y-20=0 \Rightarrow (y-5)(y+4)=0 \Rightarrow \begin{cases} y=-4 & \text{غیر قابل قبول} \\ y=5 \end{cases}$$

۲- گزینه‌ی ۱ برای این‌که نمودار زیر محور xها باشد باید تابع ریشه نداشته باشد:

$$\Delta=4-16m^2<0 \Rightarrow m^2>\frac{1}{4} \Rightarrow |m|>\frac{1}{2}$$

۳- گزینه‌ی ۱ معادله‌ی فوق را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{2})=0 \Rightarrow x=-\sqrt{3}, x=\sqrt{2}$$

بنابراین داریم:

$$\alpha=\sqrt{2}, \beta=-\sqrt{3} \Rightarrow \alpha^4+\beta^2=(\sqrt{2})^4+(-\sqrt{3})^2=4+3=7$$

۴- گزینه‌ی ۴ اگر فرض کنیم $x=2-\sqrt{2}$ خواهیم داشت:

$$x-2=-\sqrt{2} \Rightarrow (x-2)^2=(-\sqrt{2})^2 \Rightarrow x^2-4x+4=2 \Rightarrow x^2-4x+2=0 \Rightarrow a=-4, b=2 \Rightarrow ab=-8$$

۵- گزینه‌ی ۱ فرض کنیم x_0 ریشه‌ی مشترک باشد، بنابراین در هر دو معادله صدق می‌کند پس:

$$x_0^2-4x_0+2a+1=x_0^2-3x_0+a+1 \Rightarrow x_0=a$$

$x_0=a$ را در یکی از معادلات قرار می‌دهیم:

$$a^2-4a+2a+1=0 \Rightarrow a^2-2a+1=0 \Rightarrow a=1$$

۶- گزینه‌ی ۲ می‌دانیم در معادله‌ی $x^2-3x-1=0$ داریم: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=3$ و $x_1x_2=\frac{c}{a}=-1$ پس می‌توان نوشت:

$$x_1^3+2x_1^2x_2+2x_1x_2^2+x_2^3=x_1^3+3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+x_2^3-x_1^2x_2-x_1x_2^2=(x_1+x_2)^3-x_1x_2(x_1+x_2)$$

$$=3^2-(-1)(3)=9+3=12$$

۷- گزینه‌ی ۱ مجموع ضرایب معادله‌ی $x^2-(1+\sqrt{3})x+\sqrt{3}=0$ برابر صفر است. پس یکی از ریشه‌ها برابر ۱ و دیگری برابر $\frac{c}{a}=\sqrt{3}$ است.

پس داریم:

$$|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|+\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=|\sqrt{1}-\sqrt{\sqrt{3}}|+\sqrt{1}+\sqrt{\sqrt{3}}=|1-\sqrt[4]{3}|+1+\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{3}-1+1+\sqrt[4]{3}=2\sqrt[4]{3}$$

۸- گزینه‌ی ۲ با توجه به معادله داریم:

$$(m+1)x^2+2x-m=0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=\frac{-2}{m+1} \\ \alpha\beta=\frac{-m}{m+1} \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$m(\alpha+\beta)+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=2 \Rightarrow m(\alpha+\beta)+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=2 \Rightarrow m(\frac{-2}{m+1})+\frac{\frac{-2}{\cancel{m+1}}}{\frac{-m}{\cancel{m+1}}}=2 \Rightarrow \frac{-2m}{m+1}+\frac{2}{m}=2$$

$$\Rightarrow \frac{-2m^2+2m+2}{m^2+m}=2 \Rightarrow -2m^2+\cancel{2m}+2=2m^2+\cancel{2m} \Rightarrow 4m^2=2 \Rightarrow m^2=\frac{1}{2}$$

۹- گزینه‌ی ۳ بـا توجه بـه معادله‌ی $7x^2-6x+1=0$ داریم: $x_1+x_2=\frac{6}{7}$ و $x_1x_2=\frac{1}{7}$، بنابراین ریشـه‌های معادله در بـازه‌ی $(0,1)$ قرار دارند ($0<x_1<1$ و $0<x_2<1$)، بنابراین داریم:

$$+\begin{cases} x_1<\sqrt[3]{x_1} \\ x_2<\sqrt[3]{x_2} \end{cases} \Rightarrow x_1+x_2<\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2}$$

۱۰- گزینه‌ی ۲ ریشه‌های معادله در معادله صدق می‌کنند:

$$x^2-4x+2=0 \Rightarrow x_2^2-4x_2+2=0 \Rightarrow x_2^2=4x_2-2 \Rightarrow \frac{x_2^2}{2}=2x_2-1$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\sqrt{x_1^2(2x_2-1)}=\sqrt{x_1^2\times\frac{x_2^2}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}x_1x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 2=\sqrt{2}$$

۱۱- گزینه‌ی ۳ با توجه به معادله‌ی $3x^2-mx+12=0$ داریم: $\alpha+\beta=\frac{m}{3}$ و $\alpha\beta=4$، از طرفی داریم:

$$\alpha^2=\frac{4}{\beta} \Rightarrow \alpha^2\beta=4 \Rightarrow \alpha(\alpha\beta)=4 \Rightarrow 4\alpha=4 \Rightarrow \alpha=1 \Rightarrow \beta=4$$

$$\alpha+\beta=\frac{m}{3} \Rightarrow 5=\frac{m}{3} \Rightarrow m=15$$

۱۲- گزینه‌ی ۲ برای این‌که ریشه‌ها قرینه‌ی یک‌دیگر باشند، باید داشته باشیم:

$$x_1=-x_2 \Rightarrow x_1+x_2=0 \Rightarrow -\frac{b}{a}=0 \Rightarrow b=0$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$a(a^2-9)=0 \Rightarrow a=0, \pm 3$$

$a=0 \Rightarrow x^2+2=0 \Rightarrow$ ریشه‌ی حقیقی ندارد.

$a=3 \Rightarrow 4x^2+2=0 \Rightarrow$ ریشه‌ی حقیقی ندارد.

$$a=-3 \Rightarrow -2x^2+2=0 \Rightarrow x=\pm 1$$

بنابراین فقط به ازای $a=-3$ معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی و قرینه است.

۱۳- گزینه‌ی ۴ در معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ می‌دانیم اگر $a+b+c=0$ آن‌گاه $x_1=1$ و $x_2=\frac{c}{a}$ پس می‌توان نوشت:

$$x^2-x\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=0 \Rightarrow 1-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=0 \Rightarrow x_1=1\,,\,x_2=-\cos^2\alpha \Rightarrow x_1^2+x_2=1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$$

۱۴- گزینه‌ی ۳ در معادله‌ی $x^2-k^2x+8=0$ داریم: $x_1+x_2=k^2$ و $x_1x_2=8$. پس می‌توان نوشت:

$$\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2}=3 \Rightarrow (\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2})^3=27 \Rightarrow x_1+x_2+3\sqrt[3]{x_1x_2}(\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2})=27 \Rightarrow k^2+3\sqrt[3]{8}(3)=27 \Rightarrow k^2+18=27 \Rightarrow k^2=9 \Rightarrow k=\pm 3$$

۱۵- گزینه‌ی ۴ **راه‌حل اول:** در معادله‌ی $x^2+x-3=0$ اگر α و β ریشه باشند، داریم: $\alpha+\beta=-1$ و $\alpha\beta=-3$ و در معادله‌ی جدید داریم:

$$\begin{cases} x_1=6\alpha \\ x_2=6\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=6(\alpha+\beta)=-6 \\ x_1x_2=36\alpha\beta=-108 \end{cases}$$

بنابراین این معادله به‌صورت $x^2+6x-108=0$ خواهد بود.

راه‌حل دوم: اگر ریشه‌ی معادله‌ی $x^2+x-3=0$ را برابر x و ریشه‌ی معادله‌ی جدید را y فرض کنیم، داریم:

$$y=6x \Rightarrow x=\frac{y}{6} \Rightarrow (\frac{y}{6})^2+\frac{y}{6}-3=0 \Rightarrow \frac{y^2}{36}+\frac{y}{6}-3=0 \Rightarrow y^2+6y-108=0$$

۱۶- گزینه‌ی ۳ اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $4x^2-mx+9=0$ باشند، داریم: $\alpha+\beta=\frac{m}{4}$ و اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-5x+3=0$ باشند، داریم: $x_1x_2=\frac{3}{2}$ و $x_1+x_2=\frac{5}{2}$، پس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \alpha=x_1^2 \\ \beta=x_2^2 \end{cases} \Rightarrow \alpha+\beta=x_1^2+x_2^2 \Rightarrow \alpha+\beta=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2 \Rightarrow \frac{m}{4}=(\frac{5}{2})^2-2(\frac{3}{2})=\frac{25}{4}-3 \Rightarrow m=13$$

۱۷- گزینه‌ی ۲ ریشه‌های هر معادله در آن صدق می‌کنند. پس داریم:

$$x^2-3x-1=0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2-3\alpha-1=0 \\ \beta^2-3\beta-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2-3\alpha=1 \\ \beta^2-3\beta=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^3-3\alpha^2=\alpha \\ \beta^3-3\beta^2=\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^3-3\alpha^2-1=\alpha-1 \\ \beta^3-3\beta^2-1=\beta-1 \end{cases}$$

بنابراین باید معادله‌ای بنویسیم که ریشه‌های آن $x_1=\alpha-1$ و $x_2=\beta-1$ باشند:

$$S=x_1+x_2=\alpha-1+\beta-1=\alpha+\beta-2=3-2=1$$

$$P=x_1x_2=(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=-1-3+1=-3$$

بنابراین معادله به‌صورت مقابل است:

$$x^2-Sx+P=0 \Rightarrow x^2-x-3=0$$

۱۸- گزینه‌ی ۲ برای این‌که معادله دارای دو ریشه‌ی متمایز مثبت باشد، باید شرایط زیر وجود داشته باشد:

$$\Delta>0 \Rightarrow 1-4m>0 \Rightarrow m<\frac{1}{4} \quad , \quad \frac{c}{a}>0 \Rightarrow \frac{m}{1}>0 \Rightarrow m>0 \quad , \quad -\frac{b}{a}>0 \Rightarrow -\frac{-1}{1}>0 \Rightarrow m\in\mathbb{R}$$

بنابراین باید $0<m<\frac{1}{4}$ باشد.

۱۹- گزینه‌ی ۳ اگر فرض کنیم $x+\frac{1}{x}=t$ خواهیم داشت:

$$(x+\frac{1}{x})^2+3(x+\frac{1}{x})-4=0 \Rightarrow t^2+3t-4=0 \Rightarrow (t-1)(t+4)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=1 \Rightarrow x+\frac{1}{x}=1 \Rightarrow x^2-x+1=0 \Rightarrow \Delta<0 \\ t=-4 \Rightarrow x+\frac{1}{x}=-4 \Rightarrow x^2+4x+1=0 \Rightarrow x=-2\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

بنابراین معادله دارای ۲ ریشه است.

۲۰- گزینه‌ی ۴ اگر فرض کنیم $t=x^{۲}$، خواهیم داشت:

$$x^{۴}-mx^{۲}+m-۱=۰\Rightarrow t^{۲}-mt+m-۱=۰$$

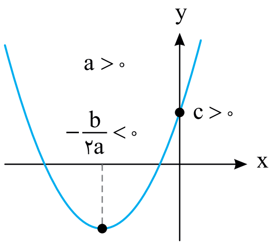
کافی است معادله‌ی اخیر دارای دو ریشه‌ی مثبت باشد تا معادله‌ی اولیه دارای ۴ ریشه گردد. پس داریم:

$$\begin{cases}\Delta>۰\Rightarrow m^{۲}-۴m+۴>۰\Rightarrow (m-۲)^{۲}>۰\Rightarrow m\neq ۲\\ \frac{c}{a}>۰\Rightarrow \frac{m-۱}{۱}>۰\Rightarrow m>۱\\ -\frac{b}{a}>۰\Rightarrow \frac{m}{۱}>۰\Rightarrow m>۰\end{cases}$$

پاسخ تشریحی آزمون ۱۲

۱- گزینه‌ی ۳ با توجه به نمودار، سهمی دارای مینیمم است، پس $a>۰$. از طرفی طول رأس سهمی مثبت است، یعنی $-\frac{b}{۲a}>۰$ و در نتیجه $b<۰$. ضمناً محل تلاقی سهمی با محور عرض‌ها مثبت است، یعنی $c>۰$. فقط گزینه‌ی (۳) این خصوصیات را داراست.

۲- گزینه‌ی ۳ با توجه به این که $a>۰$، پس سهمی دارای مینیمم است و چون $c>۰$ پس عرض نقطه‌ی برخورد با محور yها مثبت است. از طرفی $b>۰$ و طول رأس سهمی یعنی $-\frac{b}{۲a}$ منفی است:



۳- گزینه‌ی ۱ نمودار تابع در نقاط $x=۶$ و $x=-۲$ محور xها را قطع می‌کند. پس می‌توان ضابطه‌ی تابع را به صورت $f(x)=a(x+۲)(x-۶)$ نوشت. چون خط $x=-\frac{b}{۲a}$ محور تقارن تابع است، پس طول رأس سهمی برابر است با:

$$x=\frac{-۲+۶}{۲}=۲$$

بنابراین نقطه‌ی $(۲,۴)$ رأس سهمی است و داریم:

$$۴=a(۲+۲)(۲-۶)\Rightarrow a=-\frac{۱}{۴}\Rightarrow f(x)=-\frac{۱}{۴}(x+۲)(x-۶)=-\frac{۱}{۴}x^{۲}+x+۳$$

بنابراین داریم:

$$b=۱\ ,\ c=۳$$

۴- گزینه‌ی ۱ سهمی محور عرض‌ها را در نقطه‌ای با عرض ۶- قطع می‌کند، پس داریم:

$$c=-۶$$

از طرفی نقطه‌ی $(۳,۰)$ روی سهمی است، پس:

$$۹a+۳b-۶=۰$$

ضمناً عرض رأس سهمی برابر ۸- است، یعنی $-\frac{\Delta}{۴a}=-۸$:

$$\begin{cases}۹a+۳b=۶\Rightarrow ۳a+b=۲\Rightarrow b=۲-۳a\\ \frac{\Delta}{۴a}=۸\Rightarrow b^{۲}-۴a(-۶)=۳۲a\Rightarrow b^{۲}=۸a\end{cases}\Rightarrow (۲-۳a)^{۲}=۸a\Rightarrow ۹a^{۲}-۱۲a+۴=۸a\Rightarrow ۹a^{۲}-۲۰a+۴=۰$$

$$\Rightarrow a=\frac{۲۰\pm\sqrt{۴۰۰-۱۴۴}}{۱۸}\Rightarrow a=\frac{۲۰\pm\sqrt{۲۵۶}}{۱۸}\Rightarrow a=\frac{۲۰\pm ۱۶}{۱۸}\Rightarrow\begin{cases}a=۲\xrightarrow{b=۲-۳a}b=۲-۶=-۴\\ a=\frac{۲}{۹}\xrightarrow{b=۲-۳a}b=۲-\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۳}\end{cases}$$

از آن‌جا که سهمی رو به بالاست و طول رأس سهمی مقداری مثبت است، داریم:

$$-\frac{b}{۲a}>۰\xrightarrow{a>۰}-b>۰\Rightarrow b<۰$$

بنابراین $b=-۴$ و $a=۲$ است:

$$a+b=-۲$$

۵- گزینه‌ی ۲ از جایی که طول رأس دو سهمی برابر است، داریم: $\frac{-(-۴)}{۲\times۱}=\frac{-a}{۲(-۱)}\Rightarrow a=۴$

ضمناً تابع $g(x)$ از مبدأ مختصات می‌گذرد، لذا $g(۰)=۰$، یعنی $b=۰$، پس $a+b=۴$.

۶- گزینه‌ی ۴ اگر تابع $y=f(x)$ را ۳ واحد به چپ و ۴ واحد به پایین انتقال دهیم، تابع $y=f(x+۳)-۴$ به‌دست می‌آید، یعنی:

$$g(x)=۲(۴-(x+۳))^۲-۳-۴=۲(۱-x)^۲-۷$$

طول نقطه‌ی تلاقی دو تابع از حل معادله‌ی $f(x)=g(x)$ به‌دست می‌آید:

$$f(x)=g(x)\Rightarrow۲(۱-x)^۲-۷=۲(۴-x)^۲-۳\Rightarrow(۱-x)^۲=(۴-x)^۲+۲\Rightarrow x^۲-۲x+۱=x^۲-۸x+۱۸\Rightarrow۶x=۱۷\Rightarrow x=\frac{۱۷}{۶}$$

۷- گزینه‌ی ۱ رأس سهمی $y=ax^۲+bx+c$ نقطه‌ی $(-\frac{b}{۲a},f(-\frac{b}{۲a}))$ است، پس رأس سهمی داده شده برابر است با:

$$\begin{cases}-\frac{۲b}{۲}=-b\\ f(-b)=b^۲-۲b^۲+۲=۲-b^۲\end{cases}$$

از جایی که هر نقطه روی نیمساز ربع اول و سوم دارای طول و عرض مساوی است، داریم: $۲-b^۲=-b\Rightarrow b^۲-b-۲=۰\Rightarrow b=-۱,۲$

بنابراین مجموع مقادیر b برابر ۱ است.

۸- گزینه‌ی ۱ نقطه‌ی $A(-۱,۵)$ رأس تابع $y=۲+f(x)$ اســت، بنابراین نقطه‌ی $A(-۱,۳)$ رأس تابع $y=f(x)$ اســت. برای یافتن طول نقطه‌ی متناظر A' در تابع $y=۲f(۱-x)$ می‌توان نوشت:

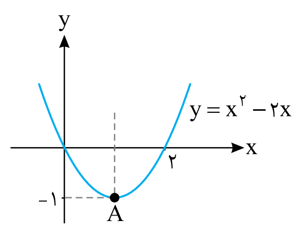
$$۱-x=-۱\Rightarrow x=۲\Rightarrow y=۲f(۱-۲)=۲f(-۱)=۲\times۳=۶$$

یعنی نقطه‌ی $A'(۲,۶)$ رأس سهمی $y=۲f(۱-x)$ است.

۹- گزینه‌ی ۲ نمودار خط و سهمی داده شده در دو نقطه با طول‌های صفر و ۱ متقاطع هستند، یعنی صفر و یک ریشه‌های معادله‌ی $x^۲+bx+۱=۲x+۱$ هستند:

$$x^۲+bx+۱=۲x+۱\Rightarrow x^۲+(b-۲)x=۰\xrightarrow{x=۱}۱+b-۲=۰\Rightarrow b=۱$$

رأس سهمی $y=x^۲+x+۱$ نقطه‌ی $(-\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۴})$ می‌باشد.



۱۰- گزینه‌ی ۱ محور تقارن سهمی خط $x=-\frac{b}{۲a}=۱$ است، پس مختصات نقطه‌ی A برابر $(۱,-۱)$ می‌باشـد، بنابراین A همان رأس سهمی است، زیرا روی محور تقارن است و در معادله‌ی سهمی نیز صدق می‌کند.

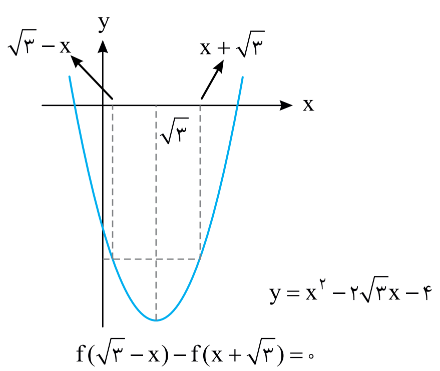
پس خط مماس بر سهمی از این نقطه خط افقی $y=-۱$ می‌باشد.

۱۱- گزینه‌ی ۴ خط افقی، فقط در رأس سهمی می‌تواند بر آن مماس باشد، بنابراین عرض رأس سهمی داده شده برابر ۳ می‌باشد و داریم:

$$-\frac{\Delta}{۴a}=۳\Rightarrow\frac{-(m^۲-۴m-۸)}{۴}=۳\Rightarrow m^۲-۴m-۸=-۱۲\Rightarrow m^۲-۴m+۴=۰\Rightarrow(m-۲)^۲=۰\Rightarrow m=۲$$

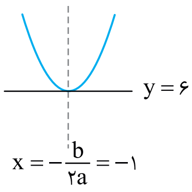
۱۲- گزینه‌ی ۲ محور تقارن سهمی $y=ax^۲+bx+c$ خط قائم $x=-\frac{b}{۲a}$ می‌باشد، پس:

$$\frac{-(-۲m)}{۲(m-۱)}=۳\Rightarrow۲m=۶m-۶\Rightarrow۴m=۶\Rightarrow m=\frac{۳}{۲}$$



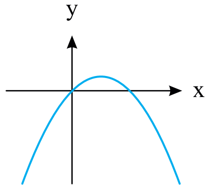
۱۳- گزینه‌ی ۴ چون $x=\sqrt{۳}$ محور تقارن ســهمی داده شــده است و دو نقطه با طول‌های $\sqrt{۳}+x$ و $\sqrt{۳}-x$ روی ســهمی با فاصله‌ی یکســان در دو طرف محور تقارن ســهمی هســتند، بنابراین دارای عرض مساوی هستند.

۱۴- گزینه‌ی ۳ با توجه به شکل مقابل می‌توان گفت رأس سهمی نقطه‌ی $(-۱,۶)$ است، پس داریم:



$$f(-۱)=۶\Rightarrow ۱-۲+k=۶\Rightarrow k=۷$$

۱۵- گزینه‌ی ۱ برای این که نمودار از ناحیه‌ی دوم عبور نکند و از سه ناحیه‌ی دیگر عبور کند، باید نمودار تابع به شکل مقابل باشد. یعنی اولاً $a<۰$ باشد و ثانیاً تابع دارای دو ریشه‌ی متمایز نامنفی باشد. پس داریم:



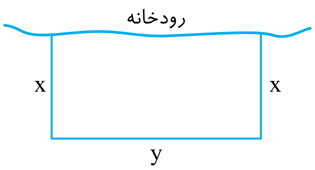
$$\begin{cases} \Delta>۰\Rightarrow (a+۲)^۲>۰\Rightarrow a\neq -۲ \\ \frac{c}{a}\geq ۰\Rightarrow ۰\geq ۰ \\ -\frac{b}{a}>۰\Rightarrow \frac{a+۲}{a}>۰ \xrightarrow{a<۰} a+۲<۰\Rightarrow a<-۲ \end{cases}$$

۱۶- گزینه‌ی ۳ بیش‌ترین مقدار سهمی $f(x)=-\frac{۱}{۲}x^۲+۳x-\frac{۱}{۲}$ برابر عرض رأس آن است:

$$-\frac{\Delta}{۴a}=\frac{-(۹-۴\times\frac{۱}{۴})}{۴(-\frac{۱}{۲})}=\frac{-۸}{-۲}=۴$$

تابع $y=f(x-۱)$، انتقال یافته‌ی تابع $y=f(x)$ به اندازه‌ی یک واحد به سمت راست است و عرض رأس آن با عرض رأس $y=f(x)$ برابر است.

۱۷- گزینه‌ی ۴ طول طناب را L، عرض زمین را x و طول آن را y می‌نامیم:



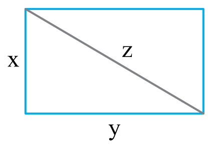
$$۲x+y=L\Rightarrow y=L-۲x$$

$$S=xy=x(L-۲x)\Rightarrow S=-۲x^۲+Lx$$

S_{max} برابر عرض رأس سهمی فوق است، پس:

$$-\frac{\Delta}{۴a}=S_{max}\Rightarrow \frac{-L^۲}{-۸}=۶۴۸\Rightarrow L^۲=۸\times۶۴۸\Rightarrow L^۲=۱۶\times۴\times۸۱\Rightarrow L=۴\times۲\times۹\Rightarrow L=۷۲$$

۱۸- گزینه‌ی ۳ با توجه به شکل مقابل داریم:



$$۲(x+y)=۲۴\Rightarrow x+y=۱۲\Rightarrow y=۱۲-x$$

$$z^۲=x^۲+y^۲=x^۲+(۱۲-x)^۲=۲x^۲-۲۴x+۱۴۴$$

کم‌ترین مقدار $z^۲$ به ازای $x=\frac{۲۴}{۴}=۶$ به‌دست می‌آید که برابر است با:

$$z^۲_{min}=۲(۶)^۲-۲۴\times۶+۱۴۴=۷۲-۱۴۴+۱۴۴=۷۲$$

پس کم‌ترین مقدار قطر برابر $\sqrt{۷۲}=۶\sqrt{۲}$ می‌باشد.

۱۹- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول**: حاصل‌ضرب دو عدد را با P نمایش می‌دهیم:

$$P=xy\xrightarrow{۳x+۴y=۲۴}P=x(\frac{۲۴-۳x}{۴})\Rightarrow P=-\frac{۳}{۴}x^۲+۶x$$

بیش‌ترین مقدار P به ازای $x=\frac{-۶}{-\frac{۳}{۲}}=۴$ به‌دست می‌آید که برابر است با:

$$P_{max}=-\frac{۳}{۴}(۴^۲)+۶\times۴=-۱۲+۲۴=۱۲$$

راه‌حل دوم:

نکته: اگر جمع دو عدد ثابت باشد، ضرب آن‌ها هنگامی بیش‌ترین است که آن دو عدد با هم برابر باشند.

از جایی که $۳x+۴y=۲۴$، بنابراین $۱۲P=(۳x)(۴y)$ هنگامی ماکزیمم است که داشته باشیم $۳x=۴y=۱۲$، یعنی $y=۳$ و $x=۴$. پس بیش‌ترین مقدار ضرب آن‌ها برابر $۳\times۴=۱۲$ است.

۲۰- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول**: با توجه به این که x مثبت است، می‌توان تابع داده شده را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$f(x)=4x+\frac{9}{x}=(\sqrt{4x}-\sqrt{\frac{9}{x}})^2+2\times\sqrt{4x}\times\sqrt{\frac{9}{x}}\Rightarrow f(x)=(2\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}})^2+12$$

از جایی که داریم $(2\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}})^2\geq 0$، بنابراین حداقل مقدار $f(x)$ برابر ۱۲ است.

راه‌حل دوم:

نکته: اگر ضرب دو عدد مثبت، ثابت باشد، جمع آن‌ها وقتی کم‌ترین است که آن دو عدد برابر باشند.

از جایی که $4x\times\frac{9}{x}=36$، بنابراین جمع آن‌ها وقتی مینیمم است که $4x=\frac{9}{x}$ یعنی $x=\frac{3}{2}$. پس:

$$f_{min}=4(\frac{3}{2})+\frac{9}{\frac{3}{2}}=6+6=12$$

پاسخ تشریحی آزمون ۱۳

۱- گزینه‌ی ۲ نمودار تابع از نقطه‌ی $(0,2)$ عبور کرده است، پس داریم:

$$2=0+0+c\Rightarrow c=2$$

نقطه‌ی $(-1,1)$ رأس سهمی است. می‌دانیم رأس سهمی نقطه‌ی $(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a})$ است. پس داریم:

$$-\frac{b}{2a}=-1\Rightarrow b=2a$$

$$-\frac{\Delta}{4a}=1\Rightarrow \Delta=-4a\Rightarrow b^2-4ac=-4a\Rightarrow(2a)^2-4a\times2=-4a\Rightarrow4a^2-4a=0\Rightarrow4a(a-1)=0\Rightarrow\begin{cases}a=0 & \text{غ‌ق‌ق}\\ a=1\end{cases}$$

$$b=2a\Rightarrow b=2$$

بنابراین داریم:

$$a+b-c=1+2-2=1$$

۲- گزینه‌ی ۴ با توجه به نمودار سهمی، طول رأس سهمی، به ازای هر مقدار m عددی منفی است و داریم:

گزینه‌ی (۱):

$-\frac{b}{2a}=\frac{m}{2}$ می‌تواند مثبت یا منفی باشد

گزینه‌ی (۲):

$-\frac{b}{2a}=-\frac{m}{2}$ می‌تواند مثبت یا منفی باشد

گزینه‌ی (۳):

$-\frac{b}{2a}=\frac{m^2}{2}$ همواره مثبت است

گزینه‌ی (۴):

$-\frac{b}{2a}=-\frac{m^2}{2}$ همواره منفی است

۳- گزینه‌ی ۳ نمودار تابع $y=x(6-x)$ از دو نقطه‌ی $(0,0)$ و $(6,0)$ می‌گذرد، نمودار تابع $y=2x^2+ax+b$ نیز از همین نقاط می‌گذرد، بنابراین ضابطه‌ی آن به صورت زیر است:

$$y=2(x-0)(x-6)=2(x^2-6x)=2x^2-12x$$

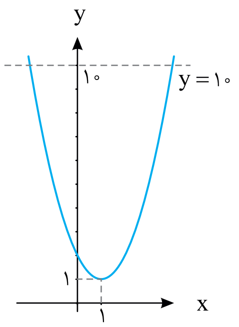
رأس دو سهمی داده شده نقاط $A(3,9)$ و $B(3,-18)$ می‌باشد. فاصله‌ی دو نقطه‌ی A و B برابر $9-(-18)=27$ واحد است.

۴- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول**: فاصله‌ی هر نقطه از محور طول‌ها همان قدر مطلق عرض نقطه است. پس نقاطی مورد نظر است که دارای عرض ۱۰ باشند:

$$|y|=10 \Rightarrow |x^2-2x+2|=10 \Rightarrow \begin{cases} x^2-2x+2=-10 \\ x^2-2x+2=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-2x+12=0 \Rightarrow \Delta<0 \\ x^2-2x-8=0 \Rightarrow (x-4)(x+2)=0 \Rightarrow x=4 \ , \ x=-2 \end{cases}$$

بنابراین دو نقطه‌ی $A(-2,10)$ و $B(4,10)$ در شرایط مسأله صدق می‌کند.

راه‌حل دوم: نمودار تابع را رسم می‌کنیم. نقاطی که فاصله‌ی آن‌ها از محور x ها برابر ۱۰ واحد است روی خط $y=10$ هستند. پس کافی است بدانیم این خط در چند نقطه با نمودار تابع مشترک است، با رسم خط $y=10$ واضح است که دو نقطه وجود دارد.



۵- گزینه‌ی ۳ از روی نمودارها مشخص است که سهمی پایین مربوط به تابع $f(x)=-x^2+4x$ است و این سهمی دارای رأس $(2,4)$ است. با توجه به شکل تابع $g(x)=ax^2+bx+c$ نیز دارای رأس $(2,4)$ است و از نقطه‌ی $(0,6)$ می‌گذرد:

$$\begin{cases} g(0)=6 \Rightarrow c=6 \\ g(2)=4 \Rightarrow 4a+2b+c=4 \\ -\frac{b}{2a}=2 \Rightarrow b=-4a \end{cases} \Rightarrow 4a-8a+6=4 \Rightarrow 4a=2 \Rightarrow a=\frac{1}{2} \xrightarrow{b=-4a} b=-2$$

بنابراین داریم:

$$a-b=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$$

۶- گزینه‌ی ۴ نمودار تابع $y=f(x)$ تنها در نقطه‌ای به طول ۱ محور طول‌ها را قطع می‌کند، پس معادله‌ی $f(x)=0$ فقط دارای ریشه‌ی $x=1$ است:

$$f(x)=0 \Rightarrow \frac{2x^2+ax+b}{x^2-2x+5}=0 \Rightarrow 2x^2+ax+b=0$$

معادله‌ی فوق دارای ریشه‌ی مضاعف ۱ است، یعنی:

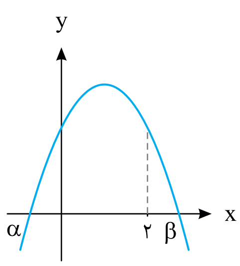
$$2x^2+ax+b=2(x-1)^2 \Rightarrow 2x^2+ax+b=2x^2-4x+2$$

پس ضابطه‌ی تابع برابر است با:

$$f(x)=\frac{2x^2-4x+2}{x^2-2x+5} \xrightarrow{x=0} f(0)=\frac{2}{5}$$

۷- گزینه‌ی ۱ نمودار تابع $y=-2x^2-3mx+2m+2$ یک سهمی رو به پایین است که در دو نقطه با طول‌های α و β محور x ها را قطع می‌کند. برای آن که داشته باشیم $\alpha<2<\beta$ کافی است مطابق شکل روبه‌رو نقطه‌ای با طول ۲ روی سهمی، دارای عرض مثبت باشد، تا بین دو ریشه قرار گیرد:

$$f(2)>0 \Rightarrow -2\times4-3m\times2+2m+2>0 \Rightarrow -8-6m+2m+2>0 \Rightarrow 4m<-6 \Rightarrow m<-\frac{3}{2}$$



۸- گزینه‌ی ۱ **راه‌حل اول**: با توجه به رابطه‌ی داده شده، تابع را به صورت رابطه‌ای از y بر حسب x بازنویسی می‌کنیم:

$$x=1-2m \Rightarrow m=\frac{1-x}{2}$$

$$y=m^2-3m \Rightarrow y=(\frac{1-x}{2})^2-3(\frac{1-x}{2})=\frac{x^2-2x+1}{4}+\frac{3x}{2}-\frac{3}{2}=\frac{x^2+4x-5}{4} \Rightarrow y=\frac{1}{4}x^2+x-\frac{5}{4}$$

حداقل مقدار تابع فوق در رأس تابع اتفاق می‌افتد:

$$\frac{-b}{2a}=\frac{-1}{\frac{2}{4}}=-2 \Rightarrow y_{min}=f(-2)=\frac{1}{4}\times4-2-\frac{5}{4}=-1-\frac{5}{4}=-\frac{9}{4}$$

راه‌حل دوم: از جایی که رابطه‌ی x و m رابطه‌ای خطی است، می‌توان مقدار y را از همان رابطه‌ی $y=m^۲-۳m$ به‌دست آورد:

$$y_{min}=\frac{-\Delta}{۴a}=\frac{-۹}{۴\times ۱}=-\frac{۹}{۴}$$

۹- گزینه‌ی ۲ برای این که تابع دارای ماکزیمم باشد، باید m منفی باشد. همچنین ماکزیمم تابع نقطه‌ی $(-\frac{b}{۲a},-\frac{\Delta}{۴a})$ است که اگر در ناحیه‌ی چهارم قرار گیرد، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} -\frac{b}{۲a}>۰\Rightarrow\frac{-۲\sqrt{۳}}{m}>۰\Rightarrow m<۰ \\ \frac{-\Delta}{۴a}<۰\Rightarrow\frac{-(۱۲-۴m^۲-۸m)}{۴m}<۰\Rightarrow\frac{m^۲+۲m-۳}{m}<۰\xrightarrow{m<۰}m^۲+۲m-۳>۰\Rightarrow m>۳ \text{ یا } m<-۱\end{cases}\Rightarrow m<-۱$$

۱۰- گزینه‌ی ۱ محور تقارن تابع، خط $x=-\frac{-۴a}{۲a}=۲$ است، پس قرینه‌ی نقطه‌ی $(۵,۲۰)$ نسبت به خط $x=۲$ که نقطه‌ی $(-۱,۲۰)$ است، حتماً روی نمودار تابع قرار دارد.

۱۱- گزینه‌ی ۳ بیش‌ترین مقدار تابع درجه دوم $y=ax^۲+bx+c$ برابر $-\frac{\Delta}{۴a}$ است و محور تقارن آن $x=-\frac{b}{۲a}$ است. پس داریم:

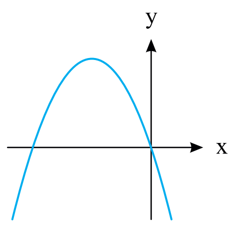
$$-\frac{۹-۸m}{۴m}=۵\Rightarrow ۸m-۹=۲۰m\Rightarrow ۱۲m=-۹\Rightarrow m=-\frac{۳}{۴}\ ,\ \text{محور تقارن}: x=-\frac{۳}{۲m}=-\frac{۳}{۲(-\frac{۳}{۴})}=۲$$

۱۲- گزینه‌ی ۴ از آن‌جا که $x=-\frac{b}{۲a}$ محور تقارن سهمی است، پس نقاط برخورد با محور طول‌ها نسبت به رأس سهمی متقارن هستند. بنابراین نقاط برخورد با محور طول‌ها باید $A(۵,۰)$ و $B(۱,۰)$ باشند تا طول AB برابر ۴ واحد باشد. پس ضابطه‌ی تابع به صورت $f(x)=a(x-۱)(x-۵)$ است و نقطه‌ی $(۳,۲)$ روی نمودار تابع قرار دارد و در معادله‌ی آن صدق می‌کند:

$$۲=a(۳-۱)(۳-۵)\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow f(x)=-\frac{۱}{۲}(x-۱)(x-۵)$$

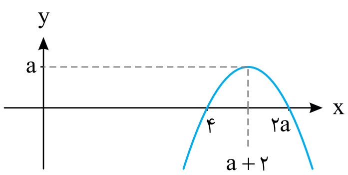
در نقطه‌ی برخورد با محور عرض‌ها داریم:

$$x=۰\Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}(۰-۱)(۰-۵)=-\frac{۵}{۲}$$



۱۳- گزینه‌ی ۴ سهمی از مبدأ مختصات می‌گذرد. برای آن که نمودار سهمی از ناحیه‌ی دوم عبور کند، می‌بایست مطابق شکل، ریشه‌ی دیگر معادله‌ی درجه دوم $-x^۲+۲mx=۰$ منفی باشد، یعنی جمع ریشه‌ها منفی باشد:

$$\frac{-b}{a}<۰\Rightarrow\frac{-۲m}{-۱}<۰\Rightarrow ۲m<۰\Rightarrow m<۰$$



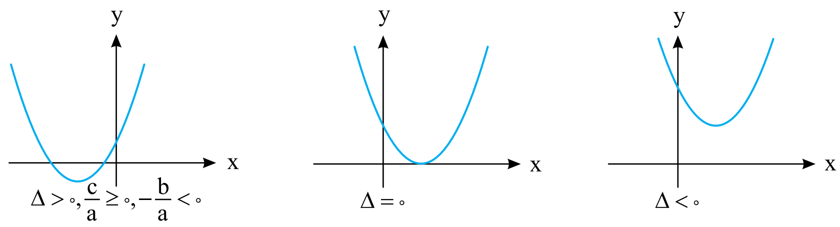
۱۴- گزینه‌ی ۴ سهمی از دو نقطه‌ی $(۴,۰)$ و $(۲a,۰)$ می‌گذرد، بنابراین محور تقارن سهمی برابر $x=\frac{۲a+۴}{۲}$ یعنی $x=a+۲$ است. از طرفی از جایی که خط افقی $y=a$ بر سهمی مماس است، مختصات رأس سهمی $(a+۲,a)$ می‌باشد. نقطه‌ی $(a+۲,a)$ در معادله‌ی سهمی صدق می‌کند، پس:

$$a=(۴-(a+۲))(a+۲-۲a)\Rightarrow a=(۲-a)(۲-a)\Rightarrow a^۲-۴a+۴=a\Rightarrow a^۲-۵a+۴=۰\Rightarrow a=۱ \text{ یا } a=۴$$

با توجه به شرط $a>۲$، تنها جواب قابل قبول $a=۴$ است:

معادله‌ی محور تقارن: $x=a+۲\Rightarrow x=۶$

۱۵- گزینه‌ی ۳ نمودار تابع در سه حالت زیر از ناحیه‌ی چهارم عبور نخواهد کرد:



بنابراین Δ را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta=a^{۲}-۴(۴-a^{۲})=۵a^{۲}-۱۶$$

حال می‌توان نوشت:

حالت اول و دوم : $\Delta\leq ۰\Rightarrow ۵a^{۲}-۱۶\leq ۰\Rightarrow -\frac{۴}{\sqrt{۵}}\leq a\leq \frac{۴}{\sqrt{۵}}\quad (I)$

حالت سوم : $\begin{cases}\Delta>۰\Rightarrow ۵a^{۲}-۱۶>۰\Rightarrow a>\frac{۴}{\sqrt{۵}} \text{ یا } a<-\frac{۴}{\sqrt{۵}}\\ \frac{c}{a}\geq ۰\Rightarrow ۴-a^{۲}\geq ۰\Rightarrow -۲\leq a\leq ۲\\ -\frac{b}{a}<۰\Rightarrow -a<۰\Rightarrow a>۰\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک گیری از بازه‌های موجود}}\frac{۴}{\sqrt{۵}}<a\leq ۲\quad (II)$

$$(I)\cup(II)\Rightarrow -\frac{۴}{\sqrt{۵}}\leq a\leq ۲$$

۱۶- گزینه‌ی ۱ **راه‌حل اول:** دو عدد مورد نظر را x و y و حاصل‌ضرب آن‌ها را P می‌نامیم:

$$\begin{cases}۲x=۶+y\\ P=xy\end{cases}\Rightarrow P=x(۲x-۶)\Rightarrow P=۲x^{۲}-۶x$$

مینیمم تابع درجه دوم در نقطه‌ی رأس سهمی اتفاق می‌افتد:

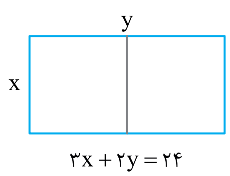
$$x=\frac{-b}{۲a}=\frac{۶}{۴}=\frac{۳}{۲}\xrightarrow{y=۲x-۶}y=۳-۶=-۳\Rightarrow x+y=\frac{۳}{۲}-۳=-\frac{۳}{۲}$$

راه‌حل دوم:

نکته: اگر مجموع دو عدد ثابت باشد، حاصل‌ضرب آن‌ها وقتی بیش‌ترین است که آن دو عدد برابر باشند.

از جایی که $۲x+(-y)=۶$، بنابراین $-۲P=(۲x)(-y)$ هنگامی ماکزیمم است که داشته باشیم $۲x=-y=۳$، یعنی $y=-۳$ و $x=\frac{۳}{۲}$. پس مینیمم P به ازای $x=\frac{۳}{۲}$ و $y=-۳$ به‌دست می‌آید.

۱۷- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول:** عرض مستطیل را x، طول آن را y و مساحت آن را S می‌نامیم. داریم:



$$\begin{cases}۳x+۲y=۲۴\\ S=xy\end{cases}\Rightarrow S=x(\frac{۲۴-۳x}{۲})\Rightarrow S=-\frac{۳}{۲}x^{۲}+۱۲x\Rightarrow S_{max}=-\frac{\Delta}{۴a}=-\frac{۱۲^{۲}}{۴(-\frac{۳}{۲})}=۲۴$$

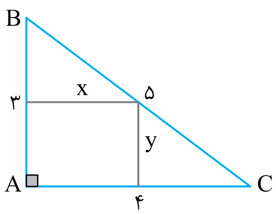
راه‌حل دوم:

نکته: اگر مجموع دو عدد ثابت باشد، حاصل‌ضرب آن‌ها هنگامی بیش‌ترین است که آن دو عدد برابر باشند.

از جایی که $۳x+۲y=۲۴$، بنابراین $۶S=۳x\times ۲y$ هنگامی ماکزیمم اســت که داشته باشیم $۳x=۲y=۱۲$، یعنی $x=۴$ و $y=۶$، پس:

$$S_{max}=۴\times ۶=۲۴$$

۱۸- گزینه‌ی ۱ طول و عرض مستطیل را x و y می‌نامیم. با توجه به قضیه‌ی تالس داریم:



$$\frac{x}{۴}=\frac{۳-y}{۳}\Rightarrow ۳x=۱۲-۴y\Rightarrow y=\frac{۱۲-۳x}{۴}$$

$$S=xy=x(\frac{۱۲-۳x}{۴})\Rightarrow S=-\frac{۳}{۴}x^۲+۳x$$

تابع درجه دوم به ازای طول رأس دارای ماکزیمم است:

$$x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۳}{۲(-\frac{۳}{۴})}=\frac{۳}{\frac{۳}{۲}}=۲\Rightarrow y=\frac{۱۲-۳\times ۲}{۴}=\frac{۳}{۲}$$

بنابراین اختلاف طول و عرض برابر است با:

$$۲-\frac{۳}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

۱۹- گزینه‌ی ۴ نقطه‌ی دلخواه B به مختصات $(x,\sqrt{-x})$ را روی تابع در نظر می‌گیریم:

$$AB=\sqrt{(x-(-۲))^۲+(\sqrt{-x}-۰)^۲}\Rightarrow AB=\sqrt{x^۲+۴x+۴-x}\Rightarrow (AB)^۲=x^۲+۳x+۴$$

کم‌ترین مقدار $(AB)^۲$ به ازای $x=-\frac{۳}{۲}$ به‌دست می‌آید که برابر است با:

$$(AB)^۲_{min}=\frac{۹}{۴}-\frac{۹}{۲}+۴=\frac{۹-۱۸+۱۶}{۴}=\frac{۷}{۴}\Rightarrow AB_{min}=\frac{\sqrt{۷}}{۲}$$

۲۰- گزینه‌ی ۴ **راه‌حل اول**: با توجه به این که x عددی منفی است، تابع مورد نظر را می‌توان چنین بازنویسی کرد:

$$y=x+\frac{۹}{x}=-(-x-\frac{۹}{x})=-(\sqrt{-x}-\frac{۳}{\sqrt{-x}})^۲-۶$$

کم‌ترین مقدار $(\sqrt{-x}-\frac{۳}{\sqrt{-x}})^۲$ برابر صفر است، بنابراین بیش‌ترین مقدار تابع برابر -۶ است.

راه‌حل دوم:

نکته: اگر ضرب دو عدد منفی ثابت باشـد، جمع آن‌ها هنگامی ماکزیمم اسـت که آن دو عدد برابر باشـند. از جایی که $x\times\frac{۹}{x}=۹$، بنابراین جمع این دو عدد منفی وقتی ماکزیمم است که $x=\frac{۹}{x}$ یعنی $x=-۳$، پس:

$$y_{max}=-۳+\frac{۹}{-۳}=-۶$$

پاسخ تشریحی آزمون ۱۴

۱- گزینه‌ی ۴ **راه‌حل اول**: نقطه‌ی $(۱,۶)$ رأس تابع اسـت، پس معادله‌ی تابع به‌صورت $y=a(x-۱)^۲+۶$ اسـت. از جایی که تابع از نقطه‌ی $(۳,۰)$ می‌گذرد، داریم:

$$۰=a(۳-۱)^۲+۶\Rightarrow ۴a+۶=۰\Rightarrow a=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow y=-\frac{۳}{۲}(x-۱)^۲+۶\Rightarrow y=-\frac{۳}{۲}x^۲+۳x-\frac{۳}{۲}+۶\Rightarrow$$

$$y=-\frac{۳}{۲}x^۲+۳x+\frac{۹}{۲}\Rightarrow ab+c=-\frac{۳}{۲}\times ۳+\frac{۹}{۲}=۰$$

راه‌حل دوم: ۳ یکی از ریشه‌های تابع است و رأس تابع نقطه‌ای با طول یک است، پس ریشه‌ی دیگر تابع برابر است با:

$$\frac{x+۳}{۲}=۱\Rightarrow x=-۱$$

بنابراین معادله‌ی این تابع به‌صورت $y=a(x+۱)(x-۳)$ است. این تابع از نقطه‌ی $(۱,۶)$ می‌گذرد، پس:

$$۶=a(۱+۱)(۱-۳)\Rightarrow -۴a=۶\Rightarrow a=\frac{-۳}{۲}\Rightarrow y=-\frac{۳}{۲}(x+۱)(x-۳)\Rightarrow y=-\frac{۳}{۲}x^۲+۳x+\frac{۹}{۲}\Rightarrow ab+c=۰$$

۲- گزینه‌ی ۳ طول رأس تابع برابر میانگین دو ریشه است، پس:

$$\frac{-۱+x_۲}{۲}=۱\Rightarrow -۱+x_۲=۲\Rightarrow x_۲=۳$$

۳ و ۱- دو ریشه‌ی معادله‌ی $f(x)=۰$ هستند. پس ۲-۳ و ۲-۱- ریشه‌های معادله‌ی $f(x+۲)=۰$ هستند و مجموع آن‌ها برابر است با $۱-۳-=۲-$.

۳- گزینه‌ی ۳ با توجّه به صورت سؤال، معادله‌ی زیر باید دو ریشه‌ی منفی داشته باشد:

$$(x+۲)(۲x+۱)=۲x+m\Rightarrow ۲x^۲+۵x+۲=۲x+m\Rightarrow ۲x^۲+۳x+۲-m=۰\Rightarrow\begin{cases}P=\frac{c}{a}>۰\Rightarrow\frac{۲-m}{۲}>۰\Rightarrow m<۲\\ S=\frac{-b}{a}<۰\Rightarrow\frac{-۳}{۲}<۰\quad\checkmark\end{cases}$$

$$\Delta>۰\Rightarrow ۹-۴\times۲\times(۲-m)>۰\Rightarrow ۹-۱۶+۸m>۰\Rightarrow ۸m>۷\Rightarrow m>\frac{۷}{۸}$$

بنابراین باید داشته باشیم $\frac{۷}{۸}<m<۲$.

۴- گزینه‌ی ۱ بیش‌ترین مقدار یک تابع درجه ۲، برابر عرض رأس سهمی است، پس:

$$\frac{-\Delta}{۴a}=-۱\Rightarrow\frac{-(۱۶-۴m(۲m-۳))}{۴m}=-۱\Rightarrow ۱۶-۸m^۲+۱۲m=۴m\Rightarrow ۸m^۲-۸m-۱۶=۰\Rightarrow$$

$$m^۲-m-۲=۰\Rightarrow(m-۲)(m+۱)=۰\Rightarrow m=۲ \text{ یا } -۱$$

با توجه به این‌که تابع درجه ۲، ماکزیمم دارد، پس حتماً ضریب جمله‌ی درجه دوم، منفی است، پس $m=۲$ غیرقابل قبول است و $m=-۱$.

۵- گزینه‌ی ۴ برای آن‌که سهمی خط را قطع نکند می‌بایست معادله‌ی زیر ریشه نداشته باشد:

$$mx=(۲x+۱)(x+۸)\Rightarrow ۲x^۲+۱۷x+۸=mx\Rightarrow ۲x^۲+(۱۷-m)x+۸=۰\xrightarrow{\Delta<۰}(۱۷-m)^۲-۴\times۲\times۸<۰$$

$$\Rightarrow(۱۷-m)^۲-۶۴<۰\Rightarrow(۱۷-m-۸)(۱۷-m+۸)<۰\Rightarrow(m-۹)(m-۲۵)<۰\Rightarrow ۹<m<۲۵$$

بنابراین m می‌تواند یکی از ۱۵ عدد صحیح $۱۰,۱۱,\dots,۲۴$ باشد.

۶- گزینه‌ی ۴ اگر مختصات نقطه‌ی M را (x,y) فرض کنیم، مساحت مستطیل ONMP برابر $S=xy$ است. با توجه به این‌که نقطه‌ی M روی خط $y=۳-۲x$ قرار دارد پس:

$$S=x(۳-۲x)=-۲x^۲+۳x\Rightarrow S_{max}=\frac{-\Delta}{۴a}=\frac{-۹}{-۸}=\frac{۹}{۸}$$

۷- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول**: با توجه به منفی بودن x ضابطه‌ی تابع را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$f(x)=\frac{x^۲-x+۴}{x}=x-۱+\frac{۴}{x}=-(\sqrt{-x})^۲-\frac{۴}{(\sqrt{-x})^۲}-۱=-(\sqrt{-x}-\frac{۲}{\sqrt{-x}})^۲-۲\sqrt{-x}\sqrt{\frac{۴}{-x}}-۱=-(\sqrt{-x}-\sqrt{\frac{۴}{-x}})^۲-۵$$

مشخص است که بیش‌ترین مقدار تابع f وقتی است که عبارت مربع کامل برابر صفر باشد.

$$(\sqrt{-x}-\sqrt{\frac{۴}{-x}})^۲\geq۰\Rightarrow-(\sqrt{-x}-\sqrt{\frac{۴}{-x}})^۲\leq۰\Rightarrow-۵-(\sqrt{-x}-\sqrt{\frac{۴}{-x}})^۲\leq-۵\Rightarrow f(x)\leq-۵$$

راه‌حل دوم: برای دو عدد منفی a و b می‌دانیم $\frac{a+b}{۲}\leq-\sqrt{ab}$ پس با جایگذاری $a=x$ و $b=\frac{۴}{x}$ داریم:

$$\frac{x+\frac{۴}{x}}{۲}\leq-\sqrt{x\times\frac{۴}{x}}\Rightarrow x+\frac{۴}{x}\leq-۲\times۲\Rightarrow x+\frac{۴}{x}-۱\leq-۵\Rightarrow\frac{x^۲+۴-x}{x}\leq-۵\Rightarrow f(x)\leq-۵$$

۸- گزینه‌ی ۱ عدد $x=۱$ در معادله‌ی $x^۳-(m+۱)x^۲+(m+۱)x-۱=۰$ صدق می‌کند. پس یکی از ریشه‌ها برابر یک است. با تجزیه عامل $x-۱$ را از معادله فاکتور می‌گیریم:

$$x^۳-۱-(m+۱)x^۲+(m+۱)x=۰\Rightarrow(x-۱)(x^۲+x+۱)-(m+۱)x(x-۱)=۰\Rightarrow(x-۱)(x^۲+x+۱-mx-x)=۰\Rightarrow(x-۱)(x^۲-mx+۱)=۰$$

برای آن‌که معادله، ۳ ریشه‌ی متمایز داشته باشد باید معادله‌ی $x^۲-mx+۱=۰$ دو ریشه‌ی مختلف و مخالف ۱ داشته باشد، پس:

$$x\neq۱\Rightarrow ۱-m+۱\neq۰\Rightarrow m\neq۲$$

$$\Delta>۰\Rightarrow m^۲-۴>۰\Rightarrow m^۲>۴\Rightarrow|m|>۲$$

۹- گزینه‌ی ۳ اگر قیمت هر هدیه قبل از تخفیف برابر x باشد، تعداد آن‌ها برابر $\frac{۱۲۰۰۰}{x}$ است. اگر قیمت کالا $x-۱۰۰$ شود، با ۱۲۰۰۰ تومان می‌توان $\frac{۱۲۰۰۰}{x}+۴$ کالا خرید، پس:

$$۱۲۰۰۰=(\frac{۱۲۰۰۰}{x}+۴)(x-۱۰۰)\Rightarrow ۱۲۰۰۰=۱۲۰۰۰+۴x-\frac{۱۲\times ۱۰^۵}{x}-۴۰۰\Rightarrow ۴x^۲-۴۰۰x-۱۲\times ۱۰^۵=۰\Rightarrow x^۲-۱۰۰x-۳۰۰۰۰۰=۰$$

$$(x-۶۰۰)(x+۵۰۰)=۰\Rightarrow x=۶۰۰\Rightarrow x-۱۰۰=۵۰۰$$

۱۰- گزینه‌ی ۴ **راه‌حل اول:** معادله‌ی $x^۲+mx+۱=۰$ دارای دو ریشه است، پس:

$$\Delta>۰\Rightarrow m^۲-۴>۰\Rightarrow m^۲>۴$$

با توجه به این‌که Δ در گزینه‌ی (۴) برابر $\Delta=m^۲-۸$ است ممکن است مقدار m به گونه‌ای باشد که معادله‌ی گزینه‌ی (۴) ریشه نداشته باشد.

برای سایر گزینه‌ها داریم:

گزینه‌ی (۱): $\Delta=m^۲+۴\xrightarrow{m^۲>۴}\Delta>۰$

گزینه‌ی (۲): $\Delta=(m-۲)^۲-۴(۲-m)=m^۲-۴m+۴-۸+۴m=m^۲-۴\xrightarrow{m^۲>۴}\Delta>۰$

گزینه‌ی (۳): $\Delta=m^۲-۴\xrightarrow{m^۲>۴}\Delta>۰$

راه‌حل دوم: تابع $y=x^۲+mx+۱$ در دو نقطه محور xها را قطع می‌کند.

برای تابع گزینه‌ی (۱)، باید ۲ واحد سهمی اصلی را به پایین انتقال دهیم و حتماً سهمی محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند.
برای تابع گزینه‌ی (۲)، به عنوان مثال می‌توان سهمی را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم و حتماً سهمی محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند.
برای تابع گزینه‌ی (۳)، باید سهمی را نسبت به محور yها قرینه کنیم و حتماً سهمی محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند.
برای تابع گزینه‌ی (۴)، باید علاوه بر قرینه کردن نسبت به محور yها، آن را یک واحد به بالا منتقل کنیم که ممکن است دیگر محور xها را در دو نقطه قطع نکند.

۱۱- گزینه‌ی ۱ اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، برای آن‌که اختلاف آن‌ها برابر یک باشد، داریم:

$$|\alpha-\beta|=۱\Rightarrow\frac{\sqrt{\Delta}}{۱}=۱\Rightarrow\Delta=۱\Rightarrow m^۲-۴(۱-۲m)=۱\Rightarrow m^۲+۸m-۵=۰$$

مجموع اعداد مورد قبول برای m برابر است با:

$$S=\frac{-b}{a}=-۸$$

۱۲- گزینه‌ی ۳ ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-ax+a+۳=۰$ را α و β و ریشه‌های معادله‌ی $x(۵-x)=۲$ را α' و β' می‌نامیم:

$$x(۵-x)=۲\Rightarrow -x^۲+۵x=۲\Rightarrow x^۲-۵x+۲=۰\Rightarrow\alpha'+\beta'=-\frac{b'}{a'}=۵$$

$$x^۲-ax+a+۳=۰\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=a$$

با توجه به این‌که $\alpha=۳\alpha'$ و $\beta=۳\beta'$ پس:

$$\alpha+\beta=۳(\alpha'+\beta')\Rightarrow a=۳\times ۵\Rightarrow a=۱۵$$

۱۳- گزینه‌ی ۲ با تغییر متغیر $x^۲=t$ معادله به‌صورت $mt^۲-۴t+m-۳=۰$ می‌شود. این معادله باید ۲ ریشه‌ی متمایز مثبت داشته باشد، پس:

$$\Delta'>۰\Rightarrow ۴-m(m-۳)>۰\Rightarrow -m^۲+۳m+۴>۰\Rightarrow -۱<m<۴$$

$$S=\frac{-b}{a}>۰\Rightarrow\frac{۴}{m}>۰\Rightarrow m>۰$$

$$P=\frac{c}{a}\Rightarrow\frac{m-۳}{m}>۰\Rightarrow m>۳ \text{ یا } m<۰$$

اشتراک ۳ محدوده‌ی به‌دست آمده، $۳<m<۴$ می‌باشد.

۱۴- گزینه‌ی ۴ با توجه به معادله‌ی $x^۲-۳x+m-۱=۰$ داریم $\alpha+\beta=۳$، $\alpha\beta=m-۱$، پس می‌توان نوشت:

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=-۳\Rightarrow\frac{\alpha^۲+\beta^۲}{\alpha\beta}=-۳\Rightarrow\frac{(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta}{\alpha\beta}=-۳$$

$$\Rightarrow\frac{۹-۲(m-۱)}{m-۱}=-۳\Rightarrow -۲m+۱۱=-۳m+۳\Rightarrow m=-۸$$

۱۵- گزینه‌ی ۲ اگر فرض کنیم $t=x^{۲}$ خواهیم داشت:

$$x^{۲}(۳x^{۲}+۵)=۱-m^{۲}\Rightarrow t(۳t+۵)=۱-m^{۲}\Rightarrow ۳t^{۲}+۵t+m^{۲}-۱=۰$$

حال در دو حالت معادله‌ی اولیه دارای دو ریشه‌ی قرینه خواهد بود:

۱) معادله‌ی اخیر دارای یک ریشه‌ی مثبت و یک ریشه‌ی منفی باشد: $\frac{c}{a}<۰\Rightarrow\frac{m^{۲}-۱}{۳}<۰\Rightarrow m^{۲}<۱\Rightarrow|m|<۱$

۲) معادله‌ی اخیر دارای یک ریشه‌ی مضاعف مثبت باشد: $\Delta=۰\Rightarrow ۲۵-۱۲(m^{۲}-۱)=۰\Rightarrow ۱۲m^{۲}=۳۷\Rightarrow m=\pm\sqrt{\frac{۳۷}{۱۲}}$

در این حالت ریشه‌ی مضاعف برابر $x=-\frac{b}{۲a}$ یعنی $x=-\frac{۵}{۶}$ خواهد بود که قابل قبول نیست.

۱۶- گزینه‌ی ۱ مجموع و ضرب ریشه‌های $x^{۲}-x-۱=۰$ به ترتیب برابر $S=\frac{-b}{a}=۱$ و $P=\frac{c}{a}=-۱$ اســت. جمع و ضرب ریشه‌های معادله‌ی جدید برابر است با:

$$S'=\alpha-\frac{۱}{\alpha}+\beta-\frac{۱}{\beta}=\alpha+\beta-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=۱-\frac{۱}{-۱}=۲$$

$$P'=(\alpha-\frac{۱}{\alpha})(\beta-\frac{۱}{\beta})=\alpha\beta-\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\alpha}{\beta}+\frac{۱}{\alpha\beta}=\alpha\beta-\frac{\beta^{۲}+\alpha^{۲}}{\alpha\beta}+\frac{۱}{\alpha\beta}=-۱-\frac{۱^{۲}+۲}{-۱}+\frac{۱}{-۱}=-۲+۳=۱$$

معادله‌ای که جمع ریشه‌های آن S' و ضرب آن‌ها P' باشد، معادله‌ی زیر است:

$$x^{۲}-S'x+P'=۰\Rightarrow x^{۲}-۲x+۱=۰$$

۱۷- گزینه‌ی ۱ ضرب ریشه‌های این معادله برابر $P=\frac{c}{a}=-۲$ است، پس:

$$\alpha\beta=-۲\Rightarrow\beta=\frac{-۲}{\alpha}\xrightarrow{۲\beta+\alpha=-۱}-\frac{۶}{\alpha}+\alpha=-۱\Rightarrow-۶+\alpha^{۲}=-\alpha\Rightarrow\alpha^{۲}+\alpha-۶=۰$$

$$\Rightarrow(\alpha+۳)(\alpha-۲)=۰\Rightarrow\alpha=۲ \text{ یا } \alpha=-۳\xrightarrow{\beta=\frac{-۲}{\alpha}}\beta=-۱ \text{ یا } \beta=\frac{۲}{۳}$$

اگر $\alpha=۲$ و $\beta=-۱$ باشد، جمع ریشه‌ها برابر ۱ است و داریم:

$$S=۱\Rightarrow\frac{-(m+۱)}{۲}=۱\Rightarrow m+۱=-۲\Rightarrow m=-۳$$

۱۸- گزینه‌ی ۲ α و β ریشه‌های معادله هستند، پس در معادله صدق می‌کنند:

$$\beta^{۲}-۲\beta-۶=۰\Rightarrow\beta^{۲}=۲(\beta+۳)\Rightarrow\beta+۳=\frac{\beta^{۲}}{۲}$$

بنابراین با توجه به $\alpha\beta=-۶$ داریم: $\sqrt{\alpha^{۲}(\beta+۳)}=\sqrt{\frac{\alpha^{۲}\beta^{۲}}{۲}}=\sqrt{\frac{(-۶)^{۲}}{۲}}=\sqrt{۱۸}=۳\sqrt{۲}$

۱۹- گزینه‌ی ۴ مجموع ریشه‌های معادله برابر یک است، پس:

$$S=۱\Rightarrow\frac{-(۲m-۳)}{۱}=۱\Rightarrow ۳-۲m=۱\Rightarrow ۲m=۲\Rightarrow m=۱$$

پس معادله به‌صورت $x^{۲}-x-۲=۰$ می‌باشد، بنابراین ریشه‌های معادله $\alpha=-۱$ و $\beta=۲$ است و مجموع مربعات ریشه‌ها برابر $۱+۴=۵$ است.

۲۰- گزینه‌ی ۱ با توجه به این‌که $x_{۱}=۲$ یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^{۲}-۵x+m^{۳}+۵m=۰$ است، پس در معادله صدق می‌کند و داریم:

$$۴-۱۰+m^{۳}+۵m=۰\Rightarrow m^{۳}+۵m-۶=۰\Rightarrow m^{۳}+۵m=۶$$

بنابراین معادله به‌صورت $x^{۲}-۵x+۶=۰$ است و داریم:

$$(x-۲)(x-۳)=۰\Rightarrow x_{۱}=۲,x_{۲}=۳\Rightarrow x_{۱}^{۳}+x_{۲}^{۳}=۸+۲۷=۳۵$$

۴

تابع قدرمطلق و تابع جزء صحیح

پاسخ تشریحی آزمون‌های فصل چهارم

پاسخ تشریحی آزمون ۱۵

۱- گزینه‌ی ۳ با توجه به محدوده‌های داده شده برای a و b داریم:

$$\begin{cases} a>0 \Rightarrow |a|=a \\ b<0 \Rightarrow |b|=-b \\ |a|>|b| \Rightarrow a>-b \Rightarrow a+b>0 \end{cases} \Rightarrow |a+b|+|a|+|b|=a+b+a-b=2a$$

۲- گزینه‌ی ۴ می‌دانیم $|-b|=|b|$ بنابراین:

$$|a-b|=|a|+|-b|$$

حال با توجه به نامساوی مثلث می‌دانیم $|x+y|=|x|+|y|$ هنگامی برقرار است که $xy\geq 0$، پس داریم:

$$a(-b)\geq 0 \Rightarrow ab\leq 0$$

۳- گزینه‌ی ۴ با توجه به این که می‌دانیم $x^2+x<0$، بنابراین $-1<x<0$، پس:

$$\begin{cases} x<0 \Rightarrow -x>0 \Rightarrow 2-x>0 \\ -1<x \Rightarrow 2x<-2 \Rightarrow 2x+2<0 \end{cases} \Rightarrow |2-x|+|2x+2|=2-x-2x-2=-3x$$

۴- گزینه‌ی ۲ عبارت $\frac{a}{|a|}$ یا $\frac{|a|}{a}$ به ازای اعداد مثبت a برابر ۱ و به ازای اعداد منفی a، برابر -1 است. پس داریم:

$$A=\frac{x}{|x|}-\frac{|x-1|}{x-1}=\begin{cases} 1-1 & x>1 \\ 1-(-1) & 0<x<1 \\ -1-(-1) & x<0 \end{cases} \Rightarrow A=\begin{cases} 0 & x>1 \\ 2 & 0<x<1 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

بنابراین A می‌تواند دو مقدار صفر یا ۲ داشته باشد.

۵- گزینه‌ی ۳ با محدوده‌بندی، تابع را به صورت چند ضابطه‌ای بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} 2x-6+2(x+1) & x\geq 3 \\ -(2x-6)+2(x+1) & -1\leq x<3 \\ -(2x-6)-2(x+1) & x<-1 \end{cases} = \begin{cases} 4x-4 & x\geq 3 \\ 8 & -1\leq x<3 \\ -4x+4 & x<-1 \end{cases}$$

بنابراین $a=-1$، $b=3$ و $c=8$ و داریم:

$$a+b+c=8+3-1=10$$

۶- گزینه‌ی ۳ اگر $x<0$، فاقد جواب است، بنابراین $x\geq 0$ و داریم:

$$|x^2-4x|\leq x \Rightarrow |x||x-4|\leq x \xrightarrow{x\geq 0} x|x-4|\leq x$$

$x=0$ یکی از جواب‌های نامعادله‌ی فوق است. برای $x\neq 0$ داریم:

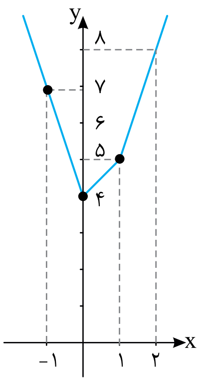
$$|x-4|\leq 1 \Rightarrow -1\leq x-4\leq 1 \Rightarrow 3\leq x\leq 5$$

بنابراین جواب‌های صحیح این نامعادله برابر است با ۵، ۴، ۳ و صفر.

۷- گزینه‌ی ۱ تساوی $|a|=|b|$ معادل با $a=\pm b$ است، پس:

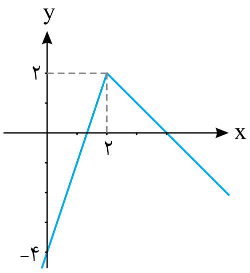
$$|2x-1|=|x-3| \Rightarrow \begin{cases} 2x-1=x-3 \Rightarrow x=-2 \\ 2x-1=3-x \Rightarrow x=\frac{4}{3} \end{cases}$$

بنابراین مجموع دو ریشه برابر $-\frac{2}{3}$ می‌باشد.



۸- گزینه‌ی ۲ نقاط تغییر ضابطه‌ی تابع دو نقطه‌ی $(۱,۵)$ و $(۰,۴)$ می‌باشد. سپس به کمک دو نقطه‌ی $(۲,۸)$ و $(-۱,۷)$ تابع را رسم می‌کنیم:

بنابراین حداقل مقدار تابع برابر ۴ است.



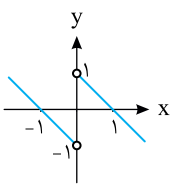
۹- گزینه‌ی ۲ نقطه‌ی تغییر ضابطه‌ی تابع $(۲,۲)$ است، سپس به کمک دو نقطه‌ی $(۳,۱)$ و $(۰,-۴)$ نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

بنابراین بیش‌ترین مقدار تابع برابر ۲ است.

۱۰- گزینه‌ی ۲ تابع $y=x(\frac{۱}{|x|}-۱)$ را به کمک بازه‌بندی، چند ضابطه‌ای می‌کنیم:

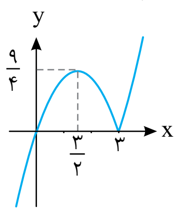
$$\begin{cases} x>۰ \Rightarrow y=x(\frac{۱}{x}-۱)=۱-x \\ x<۰ \Rightarrow y=x(\frac{۱}{-x}-۱)=-۱-x \end{cases} \Rightarrow y=\begin{cases} ۱-x & x>۰ \\ -۱-x & x<۰ \end{cases}$$

حالا نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



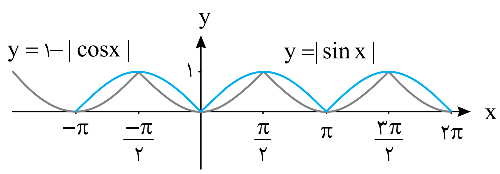
۱۱- گزینه‌ی ۴ ابتدا تابع را به صورت چند ضابطه‌ای می‌نویسیم، سپس آن را رسم می‌کنیم:

$$y=x|x-۳|=\begin{cases} x^{۲}-۳x & x\geq ۳ \\ ۳x-x^{۲} & x<۳ \end{cases}$$



بنابراین تابع در بازه‌ی $(\frac{۳}{۲},۳)$ نزولی است و حاصل $b-a$ برابر $\frac{۳}{۲}$ است.

۱۲- گزینه‌ی ۴ با توجه به قوانین رسم نمودار، نمودار تابع $y=|\sin x|$ و $y=۱-|\cos x|$ را رسم می‌کنیم:



بنابراین این دو تابع در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ همدیگر را در نقاط صفر، $\frac{\pi}{۲}$، π، $\frac{۳\pi}{۲}$ و ۲π قطع می‌کنند.

۱۳- گزینه‌ی ۴ می‌دانیم نامعادله‌ی $|x-\alpha|<\beta$ با نامعادله‌ی $\alpha-\beta<x<\alpha+\beta$ معادل است، بنابراین:

$$|۴-\frac{۱}{x}|<۲\Rightarrow|\frac{۱}{x}-۴|<۲\Rightarrow۴-۲<\frac{۱}{x}<۴+۲\Rightarrow۲<\frac{۱}{x}<۶\xrightarrow{x>۰}\frac{۱}{۶}<x<\frac{۱}{۲}$$

بنابراین جواب نامعادله، بازه‌ی $(\frac{۱}{۶},\frac{۱}{۲})$ است و داریم:

$$\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۶}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

۱۴- گزینه‌ی ۲ می‌دانیم دو نامعادله‌ی $|x|\le a$ و $-a\le x\le a$ برای مقادیر نامنفی a معادل هستند، بنابراین:

$$\left||x+۲|-۱\right|\le۲\Rightarrow-۲\le|x+۲|-۱\le۲\Rightarrow-۱\le|x+۲|\le۳$$

از جایی که $|x+۲|$ همواره عبارتی است نامنفی، پس نامساوی سمت چپ همواره برقرار است. برای نامعادله‌ی سمت راست داریم:

$$|x+۲|\le۳\Rightarrow-۳\le x+۲\le۳\Rightarrow-۵\le x\le۱$$

تعداد اعداد صحیح موجود در این بازه برابر $۱-(-۵)+۱=۷$ می‌باشد.

۱۵- گزینه‌ی ۲ می‌دانیم $x^۲=|x|^۲$، بنابراین داریم:

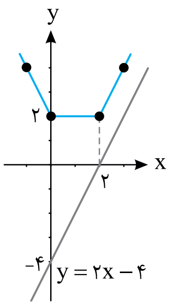
$$x^۲-۲|x|-۳\le۰\Rightarrow|x|^۲-۲|x|-۳\le۰\Rightarrow(|x|-۳)(|x|+۱)\le۰\xrightarrow{|x|+۱>۰}|x|-۳\le۰\Rightarrow|x|\le۳\Rightarrow-۳\le x\le۳$$

۱۶- گزینه‌ی ۴ با توجه به این که $۰<|۲x-۳|<x+۱$، بنابراین $x+۱$ حتماً باید عددی مثبت باشد. حال می‌توانیم طرفین نامعادله را به توان دو برسانیم:

$$|۲x-۳|<x+۱\Rightarrow|۲x-۳|^۲<(x+۱)^۲\Rightarrow(۲x-۳)^۲-(x+۱)^۲<۰\Rightarrow(۲x-۳+x+۱)(۲x-۳-x-۱)<۰\Rightarrow(۳x-۲)(x-۴)<۰\Rightarrow\frac{۲}{۳}<x<۴$$

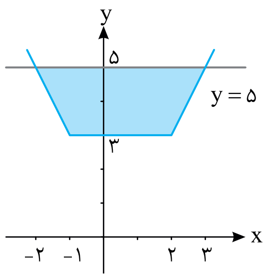
اگر بازه‌ی $(\frac{۲}{۳},۴)$ را به صورت $|x-\alpha|<\beta$ بنویسیم، β برابر نصف طول بازه یعنی $\frac{۴-(\frac{۲}{۳})}{۲}=\frac{۵}{۳}$ است.

۱۷- گزینه‌ی ۳ نمودار این تابع را به کمک نقاط شکستگی $(۰,۲)$ و $(۲,۲)$ و نقاط کمکی $(۳,۴)$ و $(-۱,۴)$ رسم می‌کنیم:



از بین خطوط داده شده در گزینه‌ها، این تابع با نمودار خط $y=۲x-۴$ موازی می‌شود و هرگز آن را قطع نمی‌کند.

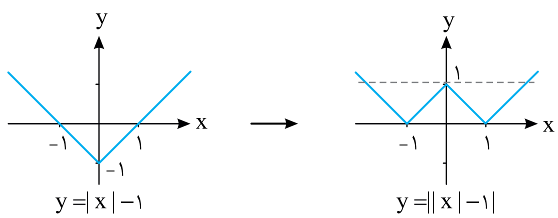
۱۸- گزینه‌ی ۱ نمودار تابع مورد نظر را به کمک نقاط شکستگی $(۲,۳)$ و $(-۱,۳)$ و نقاط کمکی $(۳,۵)$ و $(-۲,۵)$ رسم می‌کنیم:



شکل به وجود آمده یک ذوزنقه با ارتفاع $۵-۳=۲$ و قاعده‌ی کوچک $۲-(-۱)=۳$ و قاعده‌ی بزرگ $۳-(-۲)=۵$ است، بنابراین:

$$S=\frac{۲\times(۳+۵)}{۲}=۸$$

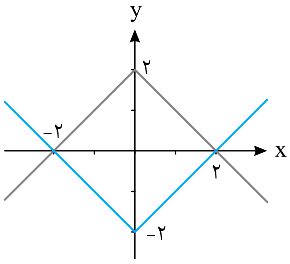
۱۹- گزینه‌ی ۲ ابتدا نمودار $y=|x|$ را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا $y=|x|-۱$ به‌دست آید، سپس از روی آن $y=\left||x|-۱\right|$ را رسم می‌کنیم:



این نمودار تنها با خط $y=۱$ را در سه نقطه قطع می‌کند.

۲۰- گزینه‌ی ۳ دو نمودار را با استفاده از قوانین در یک محور مختصات رسم می‌کنیم: شکل به وجود آمده یک مربع (لوزی) به قطر ۴ است، بنابراین با توجه به این که مساحت لوزی برابر نصف حاصل‌ضرب دو قطر است، داریم:

$$S=\frac{۱}{۲}(۴\times۴)=۸$$



پاسخ تشریحی آزمون ۱۶

۱- گزینه‌ی ۲ از این که $a<۰<-b$ می‌فهمیم a و b هر دو منفی هستند، بنابراین $ab>۰$ است:

$$\sqrt{a^۲+b^۲-۲\sqrt{a^۲b^۲}}=\sqrt{a^۲+b^۲-۲|ab|}=\sqrt{a^۲+b^۲-۲ab}=\sqrt{(a-b)^۲}=|a-b|$$

حال با توجه به این که a و b هر دو منفی هستند، نامساوی $|a|<|b|$ به $-a<-b$ تبدیل می‌شود که یعنی $a-b>۰$، بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر $a-b$ می‌باشد.

۲- گزینه‌ی ۴ از آن‌جا که $|b|=|-b|$، نامساوی مثلثی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$|a+(-b)|\le|a|+|-b|\Rightarrow|a-b|\le|a|+|b|$$

حال با توجه به فرض سؤال یعنی $|a-b|\ge|a|+|b|$ فقط حالت تساوی اتفاق می‌افتد:

$$|a+(-b)|=|a|+|-b|\Rightarrow a(-b)\ge۰\Rightarrow-ab\ge۰\Rightarrow ab\le۰$$

۳- گزینه‌ی ۱ با توجه به محدوده‌ی داده شده، علامت عبارات داخل قدر مطلق را مشخص می‌کنیم:

$$\begin{cases}x>-۲\Rightarrow x+۲>۰\Rightarrow|x+۲|=x+۲\\ \begin{cases}x<۳\Rightarrow x-۳<۰\\x>-۲\Rightarrow x+۲>۰\Rightarrow x+۳>۰\end{cases}\Rightarrow(x-۳)(x+۳)<۰\Rightarrow|x^۲-۹|=۹-x^۲\end{cases}\Rightarrow x|x+۲|+|x^۲-۹|=x(x+۲)+۹-x^۲=x^۲+۲x+۹-x^۲=۲x+۹$$

۴- گزینه‌ی ۲ با توجه به نامساوی مثلثی می‌دانیم $|a+b|<|a|+|b|$ هنگامی اتفاق می‌افتد که $ab<۰$، بنابراین دو حالت زیر ممکن است رخ دهد:

$$\begin{cases}a>۰\\b<۰\end{cases}\Rightarrow A=\frac{a}{|a|}-\frac{|b|}{b}=\frac{a}{a}-\frac{-b}{b}=۲\quad,\quad\begin{cases}a<۰\\b>۰\end{cases}\Rightarrow A=\frac{a}{|a|}-\frac{|b|}{b}=\frac{a}{-a}-\frac{b}{b}=-۲$$

۵- گزینه‌ی ۲ می‌دانیم فاصله‌ی طول نقطه‌ی a از نقطه‌ی b برابر است با $|a-b|$، بنابراین می‌توان نقطه‌ی مورد نظر را با حل معادله‌ی زیر به‌دست آورد:

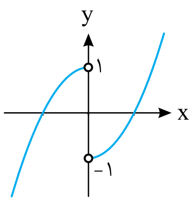
$$|x-۲|=\frac{۱}{۲}|x+۱|\Rightarrow\begin{cases}x-۲=\frac{۱}{۲}(x+۱)\Rightarrow\frac{۱}{۲}x=\frac{۵}{۲}\Rightarrow x=۵\\x-۲=-\frac{۱}{۲}(x+۱)\Rightarrow\frac{۳}{۲}x=\frac{۳}{۲}\Rightarrow x=۱\end{cases}$$

بنابراین دو نقطه‌ی $x=۱$ و $x=۵$ چنین خاصیتی دارند.

۶- گزینه‌ی ۳ می‌توان با توجه به تعریف قدر مطلق، تابع را به صورت چند ضابطه‌ای بازنویسی کرد:

$$y=|x|(x-\frac{۱}{x})=\begin{cases}x(x-\frac{۱}{x}) & x>۰\\-x(x-\frac{۱}{x}) & x<۰\end{cases}=\begin{cases}x^۲-۱ & x>۰\\-x^۲+۱ & x<۰\end{cases}$$

نمودار این تابع به صورت روبه‌رو می‌باشد:



۷- گزینه‌ی ۲ برای یافتن مقادیری از x که تابع $y=f(x)$ بالای تابع $y=g(x)$ قرار دارد، باید نامعادله‌ی $f(x)>g(x)$ را حل کرد:

$$\begin{cases} y=۴-|x| \\ ۲y+x=۵\Rightarrow y=\frac{۵-x}{۲} \end{cases} \Rightarrow ۴-|x|>\frac{۵-x}{۲}\Rightarrow ۸-۲|x|>۵-x\Rightarrow ۲|x|<۳+x$$

این نامعادله را با محدوده‌بندی x حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x\geq ۰\Rightarrow ۲x<۳+x\Rightarrow x<۳\xrightarrow{x\geq ۰} x\in[۰,۳) \\ x<۰\Rightarrow -۲x<۳+x\Rightarrow ۳x>-۳\Rightarrow x>-۱\xrightarrow{x<۰} x\in(-۱,۰) \end{cases} \Rightarrow x\in(-۱,۳)$$

بنابراین طول بازه برابر $۳-(-۱)=۴$ می‌باشد.

۸- گزینه‌ی ۲ باید نامعادله‌ی $y<۳$ را حل کنیم. از جایی که می‌دانیم $x^۲=|x|^۲$، داریم:

$$|x|^۲-۳|x|-۱<۳\Rightarrow |x|^۲-۳|x|-۴<۰\Rightarrow (|x|-۴)(|x|+۱)<۰\xrightarrow{|x|+۱>۰} |x|<۴\Rightarrow -۴<x<۴$$

بنابراین طول بازه برابر $۴-(-۴)=۸$ می‌باشد.

۹- گزینه‌ی ۴ با توجه به این که $|x|=\begin{cases} x & x\geq ۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}$ می‌توان تابع مورد نظر را به صورت زیر نوشت:

$$x\geq ۰\Rightarrow \big||۳x|-|x|\big|=|۳x-x|=|۲x|$$

$$x<۰\Rightarrow \big||۳x|-|x|\big|=|-۳x-(-x)|=|-۲x|=|۲x|$$

بنابراین تابع در همه‌ی اعداد حقیقی با تابع $y=|۲x|$ برابر است.

۱۰- گزینه‌ی ۲ به کمک بازه‌بندی نامعادله‌ی مورد نظر را حل می‌کنیم:

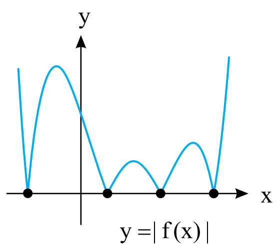
$$|x-۲|+۱\leq ۳-|x|\Rightarrow |x-۲|+|x|\leq ۲$$

$$\begin{cases} x\geq ۲\Rightarrow x-۲+x\leq ۲\Rightarrow ۲x\leq ۴\Rightarrow x\leq ۲\xrightarrow{x\geq ۲} x=۲ \\ ۰\leq x<۲\Rightarrow ۲-x+x\leq ۲\Rightarrow ۲\leq ۲\xrightarrow{۰\leq x<۲} x\in[۰,۲) \\ x<۰\Rightarrow ۲-x-x\leq ۲\Rightarrow ۲x\geq ۰\Rightarrow x\geq ۰\xrightarrow{x<۰} x\in\varnothing \end{cases}$$

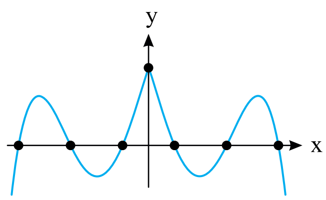
بنابراین جواب نامعادله، بازه‌ی $[۰,۲]$ می‌باشد، یعنی $\alpha=۰$ و $\beta=۲$:

$$f(\alpha)+g(\beta)=f(۰)+g(۲)=|۰-۲|+۱+۳-|۲|=۴$$

۱۱- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول**: با استفاده از قوانین رسم نمودار، دو تابع $y=|f(x)|$ و $y=f(|x|)$ را رسم می‌کنیم:



$y=|f(x)|$



$y=(f|x|)$

همان‌طور که در شکل نمایش داده شده، $y=f(|x|)$ در ۶ نقطه و $y=|f(x)|$ در ۴ نقطه محور xها را قطع می‌کنند.

راه‌حل دوم: از آن‌جا که معادله‌ی $f(x)=۰$ دارای چهار ریشه است، معادله‌ی $|f(x)|=۰$ نیز به همان تعداد ریشه دارد و از آن‌جا که $f(x)=۰$ دارای ۳ ریشه‌ی مثبت است، $f(|x|)=۰$، ۳ ریشه‌ی مثبت و ۳ ریشه‌ی منفی یعنی ۶ ریشه دارد.

$$f(|x|)=۰\Rightarrow \begin{cases} x\geq ۰ & f(x)=۰ \\ x<۰ & f(-x)=۰ \end{cases}$$

۱۲- گزینه‌ی ۱ برای این که تابع را دو واحد به سمت چپ انتقال دهیم و آن را نسبت به محور x ها قرینه کنیم، کافی است تابع $y=-f(x+۲)$ را تشکیل دهیم:

$$g(x)=-f(x+۲)=-(۳-|x+۲-۱|)=|x+۱|-۳$$

برای یافتن تلاقی دو منحنی $y=f(x)$ و $y=g(x)$، کافی است معادله‌ی $f(x)=g(x)$ را حل کنیم:

$$f(x)=g(x)\Rightarrow ۳-|x-۱|=|x+۱|-۳\Rightarrow |x+۱|+|x-۱|=۶$$

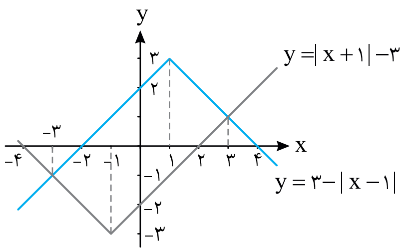
با محدوده‌بندی x معادله‌ی فوق را حل می‌کنیم:

$$x\geq ۱\Rightarrow (x-۱)+(x+۱)=۶\Rightarrow ۲x=۶\Rightarrow x=۳$$

$$-۱\leq x<۱\Rightarrow ۱-x+x+۱=۶\Rightarrow ۲=۶ \text{ غقق}$$

$$x<-۱\Rightarrow ۱-x-x-۱=۶\Rightarrow -۲x=۶\Rightarrow x=-۳$$

بنابراین $x=۳$ و $x=-۳$ طول دو نقطه‌ی تلاقی دو تابع است. نمودار دو تابع در شکل زیر رسم شده است:



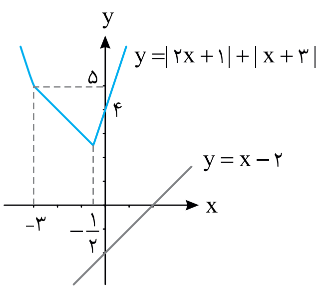
۱۳- گزینه‌ی ۱ **راه‌حل اول:** با محدوده‌بندی x نامعادله را در سه حالت حل می‌کنیم:

$$x\geq -\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۲x+۱+x+۳<x-۲\Rightarrow ۲x<-۶\Rightarrow x<-۳\xrightarrow{x\geq -\frac{۱}{۲}} x\in\varnothing$$

$$-۳\leq x<-\frac{۱}{۲}\Rightarrow -۲x-۱+x+۳<x-۲\Rightarrow ۲x>۴\Rightarrow x>۲\xrightarrow{x<-\frac{۱}{۲}} x\in\varnothing$$

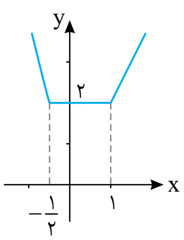
$$x<-۳\Rightarrow -۲x-۱-x-۳<x-۲\Rightarrow ۴x>-۲\Rightarrow x>-\frac{۱}{۲}\xrightarrow{x<-۳} x\in\varnothing$$

بنابراین نامعادله در هیچ محدوده‌ای جواب ندارد.



راه‌حل دوم: نمودار تابع $y=|۲x+۱|+|x+۳|$ را به کمک نقاط شکستگی $(-\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۲})$ و $(-۳,۵)$ و نقاط کمکی $(۰,۴)$ و $(-۴,۸)$ رسم می‌کنیم:

مشخص است که نمودار $y=|۲x+۱|+|x+۳|$ هیچ‌جا، پایین نمودار $y=x-۲$ قرار نمی‌گیرد و نامعادله جواب ندارد.



۱۴- گزینه‌ی ۱ نمودار تابع مورد نظر را به کمک نقاط شکستگی $(-\frac{۱}{۲},۲)$ و $(۱,۲)$ و نقاط کمکی $(۲,۴)$ و $(-۱,۴)$ رسم می‌کنیم:

این تابع در بازه‌ی $[-\frac{۱}{۲},۱]$ برابر خط افقی $y=۲$ است.

۱۵- گزینه‌ی ۱ از آن‌جا که هر دو طرف نامعادله، نامنفی هستند، طرفین را به توان دو می‌رسانیم:

$$(x^۲)^۲<|x+۶|^۲\Rightarrow (x^۲)^۲-(x+۶)^۲<۰\Rightarrow (x^۲+x+۶)(x^۲-x-۶)<۰$$

عبارت $x^۲+x+۶$ همواره مثبت است $(a>۰,\Delta<۰)$، بنابراین باید داشته باشیم:

$$x^۲-x-۶<۰\Rightarrow -۲<x<۳$$

نقطه‌ی میانی بازه‌ی $(-۲,۳)$ برابر $\frac{-۲+۳}{۲}=\frac{۱}{۲}$ است، بنابراین α برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

۱۶- گزینه‌ی ۳ با استفاده از تعریف قدر مطلق و حالت‌بندی، نامعادله را حل می‌کنیم:

$$x\geq 0\Rightarrow \left|2x-|x|\right|<2x-1\Rightarrow |2x-x|<2x-1\Rightarrow |x|<2x-1\Rightarrow x<2x-1\Rightarrow x>1\xrightarrow{x\geq 0} x>1$$

$$x<0\Rightarrow \left|2x-|x|\right|<2x-1\Rightarrow |2x+x|<2x-1\Rightarrow |3x|<2x-1\Rightarrow -3x<2x-1\Rightarrow 5x>1\Rightarrow x>\frac{1}{5}\xrightarrow{x<0} x\in\varnothing$$

بنابراین نامعادله دارای جواب $(1,+\infty)$ می‌باشد.

۱۷- گزینه‌ی ۴ نامعادله‌ی $|x|<a$ با نامعادله‌ی $-a<x<a$ معادل است، پس:

$$\left|\frac{2x-3}{x+2}\right|<1\Rightarrow -1<\frac{2x-3}{x+2}<1$$

$$\begin{cases}\dfrac{2x-3}{x+2}<1\Rightarrow \dfrac{2x-3-x-2}{x+2}<0\Rightarrow \dfrac{x-5}{x+2}<0\Rightarrow -2<x<5\\ \dfrac{2x-3}{x+2}>-1\Rightarrow \dfrac{2x-3+x+2}{x+2}>0\Rightarrow \dfrac{3x-1}{x+2}>0\Rightarrow x>\dfrac{1}{3}\ \text{یا}\ x<-2\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک گیری از بازه‌ها}}\frac{1}{3}<x<5$$

اعداد صحیح ۱، ۲، ۳ و ۴ در بازه‌ی فوق قرار دارند.

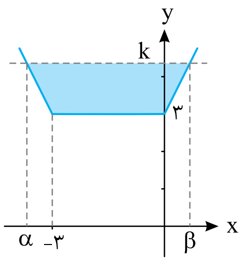
۱۸- گزینه‌ی ۱ با محدوده‌بندی x، بنابر تعریف $|x-2|$ معادله را حل می‌کنیم:

$$x>2\Rightarrow \frac{1}{x-2}=x-2\Rightarrow (x-2)^2=1\Rightarrow x-2=\pm 1\Rightarrow x=3\ \text{یا}\ x=1\xrightarrow{x>2} x=3$$

$$x<2\Rightarrow \frac{1}{x-2}=-(x-2)\Rightarrow -(x-2)^2=1\Rightarrow (x-2)^2=-1\ \ \text{جواب ندارد}$$

بنابراین معادله فقط دارای ریشه‌ی $x=3$ است.

۱۹- گزینه‌ی ۲ مساحت مورد نظر همان مساحتی است که نمودار $y=|x|+|x+3|$ با خط $y=k$ می‌سازد:



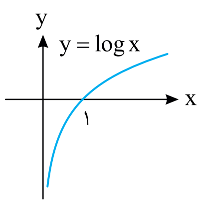
$$\beta+(\beta+3)=k\Rightarrow 2\beta+3=k\Rightarrow \beta=\frac{k-3}{2}\ ,\ -\alpha-(\alpha+3)=k\Rightarrow -2\alpha-3=k\Rightarrow \alpha=\frac{-k-3}{2}$$

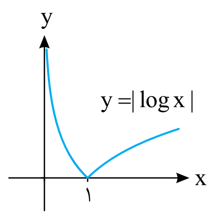
$$\text{قاعده‌ی بزرگ ذوزنقه}=\beta-\alpha=\frac{k-3}{2}+\frac{k+3}{2}=k$$

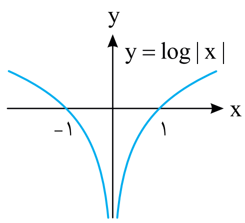
$$\text{مساحت ذوزنقه}=\frac{1}{2}\times\text{ارتفاع}\times\text{جمع دو قاعده}$$

$$S=\frac{1}{2}(k-3)(k+3)\Rightarrow S=\frac{1}{2}(k^2-9)\xrightarrow{S=8}\frac{1}{2}(k^2-9)=8\Rightarrow k^2-9=16\Rightarrow k^2=25\Rightarrow k=\pm 5\xrightarrow{k>3}k=5$$

۲۰- گزینه‌ی ۲ با توجه به نمودار $y=\log x$، دو تابع مورد نظر را رسم می‌کنیم:







مشخص است که دو تابع، در بازه‌ی $[1,+\infty)$ منطبق هستند.

پاسخ تشریحی آزمون ۱۷

۱- گزینه‌ی ۲ ابتدا $x=-\sqrt{2}$ را در عبارت قرار می‌دهیم:

$$[(-\sqrt{2})^3]+[2(-\sqrt{2})]=[-\sqrt{8}]+[-2\sqrt{2}]=[-2\sqrt{2}]+[-2\sqrt{2}]=2[-2\sqrt{2}]$$

حال با توجه به مقدار تقریبی $\sqrt{2}$ داریم:

$$1<\sqrt{2}<1/5\Rightarrow 2<2\sqrt{2}<3\Rightarrow -3<-2\sqrt{2}<-2\Rightarrow [-2\sqrt{2}]=-3\Rightarrow 2[-2\sqrt{2}]=-6$$

۲- گزینه‌ی ۳ سعی می‌کنیم با تفکیک کسر، معادله را به صورت ساده‌تری بازنویسی کنیم:

$$[\frac{۵x+۱}{x}]=۹\Rightarrow[۵+\frac{۱}{x}]=۹\Rightarrow ۵+[\frac{۱}{x}]=۹\Rightarrow[\frac{۱}{x}]=۴$$

می‌دانیم تمام اعداد بازه‌ی $[۴,۵)$، جزء صحیحی برابر ۴ دارند، پس:

$$۴\le\frac{۱}{x}<۵\Rightarrow\frac{۱}{۵}<x\le\frac{۱}{۴}\Rightarrow ۴<۲۰x\le ۵$$

در حالتی که $۲۰x=۵$، جزء صحیح آن برابر ۵ و در بقیه‌ی حالات که $۴<۲۰x<۵$، جزء صحیحش برابر ۴ است.

۳- گزینه‌ی ۱ ابتدا محدوده‌ی x را با توجه به $[x^۲+x]=-۱$ مشخص می‌کنیم:

$$-۱\le x^۲+x<۰\Rightarrow\begin{cases}x^۲+x<۰\Rightarrow x(x+۱)<۰\Rightarrow -۱<x<۰\\ x^۲+x\ge -۱\Rightarrow x^۲+x+۱\ge ۰\xrightarrow[a>۰]{\Delta<۰}x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

حال با توجه به محدوده‌ی $-۱<x<۰$، حاصل تمامی جزء صحیح‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$۰<x^۲<۱\Rightarrow[x^۲]=۰\quad,\quad -۱<x^۳<۰\Rightarrow[x^۳]=-۱$$

$$-\frac{۱}{۲}<\frac{x}{۲}<۰\Rightarrow[\frac{x}{۲}]=-۱\quad,\quad -\frac{۱}{۳}<\frac{x}{۳}<۰\Rightarrow[\frac{x}{۳}]=-۱$$

بنابراین داریم:

$$[x^۲]+[\frac{x}{۲}]+[x^۳]+[\frac{x}{۳}]=۰-۱-۱-۱=-۳$$

سراسری تجربی - ۸۸

۴- گزینه‌ی ۴ می‌دانیم عدد صحیح را می‌توان از داخل جزء صحیح بیرون آورد، پس:

$$[x^۲-۱]+[۲-x^۲]=[x^۲]-۱+۲+[-x^۲]=[x^۲]+[-x^۲]+۱$$

می‌دانیم $[a]+[-a]$ به ازای مقادیر صحیح a برابر صفر و برای مقادیر غیر صحیح a برابر -۱ است. اگر x عددی غیر صحیح باشد، $x^۲$ می‌تواند صحیح (مثل $x=\sqrt{۲}$) یا غیر صحیح (مثل $x=\frac{۱}{۲}$) باشد، بنابراین $[x^۲]+[-x^۲]+۱$ می‌تواند برابر صفر یا ۱ باشد.

۵- گزینه‌ی ۴ ابتدا با حل نامعادله، محدوده‌ی x را می‌یابیم: $x^۲+x<۰\Rightarrow x(x+۱)<۰\Rightarrow -۱<x<۰$

اگر عددی بین صفر و -۱ باشد، به توان هر عدد فردی در همان محدوده باقی می‌ماند، ولی به توان زوج عددی بین صفر و ۱ می‌شود، یعنی:

$$\begin{cases}۰<x^{۲k}<۱\Rightarrow[x^{۲k}]=۰\\ -۱<x^{۲k+۱}<۰\Rightarrow[x^{۲k+۱}]=-۱\end{cases}\Rightarrow[x]+[x^۲]+\cdots+[x^{۱۰}]=۵\times ۰+۵\times(-۱)=-۵$$

سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۸

۶- گزینه‌ی ۳ با توجه به گزینه‌ها این عبارت به ازای همه‌ی اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۲، مقداری ثابت است، بنابراین کافی است حاصل عبارت را به ازای $n=۳$ به‌دست آوریم:

$$[\sqrt{۴\times ۳^۲-۳\times ۳+۱}]-۲[\sqrt{۳^۲-۲\times ۳}]=[\sqrt{۲۸}]-۲[\sqrt{۳}]=۵-۲\times ۱=۳$$

راه‌حل تشریحی: از $n>۲$ شروع می‌کنیم و سعی می‌کنیم داخل هر جزء صحیح را بین دو عدد صحیح متوالی بنویسیم:

$$n>۲\Rightarrow ۲n>۴\Rightarrow ۴n-۲n>۴\Rightarrow -۴n+۴<-۲n\Rightarrow n^۲-۴n+۴<n^۲-۲n\Rightarrow n^۲-۴n+۴<n^۲-۲n<n^۲-۲n+۱$$

$$\Rightarrow(n-۲)^۲<n^۲-۲n<(n-۱)^۲\Rightarrow n-۲<\sqrt{n^۲-۲n}<n-۱\Rightarrow[\sqrt{n^۲-۲n}]=n-۲$$

$$\begin{cases}n>۲\Rightarrow -۳n+۱<۰\Rightarrow ۴n^۲-۳n+۱<۴n^۲\\ n>۲\Rightarrow -۴n<-۳n\Rightarrow ۴n^۲-۴n+۱<۴n^۲-۳n+۱\end{cases}\Rightarrow(۲n-۱)^۲<۴n^۲-۳n+۱<(۲n)^۲$$

$$\Rightarrow ۲n-۱<\sqrt{۴n^۲-۳n+۱}<۲n\Rightarrow[\sqrt{۴n^۲-۳n+۱}]=۲n-۱$$

بنابراین داریم:

$$[\sqrt{۴n^۲-۳n+۱}]-۲[\sqrt{n^۲-۲n}]=۲n-۱-۲(n-۲)=۴-۱=۳$$

سراسری - ۹۱

۷- گزینه‌ی ۲ می‌دانیم حاصل $[x]$ همواره عددی صحیح است و اعداد صحیح را می‌توان از جزء صحیح به بیرون منتقل کرد، پس:

$$f(f(x)-x)=[[x]-x]=[x]+[-x]$$

تابع $y=[x]+[-x]$ به ازای تمام اعداد غیرصحیح -1 یک است.

۸- گزینه‌ی ۲ اگر $x<0$، آن‌گاه $[x]+[3x]$ حتماً مقداری منفی دارد، پس تساوی اتفاق نمی‌افتد. از طرف دیگر اگر $x\geq\frac{1}{3}$ آن‌گاه حتماً عبارت $[x]+[3x]$ مثبت می‌شود و نمی‌تواند مساوی صفر باشد. پس فقط در حالت $0\leq x<\frac{1}{3}$ هر دو جزء صحیح صفر هستند و مجموعی برابر صفر دارند.

$$x\in[0,\frac{1}{3})\Rightarrow b-a=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$$

۹- گزینه‌ی ۱ اگر مجموع جزء اعشاری دو عدد x و y کم‌تر از ۱ باشد، داریم:

$$[x+y]=[x]+[y]$$

و اگر مجموع جزء اعشاری دو عدد x و y بزرگ‌تر یا مساوی ۱ باشد، داریم:

$$[x+y]=[x]+[y]+1$$

توجه کنید از جایی که قسمت اعشاری هر عدد کوچک‌تر از ۱ است، هیچ‌وقت مجموع جزء اعشاری دو عدد بزرگ‌تر یا مساوی ۲ نخواهد شد. پس a دو مقدار صفر یا ۱ را می‌تواند داشته باشد.

۱۰- گزینه‌ی ۳ می‌دانیم جزء صحیح جذر هر عدد، برابر جذر بزرگ‌ترین عدد مربع کامل قبل از آن عدد است:

$$[\sqrt{1}]=[\sqrt{2}]=[\sqrt{3}]=1 \quad , \quad [\sqrt{4}]=[\sqrt{5}]=\cdots=[\sqrt{8}]=2 \quad , \quad [\sqrt{9}]=[\sqrt{10}]=\cdots=[\sqrt{13}]=3$$

بنابراین داریم:

$$[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+\cdots+[\sqrt{13}]=3\times1+5\times2+5\times3=28$$

۱۱- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که مقدار $x-[x]$، جزء اعشاری x را می‌دهد. پس می‌توان گفت جواب‌های معادله‌ی $x-[x]=0/1$، همه‌ی xهایی است که جزء اعشاری آن‌ها برابر ۰/۱ است. این x ها به صورت مقابل است:

$$\begin{cases}0/1, 1/1, 2/1, 3/1, \ldots\\ -0/9, -1/9, -2/9, -3/9, \ldots\end{cases}$$

پس مجموع ریشه‌های معادله در $(-2,2)$ برابر است با:

$$0/1+1/1-0/9-1/9=-1/6$$

۱۲- گزینه‌ی ۲ با توجه به این که عدد صحیح را می‌توان از جزء صحیح بیرون آورد، می‌توانیم معادله را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$[x-\frac{1}{3}]+[x+2-\frac{1}{3}]=-4\Rightarrow 2[x-\frac{1}{3}]+2=-4\Rightarrow[x-\frac{1}{3}]=-3$$

حال با توجه به تعریف جزء صحیح می‌توان نوشت:

$$-3\leq x-\frac{1}{3}<-2\Rightarrow-9\leq3x-1<-6\Rightarrow-8\leq3x<-5\Rightarrow5<-3x\leq8$$

پس $[-3x]$ می‌تواند برابر ۵، ۶، ۷ یا ۸ باشد.

۱۳- گزینه‌ی ۲ می‌دانیم $[x+6]=[x]+6$. اکنون با شرط $[x]=k$ معادله‌ی مورد نظر را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$k^2=k+6\Rightarrow k^2-k-6=0\Rightarrow(k-3)(k+2)=0\Rightarrow\begin{cases}k=3\\k=-2\end{cases}$$

اکنون داریم:

$$[x]=3\Rightarrow3\leq x<4 \quad , \quad [x]=-2\Rightarrow-2\leq x<-1$$

در بین گزینه‌ها فقط مقدار $x=-\sqrt{3}$ در محدوده‌های بالا قرار دارد.

۱۴- گزینه‌ی ۳ از جایی که سمت چپ معادله همواره مقداری صحیح است، بنابراین سمت راست معادله یعنی $x+2$ نیز حتماً صحیح است. پس x صحیح است و دو عبارت $x+1$ و $2x-7$ نیز حتماً صحیح هستند و جزء صحیحشان برابر خودشان است، یعنی:

$$[2x-7]-3[x+1]=x+2\xrightarrow{x\in\mathbb{Z}}2x-7-3(x+1)=x+2\Rightarrow2x-7-3x-3=x+2\Rightarrow-2x=12\Rightarrow x=-6$$

۱۵- گزینه‌ی ۴ از جایی که این تابع جزء صحیح فقط در اعداد زوج تغییر ضابطه می‌دهد، پس باید درون جزء صحیح فقط به ازای اعداد زوج، برابر مقداری صحیح گردد که این خصوصیت فقط در گزینه‌ی (۴) وجود دارد.

از روش دیگر می‌توان گفت این نمودار، همان نمودار تابع $f(x)=[x]$ است که از لحاظ افقی دو برابر شده و این معادل نصف کردن x ها در تابع است، یعنی:

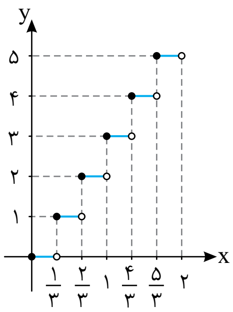
$y=f(\frac{x}{۲})=[\frac{x}{۲}]$

۱۶- گزینه‌ی ۱ با توجه به تعریف قدرمطلق و جزء صحیح می‌توان ضابطه‌ی تابع را در محدوده‌ی داده شده نوشت:

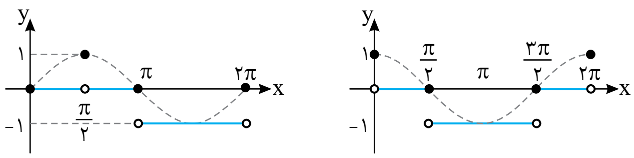
$$f(x)=|x|\times[x]=\begin{cases}۲\times۲ & x=۲\\ x\times۱ & ۱\leq x<۲\\ x\times۰ & ۰\leq x<۱\\ (-x)\times(-۱) & -۱\leq x<۰\end{cases}=\begin{cases}۴ & x=۲\\ x & ۱\leq x<۲\\ ۰ & ۰\leq x<۱\\ x & -۱\leq x<۰\end{cases}$$

که نمودار این ضابطه فقط در گزینه‌ی (۱) به صورت صحیح رسم شده است.

۱۷- گزینه‌ی ۴ می‌دانیم در نمودار تابع $y=[nx]$، $(n>۰)$، طول پاره‌خط‌ها برابر $\frac{۱}{n}$ است. پس در تابع $y=[۳x]$ طول پاره‌خط‌ها برابر $\frac{۱}{۳}$ است. بنابراین تعداد پاره‌خط‌ها در $[۰,۲)$ برابر ۶ است. نمودار تابع $y=[۳x]$ به صورت روبه‌رو است:



۱۸- گزینه‌ی ۴ با توجه به نمودار دو تابع $\sin x$ و $\cos x$ می‌توان نمودارهای خواسته شده را رسم کرد:



$y=[\sin x]$ $\qquad$ $y=[\cos x]$

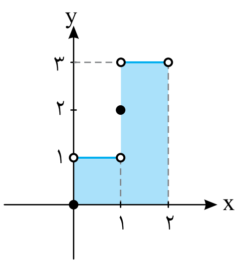
یکی از جواب‌ها $(\pi,\frac{۳\pi}{۲})$ می‌باشد که هر دو تابع در این بازه برابر -۱ هستند. البته باتوجه به متناوب بودن توابع $\sin x$ و $\cos x$ بازه‌های بی‌شماری وجود دارند که مقدار جزء صحیح دو تابع در آن‌ها برابر است.

۱۹- گزینه‌ی ۱ می‌توانیم نمودار تابع را در دو محدوده رسم کنیم (مقدار تابع در نقاط مرزی $x=۰$ و $x=۱$ را به طور مجزا تعیین می‌کنیم):

$۰<x<۱\Rightarrow f(x)=۰-(-۱)=۱$

$۱<x<۲\Rightarrow f(x)=۱-(-۲)=۳$

$f(۰)=۰ \quad , \quad f(۱)=۲$

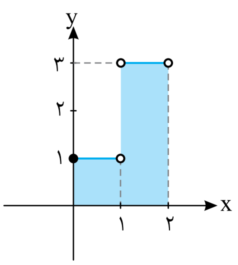


با توجه به نمودار رسم شده، مساحت بین نمودار تابع و محور x ها برابر $۱+۳=۴$ است.

۲۰- گزینه‌ی ۲ نمودار تابع $f(x)=۲[x]+۱$ به صورت زیر می‌باشد:

$۰\leq x<۱\Rightarrow y=۲(۰)+۱=۱$

$۱\leq x<۲\Rightarrow y=۲(۱)+۱=۳$



با توجه به شکل سطح بین منحنی و محور x ها در بازه‌ی $[۰,۲)$ برابر است با:

$۱+۳=۴$

پاسخ تشریحی آزمون ۱۸

۱- گزینه‌ی ۲ با توجه به این که $\sqrt{۳}$ عددی بین ۱ و ۲ است، داریم:

$$f(\sqrt{۳})=(\sqrt{۳})^{۲}-۲[\sqrt{۳}]=۳-۲\times۱=۱\Rightarrow f(-\frac{۱}{۲}f(\sqrt{۳}))=f(-\frac{۱}{۲}\times۱)=\frac{۱}{۴}-۲[-\frac{۱}{۲}]=\frac{۱}{۴}-۲\times(-۱)=۰/۲۵+۲=۲/۲۵$$

سراسری خارج از کشور - ۹۰

۲- گزینه‌ی ۳ ابتدا با حل نامعادله، محدوده‌ی x را می‌یابیم:

$$|۲x-۳|<۱۱\Rightarrow-۱۱<۲x-۳<۱۱\Rightarrow-۸<۲x<۱۴\Rightarrow-۴<x<۷\Rightarrow-\frac{۴}{۳}<\frac{x}{۳}<\frac{۷}{۳}\Rightarrow[\frac{x}{۳}]=-۲$$ یا ۱- یا ۰ یا ۱ یا ۲

پس $[\frac{x}{۳}]$ می‌تواند ۵ مقدار صحیح داشته باشد.

۳- گزینه‌ی ۱ می‌دانیم $[-x]+[x]=\begin{cases}۰ & x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$، پس با توجه به دامنه‌ی عبارت زیر رادیکال فقط مقادیر $x\in\mathbb{Z}$ قابل قبول است. اکنون با شرط $x\in\mathbb{Z}$، طرفین معادله را به صورت مقابل می‌توان ساده کرد:

$$|x|+x+۲=۰$$

اکنون دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases}x\geq۰\Rightarrow x+x+۲=۰\Rightarrow x=-۱ & \text{غقق}\\ x<۰\Rightarrow -x+x+۲=۰\Rightarrow ۲=۰ & \text{غقق}\end{cases}$$

پس معادله‌ی مورد نظر جواب ندارد.

۴- گزینه‌ی ۲ با توجه به مقدار تقریبی $\sqrt{۳}$، می‌دانیم $۱-\sqrt{۳}$ عددی بین صفر و ۱- است و هر عددی بین صفر و ۱- به توان فرد در همین محدوده قرار می‌گیرد:

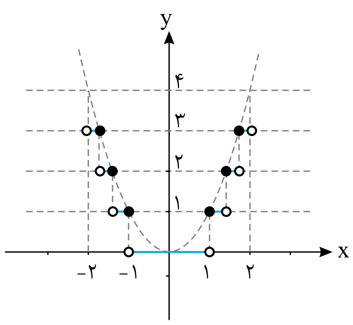
$$-۱<(۱-\sqrt{۳})^{۵}<۰\Rightarrow۰<-(۱-\sqrt{۳})^{۵}<۱\Rightarrow۱۵۲<۱۵۲-(۱-\sqrt{۳})^{۵}<۱۵۳\Rightarrow۱۵۲<(۱+\sqrt{۳})^{۵}<۱۵۳$$

۵- گزینه‌ی ۴ می‌دانیم تابع جزء صحیح در نقاطی می‌تواند تغییر ضابطه دهد که داخل آن برابر عددی صحیح شـود، پس می‌توان با توجه به تعریف جزء صحیح نوشت:

$$y=[x^{۲}]=\begin{cases}۳ & \sqrt{۳}\leq x<۲\\ ۲ & \sqrt{۲}\leq x<\sqrt{۳}\\ ۱ & ۱\leq x<\sqrt{۲}\\ ۰ & ۰\leq x<۱\\ ۰ & -۱\leq x<۰\\ ۱ & -\sqrt{۲}\leq x<-۱\\ ۲ & -\sqrt{۳}<x<-\sqrt{۲}\\ ۳ & -۲<x<-\sqrt{۳}\end{cases}$$

با توجه به این که در بازه‌ی $(-۱,۱)$ تابع برابر صفر است و در صفر تغییر ضابطه رخ نمی‌دهد، تابع از ۷ پاره‌خط تشکیل شده است.

البته به‌روش رسم شکل $y=[f(x)]$ از روی نمودار $y=f(x)$ هم می‌توان نمودار تابع مورد نظر را به‌صورت زیر، رسم کرد:



سراسری خارج از کشور - ۹۱

۶- گزینه‌ی ۳ حاصل n^2+4n+3 را بین دو عدد صحیح متوالی پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} n^2+4n+3<(n+2)^2 \Leftrightarrow n^2+4n+3<n^2+4n+4 \Leftrightarrow 3<4 \ \checkmark \\ (n+1)^2<n^2+4n+3 \Leftrightarrow n^2+2n+1<n^2+4n+3 \Leftrightarrow 2n>-2 \Leftrightarrow n>-1 \ \checkmark \end{cases} \Rightarrow n+1<\sqrt{n^2+4n+3}<n+2$$

$$\Rightarrow [\sqrt{n^2+4n+3}]=n+1$$

بنابراین حاصل جزء صحیح به ازای هر عدد طبیعی n برابر $n+1$ است، بنابراین برای $n=1000$، برابر ۱۰۰۱ است.

۷- گزینه‌ی ۴ کوچک‌ترین عدد ناکم‌تر از x، یعنی کوچک‌ترین عدد صحیحی که بزرگ‌تر یا مساوی x است، بنابراین اگر x عددی صحیح باشد، برابر خود آن عدد و اگر غیر صحیح باشد، یکی بیش‌تر از جزء صحیح آن عدد می‌گردد، یعنی:

$$\text{کوچک‌ترین عدد صحیح ناکم‌تر از } x = \begin{cases} [x] & x\in\mathbb{Z} \\ [x]+1 & x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$$

فقط گزینه‌ی (۴) بیان‌گر چنین عبارتی است، زیرا می‌دانیم:

$$[x]+[-x]=\begin{cases} 0 & x\in\mathbb{Z} \\ -1 & x\notin\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow [-x]=\begin{cases} -[x] & x\in\mathbb{Z} \\ -[x]-1 & x\notin\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow -[-x]=\begin{cases} [x] & x\in\mathbb{Z} \\ [x]+1 & x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$$

۸- گزینه‌ی ۱ اگر جزء صحیح یک عدد نامنفی کمتر یا مساوی یک باشد، حتماً آن عدد کمتر از ۲ است:

$$[|x-1|]\le 1 \Rightarrow |x-1|<2 \Rightarrow -2<x-1<2 \Rightarrow -1<x<3$$

۹- گزینه‌ی ۲ با توجه به این که $0\le x-[x]<1$، سمت راست معادله برابر صفر است، پس:

$$[-\frac{x}{9}+2]=0 \Rightarrow 0\le -\frac{x}{9}+2<1 \Rightarrow -2\le -\frac{x}{9}<-1 \Rightarrow 1<\frac{x}{9}\le 2 \Rightarrow 9<x\le 18 \Rightarrow x=10,11,12,\dots,18$$

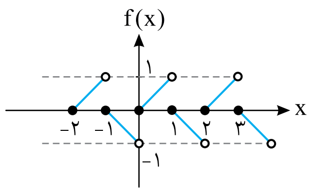
بنابراین ۹ عدد طبیعی در این معادله صدق می‌کند.

۱۰- گزینه‌ی ۳ می‌دانیم $0\le x-[x]<1$، اکنون می‌توان نوشت:

$$[x]=\text{عددی زوج} \Rightarrow f(x)=x-[x] \Rightarrow 0\le f(x)<1$$

$$[x]=\text{عددی فرد} \Rightarrow f(x)=-(x-[x]) \Rightarrow -1<f(x)\le 0$$

پس برد تابع f به صورت $(-1,1)$ است. توجه کنید که نمودار تابع f به صورت مقابل می‌باشد.



۱۱- گزینه‌ی ۱ ابتدا تساوی داده شده را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$(-1)^{[x]}f(x)=|f(x)| \Rightarrow \begin{cases} [x]=\text{عددی زوج} \ , \ f(x)=|f(x)| \Rightarrow f(x)\ge 0 \\ [x]=\text{عددی فرد} \ , \ -f(x)=|f(x)| \Rightarrow f(x)\le 0 \end{cases}$$

بنابراین ضابطه‌ی $f(x)$ باید به گونه‌ای باشد که هرگاه $[x]$ زوج بود، نامنفی شود و هرگاه $[x]$ فرد بود، برابر عددی نامثبت گردد. این خاصیت فقط در گزینه‌ی (۱) وجود دارد:

$$(-1)^{[x]}=\begin{cases} 1 & [x]=\text{زوج} \\ -1 & [x]=\text{فرد} \end{cases}$$

۱۲- گزینه‌ی ۲ به این دلیل که حاصل جزء صحیح همواره عددی صحیح است، داریم:

$$[x]=\frac{2}{3}x \Rightarrow \frac{2}{3}x=k \ , \ x\in\mathbb{Z} \Rightarrow x=\frac{3}{2}k$$

$$[x]=\frac{2}{3}x \xrightarrow{x=\frac{3}{2}k} [\frac{3}{2}k]=k \Rightarrow k\le\frac{3}{2}k<k+1 \Rightarrow \begin{cases} k\le\frac{3}{2}k \Rightarrow \frac{1}{2}k\ge 0 \Rightarrow k\ge 0 \\ \frac{3}{2}k<k+1 \Rightarrow \frac{1}{2}k<1 \Rightarrow k<2 \end{cases} \Rightarrow 0\le k<2 \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k=0,1$$

$$\xrightarrow{x=\frac{3}{2}k} x=0,\frac{3}{2} \Rightarrow \text{جمع جواب‌ها}=\frac{3}{2}$$

۱۳- گزینه‌ی ۲ از تساوی $[۲x]=۲x$ می‌توان فهمید $۲x\in\mathbb{Z}$، پس می‌توان نوشت:

$$۲x=k \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} x=\frac{k}{۲}\Rightarrow x=\frac{۱}{۲},\frac{۲}{۲},\frac{۳}{۲}$$

پس حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی بالا برابر است با:

$$\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۲}\times\frac{۳}{۲}=\frac{۳}{۴}$$

۱۴- گزینه‌ی ۱ ابتدا معادله‌ی مورد نظر را به صورت $۲(x-[x])=k$ یا به طور معادل $x-[x]=\frac{k}{۲}$ می‌نویسیم. اکنون با توجه به این که $۰\le x-[x]<۱$، داریم:

$$۰\le\frac{k}{۲}<۱\Rightarrow ۰\le k<۲$$

اکنون با توجه به محدوده‌ی k در بین گزینه‌ها فقط $k=\sqrt{۳}$ قابل قبول است.

۱۵- گزینه‌ی ۴ ابتدا توجه کنید که $x\ge ۰$، از طرفی سمت چپ معادله‌ی $[x][\sqrt{x}]=۱$، ضرب دو عدد صحیح است که برابر عدد ۱ شده است و می‌دانیم تنها حالت $[x]=[\sqrt{x}]=۱$ می‌تواند برقرار باشد، اکنون می‌توان نوشت:

$$[x]=۱\Rightarrow ۱\le x<۲\quad,\quad [\sqrt{x}]=۱\Rightarrow ۱\le\sqrt{x}<۲\Rightarrow ۱\le x<۴$$

اشتراک جواب دو نامعادله‌ی بالا به صورت $۱\le x<۲$ است.

۱۶- گزینه‌ی ۴ ابتدا عدد صحیح را از جزء صحیح بیرون می‌آوریم:

$$۲[x]+[۱-x]=۲\Rightarrow ۲[x]+[-x]=۱\Rightarrow [x]+([x]+[-x])=۱$$

حال با توجه به این که می‌دانیم $[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$، داریم:

$$x\in\mathbb{Z}\ ,\ [x]+۰=۱\xrightarrow{x\in\mathbb{Z}}x=۱$$

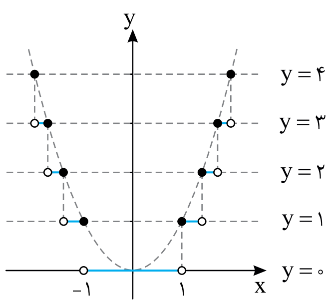
$$x\notin\mathbb{Z}\ ,\ [x]-۱=۱\Rightarrow[x]=۲\xrightarrow{x\notin\mathbb{Z}}۲<x<۳$$

بنابراین مجموعه جواب معادله برابر $(۲,۳)\cup\{۱\}$ می‌باشد.

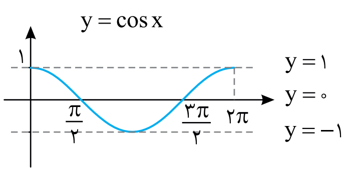
۱۷- گزینه‌ی ۲ می‌دانیم $[x]$ عددی صحیح است، پس می‌توان نوشت:

$$[x+۲[x]]=-۶\xrightarrow{۲[x]\in\mathbb{Z}}[x]+۲[x]=-۶\Rightarrow ۳[x]=-۶\Rightarrow[x]=-۲\Rightarrow -۲\le x<-۱$$

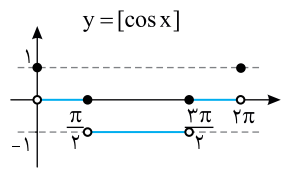
۱۸- گزینه‌ی ۲ ابتدا نمودار تابع $y=[x^۲]$ را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل مقابل طول بزرگ‌ترین پاره‌خط افقی در $y=۰$ و برابر ۲ است:



۱۹- گزینه‌ی ۲ ابتدا نمودار $y=[\cos x]$ را در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ رسم می‌کنیم:



$\Rightarrow$



با توجه به نمودار سمت راست، نمودار تابع $y=[\cos x]$ در اطراف نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{۲}$ به صورت مورد نظر است.

۲۰- گزینه‌ی ۲ با توجه به تعریف $[x]$، تابع مورد نظر را در محدوده‌ی تعیین شده به صورت چند ضابطه‌ای بازنویسی می‌کنیم:

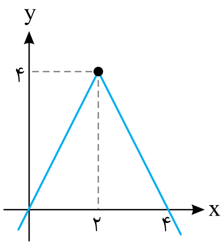
$$y=\begin{cases} x-۲+\sin(\frac{\pi}{۲}\times ۲) & x=۲ \\ x-۱+\sin(\frac{\pi}{۲}) & ۱\le x<۲ \\ x-۰+\sin(۰) & ۰\le x<۱ \\ x+۱+\sin(-\frac{\pi}{۲}) & -۱\le x<۰ \end{cases} \Rightarrow y=\begin{cases} ۰ & x=۲ \\ x & ۱\le x<۲ \\ x & ۰\le x<۱ \\ x & -۱\le x<۰ \end{cases} \Rightarrow y=\begin{cases} ۰ & x=۲ \\ x & -۱\le x<۲ \end{cases}$$

پاسخ تشریحی آزمون ۱۹

۱- گزینه‌ی ۳ با توجه به ضابطه‌ی تابع f داریم:

$$\begin{cases} f(۲)=۲|۲|-|۲-۲|=۴\Rightarrow (fof)(۲)=f(۴)=۲|۴|-|۴-۲|=۸-۲=۶ \\ f(-۲)=۲|-۲|-|-۲-۲|=۰\Rightarrow (fof)(-۲)=f(۰)=۲|۰|-|۰-۲|=-۲ \end{cases}\Rightarrow (fof)(۲)+(fof)(-۲)=۶-۲=۴$$

۲- گزینه‌ی ۱ نمودار تابع به‌صورت روبه‌رو می‌باشد، مساحت ناحیه‌ی محدود به این تابع و محور xها برابر است با:



$$S=\frac{۴\times ۴}{۲}=\frac{۱۶}{۲}=۸$$

۳- گزینه‌ی ۳ برای آن‌که $y=۶-|x|$ بالاتر از خط به معادله‌ی $y=\frac{-x+۱}{۲}$ باشد، باید نامعادله‌ی زیر را حل کنیم:

$$y=۶-|x|>\frac{-x+۱}{۲}\Rightarrow\begin{cases} x\ge ۰: ۶-x>-\frac{x}{۲}+\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{x}{۲}<\frac{۱۱}{۲}\Rightarrow ۰\le x<۱۱ \\ x<۰: ۶+x>-\frac{x}{۲}+\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{۳x}{۲}>-\frac{۱۱}{۲}\Rightarrow -\frac{۱۱}{۳}<x<۰ \end{cases}$$

بنابراین مجموعه‌ی جواب نامعادله $-\frac{۱۱}{۳}<x<۱۱$ است و حاصل $b-a$ برابر است با: $۱۱+\frac{۱۱}{۳}=\frac{۴۴}{۳}$

۴- گزینه‌ی ۳ ضابطه‌ی دو قدرمطلق موجود در سؤال در $x=۰$ و $x=۱$ تغییر می‌کند، نامعادله را در ۳ محدوده‌ی زیر جداگانه حل می‌کنیم:

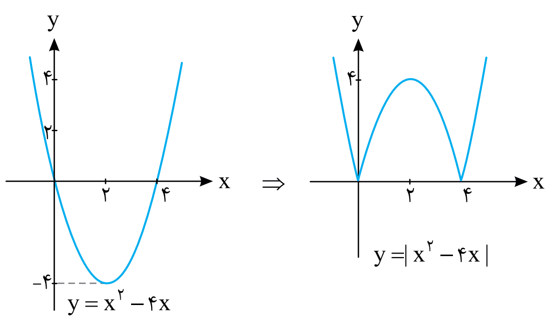
$$(I)\ \ x\ge ۱\Rightarrow ۵-(x-۱)>۲x\Rightarrow ۶>۳x\Rightarrow x<۲\xrightarrow{x\ge ۱}x\in[۱,۲)$$

$$(II)\ \ ۰\le x<۱\Rightarrow ۵+(x-۱)>۲x\Rightarrow x<۴\xrightarrow{۰\le x<۱}x\in[۰,۱)$$

$$(III)\ \ x<۰\Rightarrow ۵+(x-۱)>-۲x\Rightarrow ۳x>-۴\Rightarrow x>\frac{-۴}{۳}\xrightarrow{x<۰}x\in(\frac{-۴}{۳},۰)$$

اجتماع ۳ بازه‌ی به‌دست آمده جواب نامعادله است: $I\cup II\cup III:(\frac{-۴}{۳},۲)$

۵- گزینه‌ی ۲ با توجه به نمودار سهمی $y=x^۲-۴x$، نمودار $y=|x^۲-۴x|$ به‌صورت زیر است:



برای آن‌که معادله‌ی $|x^۲-۴x|=k$، ۴ جواب داشته باشد، می‌بایست نمودار این تابع با خط افقی $y=k$، در ۴ نقطه متقاطع باشند. پس حدود k عبارت است از $۰<k<۴$.

۶- گزینه‌ی ۴ نامعادله را در دو حالت زیر حل می‌کنیم:

$$(I)\quad x\ge 0\quad (x-4)\times x<2x-5\Rightarrow x^2-4x<2x-5\Rightarrow x^2-6x+5<0\Rightarrow (x-1)(x-5)<0\Rightarrow 1<x<5$$

تمامی جواب‌های به‌دست آمده در محدوده‌ی I یعنی $x\ge 0$ قرار دارند، پس بازه‌ی $(1,5)$ قسمتی از جواب است.

$$(II)\quad x<0\quad (x-4)(-x)<2x-5\Rightarrow -x^2+4x<2x-5\Rightarrow x^2-2x-5>0\Rightarrow x<1-\sqrt{6}\ \text{یا}\ x>1+\sqrt{6}\xrightarrow{x<0} x<1-\sqrt{6}$$

بنابراین اجتماع جواب‌های I و II، جواب نامعادله است:

$$x\in(-\infty,1-\sqrt{6})\cup(1,5)$$

۷- گزینه‌ی ۱ با توجه به نامعادله‌ی $\left|\frac{2x^2}{1+x^2}-1\right|\le 1$ داریم:

$$-1\le\frac{2x^2}{1+x^2}-1\le 1\Rightarrow -1\le\frac{x^2-1}{1+x^2}\le 1\xrightarrow{1+x^2>0}-x^2-1\le x^2-1\le 1+x^2\Rightarrow -x^2-1-x^2\le x^2-1-x^2\le 1+x^2-x^2$$

$$\Rightarrow -2x^2-1\le -1\underset{\checkmark}{\le} 1\Rightarrow -2x^2-1\le -1\Rightarrow -2x^2\le 0\quad\checkmark$$

هر دو نامعادله به ازای همه‌ی مقادیر حقیقی x برقرار هستند.

۸- گزینه‌ی ۲ با ضابطه‌بندی قدرمطلق‌ها، معادله را حل می‌کنیم:

$$x\ge 3:(x+2)+(x-3)=k\Rightarrow 2x=k+1\Rightarrow x=\frac{k+1}{2}$$

$$-2\le x<3:(x+2)-(x-3)=k\Rightarrow 5=k\quad \text{غ ق ق}$$

$$x<-2:-(x+2)-(x-3)=k\Rightarrow -2x=k-1\Rightarrow x=\frac{1-k}{2}$$

توجه کنید در حالت دوم که $k=5$ معادله بی‌شمار ریشه دارد که با فرض سؤال در تناقض است. تفاضل ریشه‌ها برابر ۹ است، پس:

$$\frac{k+1}{2}-\frac{1-k}{2}=9\Rightarrow\frac{2k}{2}=9\Rightarrow k=9$$

۹- گزینه‌ی ۲ با توجه به تغییر ضابطه‌ی قدرمطلق در $x=2$، نامعادله را در دو حالت زیر حل می‌کنیم:

$$(I)\ x\ge 2\Rightarrow x^2-2x<x-2\Rightarrow x(x-2)<(x-2)\xrightarrow{x-2>0}x<0$$

اعداد منفی $(x<0)$ با محدوده‌ی در نظر گرفته شده برای x $(x\ge 2)$ هیچ اشتراکی ندارند، پس نامعادله در این حالت جواب ندارد.

$$(II)\ x<2\Rightarrow x^2-2x<-(x-2)\Rightarrow x(x-2)<-(x-2)\xrightarrow{x-2<0}x>-1$$

اشتراک جواب به‌دست آمده با محدوده‌ی x بازه‌ی $(-1,2)$ می‌باشد.

سراسری خارج از کشور – ۹۲

۱۰- گزینه‌ی ۱ با توجه به خصوصیات نامنفی بودن قدرمطلق داریم:

$$\left|\frac{x-2}{2x+1}\right|>1\Rightarrow|x-2|>|2x+1|\Rightarrow(x-2)^2>(2x+1)^2\Rightarrow x^2-4x+4>4x^2+4x+1\Rightarrow 3x^2+8x-3<0\Rightarrow(3x-1)(x+3)<0\Rightarrow -3<x<\frac{1}{3}$$

با توجه به دامنه‌ی تعریف نامعادله $(x\ne\frac{-1}{2})$، مجموعه‌ی جواب نامعادله به‌صورت $(-3,\frac{1}{3})-\{\frac{-1}{2}\}$ می‌باشد.

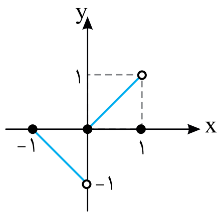
سراسری – ۹۲

۱۱- گزینه‌ی ۱ با توجه به مقدار حدودی $1-\sqrt{2}\sim -0/41$ داریم:

$$\begin{cases}f(1-\sqrt{2})=[|1-\sqrt{2}|]=[\sqrt{2}-1]=0\\ g(1-\sqrt{2})=|[1-\sqrt{2}]|=|-1|=1\end{cases}\Rightarrow f(1-\sqrt{2})+g(1-\sqrt{2})=0+1=1$$

۱۲- گزینه‌ی ۴ تابع را به‌صورت چندضابطه‌ای بازنویسی می‌کنیم و نمودار آن را به صورت روبه‌رو رسم می‌کنیم:

$$y=\frac{|x|}{x}(x-[x])=\begin{cases}0 & x=1\\ 1(x-0) & 0\le x<1\\ -1(x+1) & -1\le x<0\end{cases}\Rightarrow y=\begin{cases}0 & x=1\\ x & 0\le x<1\\ -x-1 & -1\le x<0\end{cases}$$



۱۳- گزینه‌ی ۴ دو تساوی داده شده را با هم جمع می‌کنیم:

$$\begin{cases}x=[x]+p\\ -x=[-x]+p'\end{cases}\Rightarrow x-x=[x]+p+[-x]+p'\Rightarrow 0=[x]+[-x]+p+p'$$

می‌دانیم با توجه به این‌که x صحیح باشد یا غیرصحیح، حاصل $[x]+[-x]$ یا صفر است یا منفی یک، پس حاصل $p+p'$ می‌تواند برابر صفر یا یک باشد.

۱۴- گزینه‌ی ۴ هر ۴ رابطه‌ی داده شده درست هستند.

۱۵- گزینه‌ی ۱ معادله را به‌صورت $2[x]-15=-|x|$ بازنویسی می‌کنیم. سمت چپ معادله قطعاً عددی صحیح است، پس سمت راست تساوی نیز صحیح است. یعنی x عددی صحیح است و $[x]=x$، پس:

$$2[x]-15=-|x|\Rightarrow 2x-15=-|x|\Rightarrow\begin{cases}x\ge 0 & 2x-15=-x\Rightarrow 3x=15\Rightarrow x=5\\ x<0 & 2x-15=x\Rightarrow x=15\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

تنها جواب کامل قابل قبول معادله، $x=5$ است.

۱۶- گزینه‌ی ۴ با توجه به این‌که $2[x]$ مقداری صحیح است، می‌توان آن را از جزء صحیح بیرون آورد.

$$[x+2[x]]=4\Rightarrow[x]+2[x]=4\Rightarrow 3[x]=4\Rightarrow[x]=\frac{4}{3}$$

حاصل $[x]$ حتماً عددی صحیح است، پس معادله جواب ندارد.

۱۷- گزینه‌ی ۴ ضابطه‌ی تابع را می‌توان به‌صورت $y=2(\frac{x}{2}-[\frac{x}{2}])$ نوشت. می‌دانیم $\frac{x}{2}-[\frac{x}{2}]$ برابر جزء اعشاری عدد $\frac{x}{2}$ است، پس:

$$0\le\frac{x}{2}-[\frac{x}{2}]<1\Rightarrow 0\le 2(\frac{x}{2}-[\frac{x}{2}])<2\Rightarrow 0\le y<2$$

پس تابع با خط $y=2$ تقاطع ندارد.

۱۸- گزینه‌ی ۳ حاصل جزء صحیح حتماً عددی صحیح است، پس $2x=k\in\mathbb{Z}$ و داریم:

$$2x=k\Rightarrow x=\frac{k}{2}\xrightarrow{[3x]=2x}[\frac{3k}{2}]=k\Rightarrow k\le\frac{3k}{2}<k+1\Rightarrow 0\le\frac{k}{2}<1\Rightarrow 0\le k<2$$

با توجه به این‌که k عددی صحیح است، پس k می‌تواند صفر یا یک باشد:

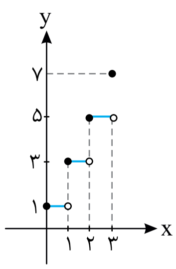
$$\begin{cases}k_1=0\Rightarrow x_1=0\\ k_2=1\Rightarrow x_2=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow x_1+x_2=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

۱۹- گزینه‌ی ۲ ابتدا معادله را به‌صورت $2[x]+[-x]=x$ می‌نویسیم. اکنون با توجه به این‌که سمت چپ معادله همواره صحیح است (توجه کنید که مقادیر $[x]$ و $[-x]$ صحیح هستند) باید سمت راست معادله نیز صحیح باشد، پس $x\in\mathbb{Z}$. اکنون با شرط $x\in\mathbb{Z}$ معادله به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$2x+(-x)=x$$

پس همه‌ی مقادیر صحیح x در بازه‌ی $[0,10]$، در معادله صدق می‌کنند که عبارت‌اند از ۰، ۱، ۲، ... و ۱۰، پس معادله ۱۱ جواب دارد.

۲۰- گزینه‌ی ۴ ضابطه‌ی تابع در بازه‌ی $[0,3]$ به‌صورت زیر است:



$$y=\begin{cases}7 & x=3\\ 5 & 2\le x<3\\ 3 & 1\le x<2\\ 1 & 0\le x<1\end{cases}$$

پس با توجه به نمودار تابع، مساحت بین نمودار تا محور xها برابر است با:

$$1\times1+3\times1+5\times1=9$$

آزمون‌های مرحله‌ای

۵
تابع

پاسخ تشریحی آزمون ۲۰

۱- گزینه‌ی ۴ زوج مرتب‌های زیر اعضای این رابطه هستند.

$$R=\{(1,1),(1,2),\ldots,(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1)\}$$

بنابراین این رابطه ۹ عضو دارد.

توجه: برای به‌دست آوردن زوج مرتب‌ها، ابتدا برای x مقداری طبیعی قرار می‌دهیم، سپس تمامی yهای طبیعی که در رابطه‌ی $2x+y\leq 7$ صدق می‌کنند را می‌نویسیم، سپس این کار را برای x بعدی ادامه می‌دهیم.

۲- گزینه‌ی ۱ برای آن‌که این رابطه تابع باشد، می‌بایست هیچ دو زوج مرتبی با مؤلفه‌ی اول یکسان در آن موجود نباشد. دو زوج مرتب با مؤلفه‌ی اول ۲ موجود است، پس هر دو زوج مرتب مساوی هستند.

$$3a=a^2+2\Rightarrow a^2-3a+2=0\Rightarrow (a-2)(a-1)=0\Rightarrow a=1 \text{ یا } a=2 \text{ غ ق ق}$$

مقدار $a=2$ غیرقابل قبول است، چون در این حالت زوج مرتب سوم به‌صورت $(2,1)$ می‌شود که در کنار زوج مرتب دیگر $(2,6)$ باعث نقض شدن شرط تابع می‌شود.

۳- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول**: با مثال نقض گزینه‌های دیگر را رد می‌کنیم:

گزینه‌ی (۱): $x=0\Rightarrow y^3-y=0\Rightarrow y=0,\pm 1\Rightarrow$ تابع نیست

گزینه‌ی (۳): $x=0\Rightarrow |y-2|=1\Rightarrow y-2=\pm 1\Rightarrow y=3,1\Rightarrow$ تابع نیست

گزینه‌ی (۴): $x=2\Rightarrow |y+1|=1\Rightarrow y+1=\pm 1\Rightarrow y=0,-2\Rightarrow$ تابع نیست

بنابراین فقط گزینه‌ی (۲) می‌تواند تابع باشد.

راه‌حل دوم: می‌دانیم توابع $y=x$ و $y=x^3$، اکیداً صعودی هستند، پس جمع آن‌ها نیز اکیداً صعودی است و لذا تابع $y=\sqrt[3]{x^3+x}$ نیز اکیداً صعودی و طبیعتاً یک به یک است. می‌دانیم معکوس هر تابع یک به یک، یک تابع است پس رابطه‌ی $x=\sqrt[3]{y^3+y}$ یک تابع است.

۴- گزینه‌ی ۴ با جایگذاری $x=3$ در رابطه‌ی داده شده داریم:

$$f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\frac{x+1}{x-2}\xrightarrow{x=3}f\left(\frac{2}{4}\right)=\frac{4}{1}\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=4$$

۵- گزینه‌ی ۲ ابتدا مقدار مجهول $f(3)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(2x-1)+f(3)=\frac{x+10}{2}\xrightarrow{x=2}f(3)+f(3)=\frac{2+10}{2}\Rightarrow 2f(3)=6\Rightarrow f(3)=3$$

حال با جایگذاری $x=3$ در معادله‌ی داده شده، $f(5)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(2x-1)+3=\frac{x+10}{2}\xrightarrow{x=3}f(5)+3=\frac{3+10}{2}\Rightarrow f(5)=3/5$$

۶- گزینه‌ی ۴ با توجه به این‌که به ازای هر دو عدد حقیقی داریم $f(x+y)=f(x)+f(y)$، با جایگذاری مناسب x و y داریم:

$$x=y=32\Rightarrow f(64)=2f(32)=2\times 2f(16)=2\times 2\times (2f(8))=2^4f(4)=2^5f(2)=2^6f(1)=2^6(-2)=-2^7=-128$$

۷- گزینه‌ی ۳ نقطه‌ای روی محور xها با طول ۱، نقطه‌ی $(1,0)$ است، این نقطه در ضابطه‌ی هر دو تابع صدق می‌کند، پس:

$$\begin{cases} y+2x=b\xrightarrow{(1,0)}0+2=b\Rightarrow b=2 \\ y=x^3+ax+b\xrightarrow{(1,0)}0=1+a+b \end{cases}\Rightarrow a=-3$$

بنابراین دو تابع مورد نظر با ضابطه‌های $y=x^3-3x+2$ و $y=-2x+2$ هستند. با مساوی قرار دادن آن‌ها و با توجه به آن‌که می‌دانیم یکی از ریشه‌ها برابر یک است، دیگر نقاط تلاقی به‌دست می‌آید:

$$-2x+2=x^3-3x+2\Rightarrow x^3-x=0\Rightarrow x(x^2-1)=0\Rightarrow x=0\ ,\ \pm 1$$

طول نقاط تقاطع دیگر $x=0$ و $x=-1$ می‌باشد.

۸- گزینه‌ی ۳ با توجه به قضیه‌ی کسینوس‌ها در مثلث $(a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos A)$ داریم:

$$x^۲=۲^۲+۳^۲-۲\times۲\times۳\cos\alpha\Rightarrow x=\sqrt{۱۳-۱۲\cos\alpha}$$

۹- گزینه‌ی ۴ با حل نامعادله‌ی زیر، دامنه‌ی تابع را پیدا می‌کنیم:

$$x^۴-۹x^۲\ge ۰\Rightarrow x^۲(x^۲-۹)\ge ۰\Rightarrow x\le -۳ \text{ یا } x\ge ۳ \text{ یا } x=۰\Rightarrow D_f=(-\infty,-۳]\cup\{۰\}\cup[۳,+\infty)$$

x		-۳		۰		۳	
$x^۴-۹x^۲$	+	۰	−	۰	−	۰	+

پس دامنه‌ی تابع شامل اعداد صحیح ±۱ و ±۲ نیست.

۱۰- گزینه‌ی ۳ با توجه به محدوده‌ی تعریف توابع لگاریتمی داریم:

$$\begin{cases}۴-x>۰\Rightarrow x<۴\\ x+۲>۰\Rightarrow x>-۲\\ x+۲\ne ۱\Rightarrow x\ne -۱\end{cases}\xrightarrow{\cap} -۲<x<۴,\ x\ne -۱\Rightarrow D=(-۲,۴)-\{-۱\}$$

بنابراین $c=-۱$، $b=۴$ و $a=-۲$، پس $abc=۸$.

۱۱- گزینه‌ی ۱ برای تعیین دامنه باید نامعادله‌های زیر را حل کنیم:

$$\frac{x+۱}{-x+۵}\ge ۰$$

x		-۱		۵	
$\frac{x+۱}{-x+۵}$	−	۰	+	‖	−

$\Rightarrow -۱\le x<۵$

$$\frac{x+۲}{۳-x}\ge ۰$$

x		-۲		۳	
$\frac{x+۲}{۳-x}$	−	۰	+	‖	−

$\Rightarrow -۲\le x<۳$

$$\xrightarrow{\cap} -۱\le x<۳$$

بنابراین دامنه‌ی این تابع شامل ۴ عدد صحیح ۱-، ۰، ۱ و ۲ است.

۱۲- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول**: ضابطه‌ی تابع $f(-x)$ برابر $y=\sqrt{-x+|-x+۲|}$ است. برای تعیین دامنه، باید عبارت زیر رادیکال را نامنفی قرار دهیم:

$$-x+|-x+۲|\ge ۰\Rightarrow|۲-x|\ge x\Rightarrow\begin{cases}x\ge ۲\Rightarrow x-۲\ge x\Rightarrow -۲\ge ۰ \text{ غ ق ق}\\ x<۲\Rightarrow ۲-x\ge x\Rightarrow ۲x\le ۲\Rightarrow x\le ۱\end{cases}\Rightarrow D=(-\infty,۱]$$

راه‌حل دوم: دامنه‌ی تابع $y=f(x)$ را با حل نامعادله به‌دست می‌آوریم. به عبارت $x\ge -۱$ می‌رسیم، اگر ورودی تابع به $-x$ تغییر کند، برای تعیین محدوده‌ی x داریم: $-x\ge -۱\Rightarrow x\le ۱$

سراسری خارج از کشور - ۹۲

۱۳- گزینه‌ی ۲ زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج باید نامنفی باشد، پس:

$$||x|-۲|-۱\ge ۰\Rightarrow||x|-۲|\ge ۱\Rightarrow\begin{cases}|x|-۲\ge ۱\\ |x|-۲\le -۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x|\ge ۳\Rightarrow x\ge ۳ \text{ یا } x\le -۳\\ |x|\le ۱\Rightarrow -۱\le x\le ۱\end{cases}\Rightarrow D=(-\infty,-۳]\cup[-۱,۱]\cup[۳,+\infty)$$

بنابراین فقط اعداد صحیح ۲ و ۲- در دامنه‌ی تابع قرار ندارند.

۱۴- گزینه‌ی ۳ ابتدا دامنه‌ی تابع $y=f(x)$ را با حل نامعادله‌ی زیر محاسبه می‌کنیم:

$۲x-x^۲\ge ۰:$

x		۰		۲	
$۲x-x^۲$	−	۰	+	۰	−

$\Rightarrow ۰\le x\le ۲\Rightarrow x\in[۰,۲]$

اگر ورودی تابع از x به $۳-x$ تغییر کند، باید $۳-x\in D_f$، پس:

$$۰\le ۳-x\le ۲\Rightarrow ۰-۳<-x\le ۲-۳\Rightarrow -۳<-x\le -۱\Rightarrow ۱\le x<۳$$

سراسری - ۹۲

۱۵- گزینه‌ی ۱ برای آن‌که دامنه‌ی تابع تمام اعداد حقیقی باشد، مخرج کسر نباید ریشه داشته باشد، پس:

$$x^۲-kx+۴\ne ۰\xrightarrow{\Delta<۰}k^۲-۱۶<۰\Rightarrow(k-۴)(k+۴)<۰\Rightarrow -۴<k<۴$$

۱۶- گزینه‌ی ۳ عبارات زیر رادیکال می‌بایست نامنفی باشند، پس:

$$D_f:[x]+[-x]\ge ۰\quad,\quad D_g:[x]-x\ge ۰\Rightarrow x-[x]\le ۰$$

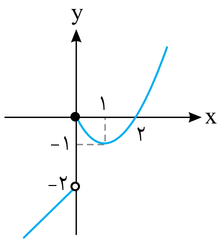
با توجه به این‌که می‌دانیم $[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$، پس دامنه‌ی f فقط شامل اعداد صحیح است. ضمناً می‌دانیم $۰\le x-[x]<۱$، پس دامنه‌ی تابع g فقط اعدادی را شامل می‌شود که به ازای آن‌ها داریم: $x-[x]=۰\Rightarrow x=[x]\Rightarrow x\in\mathbb{Z}$. بنابراین $D_f=D_g=\mathbb{Z}$.

۱۷- گزینه‌ی ۴ با استفاده از نمودار تابع f، جدول تعیین علامت $xf(x)$ را رسم می‌کنیم:

x		-۴		-۳		۰		۱		۲	
$f(x)$	//////		$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$	۰	//////
x	$-$		$-$		$-$	۰	$+$		$+$		$+$
$xf(x)$	//////		$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	۰	//////

عبارت $xf(x)$ باید نامنفی باشد، بنابراین دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{xf(x)}$ برابر $[-۳,۰]\cup[۱,۲]$ می‌باشد.

۱۸- گزینه‌ی ۱ **راه‌حل اول**: نمودار این تابع دو ضابطه‌ای به‌صورت روبه‌رو می‌باشد.



بنابراین برد تابع $R=(-\infty,-۲)\cup[-۱,+\infty)$ یا $R=\mathbb{R}-[-۲,-۱)$ است.

راه‌حل دوم: برد تابع را در دو قسمت به‌دست می‌آوریم، سپس دو بازه را با هم اجتماع می‌گیریم:

$$\begin{cases} x\geq ۰\Rightarrow x-۱\geq -۱\Rightarrow (x-۱)^۲\geq ۰\Rightarrow x^۲-۲x+۱\geq ۰\Rightarrow x^۲-۲x\geq -۱ \\ x<۰\Rightarrow ۲x<۰\Rightarrow ۲x-۲<-۲ \end{cases}\Rightarrow R=(-\infty,-۲)\cup[-۱,+\infty)=\mathbb{R}-[-۲,-۱)$$

۱۹- گزینه‌ی ۲ ابتدا دامنه‌ی تابع را مشخص می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۱-x^۲\geq ۰\Rightarrow -۱\leq x\leq ۱ \\ x^۲-۱\geq ۰\Rightarrow x\geq ۱ \text{ یا } x\leq -۱ \end{cases}\xrightarrow{\cap} x=\pm ۱$$

بنابراین دامنه‌ی تابع فقط دو عدد ±۱ را شامل می‌شود که به ازای هر دو عدد تابع برابر صفر است، پس برد تابع فقط شامل یک عضو می‌باشد. $(R=\{۰\})$

۲۰- گزینه‌ی ۱ با توجه به تعریف جزء صحیح می‌دانیم:

$$[x]\leq x<[x]+۱\Rightarrow ۰\leq x-[x]<۱\Rightarrow ۰\geq -x+[x]>-۱\Rightarrow ۲^{-۱}<۲^{-x+[x]}\leq ۲^۰\Rightarrow \frac{۱}{۲}<۲^{-x+[x]}\leq ۱$$

بنابراین برد تابع $g(f(x))=۲^{-x+[x]}$، برابر $(\frac{۱}{۲},۱]$ است.

پاسخ تشریحی آزمون ۲۱

۱- گزینه‌ی ۴ با عددگذاری به‌جای x و سپس یافتن مقادیر مقبول برای y، اعضای رابطه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$R=\{(۰,۰),(۰,۱),(۰,۲),(۰,۳),(۰,۴),(۰,۵),(۱,۰),(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۲,۰),(۲,۱)\}$$

این رابطه ۱۳ عضو دارد، دامنه‌ی این رابطه $\left(\{۰,۱,۲\}\right)$، ۳ عضو دارد. هر تابعی که با دامنه‌ی $\{۰,۱,۲\}$ دارای ۳ زوج مرتب است، پس باید $۱۳-۳=۱۰$ زوج مرتب از این رابطه حذف شود تا تبدیل به یک تابع گردد.

۲- گزینه‌ی ۲ در تابع f دو زوج مرتب $(۲,۱)$ و $(۲,n)$ وجود دارند، پس $n=۱$، همچنین دو زوج مرتب $(۱,۰)$ و $(۱,m^۳-m)$ وجود دارند، پس:

$$m^۳-m=۰\Rightarrow m(m-۱)(m+۱)=۰\Rightarrow m=۰,-۱,۱$$

ضمناً با توجه به این‌که $n=۱$ زوج مرتب آخر به‌صورت $(۱,m^۲-۱)$ درمی‌آید که با توجه به وجود زوج مرتب $(۱,۰)$ داریم:

$$m^۲-۱=۰\Rightarrow m=\pm ۱$$

با توجه به شروط به‌دست آمده، دو مقدار ۱ و -۱ برای m مورد قبول است.

۳- گزینه‌ی ۳ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه‌ی (۱): $x^۲-۲x+۱+y^۲=۰ \Rightarrow (x-۱)^۲+y^۲=۰ \Rightarrow x=۱, y=۰$

تابع گزینه‌ی یک، $f=\{(۱,۰)\}$ تک‌عضوی است.

گزینه‌ی (۲): $\frac{x^۲y}{۲x}=x^۲ \xrightarrow{x\neq ۰} x^۲y=۲x^۳ \Rightarrow x=۰$ غ ق ق یا $y=۲x$

خط $y=۲x$ با حذف نقطه‌ی $(۰,۰)$ تابع است.

گزینه‌ی (۳): $y^۳-۲y^۲+y-۲=x \xrightarrow{x=-۲} y(y^۲-۲y+۱)=۰ \Rightarrow y(y-۱)^۲=۰ \Rightarrow y=۰$ یا $y=۱$

دو نقطه‌ی $(-۲,۰)$ و $(-۲,۱)$ دارای مؤلفه‌ی اول یکسان هستند، پس رابطه، تابع نیست.

گزینه‌ی (۴): $۲|y-۱|+x^۲=۰ \Rightarrow x=۰, y=۱$

این رابطه، یک تابع تک‌عضوی به صورت $\{(۰,۱)\}$ است.

۴- گزینه‌ی ۴ برای آن‌که $f(x)$ یک تابع باشد، باید هر دو ضابطه به ازای $x=a$ یک مقدار داشته باشند، پس:

$$a+\frac{۱۲}{a}=a-۳ \Rightarrow a^۲+۱۲=a^۲-۳a \Rightarrow ۳a=-۱۲ \Rightarrow a=-۴$$

$$f(f(-۴))=f(-۴-۳)=f(-۷) \xrightarrow{-۷<-۴} f(-۷)=-۷-۳=-۱۰$$

۵- گزینه‌ی ۴ با توجه به ضابطه‌ی داده شده می‌توان نوشت:

$$f(x-۲)=x^۳-۳x^۲+۳x-۱+۱ \Rightarrow f(x-۲)=(x-۱)^۳+۱ \xrightarrow{x=\sqrt[۳]{۲}+۱} f(\sqrt[۳]{۲}+۱-۲)=(\sqrt[۳]{۲}+۱-۱)^۳+۱ \Rightarrow f(\sqrt[۳]{۲}-۱)=(\sqrt[۳]{۲})^۳+۱=۳$$

۶- گزینه‌ی ۱ ابتدا دامنه‌ی تابع را تعیین می‌کنیم، عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد، پس:

$$\sin \pi x-۱\geq ۰ \Rightarrow \sin \pi x \geq ۱$$

می‌دانیم حاصل نسبت مثلثاتی سینوس همواره عددی کوچک‌تر یا مساوی یک است، پس حالت بزرگ‌تر از یک غیرقابل قبول است.

$$\sin \pi x=۱ \Rightarrow \pi x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x=۲k+\frac{۱}{۲} \quad (k\in \mathbb{Z})$$

بنابراین دامنه‌ی تابع فقط شامل اعدادی به‌صورت $۲k+\frac{۱}{۲}$ مثل ۲/۵ و ۴/۵ و ... است. این اعداد حتماً صحیح نیستند و با توجه به این‌که $[x]+[-x]=\begin{cases} ۰ & x\in \mathbb{Z} \\ -۱ & x\notin \mathbb{Z} \end{cases}$، داریم:

$$f(x)=-۱+\sqrt{۱-۱}=-۱$$

یعنی تابع $y=f(x)$ تابع ثابت $y=-۱$ است که به ازای هر ورودی -۱ می‌دهد، پس $f(\frac{-۱}{۲}f(x))=-۱$.

۷- گزینه‌ی ۲ به ازای هر x داریم $f(xf(x))=۲x$، پس با جایگذاری مناسب x داریم:

$$x=۲: f(۲f(۲))=۲\times ۲ \xrightarrow{f(۲)=۳} f(۶)=۴$$

$$x=۶: f(۶f(۶))=۲\times ۶ \xrightarrow{f(۶)=۴} f(۲۴)=۱۲$$

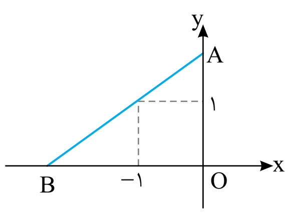
۸- گزینه‌ی ۲ با جایگذاری $x=y=۱$، $f(۱)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(۱)=f(۱)+f(۱) \Rightarrow ۲f(۱)=f(۱) \Rightarrow f(۱)=۰$$

حال، داریم:

$$f(xy)=f(x)+f(y) \xrightarrow{x=۵, y=۰/۲} f(۵\times ۰/۲)=f(۵)+f(۰/۲) \Rightarrow f(۱)=f(۵)+f(۰/۲) \xrightarrow{f(۱)=۰} f(۰/۲)=-f(۵)=۲$$

۹- گزینه‌ی ۳ معادله‌ی خط گذرنده از نقطه‌ی $(-۱,۱)$ با شیب دلخواه m به‌صورت زیر است:



$$y-۱=m(x+۱) \Rightarrow y=mx+m+۱$$

اندازه‌ی OA و OB با جایگذاری صفر به ترتیب به‌جای x و y به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} x=۰ \Rightarrow y=m+۱ \Rightarrow OA=y=m+۱ \\ y=۰ \Rightarrow ۰=mx+m+۱ \Rightarrow x=\frac{-m-۱}{m} \Rightarrow OB=-x=\frac{m+۱}{m} \end{cases} \Rightarrow S=\frac{OA\times OB}{۲}=\frac{۱}{۲}(m+۱)(\frac{m+۱}{m})=\frac{(m+۱)^۲}{۲m}$$

۱۰- گزینه‌ی ۳ با حل نامعادله‌ی قدر مطلقی زیر، دامنه‌ی تابع به‌دست می‌آید:

$$x-2|x-1|\geq 0 \Rightarrow x\geq 2|x-1|$$

با توجه به این‌که x از یک عبارت نامنفی بزرگ‌تر است، پس خود عددی مثبت است و می‌توان دو طرف نامساوی را به توان ۲ رساند:

$$x^2>(2|x-1|)^2 \Rightarrow x^2-(2(x-1))^2>0 \Rightarrow (x-2x+2)(x+2x-2)>0 \Rightarrow (-x+2)(3x-2)>0 \Rightarrow \frac{2}{3}<x<2$$

۱۱- گزینه‌ی ۱ برای آن‌که تابع مورد نظر تعریف شده باشد، باید داشته باشیم:

$$25-x^2\geq 0 \Rightarrow -5\leq x\leq 5$$

$$2x^2-2\geq 0 \Rightarrow x^2-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 1 \text{ یا } x\leq -1$$

$$\sqrt{25-x^2}-\sqrt{2x^2-2}\neq 0 \Rightarrow \sqrt{25-x^2}\neq\sqrt{2x^2-2} \Rightarrow 25-x^2\neq 2x^2-2 \Rightarrow 3x^2\neq 27 \Rightarrow x\neq\pm 3$$

بنابراین با اشتراک محدوده‌های به‌دست آمده، دامنه‌ی تابع برابر است با: $D=[-5,-1]\cup[1,5]-\{\pm 3\}$

اعداد صحیح موجود در دامنه، اعداد ± 5، ± 4، ± 2 و ± 1 هستند.

۱۲- گزینه‌ی ۴ زیر رادیکال، همواره عددی نامنفی است، پس:

$$\log_{0/2} x-2\geq 0 \Rightarrow \log_{0/2} x\geq 2 \xrightarrow{0/2<1} x\leq (0/2)^2 \Rightarrow x\leq 0/04$$

با توجه به این‌که محدوده‌ی تعریف تابع $y=\log_{0/2} x$، فقط اعداد مثبت است، بنابراین دامنه‌ی تابع، بازه‌ی $D=(0,0/04]$ می‌باشد، که طول آن برابر $0/04$ است.

۱۳- گزینه‌ی ۴ با حل نامعادله‌ی زیر، دامنه‌ی تابع به‌دست می‌آید:

$$f(\frac{1}{x})-f(x)\geq 0 \xrightarrow{f(x)=2^x} 2^{\frac{1}{x}}-2^x\geq 0 \Rightarrow 2^{\frac{1}{x}}\geq 2^x \xrightarrow{2>1} \frac{1}{x}\geq x \Rightarrow \frac{1-x^2}{x}\geq 0$$

x		-1		0		1	
$\frac{1-x^2}{x}$	+	0	−	∥	+	0	−

$$\Rightarrow x\leq -1 \text{ یا } 0<x\leq 1$$

۱۴- گزینه‌ی ۲ فقط عدد -2 در دامنه‌ی تابع قرار ندارد، پس تنها ریشه‌ی مخرج عدد -2 است، پس مخرج به‌صورت مضربی از $(x+2)^2$ است.

با توجه به عبارت مخرج، این مضرب ۲ می‌باشد، پس:

$$2(x+2)^2=2x^2+ax+b \Rightarrow 2x^2+8x+8=2x^2+ax+b \Rightarrow a=8, b=8 \Rightarrow a+b=16$$

۱۵- گزینه‌ی ۳ برای آن‌که دامنه‌ی تابع برابر $\mathbb{R}$ باشد، می‌بایست نامعادله‌ی $(m-3)x^2-2(m-1)x+(2m+1)>0$ همواره برقرار باشد، پس باید داشته باشیم:

$$a>0 \Rightarrow m-3>0 \Rightarrow m>3 \quad (I)$$

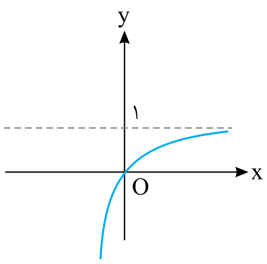
$$\Delta'<0 \Rightarrow (m-1)^2-(2m+1)(m-3)<0 \Rightarrow m^2-2m+1-2m^2+6m-m+3<0 \Rightarrow -m^2+3m+4<0 \Rightarrow -1<m<4 \quad (II)$$

با اشتراک شرط‌های (I) و (II) داریم: $3<m<4$.

۱۶- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول:** زیر رادیکال باید نامنفی باشد، پس:

$$xf(x)\geq 0 \Rightarrow x(1-(\frac{1}{3})^x)\geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x\geq 0, 1-(\frac{1}{3})^x\geq 0 \Rightarrow (\frac{1}{3})^x\leq 1 \Rightarrow x\geq 0 \\ \text{یا} \\ x<0, 1-(\frac{1}{3})^x<0 \Rightarrow (\frac{1}{3})^x>1 \Rightarrow x<0 \end{cases} \Rightarrow x\geq 0 \text{ یا } x<0 \Rightarrow x\in\mathbb{R}$$

راه‌حل دوم: با توجه به قوانین رسم نمودار، نمودار تابع $f(x)=1-(\frac{1}{3})^x$ به‌صورت روبه‌رو است:



بنابراین جدول تعیین علامت عبارت $xf(x)$ به‌صورت زیر است:

x		0	
x	−	0	+
$f(x)$	−	0	+
$xf(x)$	+	0	+

$$xf(x)\geq 0 \Rightarrow x\in\mathbb{R}$$

۱۷- گزینه‌ی ۲ دامنه‌ی تابع $f(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$ax+b>0 \Rightarrow ax>-b \Rightarrow \begin{cases} a>0 \Rightarrow x>\dfrac{-b}{a} \\ a<0 \Rightarrow x<\dfrac{-b}{a} \end{cases}$$

با توجه به این‌که دامنه‌ی تابع $x>\frac{-1}{2}$ است، پس حالت $a>0$ صحیح است و داریم:

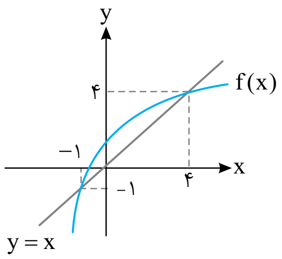
$$\frac{-b}{a}=\frac{-1}{2} \Rightarrow 2b=a$$

ضمناً از آن‌جا که $f(4)=2$ است، پس:

$$\log_3(4a+b)=2 \Rightarrow 4a+b=9 \xrightarrow{a=2b} 9b=9 \Rightarrow b=1, a=2$$

$$\Rightarrow f(x)=\log_3(2x+1) \Rightarrow f(\frac{-4}{9})=\log_3(\frac{-8}{9}+1)=\log_3 \frac{1}{9}=-2$$

۱۸- گزینه‌ی ۳ با توجه به نقاط داده شده در نمودار تابع، نسبت خط $y=x$ با نمودار تابع مطابق شکل روبه‌رو می‌باشد:



بنابراین در محدوده‌ی $(-1,4)$ خط $y=x$ زیر نمودار تابع و در خارج از آن محدوده بالای تابع است،

بنابراین می‌توان جدول تعیین علامت عبارت زیر رادیکال را رسم کرد:

x		−۱		۰		۴	
$x-f(x)$	+	۰	−		−	۰	+
$\log(x+1)$		‖	−	۰	+		+
$\dfrac{x-f(x)}{\log(x+1)}$		‖	+	‖	−	۰	+

بنابراین دامنه‌ی تابع بازه‌ی $D=(-1,0)\cup[4,+\infty)$ می‌باشد.

۱۹- گزینه‌ی ۲ از محدودیت $\cos x$ شروع کرده و تابع را می‌سازیم.

$$-1\le \cos x\le 1 \Rightarrow -2\le 2\cos x\le 2 \Rightarrow -3\le 2\cos x-1\le 1 \Rightarrow 0\le |2\cos x-1|\le 3 \Rightarrow \frac{1}{|2\cos x-1|}\ge \frac{1}{3} \Rightarrow \mathbb{R}=[\frac{1}{3},+\infty)$$

۲۰- گزینه‌ی ۲ دامنه‌ی تابع بازه‌ی $(0,2]$ می‌باشد. با توجه به مثبت بودن x، تابع $f(x)$ را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=(x+|x|)\sqrt{\frac{2-x}{x}} \xrightarrow{x>0} f(x)=2x\sqrt{\frac{2-x}{x}}$$

برای x های مثبت با توجه به این‌که $x=\sqrt{x^2}$، داریم:

$$f(x)=2x\sqrt{\frac{2-x}{x}}=\sqrt{4x^2(\frac{2-x}{x})}=\sqrt{-4x^2+8x}=\sqrt{-4(x-1)^2+4}$$

$$(x-1)^2\ge 0 \Rightarrow -4(x-1)^2\le 0 \Rightarrow -4(x-1)^2+4\le 4 \Rightarrow 0\le \sqrt{-4(x-1)^2+4}\le 2 \Rightarrow 0\le f(x)\le 2$$

بنابراین برد تابع، بازه‌ی $[0,2]$ می‌باشد.

پاسخ تشریحی آزمون ۲۲

۱- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول**: اگر تابع هموگرافیک $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ ثابت باشد، داریم $ad-bc=0$، پس:

$$m(-m)=-2m\times 1 \Rightarrow m^2=2m \Rightarrow m=0 \text{ یا } 2$$

راه‌حل دوم: تابع را برابر عدد ثابت k قرار می‌دهیم، این عبارت باید به ازای تمامی اعداد برقرار باشد.

$$\frac{mx-2m}{x-m}=k \Rightarrow mx-2m=kx-mk$$

از جایی‌که رابطه‌ی به‌دست آمده یک اتحاد است، پس:

$$\begin{cases} m=k \\ -2m=-mk \Rightarrow m=0 \text{ یا } k=2 \end{cases} \Rightarrow m=0 \text{ یا } m=2$$

۲- گزینه‌ی ۱ تابع f خطی است، پس ضابطه‌ی آن به‌صورت $f(x)=ax+b$ می‌باشد:

$$2f(x+3)-f(1-2x)=16x+11\Rightarrow 2(a(x+3)+b)-(a(1-2x)+b)=16x+11\Rightarrow 4ax+(5a+b)=16x+11$$

$$\Rightarrow\begin{cases}4a=16\Rightarrow a=4\\ 5a+b=11\end{cases}\Rightarrow 20+b=11\Rightarrow b=-9$$

بنابراین داریم: $f(x)=4x-9\Rightarrow f(1)=4-9=-5$

۳- گزینه‌ی ۳ عدد -2 در دامنه‌ی تابع $f+g$ موجود است، پس ۲- باید در دامنه‌ی تابع f باشد. از جایی‌که $D_f=\{1,0,a\}$، پس $a=-2$ و داریم:

$$f=\{(1,2),(0,4),(-2,0)\},g=\{(-1,2),(-2,1),(0,4)\}\Rightarrow\frac{f}{g}=\{(0,1),(-2,0)\}\Rightarrow R_{\frac{f}{g}}=\{1,0\}$$

۴- گزینه‌ی ۴ با توجه به این‌که $(4,1)\in gof$، داریم:

$$gof(4)=1\Rightarrow g(f(4))=1\xrightarrow{(4,5)\in f}g(5)=1\Rightarrow(5,1)\in g$$

بنابراین با توجه به وجود زوج مرتب $(b,1)$ در g داریم: $b=5$، ضمناً با فرض این‌که $(4,2)\in fog$، ۴ در دامنه‌ی تابع g موجود است، پس $a=4$ و داریم:
$a+b=9$

۵- گزینه‌ی ۱ دو تابع $f+g$ و $f-g$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f+g=\{(2,1),(1,5),(0,2)\}$$
$$f-g=\{(2,5),(1,1),(0,2)\}$$

ترکیب این دو تابع برابر است با: $(f-g)o(f+g)=\{(2,1),(0,5)\}$

بنابراین اعداد ۱ و ۵ در برد این تابع قرار دارند.

۶- گزینه‌ی ۳ با تغییر متغیر $2x-1=t$ داریم $x=\frac{t+1}{2}$، پس:

$$f(2x-1)=4x^2-1\xrightarrow{x=\frac{t+1}{2}}f(t)=4(\frac{t+1}{2})^2-1\Rightarrow f(t)=t^2+2t\Rightarrow f(1)=3\Rightarrow gof(1)=g(3)=2\times3-1=5$$

۷- گزینه‌ی ۲ با توجه به شکل، $gof(x)=2x$ و با توجه به ضابطه‌ی $g(x)$ داریم:

$$g(x)=3x+4\Rightarrow 3f(x)+4=2x\Rightarrow f(x)=\frac{2x-4}{3}\Rightarrow f(5)=\frac{10-4}{3}=2$$

سراسری خارج از کشور - ۹۱

۸- گزینه‌ی ۴ دامنه‌ی تعریف دو تابع f و g برابر $D_g=[1,+\infty)$ و $D_f=[-1,+\infty)$ می‌باشد.

دامنه‌ی تعریف تابع gof برابر است با:

$$D_{gof}=\{x\in D_f|f(x)\in D_g\}=\{x\geq-1|3-\sqrt{x+1}\geq1\}=\{x\geq-1|\sqrt{x+1}\leq2\}=\{x\geq-1|x+1\leq4\}=\{x\geq-1|x\leq3\}=[-1,3]$$

بازه‌ی به‌دست آمده شامل ۵ عدد صحیح ۱-، ۰، ۱، ۲ و ۳ می‌باشد.

۹- گزینه‌ی ۳ با توجه به ضابطه‌ی $f(x)=2-|x-2|$ داریم:

$$fof(x)=2-|(2-|x-2|)-2|=2-|-|x-2||=2-||x-2||=2-|x-2|=f(x)$$

۱۰- گزینه‌ی ۳ با تغییر متغیر $2x-3=t$ داریم:

$$f(2x-3)=4(x^2-4x+5)\xrightarrow{x=\frac{t+3}{2}}f(t)=4(\frac{t+3}{2})^2-16(\frac{t+3}{2})+20=(t^2+6t+9)-8t-24+20=t^2-2t+5\Rightarrow f(x)=x^2-2x+5$$

۱۱- گزینه‌ی ۱ ابتدا ضابطه‌ی $g(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases}f(x)=x^2-x-2\Rightarrow f(g)=g^2-g-2\\ f(g(x))=x^2+x-2\end{cases}\Rightarrow g^2-g-2=x^2+x-2\Rightarrow g^2-g=x^2+x\Rightarrow(g-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}=(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}\Rightarrow(g-\frac{1}{2})^2=(x+\frac{1}{2})^2$$

بنابراین تابع $g(x)$ می‌تواند تابع $g(x)=x+1$ باشد. در حالتی که $g(x)=x+1$ باشد، داریم:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^2-x-2+x+1=x^2-1$$

سراسری خارج از کشور - ۹۰

۱۲- گزینه‌ی ۱ با توجه به معادله‌ی داده شده داریم:

$$fog(x)=-f(x)\Rightarrow \frac{g+۱}{g-۱}=-\frac{x+۱}{x-۱}\Rightarrow (g+۱)(x-۱)=(-x-۱)(g-۱)\Rightarrow xg-g+x-۱=-xg+x-g+۱$$

$$\Rightarrow ۲xg=۲\Rightarrow g=\frac{۱}{x}\xrightarrow{x=۳} g(۳)=\frac{۱}{۳}$$

۱۳- گزینه‌ی ۱ با توجه به ضابطه‌ی $g(x)=(x+۱)^۲$ داریم:

$$\begin{cases} fog(۱-\sqrt{۲})=\left|(۱-\sqrt{۲}+۱)^۲\right|=(۲-\sqrt{۲})^۲=۶-۴\sqrt{۲} \\ gof(۱-\sqrt{۲})=(\left|۱-\sqrt{۲}\right|+۱)^۲=(\sqrt{۲}-۱+۱)^۲=(\sqrt{۲})^۲=۲ \end{cases} \Rightarrow fog(۱-\sqrt{۲})-gof(۱-\sqrt{۲})=۶-۴\sqrt{۲}-۲=۴-۴\sqrt{۲}=۴(۱-\sqrt{۲})$$

سراسری - ۸۹

۱۴- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول:** برای محاسبه‌ی $f(۳)$ با داشتن $fog(x)$، کافی است عددی را پیدا کنیم که به ازای آن حاصل $g(x)$ برابر ۳ شود.

$$g(x)=۳\Rightarrow ۲x-۱=۳\Rightarrow x=۲$$

بنابراین مقدار $fog(x)$ به ازای $x=۲$ برابر $f(۳)$ است.

$$fog(x)=\frac{x}{x-۳}\Rightarrow fog(۲)=\frac{۲}{۲-۳}=-۲$$

راه‌حل دوم: با تغییر متغیر $۲x-۱=t$ ضابطه‌ی تابع f را پیدا می‌کنیم:

$$f(۲x-۱)=\frac{x}{x-۳}\xrightarrow{x=\frac{t+۱}{۲}} f(t)=\frac{\frac{t+۱}{۲}}{\frac{t+۱}{۲}-۳}=\frac{\frac{t+۱}{۲}}{\frac{t-۵}{۲}}\Rightarrow f(x)=\frac{x+۱}{x-۵}\Rightarrow f(۳)=\frac{۴}{۳-۵}=-۲$$

۱۵- گزینه‌ی ۴ با توجه به ضابطه‌ی $f(x)$ داریم:

$$\begin{cases} ۵>۳\Rightarrow f(۵)=۵-\sqrt{۵+۴}=۲\xrightarrow{۲\le ۳} f(f(۵))=f(۲)=۲\times ۲+۳=۷ \\ ۱\le ۳\Rightarrow f(۱)=۲\times ۱+۳=۵\xrightarrow{۵>۳} f(f(۱))=f(۵)=۵-\sqrt{۵+۴}=۲ \end{cases}\Rightarrow f(f(۵))+f(f(۱))=۷+۲=۹$$

سراسری - ۹۰

۱۶- گزینه‌ی ۴ **راه‌حل اول:** با تغییر متغیر $x-۳=t$، ضابطه‌ی $f(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x-۳)=x^۲-۴x+۵\Rightarrow f(t)=(t+۳)^۲-۴(t+۳)+۵=t^۲+۶t+۹-۴t-۱۲+۵=t^۲+۲t+۲\Rightarrow f(x)=x^۲+۲x+۲\Rightarrow$$

$$f(۱-x)=(۱-x)^۲+۲(۱-x)+۲\Rightarrow f(۱-x)=x^۲-۲x+۱+۲-۲x+۲\Rightarrow f(۱-x)=x^۲-۴x+۵$$

راه‌حل دوم: با تغییر متغیر $x-۳=۱-t$ می‌توانیم، از روی $f(x-۳)$ مستقیماً $f(۱-t)$ را محاسبه کنیم:

$$f(x-۳)=x^۲-۴x+۵\xrightarrow{x=۴-t} f(۱-t)=(۴-t)^۲-۴(۴-t)+۵=۱۶+t^۲-۸t-۱۶+۴t+۵=t^۲-۴t+۵\Rightarrow f(۱-x)=x^۲-۴x+۵$$

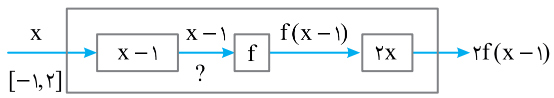
سراسری - ۹۰

۱۷- گزینه‌ی ۱ **راه‌حل اول:** مطابق مراحل زیر داریم:

$$\underset{D=[-۱,۲]}{y=۲f(x-۱)}\xrightarrow{\text{نصف کردن عمودی}}\underset{D=[-۱,۲]}{y=f(x-۱)}\xrightarrow{\text{یک واحد به چپ}}\underset{D=[-۲,۱]}{y=f(x)}$$

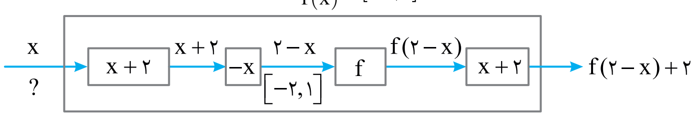
$$\xrightarrow{\text{دو واحد به چپ}}\underset{D=[-۴,-۱]}{y=f(x+۲)}\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به yها}}\underset{D=[۱,۴]}{y=f(-x+۲)}\xrightarrow{\text{دو واحد به بالا}}\underset{D=[۱,۴]}{y=۲+f(۲-x)}$$

راه‌حل دوم:



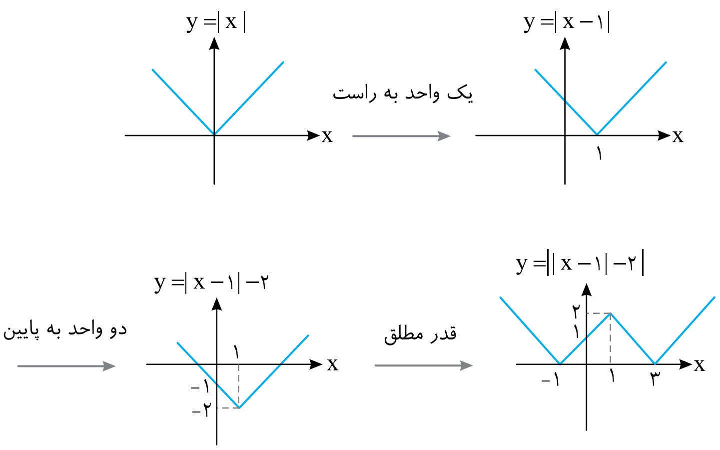
با توجه به شکل بالا داریم:

$$-۱\le x\le ۲\Rightarrow -۲\le x-۱\le ۱\Rightarrow D_{f(x)}=[-۲,۱]$$



$$-۲\le ۲-x\le ۱\Rightarrow -۴\le -x\le -۱\Rightarrow ۴\ge x\ge ۱\Rightarrow D_{f(۲-x)}=[۱,۴]$$

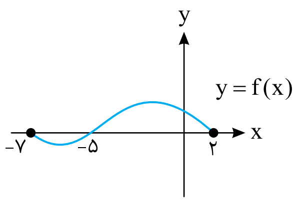
۱۸- گزینه‌ی ۳ با شروع از نمودار $y=|x|$ نمودار خواسته شده را رسم می‌کنیم:



۱۹- گزینه‌ی ۱ بـا انتقـال تابـع $y=f(x-1)$ به مقـدار ۲ واحد به سـمت چـپ، تابـع $y=f((x+2)-1)$ یعنی $y=f(x+1)$ به‌دسـت می‌آید. $y=f(x+1)-1$ انتقال یافته‌ی تابع قبلی به مقدار یک واحد به سـمت پایین اسـت. برای قرینه کردن تابع نسـبت به محور xها، کافی است کل عبارت را در منفی ضرب کنیم:

$$y=-(f(x+1)-1)=1-f(x+1)$$

۲۰- گزینه‌ی ۲ نمـودار تابـع $y=f(x-2)$ را دو واحد به چپ می‌بریـم تا نمودار تابع قبـل از انتقال افقی به‌دست آید.



برای دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{xf(x)}$ باید داشته باشیم $xf(x)\geq 0$:

x		-7		-5		0		2	
f(x)	▨	0	$-$	0	$+$		$+$	0	▨
x	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
xf(x)	▨	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	▨

$$xf(x)\geq 0 \Rightarrow -7\leq x\leq -5 \text{ یا } 0\leq x\leq 2$$

پاسخ تشریحی آزمون ۲۳

۱- گزینه‌ی ۱ ضابطه‌ی تابع خطی عبارتی از درجه‌ی اول است.

$$f(x)=ax+b \xrightarrow{x=1} f(1)=a+b \xrightarrow{f(1)=-1} a+b=-1 \Rightarrow b=-1-a$$

$$fof(x)=a(ax+b)+b \Rightarrow fof(-1)=a(-a+b)+b \xrightarrow{fof(-1)=-5} -a^2+ab+b=-5$$

$$\xrightarrow{b=-1-a} -a^2+a(-1-a)+(-1-a)=-5$$

$$\Rightarrow -2a^2-2a-1=-5 \Rightarrow 2a^2+2a-4=0 \Rightarrow a^2+a-2=0 \Rightarrow a=1 \text{ یا } a=-2 \xrightarrow{b=-1-a} b=-2 \text{ یا } b=1$$

از آنجایی‌که در تابع خطی $f(x)=ax+b$، $f(0)$ برابر b است، پس ۱ یا $f(0)=-2$.

۲- گزینه‌ی ۴ می‌دانیم دامنه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ برابر است با:

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f \cap D_g-\{x|g(x)=0\}$$

از آنجایی‌که $D_g=\{-1,0,2,1\}$ و $g(2)=0$ و $D_f=[0,4]$ بنابراین دامنه‌ی $\frac{f}{g}$ برابر است با: $D_{\frac{f}{g}}=\{0,1\}$ و داریم:

$$(\frac{f}{g})(0)=\frac{f(0)}{g(0)}=\frac{0}{1}=0, (\frac{f}{g})(1)=\frac{f(1)}{g(1)}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$$

بنابراین برد تابع فقط شامل اعداد صفر و $\sqrt{3}$ است.

۳- گزینه‌ی ۲ ابتدا ضابطه‌ی توابع f و g را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1}=\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}=|\sqrt{x-1}+1|=\sqrt{x-1}+1$$

$$g(x)=\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1}=\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}=|\sqrt{x-1}-1|$$

با توجه به محدوده‌ی $1<x<2$، داریم:

$$1<x<2\Rightarrow 0<x-1<1\Rightarrow 0<\sqrt{x-1}<1\Rightarrow -1<\sqrt{x-1}-1<0$$

بنابراین ضابطه‌ی تابع g به‌صورت $g(x)=1-\sqrt{x-1}$ است و داریم:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=1+\sqrt{x-1}+1-\sqrt{x-1}=2$$

۴- گزینه‌ی ۳ با توجه به $f(x)=\frac{x}{x-1}$، داریم:

$$f(x^2)-2f(x)+1=\frac{x^2}{x^2-1}-2\frac{x}{x-1}+1=\frac{x^2-2x(x+1)+x^2-1}{x^2-1}=\frac{-2x-1}{x^2-1}=\frac{2x+1}{1-x^2}$$

سراسری خارج از کشور - ۸۹

۵- گزینه‌ی ۳ دامنه‌ی تابع gof به‌صورت $\{x\in D_f|f(x)\in D_g\}$ است، از جایی‌که $D_f=[-2,2]$ و $D_g=\{2,4,0,-1\}$، داریم:

$$D_{gof}=\{-2\le x\le 2|f(x)\in\{2,4,0,-1\}\}$$

سپس باید معادله‌های زیر را حل کنیم:

$$f(x)=2\Rightarrow 2\sqrt{4-x^2}=2\Rightarrow 4-x^2=1\Rightarrow x^2=3\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$$

$$f(x)=4\Rightarrow 2\sqrt{4-x^2}=4\Rightarrow 4-x^2=4\Rightarrow x^2=0\Rightarrow x=0$$

$$f(x)=0\Rightarrow 2\sqrt{4-x^2}=0\Rightarrow 4-x^2=0\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm 2$$

$f(x)=-1\Rightarrow 2\sqrt{4-x^2}=-1$ جواب ندارد

بنابراین تابع gof دارای ۵ زوج مرتب با طول‌های $\pm\sqrt{3}$ و ± 2 و صفر است.

۶- گزینه‌ی ۴ ضابطه‌ی تابع ثابت f، $f(x)=k$ و ضابطه‌ی تابع همانی g، $g(x)=x$ است، پس ضابطه‌ی fog عبارت است از:

$$fog(x)=f(g(x))=f(x)=k$$

بنابراین fog نیز تابعی ثابت است. برای محاسبه‌ی دامنه‌ی این تابع داریم:

$$D_{fog}=\{x\in D_g|g(x)\in D_f\}=\{x\in[-2,5]|x\in[-3,1]\}=[-2,5]\cap[-3,1]=[-2,1]$$

۷- گزینه‌ی ۴ با محاسبه‌ی تابع $y=fog(x)$ معادله‌ی مورد نظر را حل می‌کنیم:

$$fog(x)=17-x\Rightarrow(2x-3)^2-3(2x-3)=17-x\Rightarrow 4x^2-12x+9-6x+9=17-x\Rightarrow 4x^2-17x+1=0$$

در معادله‌ی درجه دوم می‌دانیم حاصل‌جمع ریشه‌ها برابر است با:

$$S=\frac{-b}{a}=\frac{-(-17)}{4}=\frac{17}{4}$$

۸- گزینه‌ی ۳ تابع f را با اعضایش می‌نویسیم، سپس fof را محاسبه می‌کنیم:

$$f=\{(x+2,2x-1):x\in A\}=\{(3,1),(4,3),(5,5),(6,7),(7,9)\}\Rightarrow fof=\{(4,1),(5,5),(6,9)\}$$

توجه کنید اعداد ۳ و ۷ در دامنه‌ی fof قرار ندارند، زیرا $f(1)$ و $f(9)$ در دامنه‌ی f نیست، پس fof فقط ۳ عضو دارد.

۹- گزینه‌ی ۴ از جایی‌که $f(\frac{-1}{4})=f(6)=0$، پس اگر $g(a)=6$ یا $g(a)=\frac{-1}{4}$، a ریشه‌ی معادله‌ی $fog(x)=0$ خواهد بود.

$$g(x)=6\Rightarrow x-\sqrt{x}=6\Rightarrow\sqrt{x}=x-6\xrightarrow{x\ge 6}x=x^2-12x+36\Rightarrow x^2-13x+36=0$$

$\Rightarrow(x-4)(x-9)=0\Rightarrow x=9$ یا $x=4$ غ ق ق $\Rightarrow x=9$

$$g(x)=\frac{-1}{4}\Rightarrow x-\sqrt{x}=\frac{-1}{4}\Rightarrow\sqrt{x}=x+\frac{1}{4}\xrightarrow{x\ge\frac{-1}{4}}x=x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{16}\Rightarrow x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{16}=0\Rightarrow(x-\frac{1}{4})^2=0\Rightarrow x=\frac{1}{4}$$

بنابراین، $fog(9)=fog(\frac{1}{4})=0$ پس ۹ و $\frac{1}{4}$ دو نقطه‌ی تلاقی تابع fog با محور طول‌ها هستند.

۱۰- گزینه‌ی ۱ **راه‌حل اول:** ابتدا ضابطه‌ی $g(x)$ را پیدا کرده، سپس به محاسبه‌ی $g(3)$ می‌پردازیم:

$$g(f(x))=\frac{x^2+3}{2x^2-1}\Rightarrow g(x^2-1)=\frac{(x^2-1)+4}{2(x^2-1)+1}\Rightarrow g(x)=\frac{x+4}{2x+1}\Rightarrow g(3)=\frac{7}{7}=1$$

راه‌حل دوم: برای محاسبه‌ی $g(3)$ کافی است، مقادیری از x را بیابیم که به ازای آن‌ها $f(x)$ برابر ۳ می‌شود.

$$f(x)=3\Rightarrow x^2-1=3\Rightarrow x^2=4$$

$$g(f(x))=\frac{x^2+3}{2x^2-1}\xrightarrow{x^2=4}g(3)=\frac{4+3}{8-1}=1$$

۱۱- گزینه‌ی ۲ با توجه به ضابطه‌ی $g(x-1)$، ضابطه‌ی $g(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$g(x-1)=-3(x-1)+1\Rightarrow g(x)=-3x+1$$

$$fog(x)=\frac{2x}{3x-2}\Rightarrow f(-3x+1)=\frac{2x}{3x-2}\xrightarrow{x=\frac{1-t}{3}}f(t)=\frac{2(\frac{1-t}{3})}{3(\frac{1-t}{3})-2}\Rightarrow f(t)=\frac{2-2t}{3(-1-t)}\Rightarrow f(t)=\frac{2t-2}{3t+3}\Rightarrow f(x)=\frac{2x-2}{3x+3}$$

$$fof(1)=f(f(1))=f(\frac{2-2}{6})=f(0)=\frac{-2}{3}$$

۱۲- گزینه‌ی ۳ ضابطه‌ی تابع g را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}f(x)=\dfrac{x}{x+1}\Rightarrow f(g)=\dfrac{g}{g+1}\\ fog(x)=\dfrac{x+1}{x-1}\Rightarrow f(g)=\dfrac{x+1}{x-1}\end{cases}\Rightarrow\frac{g}{g+1}=\frac{x+1}{x-1}\Rightarrow xg-g=xg+x+g+1\Rightarrow 2g=-x-1\Rightarrow g=\frac{-x-1}{2}$$

۱۳- گزینه‌ی ۳ ابتدا با تغییر متغیر $2x+3=t$، ضابطه‌ی $g(x)$ را معین می‌کنیم:

$$g(2x+3)=8x^2+22x+20\xrightarrow{x=\frac{t-3}{2}}g(t)=8(\frac{t-3}{2})^2+22(\frac{t-3}{2})+20\Rightarrow g(t)=2(t^2-6t+9)+11t-33+20$$

$$\Rightarrow g(t)=2t^2-t+5\Rightarrow g(x)=2x^2-x+5$$

حال با داشتن f و g به محاسبه‌ی fog می‌پردازیم:

$$fog(x)=f(g(x))=2(2x^2-x+5)+3=4x^2-2x+13$$

۱۴- گزینه‌ی ۲ ضابطه‌ی fog را تشکیل داده و با استفاده از اتحادهای مثلثاتی ساده می‌کنیم:

$$fog(x)=f(g(x))=\sin^4 x-\sqrt{\sin^4 x}=\sin^4 x-|\sin^2 x|=\sin^4 x-\sin^2 x=\sin^2 x(\sin^2 x-1)=\sin^2 x(-\cos^2 x)$$

$$=\frac{-1}{4}(2\sin x\cos x)^2=\frac{-1}{4}(\sin 2x)^2=\frac{-1}{4}\sin^2 2x$$

سراسری خارج از کشور - ۹۲

۱۵- گزینه‌ی ۲ برای آن‌که تابع $y=f(\frac{2x-1}{x+1})$ تعریف شده باشد، می‌بایست $g(x)=\frac{2x-1}{x+1}$ در محدوده‌ی تعریف f یعنی بازه‌ی $[-1,1]$ قرار گیرد، پس:

$$-1\le\frac{2x-1}{x+1}\le 1\Rightarrow|\frac{2x-1}{x+1}|\le 1\Rightarrow\frac{|2x-1|}{|x+1|}\le 1\xrightarrow{|x+1|>0}|2x-1|\le|x+1|\Rightarrow(2x-1)^2\le(x+1)^2$$

$$\Rightarrow(2x-1)^2-(x+1)^2\le 0\Rightarrow(2x-1+x+1)(2x-1-x-1)\le 0\Rightarrow 3x(x-2)\le 0\Rightarrow 0\le x\le 2$$

پس دامنه‌ی تابع مورد نظر $[0,2]$ است و داریم: $a+b=2$.

۱۶- گزینه‌ی ۲ حاصل تابع $f(-f(x))$ را برای xهای گویا و گنگ جداگانه بررسی می‌کنیم:

$$x\in\mathbb{Q}\Rightarrow f(x)=-x\Rightarrow -f(x)=x\Rightarrow f(-f(x))=f(x)\xrightarrow{x\in\mathbb{Q}}f(-f(x))=-x$$

$$x\notin\mathbb{Q}\Rightarrow f(x)=1+x\Rightarrow -f(x)=-(1+x)\Rightarrow f(-f(x))=f(-(x+1))\xrightarrow{-(1+x)\notin\mathbb{Q}}f(-f(x))=1+(-x-1)=-x$$

توجه کنید اگر عددی گویا باشد، قرینه‌ی آن عدد نیز گویا است، ضمناً اگر عددی گنگ باشد، مجموع آن با هر عدد گویا حتماً گنگ و قرینه‌ی عدد گنگ حتماً گنگ است.

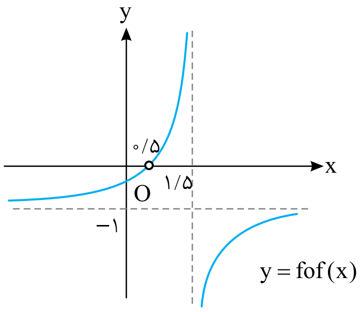
۱۷- گزینه‌ی ۳ ضابطه و دامنه‌ی تابع $y=fof(x)$ به‌صورت زیر است:

$$D_{fof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_f\}=\{x\neq\frac{۱}{۲}\,|\,\frac{۱}{۲x-۱}\neq\frac{۱}{۲}\}=\mathbb{R}-\{\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲}\}$$

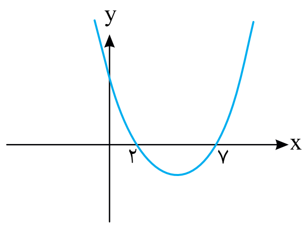
$$fof(x)=f(f(x))=\frac{۱}{۲f-۱}=\frac{۱}{\frac{۲}{۲x-۱}-۱}=\frac{۱}{\frac{۲-۲x+۱}{۲x-۱}}=\frac{۲x-۱}{-۲x+۳}$$

$y=\frac{-۲}{۲}=-۱$ مجانب افقی تابع هموگرافیک فوق است، پس ۱- در برد تابع نیست، ضمناً با توجه به دامنه‌ی $f(x)$، x نمی‌تواند برابر $\frac{۱}{۲}$ باشد، پس با توجه به یک‌به‌یک بودن تابع هموگرافیک، $fof(\frac{۱}{۲})$ نیز در برد تابع وجود ندارد.

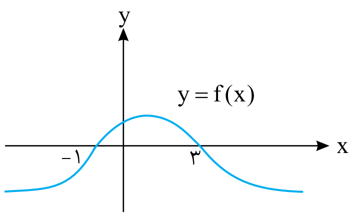
$$fof(x)=\frac{۲x-۱}{-۲x+۳}\xrightarrow{x\neq\frac{۱}{۲}}fof(x)\neq ۰\Rightarrow R=\mathbb{R}-\{۰,-۱\}$$



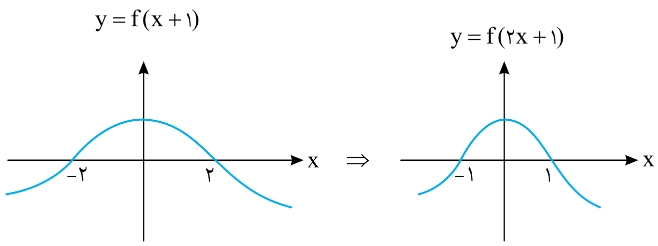
۱۸- گزینه‌ی ۲ بـا قرینه کردن نمودار $f(۳-x)$ نسـبت بـه محور yها و انتقال ۳ واحدی آن به سـمت راست، نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت روبه‌رو می‌باشد. این تابع محور xها را در دو نقطه‌ی ۷ و ۲ قطع می‌کند. نمودار $y=f(x+k)$ باعث می‌شـود، نمودار این تابع به اندازه‌ی k واحد به سـمت چپ برود. برای آن‌که هر دو محل تقاطع با محور طول‌ها از قسمت مثبت محور xها خارج شود حداقل k برابر ۷ است.



۱۹- گزینه‌ی ۱ اگر نمودار $y=f(x+۳)$ را ۳ واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار $y=f(x)$ حاصل می‌شود:

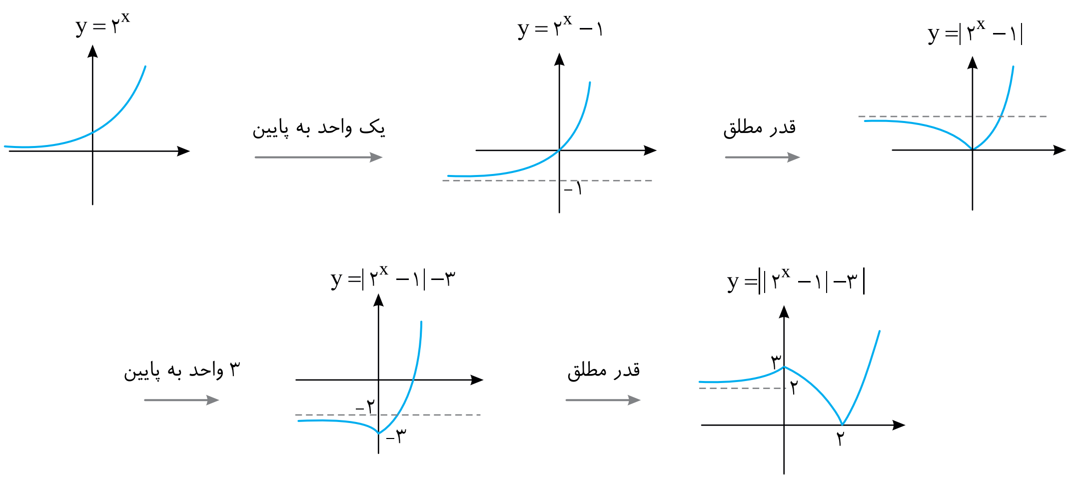


برای رسم $f(۲x+۱)$ ابتدا تابع را یک واحد به چپ می‌بریم، سپس آن را از لحاظ افقی نصف می‌کنیم:



تابع در فاصله‌ی $[-۱,۱]$ بالای محور xها است، پس دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{f(۲x+۱)}$ بازه‌ی $[-۱,۱]$ است.

۲۰- گزینه‌ی ۳ با شروع از نمودار $y=۲^x$، نمودار خواسته شده را طی مراحل زیر رسم می‌کنیم:



پاسخ تشریحی آزمون ۲۴

۱- گزینه‌ی ۴ با توجه به آن‌که f یک‌به‌یک است، داریم:

$(b,۲)\in f,(۳,۲)\in f\Rightarrow b=۳$

ضمناً با توجه به این‌که f یک تابع است، داریم: $(۳,۲)\in f,(۳,a^{۲}-a)\in f\Rightarrow a^{۲}-a=۲\Rightarrow a^{۲}-a-۲=۰\Rightarrow a=۲$ یا $a=-۱$

با توجه به وجود دو زوج مرتب $(a,۵)$ و $(-۱,۴)$ در تابع f، a نمی‌تواند -۱ باشد، پس $a=۲$ و $a+b=۵$.

۲- گزینه‌ی ۳ **راه حل اول:** تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ تنها در حالت $ad-bc=۰$ یک تابع ثابت و غیر یک‌به‌یک است.

$ad-bc=۰\Rightarrow -۲m-۴=۰\Rightarrow m=-۲$

راه حل دوم: برای آن‌که تابع f یک‌به‌یک نباشد، باید دو زوج مرتب $(x_۲,y_۲)$ و $(x_۱,y_۱)$ با مؤلفه‌ی دوم یکسان موجود باشد.

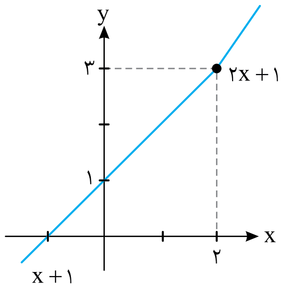
$$y_۱=y_۲\Rightarrow\frac{mx_۱+۴}{x_۱-۲}=\frac{mx_۲+۴}{x_۲-۲}\Rightarrow mx_۱x_۲-۲mx_۱+۴x_۲-۸=mx_۱x_۲-۲mx_۲+۴x_۱-۸\Rightarrow ۲mx_۲-۲mx_۱-۴x_۱+۴x_۲=۰$$

$$\Rightarrow ۲m(x_۲-x_۱)+۴(x_۲-x_۱)=۰\Rightarrow(x_۲-x_۱)(۲m+۴)=۰\xrightarrow{x_۱\neq x_۲}۲m+۴=۰\Rightarrow m=-۲$$

۳- گزینه‌ی ۳ برای آن‌که تابعی چندضابطه‌ای، وارون‌پذیر باشد، باید هر کدام از ضابطه‌ها یک‌به‌یک بوده و ضابطه‌ها برد مشترک نداشته باشند.

در تابع $f(x)$ دو ضابطه خطی و طبیعتاً یک‌به‌یک هستند. برد هر ضابطه را در محدوده‌ی آن ضابطه محاسبه می‌کنیم.

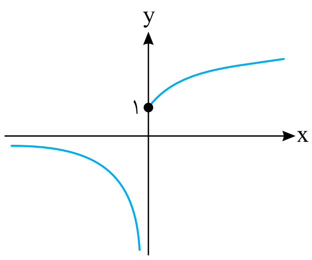
$$\begin{cases}x\geq ۲\Rightarrow ۲x\geq ۴\Rightarrow ۲x-۱\geq ۳\Rightarrow R_۱=[۳,+\infty)\\ x<۲\Rightarrow x+k<k+۲\Rightarrow R_۲=(-\infty,k+۲)\end{cases}\xrightarrow{R_۱\cap R_۲=\varnothing}k+۲\leq ۳\Rightarrow k\leq ۱$$



۴- گزینه‌ی ۲ برای آن‌که تابعی با دامنه‌ی $\{۱,۲,۳\}$ نزولی باشد، باید داشته باشیم:

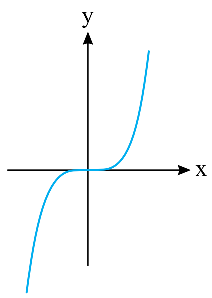
$f(۱)\geq f(۲)\geq f(۳)\Rightarrow m-۱\geq ۲m\geq m-۳\Rightarrow -۱\geq m\geq -۳$

۵- گزینه‌ی ۳ بـا توجه به نمــودار تابع f هر خط افقی نمودار این تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، پس تابع یک‌به‌یک است. ضمناً تابع در $\mathbb{R}^-$ نزولی و در $\mathbb{R}^+$ صعودی است، پس تابع غیریکنوا می‌باشد.



۶- گزینه‌ی ۱ نمودار گزینه‌ی (۱) به‌صورت روبه‌رو می‌باشد:

$$y=\begin{cases}x^{۴} & x\geq ۰\\ -x^{۴} & x<۰\end{cases}$$



این تابع یک تابع صعودی اکید می‌باشد. برای سایر گزینه‌ها می‌توان مثال نقض ارائه کرد.

گزینه‌ی (۲): $y=x[x]\Rightarrow(۰,۰),(۰/۵,۰)$

گزینه‌ی (۳): $y=x^{۲}|x|\Rightarrow(۱,۱),(-۱,۱)$

گزینه‌ی (۴): $y=x^{۲}[x]\Rightarrow(۰,۰),(۰/۵,۰)$

بنابراین گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ غیر یک‌به‌یک، پس غیریکنوای اکید هستند.

۷- گزینه‌ی ۴ تابع f و g یک‌به‌یک و معکوس‌پذیر هستند، پس:

$g(f(a))=۵\Rightarrow f(a)=g^{-۱}(۵)=۶\Rightarrow a=f^{-۱}(۶)$

با استفاده از گزینه‌ها، تنها عددی که $f(x)=x+\sqrt{x}$ به ازای آن برابر ۶ می‌شود، عدد ۴ است.

۸- گزینه‌ی ۴ **راه‌حل اول**: با جابه‌جا کردن تمام مؤلفه‌های اول و دوم در توابع f و g توابع $f^{-۱}$ و $g^{-۱}$ را یافته و سپس آن‌ها را ترکیب می‌کنیم:

$$\begin{cases} f^{-۱}=\{(۲,۱),(۳,۲),(۵,۴),(۴,۳)\} \\ g^{-۱}=\{(۱,۲),(۲,۳),(۴,۵)\} \end{cases} \Rightarrow g^{-۱}of^{-۱}=\{(۲,۲),(۳,۳),(۵,۵)\}$$

راه‌حل دوم: برای هر دو تابع f و g داریم $(fog)^{-۱}=g^{-۱}of^{-۱}$، پس ابتدا fog را محاسبه، سپس آن را معکوس می‌کنیم:

$$fog=\{(۲,۲),(۳,۳),(۵,۵)\} \Rightarrow (fog)^{-۱}=\{(۲,۲),(۳,۳),(۵,۵)\}$$

راه‌حل سوم: با حذف زوج مرتب $(۳,۴)$ از تابع f، متوجه می‌شویم $f^{-۱}=g$ بنابراین $g^{-۱}of^{-۱}$، تابع همانی با دامنه‌ی $\{۲,۳,۵\}$ است.

۹- گزینه‌ی ۴ اگر نقطه‌ی (a,b) روی معکوس تابع f قرار داشته باشد، نقطه‌ی (b,a) باید روی تابع f باشد، پس $f(b)=a$. فقط گزینه‌ی (۴) این خصوصیت را داراست.

$$(۱,-۲)\Rightarrow -۲=۱^۳+۱-۴$$

۱۰- گزینه‌ی ۳ دامنه‌ی تابع $f^{-۱}$ برابر برد تابع f است.

$$۰\le x\le ۲\Rightarrow ۰\le x^۳\le ۸\Rightarrow ۱\le x^۳+۱\le ۹\Rightarrow \frac{۱}{۱}\ge \frac{۱}{x^۳+۱}\ge \frac{۱}{۹}\Rightarrow \frac{۱}{۹}\le f(x)\le ۱\Rightarrow R_f=[\frac{۱}{۹},۱]\Rightarrow D_{f^{-۱}}=[\frac{۱}{۹},۱]$$

۱۱- گزینه‌ی ۴ تابع $f(x)=۲x+\sqrt{x}$ به ازای $x=۱$ برابر ۳ است، پس $f(۱)=۳$ و درنتیجه $f^{-۱}(۳)=۱$ و داریم:

$$f(۳+f^{-۱}(۳))=f(۳+۱)=f(۴)=۸+\sqrt{۴}=۱۰$$

۱۲- گزینه‌ی ۲ اگر نمودار $y=f(x)$ خط $y=x$ را در نقطه‌ای قطع کند، حتماً $f^{-۱}$ نیز از آن نقطه می‌گذرد. بنابراین ریشـه‌ی معادله‌ی $f(x)=x$، طول یکی از نقاط تقاطع f و $f^{-۱}$ می‌باشد.

$$x^۳-۳x=x\Rightarrow x^۳-۴x=۰\Rightarrow x(x^۲-۴)=۰\Rightarrow x=۰,۲,-۲ \xrightarrow{x\ge ۱} x=۲$$

بنابراین f و $f^{-۱}$ در نقطه‌ای به طول ۲ متقاطع هستند.

۱۳- گزینه‌ی ۱ ابتدا تابع معکوس f را پیدا می‌کنیم:

$$y=-\log_{۱۶}x\Rightarrow \log_{۱۶}x=-y\Rightarrow x=۱۶^{-y}\Rightarrow f^{-۱}(x)=۱۶^{-x}$$

برای یافتن نقاط تقاطع f و $f^{-۱}$ باید جواب معادله‌ی $f=f^{-۱}$ را پیدا کنیم.

$$f(x)=f^{-۱}(x)\Rightarrow -\log_{۱۶}x=۱۶^{-x}$$

با امتحان کردن گزینه‌ها، فقط گزینه‌ی (۱) در معادله‌ی فوق صدق می‌کند.

$$x=\frac{۱}{۲}\Leftrightarrow -\log_{۱۶}\frac{۱}{۲}=۱۶^{\frac{-۱}{۲}}\Leftrightarrow -\log_{۲^۴}۲^{-۱}=\frac{۱}{\sqrt{۱۶}}\Leftrightarrow \frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

توجه کنید لزومی ندارد، توابع f و $f^{-۱}$ حتماً روی خط $y=x$ متقاطع باشند، در این سؤال دو تابع در نقطه‌ی $(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۴})$ متقاطع هستند.

۱۴- گزینه‌ی ۱ x را بر حسب y پیدا می‌کنیم:

$$y=۲-\sqrt{x-۱}\Rightarrow \sqrt{x-۱}=۲-y \xrightarrow{۲-y\ge ۰} (x-۱)=۴+y^۲-۴y\Rightarrow x=y^۲-۴y+۵$$

با توجه به این‌که $۲-y\ge ۰$، پس $y\le ۲$ و برای تابع معکوس داریم:

$$f^{-۱}(x)=x^۲-۴x+۵\ ,\ x\le ۲$$

سراسری - ۹۲

۱۵- گزینه‌ی ۲ با توجه به محدوده‌ی داده شده $(x\le ۲)$ x را بر حسب y پیدا می‌کنیم:

$$y=x^۲-۴x+۱\Rightarrow y=(x-۲)^۲-۳\Rightarrow y+۳=(x-۲)^۲\Rightarrow \sqrt{y+۳}=|x-۲| \xrightarrow{x\le ۲} \sqrt{y+۳}=-(x-۲)\Rightarrow x-۲=-\sqrt{y+۳}$$
$$\Rightarrow x=۲-\sqrt{y+۳}\Rightarrow f^{-۱}(x)=۲-\sqrt{x+۳}$$

۱۶- گزینه‌ی ۴ تابع f را به‌صورت دوضابطه‌ای بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} ۲x+۴-۲x & x>۲ \\ ۲x-(۴-۲x) & x\le ۲ \end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases} ۴ & x>۲ \\ ۴x-۴ & x\le ۲ \end{cases}$$

تابع در محدوده‌ی $x>۲$ مقدار ثابت ۴ است و وارون‌پذیر نیست. در محدوده‌ی $x\le ۲$ تابع، خطی و وارون‌پذیر است:

$$y=۴x-۴\Rightarrow ۴x=y+۴\Rightarrow x=\frac{۱}{۴}y+۱$$

ضمناً با توجه به محدوده‌ی $x\le ۲$ برای تابع f داریم:

$$x\le ۲\Rightarrow ۴x\le ۸\Rightarrow ۴x-۴\le ۴\Rightarrow y\le ۴$$

بنابراین ضابطه‌ی تابع معکوس برابر است با:

$$f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۴}x+۱\quad ,\quad x\le ۴$$

۱۷- گزینه‌ی ۳ برای معکوس کردن یک تابع چندضابطه‌ای می‌بایست هر ضابطه را در محدوده‌ی خود معکوس کنیم:

$$\begin{cases} x>۱ : y=۲x+۱ \Rightarrow ۲x=y-۱ \Rightarrow x=\frac{y-۱}{۲} \\ x>۱ \Rightarrow ۲x>۲ \Rightarrow ۲x+۱>۳ \Rightarrow y>۳ \end{cases} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x-۱}{۲}\ ,\ x>۳$$

$$\begin{cases} x\le ۱ : y=x-۲ \Rightarrow x=y+۲ \\ x\le ۱ \Rightarrow x-۲\le -۱ \Rightarrow y\le -۱ \end{cases} \Rightarrow f^{-۱}(x)=x+۲\ ,\ x\le -۱$$

بنابراین تابع معکوس عبارت است از:

$$f^{-۱}(x)=\begin{cases} \frac{x-۱}{۲} & x>۳ \\ x+۲ & x\le -۱ \end{cases}$$

۱۸- گزینه‌ی ۱ هر ضابطه را در محدوده‌ی خود، معکوس می‌کنیم:

$$\begin{cases} x\ge ۰ : y=\sqrt{x} \Rightarrow x=y^۲ \\ x\ge ۰ \Rightarrow \sqrt{x}\ge ۰ \Rightarrow y\ge ۰ \end{cases} \Rightarrow f^{-۱}(x)=x^۲\ ,\ x\ge ۰$$

$$\begin{cases} x<۰ : y=-\sqrt{-x} \Rightarrow y^۲=-x \Rightarrow x=-y^۲ \\ x<۰ \Rightarrow -x>۰ \Rightarrow \sqrt{-x}>۰ \Rightarrow -\sqrt{-x}<۰ \Rightarrow y<۰ \end{cases} \Rightarrow f^{-۱}(x)=-x^۲\ ,\ x<۰$$

بنابراین $f^{-۱}$ برابر است با:

$$f^{-۱}(x)=\begin{cases} x^۲ & x\ge ۰ \\ -x^۲ & x<۰ \end{cases} \Rightarrow f^{-۱}(x)=x|x|\quad ,\quad x\in\mathbb{R}$$

سراسری خارج از کشور - ۹۱

۱۹- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول:** دو خط نسبت به نیمساز ربع اول قرینه هستند، پس این دو تابع معکوس یک‌دیگر هستند و می‌دانیم $fof^{-۱}(x)=x$، پس:

$$\begin{cases} f(x):\quad ax+by=۸ \Rightarrow y=\frac{۸-ax}{b} \\ f^{-۱}(x):\ ۲x-۳y=b \Rightarrow y=\frac{۲x-b}{۳} \end{cases} \xrightarrow{fof^{-۱}(x)=x} \frac{۸-a(\frac{۲x-b}{۳})}{b}=x \Rightarrow ۸-a(\frac{۲x-b}{۳})=bx \Rightarrow ۲۴-۲ax+ab=۳bx$$

$$\Rightarrow (-۳b-۲a)x+(۲۴+ab)=۰$$

عبارت بالا به ازای همه‌ی مقادیر x می‌بایست برقرار باشد، پس یک اتحاد است و داریم:

$$\begin{cases} -۳b-۲a=۰ \Rightarrow a=\frac{-۳b}{۲} \\ ۲۴+ab=۰ \Rightarrow ab=-۲۴ \end{cases} \Rightarrow \frac{-۳}{۲}b^۲=-۲۴ \Rightarrow b^۲=۱۶ \Rightarrow b=\pm ۴ \Rightarrow a=\mp ۶$$

اعداد a و b ممکن است ۶- و ۴ یا ۶ و ۴- باشند که مجموع آن‌ها برابر ۲ یا ۲- است.

راه‌حل دوم: دو خط نسبت به $y=x$ قرینه و معکوس یک‌دیگر هستند، پس شیب خطوط معکوس هم و عرض از مبدأ یکی، برابر طول از مبدأ دیگری است.

$$\begin{cases} ax+by=۸ \Rightarrow y=\frac{-a}{b}x+\frac{۸}{b} \\ ۲x-۳y=b \Rightarrow y=\frac{۲}{۳}x-\frac{b}{۳} \end{cases} \Rightarrow \frac{۲}{۳}=\frac{-b}{a} \Rightarrow ۲a=-۳b$$

$$\begin{cases} ax+by=۸ \xrightarrow{x=۰} y=\frac{۸}{b} \\ ۲x-۳y=b \xrightarrow{y=۰} x=\frac{b}{۲} \end{cases} \Rightarrow \frac{۸}{b}=\frac{b}{۲} \Rightarrow b^۲=۱۶ \Rightarrow b=\pm ۴ \xrightarrow{۲a=-۳b} a=\mp ۶ \Rightarrow a+b=\pm ۲$$

۲۰- گزینه‌ی ۳ ضابطه‌ی تابع $y=fof^{-۱}(x)$ همواره برابر $y=x$ است. برای محاسبه‌ی دامنه‌ی $fof^{-۱}$ می‌دانیم x باید در دامنه‌ی $f^{-۱}$ یعنی برد f باشد، پس $۰\le x\le ۳$.

پاسخ تشریحی آزمون ۲۵

۱- گزینه‌ی ۱ تابع $y=۲x$ و $y=۳\sqrt{x}$ هر دو اکیداً صعودی هستند، پس مجموع آن‌ها نیز اکیداً صعودی است. پس:

$$x\ge ۱ \Rightarrow f(x)\ge f(۱) \Rightarrow ۲x+۳\sqrt{x}\ge ۵$$

تابع $y=۲x+۳a-۱$ به تنهایی یک‌به‌یک است و محدوده‌ی آن به‌صورت روبه‌رو است: $x<۰ \Rightarrow ۲x<۰ \Rightarrow ۲x+۳a-۱<۳a-۱$

برای آن‌که تابع در کل یک‌به‌یک باشد، باید ماکزیمم ضابطه‌ی پایین از مینیمم تابع بالا کم‌تر باشد. $۳a-۱<۵ \Rightarrow ۳a<۶ \Rightarrow a<۲$

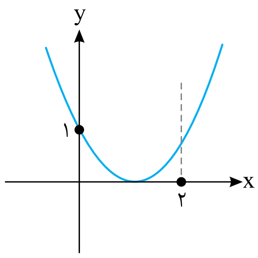
۲- گزینه‌ی ۲ تابع $y=x$ یک تابع اکیداً صعودی و تابع $y=[x]$ یک تابع صعودی است. پس $y=x+[x]$ یک تابع اکیداً صعودی و طبیعتاً یک‌به‌یک است. برای سایر گزینه‌ها می‌توان مثال نقض ارائه کرد.

(۱) گزینه‌ی: $y=x-[x]$ $\quad (۲,۰),(۱,۰)$

(۳) گزینه‌ی: $y=x-۲|x|$ $\quad (-۱,-۳),(۳,-۳)$

(۴) گزینه‌ی: $y=x+۲|x|$ $\quad (۱,۳),(-۳,۳)$

۳- گزینه‌ی ۳ برای آن‌که یک سهمی رو به بالا در بازه‌ی $[۲,+\infty)$ صعودی باشد (مانند شکل مقابل)، می‌بایست طول رأس آن کوچک‌تر یا مساوی ۲ باشد، پس:

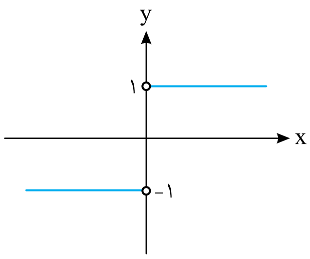


$$\frac{-k}{۲}\le ۲\Rightarrow -k\le ۴\Rightarrow k\ge -۴$$

۴- گزینه‌ی ۱ با توجه به تعریف قدرمطلق داریم:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x}=۱ & x>۰\\ a & x=۰\\ \frac{x}{-x}=-۱ & x<۰\end{cases}$$

یعنی نمودار تابع، به جز در $x=۰$ به شکل روبه‌رو می‌باشد:



برای آن‌که تابع f با تعریف $f(۰)$ صعودی باقی بماند، باید داشته باشیم: $-۱\le a\le ۱$.

۵- گزینه‌ی ۱ تابع gog صعودی اکید است زیرا:

$$x_۲>x_۱\xrightarrow{\text{نزولی } g} g(x_۲)<g(x_۱)\xrightarrow{\text{نزولی } g} g(g(x_۲))>g(g(x_۱))\Rightarrow gog(x_۲)>gog(x_۱)$$

تابع gof نزولی اکید است زیرا:

$$x_۲>x_۱\xrightarrow{\text{صعودی } f} f(x_۲)>f(x_۱)\xrightarrow{\text{نزولی } g} g(f(x_۲))<g(f(x_۱))\Rightarrow gof(x_۲)<gof(x_۱)$$

۶- گزینه‌ی ۴ گزینه‌ی (۴) صعودی اکید است، زیرا:

$$x_۲>x_۱\Rightarrow -x_۲<-x_۱\Rightarrow ۱-x_۲<۱-x_۱\xrightarrow{\text{نزولی } f} f(۱-x_۲)>f(۱-x_۱)$$

۷- گزینه‌ی ۱ تابع $y=f(x)$ صعودی اکید است، زیرا مجموع دو تابع اکیداً صعودی و یک تابع ثابت است:

$$f(x)=\underbrace{x^۳}_{\text{صعودی اکید}}+\underbrace{x^۴}_{\text{صعودی اکید}}-\underbrace{۸}_{\text{ثابت}}\Rightarrow \text{اکیداً صعودی}$$

پس می‌توان نوشت:

$$fof(x)\le f(۴x)\Rightarrow f(f(x))\le f(۴x)\xrightarrow{\text{صعودی } f} f(x)\le ۴x\Rightarrow x^۳+۴x-۸\le ۴x\Rightarrow x^۳-۸\le ۰\Rightarrow x^۳\le ۸\Rightarrow x\le ۲$$

توجه کنید در تابع اکیداً صعودی f داریم: $f(x_۲)\le f(x_۱)\Rightarrow x_۲\le x_۱$

۸- گزینه‌ی ۱ نمودار تابع درجه دوم در هر صورت یک سهمی است. هر سهمی با دامنه‌ی $\mathbb{R}$، یک‌به‌یک و معکوس‌پذیر نیست. پس تابع مورد نظر حتماً درجه دوم نیست و درجه یک است.

$$f(x)=(a-۱)x^۲+۲ax+۳\Rightarrow a-۱=۰\Rightarrow a=۱\Rightarrow f(x)=۲x+۳\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x-۳}{۲}$$

$$f^{-۱}(۳f(۲))=f^{-۱}(۳\times ۷)=f^{-۱}(۲۱)=\frac{۲۱-۳}{۲}=۹$$

۹- گزینه‌ی ۳ گزینه‌ها را به جای x قرار می‌دهیم و بررسی می‌کنیم که مقدار $f(x)$ به ازای کدام عدد برابر ۶/۵ می‌شود.

$f(۰/۵)=۰/۵+۴[-۰/۵]=۰/۵-۴=-۳/۵$ گزینه‌ی (۱)

$f(۱/۵)=۱/۵+۴[۰/۵]=۱/۵+۰=۱/۵$ گزینه‌ی (۲)

$f(۲/۵)=۲/۵+۴[۱/۵]=۲/۵+۴=۶/۵$ گزینه‌ی (۳)

$f(۳/۵)=۳/۵+۴[۲/۵]=۳/۵+۸=۱۱/۵$ گزینه‌ی (۴)

۱۰- گزینه‌ی ۱ با استفاده از خواص $f^{-۱}$ داریم:

$$f^{-۱}og(a)=-۱\Rightarrow g(a)=f(-۱)\Rightarrow g(a)=۱-۳(-۱)\Rightarrow g(a)=۴$$

با توجه به وجود زوج مرتب $(۱,۴)$ در تابع g، داریم: $g(۱)=۴$، پس $a=۱$.

۱۱- گزینه‌ی ۴ **راه‌حل اول:** ابتدا $g^{-۱}(۱)$ را پیدا می‌کنیم:

$$g^{-۱}(۱)=x\Rightarrow g(x)=۱\Rightarrow ۱-۲x=۱\Rightarrow x=۰$$

$$f^{-۱}og^{-۱}(۱)=۲\Rightarrow f^{-۱}(۰)=۲\Rightarrow f(۲)=۰\Rightarrow \frac{۲+m}{۴-۳}=۰\Rightarrow m=-۲$$

راه‌حل دوم: می‌دانیم $(gof)^{-۱}(x)=f^{-۱}og^{-۱}(x)$ پس:

$$f^{-۱}og^{-۱}(۱)=۲\Rightarrow (gof)^{-۱}(۱)=۲\Rightarrow (gof)(۲)=۱\Rightarrow g(f(۲))=۱\Rightarrow g(\frac{۲+m}{۴-۳})=۱\Rightarrow ۱-۲(\frac{۲+m}{۴-۳})=۱\Rightarrow m=-۲$$

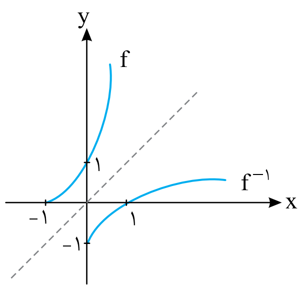
۱۲- گزینه‌ی ۲ وارون تابع مورد نظر را پیدا می‌کنیم:

$$y=a+bx^{۳}\Rightarrow \frac{y-a}{b}=x^{۳}\Rightarrow x=\sqrt[۳]{\frac{y-a}{b}}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{\frac{x-a}{b}}$$

نقطه‌ی $(۱,۰)$ در هر دو تابع f و $f^{-۱}$ صدق می‌کند، پس:

$$\begin{cases} f(۱)=۰\Rightarrow a+b=۰\Rightarrow a=-b \\ f^{-۱}(۱)=۰\Rightarrow \sqrt[۳]{\frac{۱-a}{b}}=۰\Rightarrow a=۱ \end{cases}\Rightarrow b=-۱, a=۱\Rightarrow a-b=۲$$

۱۳- گزینه‌ی ۴ **راه‌حل اول:** نمودار تابع f و معکوس آن در محدوده‌ی داده شده را رسم می‌کنیم.



با توجه به این که تمام تابع f بالای خط $y=x$ قرار دارد، پس $f^{-۱}$ با f تلاقی ندارد.

راه‌حل دوم: $f(x)$ در بازه‌ی $(-۱,+\infty)$ صعودی است، پس فقط در نقاطی که به خط $y=x$ برخورد می‌کند، با $f^{-۱}$ متقاطع است. پس معادله‌ی $f(x)=x$ را حل می‌کنیم:

$$f(x)=x\Rightarrow x^{۲}+۲x+۱=x\Rightarrow x^{۲}+x+۱=۰\xrightarrow{\Delta<۰}\text{جواب ندارد}$$

۱۴- گزینه‌ی ۲ اگر تابع خطی f نسبت به خط $y=x$ متقارن باشد، یا خود $y=x$ است، یا هر خطی با شیب منفی یک به صورت $y=-x+k$ است.

پس تابع $f(x)=(۲m+۱)x+۱$ خطی با شیب -۱ است، پس:

$$۲m+۱=-۱\Rightarrow ۲m=-۲\Rightarrow m=-۱\Rightarrow f(x)=-x+۱\xrightarrow{x=-۱} f(m)=f(-۱)=۱+۱=۲$$

۱۵- گزینه‌ی ۱ **راه‌حل اول:** اگر تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ بر نمودار وارون خود منطبق باشد، می‌بایست مرکز تقارن این شکل که محل تلاقی دو مجانب آن است (یعنی نقطه‌ی $(\frac{-d}{c},\frac{a}{c})$) روی خط $y=x$ قرار گیرد، پس:

$$\frac{-d}{c}=\frac{a}{c}\Rightarrow -d=a\Rightarrow -۲=k\Rightarrow f(x)=\frac{-۲x-۱}{x+۲}\xrightarrow{k=-۲} f(k+۱)=f(-۱)=\frac{۲-۱}{-۱+۲}=۱$$

راه‌حل دوم: تابع معکوس را پیدا می‌کنیم:

$$y=\frac{kx-۱}{x+۲}\Rightarrow xy+۲y=kx-۱\Rightarrow (y-k)x=-۲y-۱\Rightarrow x=\frac{-۲y-۱}{y-k}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{-۲x-۱}{x-k}$$

$$\begin{cases} f^{-۱}(x)=\frac{-۲x-۱}{x-k} \\ f(x)=\frac{kx-۱}{x-۲} \end{cases}\xrightarrow{f=f^{-۱}} k=-۲\Rightarrow f(k+۱)=۱$$

۱۶- گزینه‌ی ۴ برد تابع f^{-1}، برابر دامنه‌ی تابع f است، پس D_f را محاسبه می‌کنیم:

$$R_f=[1,2]\Rightarrow 1\le y\le 2\Rightarrow 1\le\frac{1-3x}{2}\le 2\Rightarrow 2\le 1-3x\le 4\Rightarrow 1\le -3x\le 3\Rightarrow\frac{-1}{3}\ge x\ge -1\Rightarrow D_f=[-1,\frac{-1}{3}]\Rightarrow R_{f^{-1}}=[-1,\frac{-1}{3}]$$

۱۷- گزینه‌ی ۴ ضابطه‌ی تابع $f(x)$ به‌صورت زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}2x-6-(x+4)+x & x\ge 3\\ -2x+6-(x+4)+x & -4\le x<3\\ -2x+6+(x+4)+x & x<-4\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}2x-10 & x\ge 3\\ -2x+2 & -4\le x<3\\ 10 & x<-4\end{cases}$$

ضابطه‌ی تابع در بازه‌ی $(-4,3)$ یک خط با شیب منفی است، پس اکیداً نزولی است. معکوس تابع در این بازه را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}y=-2x+2\Rightarrow 2x=-y+2\Rightarrow x=\dfrac{-y+2}{2}\\ -4<x<3\Rightarrow 8>-2x>-6\Rightarrow -4<-2x+2<10\end{cases}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-x+2}{2}\quad,\quad -4<x<10$$

۱۸- گزینه‌ی ۴ تابع f را به‌صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$y=\begin{cases}\sqrt{x} & x>0\\ 0 & x=0\\ -\sqrt{-x} & x<0\end{cases}$$

هر ضابطه را در محدوده‌ی خود معکوس می‌کنیم:

$$\begin{cases}x>0\ :\ y=\sqrt{x}\Rightarrow x=y^2\Rightarrow f^{-1}(x)=x^2\\ (0,0)\in f\Rightarrow(0,0)\in f^{-1}\\ x<0\ :\ y=-\sqrt{-x}\Rightarrow y^2=-x\Rightarrow x=-y^2\Rightarrow f^{-1}(x)=-x^2\end{cases}\Rightarrow f^{-1}(x)=\begin{cases}x^2 & x>0\\ 0 & x=0\\ -x^2 & x<0\end{cases}\Rightarrow f^{-1}(x)=x|x|\quad,\quad x\in\mathbb{R}$$

سراسری خارج از کشور - ۹۲

۱۹- گزینه‌ی ۳ وارون تابع f را محاسبه می‌کنیم:

$$y=\log_2(\frac{1+x}{1-x})\Rightarrow\frac{1+x}{1-x}=2^y\Rightarrow 1+x=2^y-2^y x\Rightarrow x(1+2^y)=2^y-1\Rightarrow x=\frac{2^y-1}{2^y+1}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$$

۲۰- گزینه‌ی ۱ تابع f را به‌صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & 0<x<1\\ 0 & x=0\\ -\sqrt{1-x^2} & -1<x<0\end{cases}$$

معکوس هر ضابطه را در محدوده‌ی خودش به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}0<x<1\ :\ y=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow y^2=1-x^2\Rightarrow x^2=1-y^2\xrightarrow{x>0}x=\sqrt{1-y^2}\\ 0<x<1\Rightarrow 0<1-x^2<1\Rightarrow 0<\sqrt{1-x^2}<1\Rightarrow 0<y<1\end{cases}\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{1-x^2}\quad,\quad 0<x<1$$

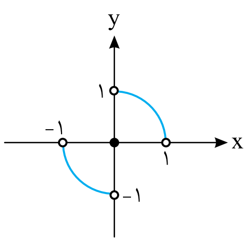
$$(0,0)\in f\Rightarrow(0,0)\in f^{-1}$$

$$\begin{cases}-1<x<0\ :\ y=-\sqrt{1-x^2}\Rightarrow y^2=1-x^2\Rightarrow x^2=1-y^2\xrightarrow{x<0}x=-\sqrt{1-y^2}\\ -1<x<0\Rightarrow 0<1-x^2<1\Rightarrow -1<-\sqrt{1-x^2}<0\Rightarrow -1<y<0\end{cases}\Rightarrow\ f^{-1}(x)=-\sqrt{1-x^2}\quad,\quad -1<x<0$$

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & 0<x<1\\ 0 & x=0\\ -\sqrt{1-x^2} & -1<x<0\end{cases}$$

ضابطه‌ی به‌دست آمده برای f^{-1} همان ضابطه‌ی f است، پس $f^{-1}=f$.

توجّه: نمودار تابع $f(x)$ از دو ربع دایره تشکیل شده است:



پاسخ تشریحی آزمون ۲۶

۱- گزینه‌ی ۴ زوج مرتب‌های با مؤلفه‌ی اول یکسان باید برابر باشند، پس داریم: $(-۱,۳k)\in f\ ,(-۱,-۹)\in f\Rightarrow ۳k=-۹\Rightarrow k=-۳$

بنابراین رابطه به صورت $f=\{(-۱,-۹),(-۱,۵),(۶,-۳)\}$ درمی‌آید که دو زوج مرتب متمایز با مؤلفه‌ی اول یکسان دارد، پس تابع نیست.

۲- گزینه‌ی ۱ با توجه به این‌که $f(x)=x^۲+\frac{۱}{x^۲}$ داریم:

$$(f(\sqrt{x}))^۲-f(x)=((\sqrt{x})^۲+\frac{۱}{(\sqrt{x})^۲})^۲-(x^۲+\frac{۱}{x^۲})=(x+\frac{۱}{x})^۲-(x^۲+\frac{۱}{x^۲})=x^۲+\frac{۱}{x^۲}+۲-x^۲-\frac{۱}{x^۲}=۲$$

بنابراین تابع در تمام نقاط دامنه‌اش $(\mathbb{R}^+)$ برابر ۲ است، پس تابعی ثابت است.

۳- گزینه‌ی ۱ عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد، پس:

$$x^۲-|x|-۲\geq ۰\Rightarrow |x|^۲-|x|-۲\geq ۰\Rightarrow (|x|-۲)(|x|+۱)\geq ۰$$

با توجه به این‌که عبارت $|x|+۱$ همواره مثبت است، پس:

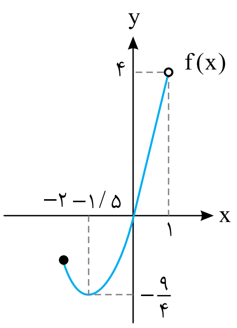
$$|x|-۲\geq ۰\Rightarrow |x|\geq ۲\Rightarrow x\geq ۲\ \text{یا}\ x\leq -۲\Rightarrow D=(-\infty,-۲]\cup[۲,+\infty)=\mathbb{R}-(-۲,۲)$$

۴- گزینه‌ی ۱ با کمک گرفتن از جدول تعیین علامت تابع $f(-x)$ ، عبارت زیر رادیکال را تعیین علامت می‌کنیم:

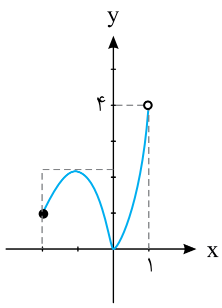
		-۳		-۲		۰		۲		۳	
$f(-x)$	−		−	۰	+	۰	−	۰			
$۹-x^۲$	−	۰	+		+		+		+	۰	−
$\frac{f(-x)}{۹-x^۲}$	+	||	−	۰	+	۰	−	۰			

محدوده‌ی مطلوب برای آن‌که داشته باشیم $\frac{f(-x)}{۹-x^۲}\geq ۰$، برابر است با: $D=(-\infty,-۳)\cup[-۲,۰]$

۵- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول:** رأس سهمی نقطه‌ی $(-\frac{۳}{۲},\frac{-۹}{۴})$ است، پس نمودار f در بازه‌ی $[-۲,۱)$ به‌صورت روبه‌رو است. نمودار $y=|f(x)|$ نیز در زیر آن رسم شده است. پس برد این تابع برابر است با $[۰,۴)$.



راه‌حل دوم: تابع $y=|f(x)|$ را به صورت $y=|(x+\frac{۳}{۲})^۲-\frac{۹}{۴}|$ می‌نویسیم، سپس با استفاده از نامساوی‌ها، برد تابع را پیدا می‌کنیم.



$$-۲\leq x<۱\Rightarrow -\frac{۱}{۲}\leq x+\frac{۳}{۲}<\frac{۵}{۲}\Rightarrow ۰\leq (x+\frac{۳}{۲})^۲<\frac{۲۵}{۴}\Rightarrow -\frac{۹}{۴}\leq (x+\frac{۳}{۲})^۲-\frac{۹}{۴}<\frac{۱۶}{۴}$$
$$\Rightarrow ۰\leq |(x+\frac{۳}{۲})-\frac{۹}{۴}|<۴\Rightarrow R=[۰,۴)$$

۶- گزینه‌ی ۳ تابع را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{۲x^۲+۳}{x^۲+۴}=\frac{۲x^۲+۸-۵}{x^۲+۴}=۲-\frac{۵}{x^۲+۴}$$

حال با استفاده از نامساوی‌ها، برد تابع را معین می‌کنیم:

$$x^۲+۴\geq ۴\Rightarrow ۰<\frac{۱}{x^۲+۴}\leq \frac{۱}{۴}\Rightarrow ۰<\frac{۵}{x^۲+۴}\leq \frac{۵}{۴}\Rightarrow ۰>\frac{-۵}{x^۲+۴}\geq -\frac{۵}{۴}\Rightarrow ۲-\frac{۵}{۴}\leq ۲-\frac{۵}{x^۲+۴}<۲\Rightarrow \frac{۳}{۴}\leq f(x)<۲\Rightarrow R=[\frac{۳}{۴},۲)$$

۷- گزینه‌ی ۴ با توجه به این‌که دامنه‌ی تابع g فقط شامل اعداد ۲، ۱− و ۱ است، تابع $(f-g)\times f$ نیز فقط همین اعداد را می‌تواند به عنوان ورودی بپذیرد:

$$((f-g)\times f)(1)=(f(1)-g(1))\times f(1)=(\sqrt{3}-2)\times\sqrt{3}=3-2\sqrt{3}$$

$$((f-g)\times f)(-1)=(f(-1)-g(-1))\times f(-1)=(\sqrt{3}-3)\times\sqrt{3}=3-3\sqrt{3}$$

$$((f-g)\times f)(2)=(f(2)-g(2))\times f(2)=(0-1)\times 0=0$$

با توجه به مقدار تقریبی $\sqrt{3}\simeq 1/7$، اعداد $3-2\sqrt{3}$ و $3-3\sqrt{3}$ منفی هستند و بیش‌ترین مقدار تابع برابر صفر است.

۸- گزینه‌ی ۳ شیب تابع خطی f که از نقاط مورد نظر می‌گذرد برابر $\frac{1-(-1)}{2-1}=2$ است.

پس معادله‌ی خط با کمک نقطه‌ی $(1,-1)$ برابر است با: $y+1=2(x-1)\Rightarrow y=2x-3$

بنابراین مقدار $(fof)(0)$ برابر است با: $f(f(0))=f(-3)=2(-3)-3=-9$

۹- گزینه‌ی ۱ دو تابع fog و gof را با اعضایشان می‌نویسیم:

$$fog=\{(1,2),(2,2),(3,1)\}$$

$$gof=\{(1,0),(-1,1),(0,0)\}$$

این دو تابع هیچ عضو مشابهی ندارند.

۱۰- گزینه‌ی ۲ با توجه به ضابطه‌ی f و g، ضابطه‌ی fog برابر است با:

$$(fog)(x)=f(g(x))=a(x+a)^2+b(x+a)+c=a(x^2+2ax+a^2)+bx+ba+c=ax^2+(2a^2+b)x+(a^3+ba+c)$$

برای آن‌که $(fog)(x)=x^2+4x+5$، داریم:

$$\begin{cases}a=1\\2a^2+b=4\\a^3+ba+c=5\end{cases}\Rightarrow b=2\qquad\Rightarrow 1+2+c=5\Rightarrow c=2$$

۱۱- گزینه‌ی ۱ با حل معادله‌ی $f(g(x))=(fog)(x)$، $g(x)$ را برحسب x پیدا می‌کنیم:

$$\frac{2g(x)-1}{g(x)-3}=2x\Rightarrow 2g(x)-1=2xg(x)-6x\Rightarrow(2x-2)g(x)=6x-1\Rightarrow g(x)=\frac{6x-1}{2x-2}$$

۱۲- گزینه‌ی ۴ داریم $g(\frac{x-3}{2x+1})=\frac{x}{2}$، با قرار دادن $\frac{x-3}{2x+1}$ برابر متغیر کمکی t، g را پیدا می‌کنیم.

$$\frac{x-3}{2x+1}=t\Rightarrow x-3=2tx+t\Rightarrow(1-2t)x=t+3\Rightarrow x=\frac{t+3}{1-2t}$$

$$(gof)(x)=\frac{x}{2}\Rightarrow g(t)=\frac{\frac{t+3}{1-2t}}{2}\Rightarrow g(t)=\frac{t+3}{2-4t}\Rightarrow g(x)=\frac{x+3}{2-4x}$$

۱۳- گزینه‌ی ۳ دامنه‌ی تعریف تابع f برابر $[1,+\infty)$ است و داریم:

$$D_{fof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_f\}=\{x\geq 1 \mid 1-\sqrt{x-1}\geq 1\}$$

$$1-\sqrt{x-1}\geq 1\Rightarrow-\sqrt{x-1}\geq 0\Rightarrow\sqrt{x-1}\leq 0\xrightarrow{\sqrt{x-1}\geq 0}\sqrt{x-1}=0\Rightarrow x=1\Rightarrow D=\{1\}$$

بنابراین دامنه‌ی تابع، تنها عدد ۱ را شامل می‌شود.

۱۴- گزینه‌ی ۱ باید تابع $y=f(x-3)-1$ را تشکیل دهیم و نقاط تلاقی آن را با $y=f(x)$ بیابیم:

$$\begin{cases}y=f(x-3)-1=|\frac{x-3}{2}|-3\\y=f(x)=|\frac{x}{2}|-2\end{cases}\Rightarrow|\frac{x-3}{2}|-3=|\frac{x}{2}|-2\Rightarrow|x-3|-|x|=2$$

معادله‌ی به‌دست آمده را در ۳ حالت حل می‌کنیم:

$x\geq 3: x-3-x=2\Rightarrow -3=2$ غ ق ق

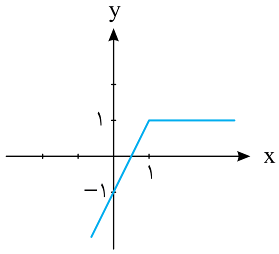
$0\leq x<3: -x+3-x=2\Rightarrow -2x=-1\Rightarrow x=\frac{1}{2}$

$x<0: -x+3+x=2\Rightarrow 3=2$ غ ق ق

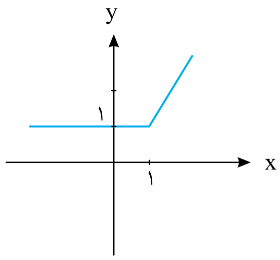
۱۵- گزینه‌ی ۱ شکل جدید تابع نسبت به شکل تابع f یک واحد به سمت راست رفته و نسبت به محور yها قرینه شده است، پس نمودار $y=f(-x-1)$ رسم شده است، یعنی $ab=1$.

۱۶- گزینه‌ی ۴ توابع داده شده را رسم کرده و یکنوایی آن‌ها را تعیین می‌کنیم.

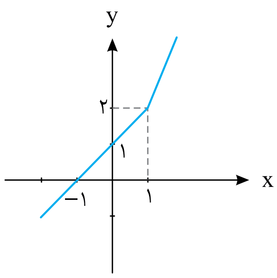
(گزینه‌ی ۱) $y=x-|x-۱|=\begin{cases}۱ & x\ge ۱\\ ۲x-۱ & x<۱\end{cases}$



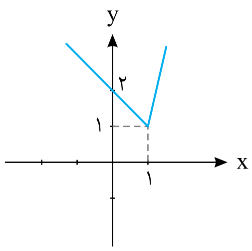
(گزینه‌ی ۲) $y=x+|x-۱|=\begin{cases}۲x-۱ & x\ge ۱\\ ۱ & x<۱\end{cases}$



(گزینه‌ی ۳) $y=۲x+|x-۱|=\begin{cases}۳x-۱ & x\ge ۱\\ x+۱ & x<۱\end{cases}$



(گزینه‌ی ۴) $y=x+۲|x-۱|=\begin{cases}۳x-۲ & x\ge ۱\\ -x+۲ & x<۱\end{cases}$



۱۷- گزینه‌ی ۳ تابع وارون از نقطه‌ی $(-۱,۰)$ می‌گذرد، پس تابع f از $(۰,-۱)$ می‌گذرد، یعنی:

$$f(۰)=-۱\Rightarrow ۲a=-۱\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

۱۸- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول:** اگر $f^{-۱}(۴)=x$، داریم:

$$f(x)=۴\Rightarrow -x+\sqrt{-۲x}=۴\Rightarrow \sqrt{-۲x}=۴+x \xrightarrow{-۴<x\le ۰} -۲x=x^۲+۱۶+۸x\Rightarrow x^۲+۱۰x+۱۶=۰\Rightarrow (x+۲)(x+۸)=۰$$

$\Rightarrow x=-۲$ یا $x=-۸$ غ ق ق $\Rightarrow x=-۲$

راه‌حل دوم: با امتحان کردن گزینه‌ها، تنها در مورد گزینه‌ی (۳)، عبارت $f(-۲)=۴$ برقرار است.

۱۹- گزینه‌ی ۲ دامنه و برد تابع f به ترتیب برابر $D_f=(-\infty,۲]$ و $R_f=(-\infty,۳]$ است. برای یافتن تابع وارون داریم:

$$y=۳-\sqrt{۲-x}\Rightarrow \sqrt{۲-x}=۳-y\Rightarrow ۲-x=(۳-y)^۲\Rightarrow -x=۹+y^۲-۶y-۲\Rightarrow x=-y^۲+۶y-۷$$

بنابراین ضابطه‌ی تابع معکوس به صورت $f^{-۱}(x)=-x^۲+۶x-۷$ است و دامنه‌ی آن برابر برد f است.

$$D_{f^{-۱}}=R_f=(-\infty,۳]$$

۲۰- گزینه‌ی ۲ اگر $g^{-۱}(۶)$ را برابر a بنامیم، داریم:

$\begin{cases}g^{-۱}(۶)=a\Rightarrow g(a)=۶\\ g(x)=f(x)+\sqrt{f(x)}\end{cases}\Rightarrow f(a)+\sqrt{f(a)}=۶\Rightarrow (\sqrt{f(a)}+\frac{۱}{۲})^۲=۶+\frac{۱}{۴}\Rightarrow \sqrt{f(a)}+\frac{۱}{۲}=\pm\frac{۵}{۲}\Rightarrow \sqrt{f(a)}=۲$ یا $\sqrt{f(a)}=-۳$ غ ق ق

$$\Rightarrow \sqrt{f(a)}=۲\Rightarrow f(a)=۴\Rightarrow a=f^{-۱}(۴)\xrightarrow{f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{۲x}} a=\sqrt[۳]{۸}=۲$$

۶ دنباله

پاسخ تشریحی آزمون ۲۷

۱- گزینه‌ی ۲ هر مرحله تعدادی زوج چوب‌کبریت به چوب‌های قبلی اضافه می‌شود:

مرحله‌ی (۱): ۴

مرحله‌ی (۲): $۴+۶$

مرحله‌ی (۳): $۴+۶+۸$

$\vdots$

مرحله‌ی (۱۰): $۴+۶+۸+\cdots+۲۲=۲+۴+۶+۸+\cdots+۲۲-۲=۲(۱+۲+۳+۴+\cdots+۱۱)-۲=۲\times\frac{۱۱\times۱۲}{۲}-۲=۱۳۲-۲=۱۳۰$

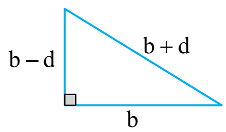
۲- گزینه‌ی ۲

$$\begin{cases}۵-(x+۱)=۶x-y-۵\\ ۶x-y-۵=۱-۵y-(۶x-y)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۴-x=۶x-y-۵\\ ۶x-y-۵=۱-۴y-۶x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۷x-y=۹\\ ۱۲x+۳y=۶\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۷x-y=۹\\ ۴x+y=۲\end{cases}\Rightarrow ۱۱x=۱۱\Rightarrow x=۱\,,\,y=-۲$$

بنابراین دنباله به صورت $۲,۵,۸,۱۱,\ldots$ می‌باشد، یعنی قدر نسبت دنباله برابر ۳ و جمله‌ی اول آن ۲ است، پس داریم:

$$a_{۲۰}=a_۱+۱۹d=۲+۱۹\times۳=۵۹$$

۳- گزینه‌ی ۲ ضلع متوسط را b نام‌گذاری می‌کنیم ضلع کوچک‌تر $b-d$ و وتر $b+d$ است،با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس داریم:



$$(b+d)^۲=(b-d)^۲+b^۲\Rightarrow b^۲+d^۲+۲bd=b^۲+d^۲-۲bd+b^۲\Rightarrow b^۲=۴bd\xrightarrow{b\neq۰}b=۴d\Rightarrow d=\frac{b}{۴}$$

محیط این مثلث برابر است با:

$$p=(b+d)+b+(b-d)=۳b$$

$$\frac{\text{محیط}}{\text{وتر}}=\frac{۳b}{b+d}=\frac{۳b}{b+\frac{b}{۴}}=\frac{۳b}{\frac{۵b}{۴}}=\frac{۱۲}{۵}$$

۴- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول**: از روی جمله‌ی عمومی این دنباله $a_۱=\frac{۳}{۲}-۵=\frac{-۷}{۲}$ و $d=\frac{۳}{۲}$ است، پس داریم:

$$S_{۱۵}=\frac{۱۵}{۲}(۲a_۱+۱۴d)=\frac{۱۵}{۲}(-۷+۲۱)=۱۵\times۷=۱۰۵$$

راه‌حل دوم: با توجه به این‌که مجموع جملات دنباله‌ی حسابی برابر میانگین جملات اول و آخر ضرب در تعداد جملات است، داریم:

$$S_{۱۵}=۱۵\left(\frac{a_۱+a_{۱۵}}{۲}\right)=۱۵\left(\frac{\frac{۳}{۲}-۵+\frac{۳}{۲}\times۱۵-۵}{۲}\right)=۱۵\left(\frac{۲۴-۱۰}{۲}\right)=۱۵\times۷=۱۰۵$$

سراسری - ۸۹

۵- گزینه‌ی ۴ **راه‌حل اول**: مجموع جملات خواسته شده برابر است با:

$$a_{۲۵}+a_{۲۶}+\cdots+a_{۳۵}=(a_۱+a_۲+\cdots+a_{۳۵})-(a_۱+a_۲+\cdots+a_{۲۴})\Rightarrow S_{۳۵}-S_{۲۴}=\frac{۳۵(۳۲)}{۴}-\frac{۲۴\times۲۱}{۴}=۲۸۰-۱۲۶=۱۵۴$$

راه‌حل دوم: با پیدا کردن قدر نسبت و جمله‌ی اول، مجموع خواسته شده را محاسبه می‌کنیم:

$$a_۱=S_۱=\frac{۱(۱-۳)}{۴}=\frac{-۱}{۲}$$

$$d=a_۲-a_۱=S_۲-۲S_۱=\frac{۲\times(-۱)}{۴}-۲\times\left(-\frac{۱}{۲}\right)=\frac{-۱}{۲}+۱=\frac{۱}{۲}$$

$$a_{۲۵}+a_{۲۶}+\cdots+a_{۳۵}=۱۱\left(\frac{-\frac{۱}{۲}+۲۴\times\frac{۱}{۲}+\left(-\frac{۱}{۲}\right)+۳۴\times\frac{۱}{۲}}{۲}\right)=۱۱\times۱۴=۱۵۴$$

سراسری خارج از کشور - ۸۹

۶- گزینه‌ی ۳ عبارت سمت چپ معادله مجموع جملات یک دنباله‌ی حسابی است. جمله‌ی آخر این دنباله برابر x است:

$$a_n=a_1+(n-1)d \Rightarrow x=2+(n-1)\times 3 \Rightarrow x=3n-1$$

بنابراین حاصل جمع سمت چپ برابر است با:

$$2+5+8+\cdots+x=n(\frac{2+x}{2})=n(\frac{2+3n-1}{2})=\frac{n(3n+1)}{2}=\frac{3n^2+n}{2}$$

حال با توجه به معادله‌ی داده شده داریم:

$$\frac{3n^2+n}{2}=155 \Rightarrow 3n^2+n=310$$

با توجه به گزینه‌ها $n=10$ جواب این معادله است.

۷- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول**: مجموع ۵ جمله‌ی دوم برابر تفاضل مجموع ۱۰ جمله‌ی اول و ۵ جمله‌ی اول است. پس:

$$S_5=\frac{1}{3}(S_{10}-S_5) \Rightarrow \frac{4}{3}S_5=\frac{1}{3}S_{10} \Rightarrow S_{10}=4S_5 \Rightarrow \frac{10}{2}(2a_1+9d)=4\times\frac{5}{2}(2a_1+4d) \Rightarrow 2a_1+9d=4a_1+8d \Rightarrow d=2a_1$$

بنابراین داریم:

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_1+d}{a_1}=\frac{3a_1}{a_1}=3$$

راه‌حل دوم: با توجه به معادله‌ی داده شده داریم:

$$3(a_1+a_2+\cdots+a_5)=a_6+a_7+\cdots+a_{10} \Rightarrow 2(a_1+a_2+\cdots+a_5)=(a_6-a_1)+(a_7-a_2)+\cdots+(a_{10}-a_5) \Rightarrow$$

$$2(\frac{5}{2}(2a_1+4d))=5d+5d+5d+5d+5d \Rightarrow 10a_1+20d=25d \Rightarrow 5d=10a_1 \Rightarrow d=2a_1$$

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{3a_1}{a_1}=3$$

سراسری خارج از کشور - ۹۱

۸- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول**: اختلاف در مجموع داده شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} a_1+a_2+\cdots+a_7=\frac{53}{11} \\ a_8+a_9+\cdots+a_{14}=\frac{4}{11}\end{cases} \Rightarrow (a_8-a_1)+(a_9-a_2)+\cdots+(a_{14}-a_7)=\frac{-49}{11} \Rightarrow 7d+7d+7d+7d+7d+7d+7d=\frac{-49}{11} \Rightarrow 49d=\frac{-49}{11} \Rightarrow d=\frac{-1}{11}$$

راه‌حل دوم: با استفاده از فرمول مجموع جملات دنباله‌ی حسابی، برای S_7 و S_{14} داریم:

$$\begin{aligned} S_7&=\frac{7}{2}(2a_1+6d) \Rightarrow \frac{53}{11}=7(a_1+3d) \\ S_{14}&=\frac{14}{2}(2a_1+13d) \Rightarrow \frac{53}{11}+\frac{4}{11}=7(2a_1+13d)\end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1+6d=\frac{106}{77} \\ 2a_1+13d=\frac{57}{77}\end{cases} \Rightarrow 7d=\frac{-49}{77} \Rightarrow d=\frac{-1}{11}$$

۹- گزینه‌ی ۳ اگر شماره‌ی جمله‌ی آخر دسته‌ها را بنویسیم، داریم:

$$1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4, \ldots$$

بنابراین شماره‌ی جمله‌ی آخر دسته‌ی دهم برابر $1+2+3+\cdots+10$ است که برابر است با $\frac{10\times 11}{2}=55$، به علاوه شماره‌ی جمله‌ی اول دسته‌ی دهم را می‌توان با اضافه کردن یک شماره به جمله‌ی آخر دسته‌ی نهم پیدا کرد.

$$1+2+\cdots+9+1=\frac{9\times 10}{2}+1=46$$

بنابراین مجموع خواسته شده برابر مجموع اعداد زوج $(a_n=2n)$ از جمله‌ی شماره‌ی ۴۶ تا ۵۵ است:

$$2\times 46+2\times 47+2\times 55=10\frac{(92+110)}{2}=10\times 101=1010$$

۱۰- گزینه‌ی ۱ عدد مورد نظر را x در نظر می‌گیریم، با توجه به این‌که $x-2$، $x+4$ و $x+22$ تشکیل یک دنباله‌ی هندسی می‌دهند، داریم:

$$(x+22)(x-2)=(x+4)^2 \Rightarrow x^2+20x-44=x^2+8x+16 \Rightarrow 12x=60 \Rightarrow x=5$$

۱۱- گزینه‌ی ۴ جمله‌ی عمومی دنباله‌ی هندسی $a_n=a_1q^{n-1}$ است. داریم:

$$a_3=3a_1\Rightarrow a_1q^2=3a_1\Rightarrow q^2=3$$

$$\frac{a_9}{a_1}=\frac{a_1q^8}{a_1}=q^8=(q^2)^4=3^4=81$$

۱۲- گزینه‌ی ۲ جمله‌ی وسط این ۳ جمله را b نام‌گذاری می‌کنیم. اگر قدر نسبت q باشد جمله‌ی اول $a=\frac{b}{q}$ و جمله‌ی سوم $c=bq$ باشد داریم:

$$abc=216\Rightarrow\frac{b}{q}\times b\times bq=216\Rightarrow b^3=216\Rightarrow b=6$$

$$a+b+c=19\Rightarrow\frac{b}{q}+b+bq=19\xrightarrow{b=6}\frac{6}{q}+6q=13\Rightarrow 6q^2-13q+6=0\Rightarrow q=\frac{13\pm\sqrt{169-144}}{12}\Rightarrow q=\frac{3}{2}\ \text{یا}\ \frac{2}{3}$$

با توجه به قدر نسبت‌های به دست آمده و این‌که جمله‌ی دوم برابر ۶ است، جملات دنباله یا به صورت ۹ و ۶ و ۴ هستند یا به صورت ۴ و ۶ و ۹ که در هر دو صورت تفاضل بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین آن‌ها برابر ۵=۴−۹ است.

سراسری - ۹۰

۱۳- گزینه‌ی ۴ با توجه به فرمول مجموع جملات دنباله‌ی حسابی، داریم:

$$\frac{S_{14}}{S_7}=\frac{a_1(\frac{q^{14}-1}{q-1})}{a_1(\frac{q^7-1}{q-1})}=\frac{q^{14}-1}{q^7-1}=\frac{(q^7+1)(q^7-1)}{q^7-1}=q^7+1\xrightarrow{q=2}\frac{S_{14}}{S_7}=2^7+1=129$$

سراسری خارج از کشور - ۹۰

۱۴- گزینه‌ی ۴ حافظه‌های همراه حامد تشکیل یک دنباله‌ی هندسی، با جمله‌ی اول ۳۲ و قدر نسبت دو می‌دهند، مجموع شش جمله از این دنباله برابر است با:

$$s_6=\frac{32(2^6-1)}{2-1}=32\times 63=2016$$

۱۵- گزینه‌ی ۳ با توجه به این‌که صورت کسر، دنباله‌ای هندسی با جمله‌ی اول یک و قدر نسبت $(-t)$ و مخرج کسر، دنباله‌ای هندسی با جمله‌ی اول یک و قدر نسبت $(-t^3)$ است. ابتدا کسر را ساده می‌کنیم، سپس t را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{t^8-t^7+t^6-\cdots-t+1}{t^6-t^3+1}=\frac{1(\frac{(-t)^9-1}{-t-1})}{1(\frac{(-t^3)^3-1}{-t^3-1})}=\frac{\frac{t^9+1}{t+1}}{\frac{t^9+1}{t^3+1}}=\frac{t^3+1}{t+1}=\frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t+1}=t^2-t+1$$

$$\xrightarrow{t=\frac{1+\sqrt{17}}{2}}t^2-t+1=(\frac{1+\sqrt{17}}{2})^2-(\frac{1+\sqrt{17}}{2})+1=\frac{18+2\sqrt{17}}{4}-(\frac{1+\sqrt{17}}{2})+1=\frac{9+\sqrt{17}-1-\sqrt{17}+2}{2}=\frac{10}{2}=5$$

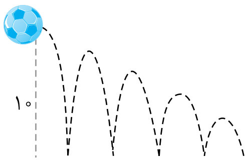
۱۶- گزینه‌ی ۳ دنباله‌ی داده شده $a_n=6\times(\frac{1}{3})^n$ است که یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول برابر $a_1=6\times\frac{1}{3}=2$ و قدر نسبت $\frac{1}{3}$ است:

$$2,\frac{2}{3},\frac{2}{9},\frac{2}{27},\frac{2}{81},\ldots$$

جملات ردیف فرد، دنباله‌ای هندسی با جمله‌ی اول ۲ و قدر نسبت $\frac{1}{9}$ و جملات ردیف زوج، دنباله‌ای هندسی با جمله‌ی اول $\frac{2}{3}$ و قدر نسبت $\frac{1}{9}$ هستند، پس حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{\frac{2}{1-\frac{1}{9}}}{\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}}}=\frac{2}{\frac{2}{3}}=3$$

۱۷- گزینه‌ی ۳ حداکثر ارتفاع توپ، پس از هر برخورد با زمین یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت $\frac{۳}{۴}$ است:



$$۲\times\frac{۳۰}{۴},\frac{۲\times۹۰}{۱۶},\frac{۲\times۲۷۰}{۶۴},\ldots$$

توجه کنید ارتفاع ۱۰ متر ابتدایی را باید جداگانه حساب کرد، مقدار جابه‌جایی نهایی توپ برابر حد مجموع دنباله‌ی هندسی بالا به‌علاوه‌ی ۱۰ است.

$$۱۰+\frac{\overbrace{\frac{۶۰}{۴}}^{\text{مجموع مساحت‌ها پس از اولین برخورد}}}{۱-\frac{۳}{۴}}=۱۰+\frac{۱۵}{\frac{۱}{۴}}=۱۰+۶۰=۷۰$$

۱۸- گزینه‌ی ۳ اگر $a_۲,a_۵,a_{۱۲}$ تشکیل دنباله‌ی هندسی بدهند، داریم:

$$a_۲\times a_{۱۲}=a_۵^۲\Rightarrow(a_۱+d)(a_۱+۱۱d)=(a_۱+۴d)^۲\Rightarrow a_۱^۲+۱۲da_۱+۱۱d^۲=a_۱^۲+۸a_۱d+۱۶d^۲\Rightarrow۴a_۱d=۵d^۲\Rightarrow a_۱=\frac{۵}{۴}d$$

قدر نسبت دنباله‌ی هندسی برابر تقسیم دو جمله‌ی متوالی آن است:

$$q=\frac{a_۵}{a_۲}=\frac{a_۱+۴d}{a_۱+d}=\frac{\frac{۵}{۴}d+۴d}{\frac{۵}{۴}d+d}=\frac{\frac{۲۱d}{۴}}{\frac{۹d}{۴}}=\frac{۲۱}{۹}=\frac{۷}{۳}$$

سراسری - ۹۲

۱۹- گزینه‌ی ۱ جمله‌ی n ام دنباله‌ی تقریبات اعشـاری هر عدد، برابر تقریب آن عدد تا n رقم اعشـار اسـت. تقسیم ۵ بر ۲۲ عدد اعشاری $\frac{۵}{۲۲}$ برابر ۰/۲۲۷۲۷۲۷... است، تقریب این عدد تا هشت رقم برابر ۰/۲۲۷۲۷۲۷۲ است که مجموع ارقام آن ۳۱=۲×۵+۷×۳ است.

۲۰- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول**: عدد A برابر ۳/۶۹۹... یا $۳/۶\overline{۹}$ است. پس:

$$\begin{cases}۱۰A=۳۶/\overline{۹}\\۱۰۰A=۳۶۹/\overline{۹}\end{cases}\Rightarrow۹۰A=۳۶۹-۳۶\Rightarrow۹۰A=۳۳۳\Rightarrow A=\frac{۱۱۱}{۳۰}=\frac{۳۷}{۱۰}=۳/۷$$

بنابراین دنباله‌ی تفاضل اعداد از ۳/۷ برابر است با:

$$۰/۱,۰/۰۱,۰/۰۰۱,۰/۰۰۰۱,\ldots$$

جمله‌ی هفتم این دنباله برابر $۱۰^{-۷}$ است.

راه‌حل دوم: با استفاده از حد مجموع دنباله‌ی هندسی داریم:

$$A=۳/۶۹۹۹\ldots=۳/۶+۰/۰۹+۰/۰۰۹+۰/۰۰۰۹+\ldots=۳/۶+\frac{۰/۰۹}{۱-۰/۱}=۳/۶+\frac{\frac{۹}{۱۰۰}}{\frac{۹}{۱۰}}=۳/۶+۰/۱=۳/۷$$

باقی راه‌حل مشابه روش اول است.

پاسخ تشریحی آزمون ۲۸

۱- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول**: تعداد چوب کبریت‌های عمودی و افقی را در هر مرحله جداگانه می‌شماریم.

مرحله‌ی اول = ۱ چوب افقی + ۲ چوب عمودی

مرحله‌ی دوم = ۱+۲ چوب افقی + ۲+۳ چوب عمودی

مرحله‌ی سوم = ۱+۲+۳ چوب افقی + ۲+۳+۴ چوب عمودی

بنابراین مطابق الگویابی می‌توان انتظار داشت در مرحله دهم داشته باشیم:

مرحله‌ی دهم = ۱+۲+۳+...+۱۰ چوب افقی + ۲+۳+۴+...+۱۱ چوب عمودی

$$=۱+۲+۳+\cdots+۱۰+۱+۲+۳+\cdots+۱۱-۱=\frac{۱۰\times۱۱}{۲}+\frac{۱۱\times۱۲}{۲}-۱=۵۵+۶۶-۱=۱۲۰$$

راه‌حل دوم: تعداد چوب‌ها در هر طبقه اعداد فرد متوالی است، پس: تعداد چوب کبریت‌های مرحله‌ی ۱۰ = ۳+۵+۷+...+۲×۱۰+۱

همان‌طور که مشخص است این تعداد برابر مجموع ۱۰ جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی با قدر نسبت ۲ و جمله‌ی اول ۳ و جمله‌ی آخر ۲۱ است:

$$S_{۱۰}=\frac{۱۰}{۲}(۳+۲۱)=۵\times۲۴=۱۲۰$$

۲- گزینه‌ی ۴ جمله‌ی اول این دنباله‌ی حسابی ۲ و قدر نسبت آن ۳ می‌باشد.

$$S_n=\frac{n(۲\times۲+(n-۱)۳)}{۲}=\frac{n(۴+۳n-۳)}{۲}=\frac{n(۳n+۱)}{۲}$$

با توجه به گزینه‌های داده شده، از جایی که $S_{۲۵}=۹۵۰$ و $S_{۲۶}=۱۰۲۷$ بنابراین حداقل تعداد n برای آن‌که S_n از ۱۰۰۰ بیش‌تر شود، ۲۶ می‌باشد.

۳- گزینه‌ی ۴ **راه‌حل اول**: مجموع خواسته شده از تفاضل مجموع ۶ جمله‌ی اول از مجموع ۱۸ جمله‌ی اول به‌دست می‌آید:

$$a_۷+a_۸+\cdots+a_{۱۸}=S_{۱۸}-S_۶=\frac{۱۸(۳)}{۶}-\frac{۶(-۹)}{۶}=۹+۹=۱۸$$

راه‌حل دوم: با پیدا کردن جمله‌ی هفتم و هجدهم، مجموع خواسته شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases}a_۷=S_۷-S_۶=\frac{۷(-۸)}{۶}-\frac{۶(-۹)}{۶}=\frac{-۲۸}{۳}+\frac{۲۷}{۳}=\frac{-۱}{۳}\\ a_{۱۸}=S_{۱۸}-S_{۱۷}=\frac{۱۸(۳)}{۶}-\frac{۱۷(۲)}{۶}=\frac{۲۷}{۳}-\frac{۱۷}{۳}=\frac{۱۰}{۳}\end{cases}\Rightarrow a_۷+a_۸+\cdots+a_{۱۸}=\frac{۱۲}{۲}(a_۷+a_{۱۸})=۶(\frac{۱۰}{۳}-\frac{۱}{۳})=۱۸$$

۴- گزینه‌ی ۱ **راه‌حل اول**: در دنباله‌ی حسابی، می‌دانیم مجموع n جمله‌ی متوالی از دنباله، n برابر جمله‌ی وسط (در صورت وجود) است، بنابراین:

$$\begin{cases}a_۱+a_۲+\cdots+a_{۱۱}=۱۱\times a_{(\frac{۱+۱۱}{۲})}\Rightarrow ۱۱a_۶=\frac{۲۴۲}{۷}\Rightarrow a_۶=\frac{۲۲}{۷}\\ a_{۱۲}+a_{۱۳}+\cdots+a_{۲۲}=۱۱\times a_{(\frac{۱۲+۲۲}{۲})}\Rightarrow ۱۱a_{۱۷}=\frac{۱۲۱}{۷}\Rightarrow a_{۱۷}=\frac{۱۱}{۷}\end{cases}\Rightarrow a_{۱۷}-a_۶=\frac{-۱۱}{۷}\Rightarrow ۱۱d=\frac{-۱۱}{۷}\Rightarrow d=\frac{-۱}{۷}$$

برای به‌دست آوردن $a_۷$ داریم:

$$a_۷=a_۶+d\Rightarrow a_۷=\frac{-۱}{۷}+\frac{۲۲}{۷}=\frac{۲۱}{۷}=۳$$

راه‌حل دوم: با استفاده از فرمول مجموع جملات دنباله‌ی حسابی، برای $S_{۱۱}$ و $S_{۲۲}$ داریم:

$$\begin{matrix}S_{۱۱}=\frac{۱۱}{۲}(۲a_۱+۱۰d)\Rightarrow\frac{۱۱}{۲}(۲a_۱+۱۰d)=\frac{۲۴۲}{۷}\\ S_{۲۲}=\frac{۲۲}{۲}(۲a_۱+۲۱d)\Rightarrow ۱۱(۲a_۱+۲۱d)=\frac{۲۴۲}{۷}+\frac{۱۲۱}{۷}\end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}۲a_۱+۱۰d=\frac{۴۴}{۷}\\ ۲a_۱+۲۱d=\frac{۳۳}{۷}\end{cases}\Rightarrow ۱۱d=\frac{-۱۱}{۷}\Rightarrow d=\frac{-۱}{۷},a_۱=\frac{۲۷}{۷}\Rightarrow a_۷=a_۱+۶d=\frac{۲۷}{۷}+\frac{-۶}{۷}=\frac{۲۱}{۷}=۳$$

۵- گزینه‌ی ۴ جمله‌ی هفتم نصف جمله‌ی سوم است، پس:

$$a_۷=\frac{۱}{۲}a_۳\Rightarrow ۲(a_۱+۶d)=a_۱+۲d\Rightarrow a_۱+۱۰d=۰\Rightarrow a_۱=-۱۰d$$

از طرفی برای آن‌که مجموع چند جمله‌ی اول این دنباله برابر صفر باشد، باید داشته باشیم:

$$S_n=۰\Rightarrow\frac{n(۲a_۱+(n-۱)d)}{۲}=۰\xrightarrow{n\neq۰}۲a_۱+(n-۱)d=۰\xrightarrow{a_۱=-۱۰d}-۲۰d+(n-۱)d=۰\Rightarrow(n-۱)d=۲۰d\Rightarrow n=۲۱$$

۶- گزینه‌ی ۴ **راه‌حل اول**: با استفاده از فرمول جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی داریم:

$$a_n=a_۱+(n-۱)d\Rightarrow a_۷=a_۱+۶d\Rightarrow\frac{۹}{۲}=a_۱+۶(-\frac{۱}{۳})\Rightarrow a_۱=\frac{۹}{۲}+۲\Rightarrow a_۱=\frac{۱۳}{۲}$$

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)\Rightarrow S_{۱۰}=۵(\frac{۲۶}{۲}+۹(-\frac{۱}{۳}))\Rightarrow S_{۱۰}=۵(۱۳-۳)=۵۰$$

راه‌حل دوم: دنباله‌ی موردنظر یک دنباله‌ی حسابی با قدر نسبت $-\frac{۱}{۳}$ است. در دنباله‌ی حسابی، می‌دانیم مجموع n جمله‌ی متوالی از دنباله، اگر n فرد باشد، n برابر جمله‌ی وسط و در غیر این‌صورت n برابر میانگین دو جمله‌ی وسط است، پس:

$$S_{۱۰}=۱۰(\frac{a_۵+a_۶}{۲})=۵(a_۵+a_۶)$$

با استفاده از جمله‌ی هفتم و قدر نسبت داده شده $a_۵, a_۶$ را می‌یابیم:

$$\begin{cases}a_۶=a_۷-d=\frac{۹}{۲}-(-\frac{۱}{۳})=\frac{۲۹}{۶}\\ a_۵=a_۷-۲d=\frac{۹}{۲}-۲(-\frac{۱}{۳})=\frac{۳۱}{۶}\end{cases}\Rightarrow a_۵+a_۶=۱۰\Rightarrow S_{۱۰}=۵(a_۵+a_۶)=۵۰$$

۷- گزینه‌ی ۲ مجموع ۱۰ جمله‌ی اول دنباله‌ی a_n برابر مجموع جمله ۱۰دسته‌ی اول از اعداد فرد است. در این ۱۰ دسته، ۱۰+...+۳+۲+۱ عدد یعنی $\frac{10\times 11}{2}=55$ عدد فرد موجود است. بنابراین جمع ۵۵ عدد اول فرد را محاسبه می‌کنیم:

$$S_{55}=\frac{55}{2}(2\times 1+54\times 2)=55^2=3025$$

نکته: جمع n عدد فرد متوالی با شروع از یک برابر n^2 است.

۸- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول**: مجموع ۲۰ جمله‌ی اول برابر صفر است، پس:

$$S_{20}=0\Rightarrow \frac{20(2a_1+19d)}{2}=0\Rightarrow 2a_1+19d=0$$

حال به بررسی گزاره‌ها می‌پردازیم:

گزاره‌ی (الف) درست است.

$$a_4+a_{17}=a_1+3d+a_1+16d=2a_1+19d=0$$

گزاره‌ی (ب) درست است، زیرا:

$$a_7+a_8+\cdots+a_{14}=S_{14}-S_6=7(2a_1+13d)-3(2a_1+5d)=14a_1+91d-6a_1-15d=8a_1+76d=4(2a_1+19d)=0$$

گزاره‌ی (ج) درست نیست زیرا، در دنباله‌ای با بیست جمله، اصلاً جمله‌ی وسط وجود ندارد.

گزاره‌ی (د) درست است، زیرا:

$$S_{17}-S_3=\frac{17}{2}(2a_1+16d)-\frac{3}{2}(2a_1+2d)=17(a_1+8d)-3(a_1+d)=17a_1+136d-3a_1-3d=14a_1+133d=7(2a_1+19d)=0\Rightarrow S_{17}=S_3$$

راه‌حل دوم: در دنباله‌ی حسابی، مجموع جملات متساوی الفاصله از وسط برابر است:

$$a_1+a_{20}=a_2+a_{19}=\cdots=a_4+a_{17}=\cdots=a_{10}+a_{11}$$

از جایی که $S_{21}=\frac{21(a_1+a_{20})}{2}$ بنابراین حاصل همه‌ی عبارات بالا صفر است و هر دو جمله قرینه‌ی هم هستند، به عبارت دیگر جملات دنباله به صورت زیر است:

$$\underset{a_1}{x-9d},\cdots,\underset{a_9}{x-d},\underset{a_{10}}{x},\underset{a_{11}}{-x},\underset{a_{12}}{-x+d},\cdots,\underset{a_{20}}{-x+9d}$$

بنابراین جملات چهارم و هفدهم که فاصله‌ی یکسانی از وسط دارند قرینه هستند، مجموع جملات هفتم تا چهاردهم چون نسبت به وسط دنباله متقارن است برابر صفر است، به همین دلیل مجموع جملات چهارم تا هفدهم برابر صفر است، یعنی $S_3=S_{17}$.

۹- گزینه‌ی ۳ در این دنباله‌ی حسابی داریم:

$$S_{20}=3S_{12}\Rightarrow \frac{20}{2}(2a_1+19d)=3\times\frac{12}{2}(2a_1+11d)\Rightarrow 20a_1+190d=36a_1+198d\Rightarrow 16a_1+8d=0\Rightarrow 2a_1+d=0\Rightarrow d=-2a_1$$

از طرف دیگر:

$$a_3=6\Rightarrow a_1+2d=6\xrightarrow{d=-2a_1}a_1-4a_1=6\Rightarrow 3a_1=-6\Rightarrow a_1=-2\Rightarrow d=4$$

$$a_{10}=a_1+9d=-2+4\times 9=34$$

۱۰- گزینه‌ی ۳ برای جملات متوالی دنباله‌ی هندسی می‌دانیم ضرب جملات طرفین برابر توان دوم جمله‌ی وسط است، پس:

$$a_3\times a_9=a_7^2\Rightarrow(a_1+2d)(a_1+8d)=(a_1+6d)^2\Rightarrow a_1^2+2a_1d+8a_1d+16d^2=a_1^2+12a_1d+36d^2\Rightarrow -20d^2=2a_1d\Rightarrow a_1=-10d$$

اگر جمله‌ی nام این دنباله صفر باشد، داریم:

$$a_n=0\Rightarrow a_1+(n-1)d=0\Rightarrow -10d+(n-1)d=0\Rightarrow n-1=10\Rightarrow n=11$$

۱۱- گزینه‌ی ۴ برای آن‌که سه عدد تشکیل دنباله‌ی حسابی دهند باید جمع طرفین دو برابر جمله‌ی وسط باشد، پس:

$$a_2+a_8=2\times 2a_5\Rightarrow a_1q+a_1q^7=4\times a_1q^4\Rightarrow a_1q(1+q^6)=4a_1q^4\Rightarrow 1+q^6=4q^3\Rightarrow q^6-4q^3+1=0\Rightarrow(q^3-2)^2=4-1\Rightarrow q^3=2\pm\sqrt{3}$$

اگر $q^3=2+\sqrt{3}$، پس $q>1$ و دنباله صعودی است، بنابراین بزرگ‌ترین جمله a_8 و کوچک‌ترین a_2 است و داریم:

$$\frac{a_8}{a_2}=\frac{a_1q^7}{a_1q}=q^6=(q^3)^2=(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}$$

در حالتی که $q^3=2-\sqrt{3}$، a_2 بزرگ‌ترین و a_8 کوچک‌ترین جمله است و باز هم همین عدد به دست می‌آید:

$$\frac{a_2}{a_8}=\frac{a_1q}{a_1q^7}=\frac{1}{q^6}=\frac{1}{(q^3)^2}=\frac{1}{7-4\sqrt{3}}\times\frac{7+4\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}=7+4\sqrt{3}$$

سراسری خارج از کشور - ۹۲

۱۲- گزینه‌ی ۳ با توجه به داده‌های مسأله داریم:

$$\begin{cases} a_8 \times a_{20} = 108 \Rightarrow a_1 q^7 \times a_1 q^{19} = 108 \Rightarrow a_1^2 q^{26} = 108 \\ a_{13} = 9 \Rightarrow a_1 q^{12} = 9 \Rightarrow a_1^2 q^{24} = 81 \end{cases} \Rightarrow q^2 = \frac{108}{81} \Rightarrow q^2 = \frac{4}{3}$$

برای یافتن جمله‌ی پانزدهم، از جمله‌ی سیزدهم که معلوم است، کمک می‌گیریم:

$$a_{15} = a_{13} q^2 = 9 \times \frac{4}{3} = 12$$

۱۳- گزینه‌ی ۴ در هر مرحله تعداد نیم‌دایره‌ها دو برابر می‌شود ولی شعاع نیم‌دایره‌ها، نصف شعاع نیم‌دایره‌ی قبلی است. بنابراین با توجه به فرمول مساحت نیم‌دایره $\left(S = \frac{1}{2}\pi r^2\right)$ داریم:

$$\frac{S_n}{S_{n-1}} = \frac{\frac{1}{2}\pi(\frac{1}{2}r)^2 \times 2}{\frac{1}{2}\pi r^2} = \frac{\frac{r^2}{4} \times 2}{r^2} = \frac{1}{2}$$

بنابراین مساحت نیم‌دایره‌ها تشکیل یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{2}$ و جمله‌ی اول 8π می‌دهد، جمله‌ی هشتم این دنباله برابر است با:

$$S_8 = S_1 q^7 = 8\pi \times (\frac{1}{2})^7 = \frac{\pi}{16}$$

۱۴- گزینه‌ی ۳ جمله‌ی اول این دنباله برابر ۲ و جمله‌ی هشتم آن $16\sqrt{2}$ است، پس:

$$\frac{a_8}{a_1} = \frac{16\sqrt{2}}{2} \Rightarrow q^7 = 8\sqrt{2} \Rightarrow q^7 = \sqrt{2^7} \Rightarrow q = \sqrt{2}$$

$$S_8 = a_1(\frac{q^8 - 1}{q - 1}) = 2(\frac{16 - 1}{\sqrt{2} - 1}) \times \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{30(\sqrt{2} + 1)}{2 - 1} = 30(\sqrt{2} + 1)$$

۱۵- گزینه‌ی ۴ با استفاده از فرمول مجموع جملات دنباله‌ی هندسی داریم:

$$\begin{cases} S_6 = 153 \Rightarrow a_1(\frac{q^6 - 1}{q - 1}) = 153 \\ S_3 = 136 \Rightarrow a_1(\frac{q^3 - 1}{q - 1}) = 136 \end{cases} \Rightarrow \frac{q^6 - 1}{q^3 - 1} = \frac{153}{136} \Rightarrow \frac{(q^3 + 1)(q^3 - 1)}{q^3 - 1} = \frac{153}{136} \Rightarrow q^3 + 1 = \frac{153}{136} \Rightarrow q^3 = \frac{17}{136} \Rightarrow q^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

حال به محاسبه‌ی مطلوب مسأله می‌پردازیم:

$$\frac{a_1}{a_5} = \frac{a_1}{a_1 q^4} = \frac{1}{q^4} = \frac{1}{(\frac{1}{2})^4} = 16$$

۱۶- گزینه‌ی ۳ با توجه به داده‌های مسأله، داریم:

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 1 \Rightarrow a_1 + a_1 q^2 = 1 \Rightarrow a_1(1 + q^2) = 1 \quad (I) \\ S_4 = 3 \Rightarrow a_1(\frac{q^4 - 1}{q - 1}) = 3 \Rightarrow a_1(q^2 + 1)(q^2 - 1) = 3(q - 1) \end{cases} \xrightarrow{\div} \frac{1}{q^2 - 1} = \frac{1}{3(q - 1)} \Rightarrow 3 = q + 1 \Rightarrow q = 2 \xrightarrow{(I)} a_1 \times 5 = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{5}$$

مجموع شش جمله‌ی اول برابر است با:

$$S_6 = a_1(\frac{q^6 - 1}{q - 1}) = \frac{1}{5}(\frac{64 - 1}{2 - 1}) = \frac{63}{5} = \frac{126}{10} = 12/6$$

۱۷- گزینه‌ی ۲ مقدار عبارت A حاصل ضرب مجموع جملات ۷ جمله از دو دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول یک و قدر نسبت x و $-x$ است:

$$A = (1 + x + x^2 + \cdots + x^6)(1 - x + x^2 - \cdots + x^6) = 1(\frac{x^7 - 1}{x - 1})(\frac{(-x)^7 - 1}{-x - 1})$$

$$= \frac{x^7 - 1}{x - 1} \times \frac{x^7 + 1}{x + 1} = \frac{x^{14} - 1}{x^2 - 1} \xrightarrow{A = 1093} \frac{x^{14} - 1}{x^2 - 1} = 1093 \Rightarrow x^{14} - 1 = 1093(x^2 - 1)$$

با امتحان کردن گزینه‌ها در معادله‌ی به‌دست آمده $x = \sqrt{3}$ صحیح است.

۱۸- گزینه‌ی ۴ عدد A حاصل جمع تعدادی نامتناهی عدد اســت که دو جمله‌ی متوالی آن $a_{n-1}a_n$ و $a_n a_{n+1}$ اســت، تقسیم این دو عدد قدرنسبت این دنباله‌ی هندسی را به‌دست می‌دهد:

$$\frac{a_n a_{n+1}}{a_{n-1}a_n}=\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}=q^2$$

بنابراین عدد A حد مجموع یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت $(\frac{1}{3})^2$ و جمله‌ی اول $a_1a_2=\frac{1}{3}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{27}$ است، یعنی:

$$A=\frac{a_1a_2}{1-q^2}=\frac{\frac{1}{27}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{\frac{1}{27}}{\frac{8}{9}}=\frac{1}{24}$$

۱۹- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول**: حاصل عدد کسری A را به کمک حد مجموع دنباله‌ی هندسی پیدا می‌کنیم:

$$A=0/69444\cdots=0/69+0/004+0/0004+\cdots=0/69+\frac{0/004}{1-0/1}=\frac{69}{100}+\frac{4}{900}=\frac{625}{900}=\frac{25\times25}{9\times4\times25}=\frac{25}{36}$$

بنابراین عدد $\sqrt{A}$ برابر $\frac{5}{6}$ است. دنباله‌ی تقریبات اعشاری $\frac{5}{6}$ برابر است با: $0/8, 0/83, 0/833, 0/8333, 0/83333, \ldots$

راه‌حل دوم: برای به‌دست آوردن عدد گویای A می‌توان این‌گونه عمل کرد:

$$A=0/69444\ldots\Rightarrow A=0/69\overline{4}\Rightarrow\begin{cases}100A=69/\overline{4}\\1000A=694/\overline{4}\end{cases}\Rightarrow 900A=694-69\Rightarrow A=\frac{625}{900}\Rightarrow A=\frac{25}{36}$$

ادامه‌ی راه‌حل، مشابه روش اول است.

۲۰- گزینه‌ی ۲ با توجه به نامعادلات داده شده، محدوده‌ی x را مشخص می‌کنیم:

$$\begin{cases}2x+1<5/2492\Rightarrow 2x<4/2496\Rightarrow x<2/1248\\ \frac{x-1}{5}>0/2249\Rightarrow x-1>1/1245\Rightarrow x>2/1245\end{cases}\Rightarrow 2/1245<x<2/1248$$

بنابراین تعداد عدد x تا ۳ رقم اعشار قطعاً ۲/۱۲۴ است ولی رقم چهارم مشخص نیست. پس دنباله‌ی تقریبات اعشاری تا جمله‌ی سوم معلوم است.
$2/1, 2/12, 2/124, \ldots$

پاسخ تشریحی آزمون ۲۹

۱- گزینه‌ی ۲ با قراردادن $n=8$ در رابطه‌ی $a_{n+1}=\frac{n^2-2n}{n+k}$، مقدار a_9 را محاسبه می‌کنیم:

$$a_9=\frac{8^2-2\times8}{8+k}\xrightarrow{a_9=4}4=\frac{48}{8+k}\Rightarrow 32+4k=48\Rightarrow k=4$$

حال با قرار دادن $n=6$، a_7 را پیدا می‌کنیم:

$$a_7=\frac{6^2-2\times6}{6+4}=\frac{36-12}{10}=2/4=\frac{12}{5}$$

۲- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول**: هر جمله از این دنباله، یک واحد بیش‌تر از دو برابر جمله‌ی ماقبل خود است. پس با توجه به $a_1=1$ داریم:

$$a_2=2\times a_1+1=3\ ,\ a_3=2a_2+1=7\ ,\ a_4=2a_3+1=15\ ,\ a_5=2\times a_4+1=31\ ,\ a_6=2\times a_5+1=63$$

بنابراین داریم:

$$\frac{a_6-a_4}{a_5-a_3}=\frac{63-15}{31-7}=\frac{48}{24}=2$$

راه‌حل دوم: با توجه به رابطه‌ی بازگشتی داده شده، می‌توان جمله‌ی عمومی دنباله را پیدا کرد:

$$a_1=1$$
$$a_2=2\times1+1$$
$$a_3=2\times(2\times1+1)+1$$
$$a_4=2\times(2\times(2\times1+1)+1)+1$$
$$\vdots$$
$$a_n=\underbrace{2\times(2\times\cdots\times(}_{n-1}2\times1+1)+1+\cdots+1)+1$$
$$\Rightarrow a_n=2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-3}+\cdots+1$$

عبارت به‌دست آمده، مجموع n جمله از یک دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت ۲ و جمله‌ی اول یک است، پس:

$$a_n=1\times(\frac{2^n-1}{2-1})=2^n-1\Rightarrow\frac{a_6-a_4}{a_5-a_3}=\frac{2^6-1-2^4+1}{2^5-1-2^3+1}=\frac{2^4(2^2-1)}{2^3(2^2-1)}=2$$

۳- گزینه‌ی ۲ واضح است که به ازای هر عدد n، $\frac{۳}{۲^n}$ مثبت است، پس باید فقط نامعادله‌ی $a_n < ۰/۱۸۷۵$ را حل کنیم:

$$\frac{۳}{۲^n} < ۰/۱۸۷۵ \Rightarrow \frac{۲^n}{۳} > \frac{۱}{۰/۱۸۷۵} \Rightarrow ۲^n > \frac{۳۰۰۰۰}{۱۸۷۵} \Rightarrow ۲^n > ۱۶ \Rightarrow n > ۴ \Rightarrow n \geq ۵$$

بنابراین، حداقل $n_۰$ برابر ۵ است.

۴- گزینه‌ی ۱ عدد $\frac{n\pi}{۲}$ به ازای مقادیر طبیعی n، روی دایره‌ی مثلثاتی، مرز بین ربع‌ها را مشخص می‌کند که حاصل سینوس آن برابر است با:

$$a_n = \begin{cases} ۰ & n = ۴k \text{ یا } ۴k+۲ \\ ۱ & n = ۴k+۱ \\ -۱ & n = ۴k+۳ \end{cases} \Rightarrow a_n^۲ = \begin{cases} ۰ & n \text{ زوج} \\ ۱ & n \text{ فرد} \end{cases}$$

از بین اعداد متوالی n و n+۱، حتماً یکی زوج و دیگری فرد است، پس $b_n = a_n^۲ + a_{n+۱}^۲$ همواره برابر ۱=۱+۰ می‌باشد و طبیعتاً همگرا به یک است.

۵- گزینه‌ی ۳ ضابطه‌ی b_n را با استفاده از a_n تشکیل می‌دهیم:

$$b_n = a_{n+۱} - a_n = \frac{(n+۱)^۲}{۲(n+۱)+۱} - \frac{n^۲}{۲n+۱} = \frac{(n^۲+۲n+۱)(۲n+۱) - n^۲(۲n+۳)}{(۲n+۳)(۲n+۱)} = \frac{۲n^۳+۵n^۲+۴n+۱-۲n^۳-۳n^۲}{۴n^۲+۸n+۳} = \frac{۲n^۲+۴n+۱}{۴n^۲+۸n+۳}$$

برای تعیین عدد همگرایی b_n حد آن را در بی‌نهایت محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{۲n^۲+۴n+۱}{۴n^۲+۸n+۳} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^۲(۲+\frac{۴}{n}+\frac{۱}{n^۲})}{n^۲(۴+\frac{۸}{n}+\frac{۳}{n^۲})} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

۶- گزینه‌ی ۳ هر دو دنباله‌ی a_n و b_n همگرا هستند به:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{۲^{n-۱}}{۲^{n+۱}+۳} = \lim_{n\to\infty} \frac{۲^{n-۱}}{۲^{n-۱}(۲^۲+\frac{۳}{۲^{n-۱}})} = \frac{۱}{۴}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{۲n!-۱} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n!(۲-\frac{۱}{n!})} = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین دنباله‌ی $\frac{a_n+b_n}{a_nb_n}$، به $\frac{\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}}$ یعنی ۶ همگرا است.

۷- گزینه‌ی ۲ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه‌ی (۱): دنباله صعودی است ولی از جایی که $\frac{۳}{۲} > ۱$، واگراست.

گزینه‌ی (۳): مقدار $\frac{(-۱)^n}{n}$ به ازای اعداد فرد، عددی بین صفر و منفی یک و به ازای اعداد زوج مقداری بین صفر و یک دارد، بنابراین داریم:

$$U_n = \begin{cases} ۰ & n \text{ زوج} \\ -۱ & n \text{ فرد} \end{cases}$$

پس دنباله، غیریکنوا و واگرا است.

گزینه‌ی (۴): دنباله همگرا به ۲ است ولی با توجه به این‌که $ad-bc = ۲\times۰-۱\times۱ = -۱$ عددی منفی است، دنباله نزولی است.

گزینه‌ی (۲): دنباله همگرا به یک است، زیرا:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^۲+۱}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = ۱$$

از مقایسه‌ی چند جمله‌ی ابتدایی دنباله با هم و با حد دنباله در بی‌نهایت، به صعودی بودن دنباله پی می‌بریم:

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}}, \frac{۲}{\sqrt{۵}}, \ldots \to ۱$$

۸- گزینه‌ی ۴ وقتی n به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، $\frac{\pi}{n+1}$ به سمت صفر میل می‌کند و طبق هم‌ارزی سینوس در صفر داریم $\sin(\frac{\pi}{n+1})\sim\frac{\pi}{n+1}$، پس:

$$\lim_{n\to\infty}(2n-1)\sin\frac{\pi}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)\pi}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n\pi}{n}=2\pi$$

۹- گزینه‌ی ۳ با توجه به شرط داده شده داریم:

$$6n<2na_n<6n+8-a_n\xrightarrow{n>0}\frac{6n}{2n}<a_n<\frac{6n+8-a_n}{2n}$$

از جایی‌که a_n همگرا و کراندار است. پس $\frac{a_n}{2n}$ در بی‌نهایت به صفر میل می‌کند و داریم: $\lim_{n\to\infty}3+\frac{4}{n}-\frac{a_n}{2n}=3$ و بنابر قضیه‌ی فشردگی حد a_n نیز برابر ۳ است.

۱۰- گزینه‌ی ۳ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه‌ی (۱): مقدار $\frac{(-1)^n}{n}$ برای اعداد فرد n، عددی بین صفر و منفی یک و برای n های زوج، عددی بین صفر و یک است، پس دنباله‌ی u_n برای اعداد فرد برابر منفی یک و برای اعداد زوج n برابر صفر است و نوسانی در نتیجه واگرا است.

گزینه‌ی (۲): دنباله‌ی $\frac{1}{n}$ به صفر همگرا است ولی لگاریتم اعداد مثبت بسیار کوچک، بی‌نهایت می‌شود و دنباله واگرا است.

گزینه‌ی (۳): $\frac{\pi}{n}$ به صفر میل می‌کند و طبیعتاً $\sin\frac{\pi}{n}$ نیز همگرا به صفر است.

گزینه‌ی (۴): درجه‌ی صورت کسر ، از مخرج آن بیش‌تر است، پس دنباله واگرا می‌باشد.

سراسری - ۸۹

۱۱- گزینه‌ی ۱ با مخرج مشترک گرفتن، دنباله را ساده می‌کنیم:

$$a_n=\frac{n^2}{n+k}-\frac{n^2}{n+3}=\frac{n^2(n+3)-n^2(n+k)}{(n+k)(n+3)}=\frac{(3-k)n^2}{n^2+(k+3)n+3k}$$

مشخص است که دنباله‌ی a_n به $3-k$ همگرا است، پس:

$$3-k=2\Rightarrow k=1$$

۱۲- گزینه‌ی ۴ با استفاده از هم‌ارزی رادیکال‌ها در بی‌نهایت داریم:

$$\sqrt{4n^2+kn}\sim2(n+\frac{k}{8})$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{4n^2+kn}-2n+1=\lim_{n\to\infty}2n+\frac{k}{4}-2n+1=\frac{k}{4}+1$$

از آن‌جا که دنباله‌ی a_n همگرا به -2 است، پس:

$$\frac{k}{4}+1=-2\Rightarrow\frac{k}{4}=-3\Rightarrow k=-12$$

۱۳- گزینه‌ی ۴ با توجه به این‌که دنباله‌ی a_n در بی‌نهایت از نوع 1^∞ است، داریم:

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n+4})^{-2n}=e^{\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n+4}-1)(-2n)}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{8n}{n+4}}=e^8$$

۱۴- گزینه‌ی ۲ با توجه به گزینه‌ها، می‌دانیم دنباله‌ی a_n یکنوا است، با مقایسه‌ی دو جمله‌ی اول متوجه می‌شویم دنباله‌ی نزولی است:

$$\sqrt{2}-1>2(\sqrt{5}-2)\Rightarrow a_1>a_2$$

برای تعیین عدد همگرایی دنباله آن را در مزدوج ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n^2+1-n^2)}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

۱۵- گزینه‌ی ۳ برای آن‌که دنباله صعودی باشد، باید به ازای هر عدد طبیعی n داشته باشیم:

$$a_{n+1}\ge a_n\Rightarrow(n+1)^2-k(n+1)\ge n^2-kn\Rightarrow n^2+2n+1-kn-k\ge n^2-kn\Rightarrow k\le2n+1\xrightarrow{n\ge1}k\le3$$

۱۶- گزینه‌ی ۳ دو دنباله‌ی n و $\sqrt{n}$ صعودی هستند، پس $n+\sqrt{n}$ نیز صعودی است برای بقیه‌ی گزینه‌ها می‌توان مثال نقض یافت:

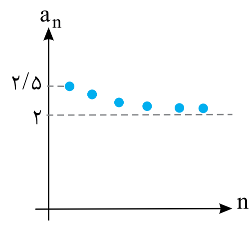
گزینه‌ی (۱): $a_2=-8<a_1=-5$

گزینه‌ی (۲): $a_2=4<a_1=5$

گزینه‌ی (۴): $a_4=-4<a_1=-3$

۱۷- گزینه‌ی ۴ برای آن‌که $a_n=\frac{۲n^۲+k-۱}{n^۲+۵}$ نزولی باشد، باید $ad-bc$ منفی باشد، یعنی: $۲\times۵-۱\times(k-۱)<۰\Rightarrow ۱۰-k+۱<۰\Rightarrow k>۱۱$

۱۸- گزینه‌ی ۲ دنباله‌ی داده شـــده، نزولی اســـت ($ad-bc=۲\times۱-۳<۰$) و همگرا به ۲ است. بنابراین جملات دنباله همواره بزرگ‌تر از ۲ هستند و بزرگ‌ترین کران پایین دنباله برابر ۲ است.



سراسری خارج از کشور - ۸۹

۱۹- گزینه‌ی ۳ دنباله‌ی مورد نظر همگرا است، زیرا:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{۴^n+۲}{۱+۴^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{۴^n(۱+\frac{۲}{۴^n})}{۴^n(۱+\frac{۱}{۴^n})}=\frac{۱}{۱}=۱$$

هر دنباله‌ی همگرایی، کراندار است، پس دنباله کراندار است.

ضمناً با توجه به این‌که در دنباله‌ی $a_n=\frac{۴^n+۲}{۴^n+۱}$، مقدار $ad-bc$ برابر $۱\times۱-۲\times۱=-۱$ و منفی است، با توجه به صعودی بودن دنباله‌ی ۴^n، a_n نزولی است.

۲۰- گزینه‌ی ۴ با توجه به فرمول مجموع اعداد طبیعی داریم:

$$a_n=\frac{۱+۲+۳+\cdots+n}{n^۲}=\frac{\frac{n(n+۱)}{۲}}{n^۲}=\frac{n^۲+n}{۲n^۲}=\frac{n+۱}{۲n}$$

این دنباله همگرا به $\frac{۱}{۲}$ و طبیعتاً کراندار است.

ضمناً با توجه به این‌که $ad-bc=۱\times۰-۱\times۲=-۲$ منفی است، پس دنباله نزولی است.

پاسخ تشریحی آزمون ۳۰

۱- گزینه‌ی ۲ دنباله را به‌صورت $a_n=۲(\frac{n}{۲}-\left[\frac{n}{۲}\right])$ می‌نویســـیم، عبارت $\frac{n}{۲}-\left[\frac{n}{۲}\right]$، یعنی تفاضل جزء صحیح عدد $\frac{n}{۲}$ از خود آن عدد، به معنای قسمت اعشاری عدد $\frac{n}{۲}$ است. که برای nهای زوج برابر صفر و برای nهای فرد برابر $\frac{۱}{۲}$ است، پس داریم:

$$a_n=۲(\frac{n}{۲}-\left[\frac{n}{۲}\right])=\begin{cases}۰ & \text{زوج } n\\ ۱ & \text{فرد } n\end{cases}\Rightarrow a_۱+a_۲+\cdots+a_{۲۰}=۱۰\times۰+۱۰\times۱=۱۰$$

۲- گزینه‌ی ۴ در دنباله با رابطه‌ی بازگشتی $a_{n+۱}=n-۳a_n$، هر جمله برابر شماره‌ی جمله‌ی قبلی منهای ۳ برابر جمله‌ی قبلی است. پس داریم:

$a_۱=۱\Rightarrow a_۲=۱-۳\times۱=-۲\Rightarrow a_۳=۲-۳(-۲)=۸\Rightarrow a_۴=۳-۳\times۸=-۲۱\Rightarrow a_۵=۴-۳(-۲۱)=۶۷$

۳- گزینه‌ی ۴ **راه‌حل اول:** عبارت $\cos n\pi$ به ازای nهای زوج برابر یک و به ازای nهای فرد برابر منفی یک است، پس برای پیدا کردن مجموع تمام جملات باید حاصل جمع زیر را بیابیم:

$$S_\infty=\frac{-۱}{۲}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۶}-\frac{۱}{۳۲}+\cdots$$

عبارت بالا حد مجموع جملات یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول $\frac{-۱}{۲}$ و قدر نسبت $\frac{-۱}{۲}$ است و داریم:

$$S_\infty=\frac{\frac{-۱}{۲}}{۱-(-\frac{۱}{۲})}=\frac{\frac{-۱}{۲}}{\frac{۳}{۲}}=-\frac{۱}{۳}$$

راه‌حل دوم: مجموع هر دو جمله‌ی متوالی را حساب می‌کنیم:

$$S_\infty=(\frac{-۱}{۲}+\frac{۱}{۴})+(\frac{-۱}{۸}+\frac{۱}{۱۶})+(-\frac{۱}{۳۲}+\frac{۱}{۶۴})+\cdots=\frac{-۱}{۴}-\frac{۱}{۱۶}-\frac{۱}{۶۴}+\cdots=\frac{\frac{-۱}{۴}}{۱-\frac{۱}{۴}}=\frac{\frac{-۱}{۴}}{\frac{۳}{۴}}=\frac{-۱}{۳}$$

۴- گزینه‌ی ۳ فرض کنیم مجموع n جمله‌ی اول برابر -۳ است، داریم:

$$a_۱+a_۲+\cdots+a_n=-۳\Rightarrow \log_۲(\frac{۱}{۲})+\log_۲(\frac{۲}{۳})+\log_۲(\frac{۳}{۴})+\cdots+\log_۲(\frac{n}{n+۱})=-۳\Rightarrow \log_۲(\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۳}\times\frac{۳}{۴}\times\cdots\times\frac{n}{n+۱})=-۳$$

$$\Rightarrow \log_۲\frac{۱}{n+۱}=-۳\Rightarrow\frac{۱}{n+۱}=\frac{۱}{۲^۳}\Rightarrow n+۱=۸\Rightarrow n=۷$$

۵- گزینه‌ی ۴ ابتدا عدد همگرایی دنباله (حد دنباله) را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{۲^n-۱}{۳+۲^{n-۱}}=\lim_{n\to\infty}\frac{۲^{n-۱}(۲-\frac{۱}{۲^{n-۱}})}{۲^{n-۱}(\frac{۳}{۲^{n-۱}}+۱)}=۲$$

برای آن‌که فاصله‌ی جملات دنباله از ۲ کم‌تر از $\frac{۱}{۱۰۰}$ باشد، باید داشته باشیم:

$$|a_n-۲|<\frac{۱}{۱۰۰}\Rightarrow\left|\frac{۲^n-۱}{۳+۲^{n-۱}}-۲\right|<\frac{۱}{۱۰۰}\Rightarrow\left|\frac{۲^n-۱-۶-۲^n}{۳+۲^{n-۱}}\right|<\frac{۱}{۱۰۰}\Rightarrow\frac{۷}{۳+۲^{n-۱}}<\frac{۱}{۱۰۰}\Rightarrow ۳+۲^{n-۱}>۷۰۰\Rightarrow ۲^{n-۱}>۶۹۷\Rightarrow n-۱\geq۱۰\Rightarrow n\geq۱۱$$

۶- گزینه‌ی ۳ دنباله‌ی b_n را با استفاده از a_n تشکیل می‌دهیم:

$$b_n=\frac{na_{n+۱}}{a_n}=\frac{n\times\frac{۳^n}{(n+۱)!}}{\frac{۳^{n-۱}}{n!}}=n\times\frac{۳}{n+۱}=\frac{۳n}{n+۱}$$

حد این دنباله در بی‌نهایت برابر ۳ می‌باشد.

۷- گزینه‌ی ۳ به فرض خلف اگر $c_n=a_n+b_n$ و c_n همگرا باشد داریم $b_n=c_n-a_n$ و b_n تفاضل دو دنباله‌ی همگرا است و می‌دانیم تفاضل دو دنباله‌ی همگرا حتماً همگرا می‌باشد و این با فرض واگرایی b_n در تناقض است.

مثال $a_n=\frac{۱}{n}$ و $b_n=n$ برای رد کردن بقیه‌ی گزینه‌ها کافی است.

a_n همگرا به صفر و b_n واگراست ولی دنباله‌های زیر همگی همگرا هستند.

گزینه‌ی (۱) : $a_nb_n=\frac{۱}{n}\times n=۱$ همگرا

گزینه‌ی (۲) : $\frac{a_n}{b_n}=\frac{\frac{۱}{n}}{n}=\frac{۱}{n^۲}$ همگرا

گزینه‌ی (۳) : $\frac{۱}{b_n}+a_n=\frac{۱}{n}+\frac{۱}{n}=\frac{۲}{n}$ همگرا

۸- گزینه‌ی ۳ اگر a_n همگرا به هر عددی (L) باشد $a_n^۲+۱$ همگرا به عددی غیر صفر (مثبت) است، پس دنباله‌ی $\frac{۱}{a_n^۲+۱}$ نیز همگرا به عدد $\frac{۱}{L^۲+۱}$ است.

گزینه‌های دیگر را می‌توان با مثال نقض کرد:

گزینه‌ی (۱) : $a_n=\frac{(-۱)^n}{n}\Rightarrow[a_n]=\begin{cases}۰ & n \text{ زوج}\\ -۱ & n \text{ فرد}\end{cases}$ واگرا

گزینه‌ی (۲) : $a_n=\frac{-۳n+۱}{۲n}\Rightarrow\frac{۱}{۲a_n+۳}\to\infty$ واگرا

گزینه‌ی (۴) : $a_n=\frac{n}{n+۱}\Rightarrow a_n\cos n\pi=\frac{(-۱)^n n}{n+۱}$ واگرا

۹- گزینه‌ی ۳ حد دنباله‌ی a_n را در بی‌نهایت محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt{n^۲-k}-\sqrt{n^۲+k})\times(\sqrt{n^۲-k}+\sqrt{n^۲+k})}{\sqrt{n^۲-k}+\sqrt{n^۲+k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n^۲-k-n^۲-k)}{\sqrt{n^۲-k}+\sqrt{n^۲+k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-۲kn}{۲\sqrt{n^۲}}=-k$$

از جایی که این دنباله به -۴ همگرا است، پس $k=۴$.

۱۰- گزینه‌ی ۳ برای محاسبه‌ی حد دنباله در بی‌نهایت داریم:

$$\lim_{n\to\infty} kn-۴-\frac{۲n^۲-bn+۱}{n+۳}=\lim_{n\to\infty}\frac{kn^۲+۳kn-۴n-۱۲-۲n^۲+bn-۱}{n+۳}=\lim_{n\to\infty}\frac{(k-۲)n^۲+(۳k-۴+b)n-۱۳}{n+۳}$$

برای آن‌که دنباله همگرا به عددی غیرصفر باشد، باید درجه‌ی صورت و مخرج برابر باشند، پس صورت کسر باید از درجه‌ی یک باشد، یعنی $k=۲$.
از طرفی دنباله به عدد ۳ همگرا است، پس:

$$\frac{۳k-۴+b}{۱}=۳\xrightarrow{k=۲}۶-۴+b=۳\Rightarrow b=۱\Rightarrow kb=۲$$

۱۱- گزینه‌ی ۴ با استفاده از اتحاد مثلثاتی $۱-\cos ۲\alpha=۲\sin^۲\alpha$ می‌نویسیم:

$$\lim_{n\to\infty} n^۲(۱-\cos\frac{۳}{n})=\lim_{n\to\infty} n^۲(۲\sin^۲\frac{۳}{۲n})$$

با توجه به این‌که $\frac{۳}{۲n}$ به سمت صفر میل می‌کند از هم‌ارزی $\sin x\sim x$ استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} n^۲\times۲\times(\frac{۳}{۲n})^۲=\lim_{n\to\infty}\frac{۱۸n^۲}{۴n^۲}=\frac{۹}{۲}$$

۱۲- گزینه‌ی ۴ رادیکال را به صورت توان کسری $(\frac{۱}{۲})$ می‌نویسیم:

$$a_n=(\sqrt{\frac{n}{n+۱}})^n=((\frac{n}{n+۱})^{\frac{۱}{۲}})^n=(\frac{n}{n+۱})^{\frac{n}{۲}}$$

دنباله‌ی a_n در بی‌نهایت به صورت ۱^∞ است، پس می‌نویسیم:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=e^{\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n+۱}-۱)\frac{n}{۲}}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{۲n+۲}}=e^{-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{e}}$$

۱۳- گزینه‌ی ۲ دنباله‌ی a_n صعودی است، پس برای هر n داریم:

$$a_{n+۱}\ge a_n\Rightarrow ۲^{n+۱}-k(n+۱)\ge ۲^n-kn\Rightarrow ۲\times۲^n-kn-k\ge ۲^n-kn\Rightarrow ۲^n\ge k$$

کافی است k از حداقل مقدار ۲^n که به ازای $n\in\mathbb{N}$ به‌دست می‌آید کوچک‌تر باشد. یعنی: $k\le ۲^۱\Rightarrow k\le ۲$

۱۴- گزینه‌ی ۲ دنباله‌ی معروف $b_n=(۱+\frac{۱}{n})^n$، دنباله‌ای صعودی و همگرا به عدد e (تقریباً ۲/۷۱) است.

دنباله‌ی a_n در بی‌نهایت، به‌صورت ۲^∞ است و واگرا می‌باشد.

دنباله‌ی c_n در بی‌نهایت به صورت $(-۱)^\infty$ است و واگرای نوسانی است.

دنباله‌ی d_n در بی‌نهایت به‌صورت ۱^∞ است و همگرا به e است.

$$\lim_{n\to\infty} d_n=\lim_{n\to\infty}(۱+\frac{۱}{n})^{n+۱}=e^{\lim_{n\to\infty}(۱+\frac{۱}{n}-۱)(n+۱)}=e$$

با مقایسه‌ی جمله‌ی اول با حد دنباله، به نزولی بودن d_n پی می‌بریم: $d_۱=۴>e$

۱۵- گزینه‌ی ۴ بی‌کرانی دنباله‌ها فقط در nهای خیلی زیاد (بی‌نهایت) اتفاق می‌افتد، دنباله‌ی d_n در بی‌نهایت به سمت $-\infty$ میل می‌کند پس از پایین بی‌کران و از بالا کراندار است.

دنباله‌ی a_n در بی‌نهایت، بین $+\infty$ و $-\infty$ در نوسان است، پس هم از بالا و هم از پایین بی‌کران است.

دنباله‌ی b_n در بی‌نهایت، همگرا به صفر است، پس از بالا و پایین کراندار است.

دنباله‌ی c_n در بی‌نهایت به سمت $+\infty$ میل می‌کند، پس از بالا بی‌کران و از پایین کراندار است.

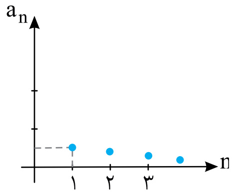
۱۶- گزینه‌ی ۲ ابتدا ثابت می‌کنیم، دنباله‌ی a_n نزولی است:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{3^n}{(n+2)!}}{\frac{3^{n-1}}{(n+1)!}}=\frac{3}{n+2}\xrightarrow{n\ge1}\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{3}{3}\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}\le1\Rightarrow a_{n+1}\le a_n$$

با توجه به نابرابری رشد، برای حالتی که $n\to\infty$ مقادیر $(n+1)!$ بیش‌تر از مقادیر 3^{n-1} می‌باشد، پس:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n-1}}{(n+1)!}=0$$

بنابر شکل مقابل، بزرگ‌ترین کران پایین، برابر صفر و کوچک‌ترین کران بالای دنباله برابر $\frac{1}{2}$ است، که اختلاف آن‌ها برابر $\frac{1}{2}$ است.



۱۷- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول**: عبارت دنباله‌ی خواسته شده را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$a_n=\frac{3n-2}{n+1}=\frac{3n+3-5}{n+1}=\frac{3(n+1)-5}{n+1}=3-\frac{5}{n+1}$$

حال با توجه به این که $n>8$ داریم:

$$n\ge9\Rightarrow n+1\ge10\Rightarrow0<\frac{1}{n+1}\le\frac{1}{10}\Rightarrow0<\frac{5}{n+1}\le\frac{5}{10}\Rightarrow0>\frac{-5}{n+1}\ge\frac{-5}{10}\Rightarrow3>3-\frac{5}{n+1}\ge3-\frac{5}{10}\Rightarrow\frac{25}{10}\le a_n<3\Rightarrow2/5\le a_n<3$$

راه‌حل دوم: با توجه به علامت $ad-bc$ $(3\times1+2\times1>0)$ دنباله صعودی است پس اولین جمله، کوچک‌ترین آن‌ها است: $a_9=2/5$

ضمناً کوچک‌ترین کران بالای این دنباله، همان عدد همگرایی آن یعنی ۳ است. یعنی جملات دنباله از جمله‌ی نهم به بعد در بازه‌ی $[2/5\,,\,3)$ قرار دارند.

۱۸- گزینه‌ی ۱ **راه‌حل اول**: در دنباله‌ی $a_n=\frac{4n+2}{3n+5}$، $ad-bc$ برابر $4\times5-2\times3$، عددی مثبت است و ریشه‌ی مخرج $(-\frac{5}{3})$ منفی است، بنابراین دنباله صعودی است. بنابراین جمله‌ی اول دنباله، کوچک‌ترین جمله‌ی آن است: $a_1=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

ضمناً دنباله همگرا به $\frac{4}{3}$ است، پس با توجه به صعودی بودن دنباله، کوچک‌ترین کران بالای دنباله، $\frac{4}{3}$ است. بنابراین جملات دنباله حتماً به بازه‌ی $[\frac{3}{4},\frac{4}{3})$ تعلق دارند و داریم: $\frac{4}{3}-\frac{3}{4}=\frac{7}{12}$

راه‌حل دوم: دنباله را به گونه‌ای بازنویسی می‌کنیم که فقط یک n در جمله‌ی عمومی آن ظاهر باشد:

$$a_n=\frac{4n+2}{3n+5}=\frac{\frac{4}{3}(3n+5)-\frac{20}{3}+2}{3n+5}=\frac{4}{3}+\frac{-\frac{14}{3}}{3n+5}=\frac{4}{3}-\frac{14}{9n+15}$$

حال با توجه به محدوده‌ی اعداد طبیعی n $(n\ge1)$ داریم:

$$n\ge1\Rightarrow9n\ge9\Rightarrow9n+15\ge24\Rightarrow0<\frac{1}{9n+15}\le\frac{1}{24}\Rightarrow0>\frac{-14}{9n+15}\ge\frac{-7}{12}\Rightarrow\frac{4}{3}-\frac{7}{12}\le\frac{4}{3}-\frac{14}{9n+15}<\frac{4}{3}\Rightarrow\frac{3}{4}\le a_n<\frac{4}{3}$$

بنابراین حداکثر مقدار $b-a$ برابر $\frac{7}{12}$ است.

۱۹- گزینه‌ی ۲ مقدار $\left[\frac{4n-1}{2n}\right]$ همواره برابر یک است، زیرا:

$$n\ge1\Rightarrow-1<\frac{-1}{2n}<0\Rightarrow1<2-\frac{1}{2n}<2\Rightarrow\left[2-\frac{1}{2n}\right]=1\Rightarrow\left[\frac{4n-1}{2n}\right]=1$$

بنابراین حد دنباله‌ی a_n برابر $b+1$ است، برای این‌که این حد برابر ۳ باشد b برابر با ۲ است.

۲۰- گزینه‌ی ۱ ابتدا صعودی یا نزولی بودن دنباله را مشخص می‌کنیم:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n^2-1}{n^2+1}\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n^2+1-2}{n^2+1}\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}=1-\frac{2}{n^2+1}\xrightarrow{\frac{2}{n^2+1}>0}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1\xrightarrow{a_n<0}a_{n+1}>a_n$$

بنابراین دنباله صعودی است. حال با توجه به این‌که تمامی جملات این دنباله منفی هستند، صفر یک کران بالای این دنباله است و این دنباله از بالا کراندار است. می‌دانیم هر دنباله‌ی از بالا کراندار و صعودی حتماً همگرا است.

پاسخ تشریحی آزمون ۳۱

۱- گزینه‌ی ۲ این اعداد را به صورت $a-d\,,a\,,a+d$ در نظر می‌گیریم و داریم:

$$a-d+a+a+d=۱۵\Rightarrow ۳a=۱۵\Rightarrow a=۵$$

$$(a-d)^{۲}+a^{۲}+(a+d)^{۲}=۹۳\Rightarrow ۳a^{۲}+۲d^{۲}=۹۳\Rightarrow ۷۵+۲d^{۲}=۹۳\Rightarrow ۲d^{۲}=۱۸\Rightarrow d^{۲}=۹\Rightarrow d=\pm ۳$$

بنابراین اعداد به صورت ۲,۵,۸ هستند که حاصل‌ضرب آن‌ها ۸۰ است.

۲- گزینه‌ی ۳ طول اضلاع و قطر مستطیل را به شکل مقابل در نظر می‌گیریم و داریم: $a-d\,,a\,,a+d$

$$(a+d)^{۲}=a^{۲}+(a-d)^{۲}\Rightarrow a^{۲}+d^{۲}+۲ad=a^{۲}+a^{۲}-۲ad+d^{۲}\Rightarrow a^{۲}=۴ad\Rightarrow a=۴d$$

پس محیط مستطیل به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P=۲(a+a-d)=۲(۲a-d)=۲(۸d-d)=۱۴d\Rightarrow ۱۴d=۲۸\Rightarrow d=۲\Rightarrow a=۸$$

مساحت مستطیل برابر است با:

$$S=a(a-d)=۸(۸-۲)=۴۸$$

۳- گزینه‌ی ۲ با توجه به جمله‌ی عمومی، جمله‌ی اول و یازدهم را محاسبه می‌کنیم:

$$a_n=\frac{۲}{۳}n-۳\Rightarrow\begin{cases}a_۱=\frac{۲}{۳}-۳=-\frac{۷}{۳}\\ a_{۱۱}=\frac{۲}{۳}\times ۱۱-۳=\frac{۱۳}{۳}\end{cases}$$

پس داریم:

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)\Rightarrow S_{۱۱}=\frac{۱۱}{۲}(a_۱+a_{۱۱})=\frac{۱۱}{۲}\left(-\frac{۷}{۳}+\frac{۱۳}{۳}\right)\Rightarrow S_{۱۱}=۱۱$$

۴- گزینه‌ی ۲ جمله‌ی اول و قدر نسبت را مشخص می‌کنیم:

$$a_۱-a_۳+a_۵-a_۷=۱۲\Rightarrow ۲d+۲d=-۱۲\Rightarrow d=-۳$$

$$a_۱a_۸=۴۶\Rightarrow a_۱(a_۱+۷d)=۴۶\Rightarrow a_۱(a_۱-۲۱)=۴۶\Rightarrow a_۱^{۲}-۲۱a_۱-۴۶=۰\Rightarrow(a_۱-۲۳)(a_۱+۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}a_۱=۲۳ & \text{غ‌ق}\\ a_۱=-۲\end{cases}$$

چون جملات دنباله باید منفی باشند، پس $a_۱=۲۳$ قابل قبول نیست. برای محاسبه‌ی $S_{۱۰}$ داریم:

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)\Rightarrow S_{۱۰}=\frac{۱۰}{۲}(۲(-۲)+۹(-۳))\Rightarrow S_{۱۰}=-۱۵۵$$

۵- گزینه‌ی ۴ واسطه‌ی حسابی بین دو عدد برابر است با:

$$\frac{x+۵+x-۱}{۲}=x+۲$$

واسطه‌ی هندسی بین دو عدد برابر است با:

$$\sqrt{(x-۱)(x+۵)}$$

پس داریم:

$$x+۲=\sqrt{x^{۲}+۴x-۵}+۱\Rightarrow\sqrt{x^{۲}+۴x-۵}=x+۱\Rightarrow x^{۲}+۴x-۵=x^{۲}+۲x+۱\Rightarrow ۲x=۶\Rightarrow x=۳$$

بنابراین دو عدد ۲ و ۸ هستند. واسطه‌های حسابی و هندسی آن‌ها به ترتیب ۵ و ۴ است که مجموعشان ۹ می‌شود.

۶- گزینه‌ی ۴ با توجه به جملات اول تا سوم داریم:

$$(x+۸)(x-۲)=(\sqrt{۶x})^{۲}\Rightarrow x^{۲}+۶x-۱۶=۶x\Rightarrow x^{۲}=۱۶\Rightarrow x=۴\Rightarrow a_۱=۴+۸=۱۲\quad,\quad a_۲=\sqrt{۲۴}\Rightarrow q=\frac{\sqrt{۲۴}}{۱۲}$$

نسبت جمله‌ی دهم به هشتم به صورت زیر است:

$$\frac{a_{۱۰}}{a_۸}=\frac{a_۱q^{۹}}{a_۱q^{۷}}=q^{۲}=\left(\frac{\sqrt{۲۴}}{۱۲}\right)^{۲}=\frac{۲۴}{۱۴۴}=\frac{۱}{۶}$$

۷- گزینه‌ی ۲ جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی حاصل برابر ۴ و جمله‌ی پنجم آن برابر ۳۲۴ است، پس داریم:

$$a_۵=a_۱q^{۴}\Rightarrow ۳۲۴=۴q^{۴}\Rightarrow q^{۴}=۸۱\Rightarrow q=\pm ۳$$

با توجه به این‌که این اعداد مثبت هستند، تنها $q=۳$ قابل قبول است. مجموع این اعداد برابر است با:

$$S_۵=a_۱\left(\frac{q^{۵}-۱}{q-۱}\right)=۴\left(\frac{۳^{۵}-۱}{۳-۱}\right)=۲\times ۲۴۲=۴۸۴$$

۸- گزینه‌ی ۴ مجموع n جمله‌ی اول را محاسبه می‌کنیم:

$$a_1=2\ ,\ q=\frac{1}{2}$$

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{2(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}}=4-4(\frac{1}{2})^n$$

این مجموع را بزرگ‌تر از ۳/۹۹۹ قرار می‌دهیم:

$$4-4(\frac{1}{2})^n>3/999\Rightarrow 4(\frac{1}{2})^n<\frac{1}{1000}\Rightarrow\frac{1}{2^{n-2}}<\frac{1}{1000}\Rightarrow 2^{n-2}>1000\Rightarrow n-2\geq 10\Rightarrow n\geq 12$$

۹- گزینه‌ی ۳ با قرار دادن $n=1$ داریم:

$$S_1=a_1=\frac{6}{2}-6=-3$$

با قرار دادن $n=2$ داریم:

$$S_2=a_1+a_2=\frac{6}{4}-6=-\frac{9}{2}$$

پس جمله‌ی دوم را می‌توان محاسبه کرد:

$$a_1+a_2=-\frac{9}{2}\Rightarrow -3+a_2=-\frac{9}{2}\Rightarrow a_2=-\frac{3}{2}$$

بنابراین قدر نسبت برابر است با:

$$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{-\frac{3}{2}}{-3}=\frac{1}{2}$$

و جمله‌ی سوم برابر است با:

$$a_3=a_1q^2=-3(\frac{1}{2})^2=-\frac{3}{4}$$

۱۰- گزینه‌ی ۲ با توجه به رابطه‌ی داده شده $a_1=\frac{2}{3}S_\infty$، داریم:

$$S_\infty=\frac{a_1}{1-q}\Rightarrow a_1=\frac{2}{3}\times\frac{a_1}{1-q}\Rightarrow\frac{3}{2}=\frac{1}{1-q}\Rightarrow 3-3q=2\Rightarrow 3q=1\Rightarrow q=\frac{1}{3}$$

پس داریم:

$$\frac{a_5}{a_2}=\frac{a_1q^4}{a_1q}=q^3=(\frac{1}{3})^3=\frac{1}{27}$$

۱۱- گزینه‌ی ۴ دنباله‌ی $b_n=\cos(n\pi)$ واگراست، زیرا جملات آن مرتباً ۱− و ۱ می‌شوند:

$$-1,1,-1,1,\ldots$$

دنباله‌ی $a_n=\sin(\frac{\pi}{n})$ همگرا به صفر است، زیرا داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\sin(\frac{\pi}{n})=\sin 0=0$$

۱۲- گزینه‌ی ۳ برای این که دنباله همگرا باشد، باید درجه‌ی صورت بیش‌تر از مخرج نباشد. درجه‌ی مخرج ۳ و درجه‌ی صورت k است، پس داریم:

$$k\leq 3\xrightarrow{k\in\mathbb{N}}k=1,2,3$$

۱۳- گزینه‌ی ۳ حد دنباله را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{n(2n-1)!+2}{2n(2n-1)!+3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n(2n-1)!}{2n(2n-1)!}=\frac{1}{2}$$

۱۴- گزینه‌ی ۳ حد دنباله را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{n+1}-2^{1-n}}{2^{n+2}+2^{2-n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{n+1}}{2^{n+2}}=\frac{1}{2}$$

توجه کنید که $\lim_{n\to+\infty}2^{1-n}=\lim_{n\to+\infty}2^{2-n}=0$.

۱۵- گزینه‌ی ۳ در دنباله‌ی $a_n=[\frac{(-1)^n}{n}]$، جملات صفر و منفی یک هستند، پس واگراست:

$$-1,0,-1,0,\dots$$

در دنباله‌ی $a_n=[-\frac{(-1)^n}{n}]$ نیز جمله‌ی اول یک و جملات دیگر صفر و منفی یک هستند، پس واگراست:

$$1,-1,0,-1,\dots$$

در دنباله‌ی $a_n=[\frac{(-1)^n-1}{n}]$ نیز جملات صفر، منفی یک و منفی ۲ هستند، پس واگراست:

$$-2,0,-1,0,-1,\dots$$

در دنباله‌ی $a_n=[\frac{1-(-1)^n}{n}]$، تمام جملات به جز a_1 صفر هستند و دنباله همگراست:

$$2,0,0,0,\dots$$

۱۶- گزینه‌ی ۲ دنباله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$a_n=n\ln(1+\frac{k}{n})=\ln(1+\frac{k}{n})^n\Rightarrow a_n=\ln((1+\frac{k}{n})^{\frac{n}{k}})^k=k\ln(1+\frac{k}{n})^{\frac{n}{k}}$$

پس داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}k\ln(1+\frac{k}{n})^{\frac{n}{k}}=k\ln e=k\Rightarrow k=2$$

۱۷- گزینه‌ی ۳ کافی است مشتق نامنفی باشد:

$$a'_n=\frac{4+k}{(n+2)^2}\geq 0\Rightarrow 4+k\geq 0\Rightarrow k\geq -4$$

۱۸- گزینه‌ی ۲ دنباله‌ی $a_n=c^n$ در صورتی که $c<-1$ باشد، نه از بالا کراندار است و نه از پایین. پس داریم:

$$\frac{k-1}{k+1}<-1\Rightarrow\frac{k-1}{k+1}+1<0\Rightarrow\frac{k-1+k+1}{k+1}<0\Rightarrow\frac{2k}{k+1}<0\Rightarrow -1<k<0$$

۱۹- گزینه‌ی ۲ دنباله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$a_n=(1-\frac{1}{n+1})^n=(\frac{n}{n+1})^n=\frac{1}{(\frac{n+1}{n})^n}\Rightarrow a_n=\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{1}{b_n}$$

می‌دانیم دنباله‌ی $b_n=(1+\frac{1}{n})^n$ صعودی است، پس دنباله‌ی a_n نزولی است. از طرفی داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{e}$$

پس دنباله‌ی a_n همگراست و در نتیجه کراندار است.

۲۰- گزینه‌ی ۲ دنباله‌ی گزینه‌ی (۱) غیر یکنواست:

$$\frac{1}{2}\ \nearrow\ 1\ \nearrow\ \frac{9}{8}\ \searrow\ 1,\dots$$

دنباله‌ی گزینه‌ی (۳) نزولی است:

$$-3\ \searrow\ -8\ \searrow\ -15,\dots$$

دنباله‌ی گزینه‌ی (۴) غیر یکنواست، زیرا ریشه‌ی مخرج بزرگ‌تر از ۱ است:

$$-\frac{1}{3}\ \searrow\ -2\ \nearrow\ 3\ \searrow\ \frac{4}{3}$$

دنباله‌ی گزینه‌ی (۲) صعودی است، زیرا داریم:

$$a_n=\frac{n^2}{n^2+1}=1-\frac{1}{n^2+1}$$

با افزایش n مخرج کسر $\frac{1}{n^2+1}$ افزایش می‌یابد، پس $\frac{1}{n^2+1}$ کاهش می‌یابد. بنابراین $\frac{-1}{n^2+1}$ افزایش می‌یابد. در نتیجه دنباله‌ی a_n صعودی خواهد بود.

آزمون‌های مرحله‌ای

۷

توابع نمایی و لگاریتم

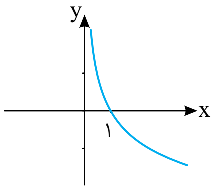
پاسخ تشریحی آزمون‌های فصل هفتم

پاسخ تشریحی آزمون ۳۲

۱- گزینه‌ی ۳ با توجه به قوانین لگاریتم، دو تابع را بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=\log_۲ \frac{۱}{x}=\log_۲ ۱-\log_۲ x=-\log_۲ x \quad , \quad g(x)=\log_{\frac{۱}{۲}} x=\log_{۲^{-۱}} x=\frac{۱}{-۱}\log_۲ x=-\log_۲ x$$

با توجه به این که دامنه‌ی هر دو تابع $\mathbb{R}^+$ است و ضابطه‌ی آن‌ها یکی است، این دو تابع بر هم منطبق هستند:



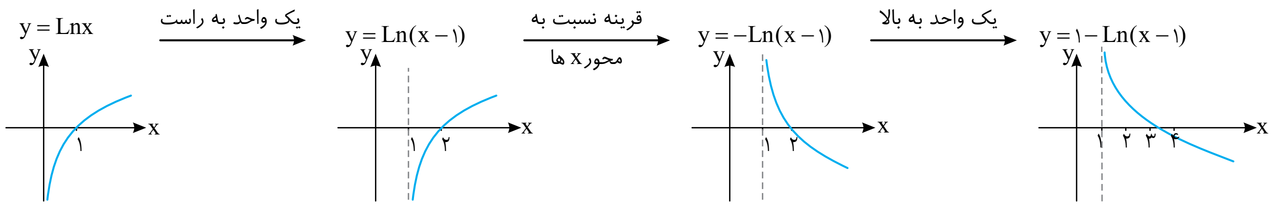
سراسری خارج از کشور – ۹۰

۲- گزینه‌ی ۳ می‌دانیم مقدار تقریبی عدد e برابر ۲/۷ است، بنابراین داریم:

$$۲<e\Rightarrow \ln ۲<\ln e\Rightarrow \ln ۲<۱$$

بنابراین تابع $y=(\ln ۲)^x$ یک تابع نمایی با پایه‌ی کم‌تر از یک است.

۳- گزینه‌ی ۲ با توجه به قوانین رسم نمودار و با توجه به این که پایه‌ی تابع لگاریتم طبیعی $(y=\ln x)$ عددی بزرگ‌تر از یک است، داریم:



۴- گزینه‌ی ۴ برای یافتن نقطه‌ی برخورد دو تابع مورد نظر باید معادله‌ی $۲^{x-۲}=۵-۲^x$ را حل کنیم:

$$۵-۲^x=۲^{x-۲}\Rightarrow ۵=۲^x+\frac{۲^x}{۲^۲}\Rightarrow \frac{۵}{۴}\times ۲^x=۵\Rightarrow ۲^x=۴\Rightarrow x=۲\xrightarrow{y=۲^{x-۲}} y=۱$$

بنابراین نقطه‌ی برخورد دو تابع، نقطه‌ی $A(۲,۱)$ است و فاصله‌ی آن از مبدأ برابر است با:

$$AO=\sqrt{۲^۲+۱^۲}=\sqrt{۵}$$

۵- گزینه‌ی ۱ می‌دانیم ورودی تابع لگاریتم، همواره عددی مثبت و عبارت زیر رادیکال همواره نامنفی است:

$$\begin{cases} ۴-x>۰\Rightarrow x<۴ \\ ۱-\log_۲(۴-x)\geq ۰\Rightarrow \log_۲(۴-x)\leq ۱\Rightarrow ۴-x\leq ۲^۱\Rightarrow x\geq ۲ \end{cases}\Rightarrow D=[۲,۴)$$

۶- گزینه‌ی ۴ با استفاده از نقاط داده شده، دستگاه دو مجهولی زیر را تشکیل داده و آن را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} A: ab^۱+۱=۱۳\Rightarrow ab=۱۲ \\ B: ab^{\frac{۱}{۲}}+۱=۷\Rightarrow a\sqrt{b}=۶ \end{cases}\xrightarrow{\text{تقسیم دو معادله بر هم}} \frac{ab}{a\sqrt{b}}=\frac{۱۲}{۶}\Rightarrow \sqrt{b}=۲\Rightarrow b=۴\Rightarrow a=۳$$

بنابراین تابع به صورت $y=۳\times ۴^x-۱$ می‌باشد، برای یافتن تابع معکوس داریم:

$$y=۳\times ۴^x-۱\Rightarrow y+۱=۳\times ۴^x\Rightarrow ۴^x=\frac{y+۱}{۳}\Rightarrow x=\log_۴\frac{y+۱}{۳}\xrightarrow{f^{-۱}} y^{-۱}=\log_۴\frac{x+۱}{۳}$$

۷- گزینه‌ی ۳ با جایگذاری $A=16^n$ در رابطه‌ی داده شده داریم:

$$\log_2 \log_4 16^n = 4 \Rightarrow \log_2(n\log_4 16)=4 \Rightarrow \log_2(2n)=4 \Rightarrow 2n=2^4 \Rightarrow n=8$$

۸- گزینه‌ی ۲ با استفاده از دو رابطه‌ی داده شده، $\log 3$ را می‌یابیم:

$$\begin{cases} \log 15=a \Rightarrow \log 3\times 5=a \Rightarrow \log 3+\log 5=a \\ \log 25=b \Rightarrow \log 5^2=b \Rightarrow 2\log 5=b \Rightarrow \log 5=\frac{b}{2} \end{cases} \Rightarrow \log 3=a-\frac{b}{2}$$

با توجه به این که $\log 9=2\log 3$ داریم:

$$\log 9=2a-b$$

۹- گزینه‌ی ۳ ابتدا مقدار a را پیدا می‌کنیم:

$$a=\log_{9\sqrt{3}} 3\sqrt[3]{9}=\log_{3^2\times 3^{\frac{1}{2}}} 3\times 3^{\frac{2}{3}}=\log_{3^{\frac{5}{2}}} 3^{\frac{5}{3}}=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{2}}\log_3 3=\frac{2}{3}$$

اگر لگاریتم a در پایه‌ی b برابر $\frac{1}{3}$ باشد، داریم:

$$\log_b \frac{2}{3}=\frac{1}{3} \Rightarrow b^{\frac{1}{3}}=\frac{2}{3} \Rightarrow b=\frac{8}{27}$$

۱۰- گزینه‌ی ۴ **راه‌حل اول:**

$$5^{1-\log_5 2}=5^{\log_5 5-\log_5 2}=5^{\log_5 \frac{5}{2}}=\frac{5}{2}$$

راه‌حل دوم:

$$5^{1-\log_5 2}=\frac{5^1}{5^{\log_5 2}}=\frac{5}{2}$$

۱۱- گزینه‌ی ۳ با چند بار استفاده از تساوی $\log_b a\times \log_c b=\log_c a$ می‌توان نوشت:

$$\log_5 4\times \log_6 5\times \log_7 6\times \ldots\times \log_{32} 31=\log_6 4\times \log_7 6\times \ldots\times \log_{32} 31$$

$$=\log_7 4\times \ldots\times \log_{32} 31=\log_{31} 4\times \log_{32} 31=\log_{32} 4=\log_{2^5} 2^2=\frac{2}{5}\log_2 2=\frac{2}{5}$$

۱۲- گزینه‌ی ۱ **راه‌حل اول:** با یکسان کردن پایه‌ی لگاریتم‌ها داریم:

$$A=\log_2(3+2\sqrt{2})+\log_{2^{\frac{1}{2}}}(\sqrt{2}-1)=\log_2(3+2\sqrt{2})+2\log_2(\sqrt{2}-1)=\log_2(3+2\sqrt{2})+\log_2(\sqrt{2}-1)^2$$

$$=\log_2(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=\log_2 1=0$$

راه‌حل دوم: اگر عبارت $3+2\sqrt{2}$ را به صورت $(\sqrt{2}+1)^2$ بنویسیم، داریم:

$$A=\log_2(3+2\sqrt{2})+\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1)=\log_2(\sqrt{2}+1)^2+\log_{2^{\frac{1}{2}}}(\sqrt{2}-1)=2\log_2(\sqrt{2}+1)+\frac{1}{\frac{1}{2}}\log_2(\sqrt{2}-1)$$

$$=2(\log_2(\sqrt{2}+1)+\log_2(\sqrt{2}-1))=2\log_2(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=2\log_2 1=2\times 0=0$$

۱۳- گزینه‌ی ۱ ابتدا مقدار A را می‌یابیم:

$$A=\log_{\sqrt{0/25}} 16=\log_{\sqrt{\frac{1}{4}}} 16=\log_{2^{-1}} 2^4=\frac{4}{-1}\log_2 2=-4 \Rightarrow \log_3(1-2A)=\log_3 9=\log_3 3^2=2$$

۱۴- گزینه‌ی ۲ با توجه به دامنه‌ی تعریف $x>0$، معادله را حل می‌کنیم:

$$(\log x)^2-\log x^2+1=0 \Rightarrow (\log x)^2-2\log x+1=0 \Rightarrow (\log x-1)^2=0 \Rightarrow \log x=1 \Rightarrow x=10$$

۱۵- گزینه‌ی ۴ با توجه به دامنه‌ی تعریف $x\neq1$ و $x>0$، معادله را حل می‌کنیم:

$$\log_3 x+\log_x 3=\frac{5}{2}\Rightarrow\log_3 x+\frac{1}{\log_3 x}=\frac{5}{2}\xrightarrow{\log_3 x=t}t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2}\Rightarrow 2t^2+2=5t\Rightarrow 2t^2-5t+2=0$$

$$\Rightarrow t=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}\Rightarrow\begin{cases}t=2\Rightarrow\log_3 x=2\Rightarrow x=9\\ t=\frac{1}{2}\Rightarrow\log_3 x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}\end{cases}$$

بنابراین حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $9\sqrt{3}$ است.

۱۶- گزینه‌ی ۱ ابتدا دامنه‌ی تعریف را مشخص می‌کنیم:

$x-1>0\Rightarrow x>1$

$x^2-7>0\Rightarrow x>\sqrt{7}$ یا $x<-\sqrt{7}$

در نتیجه این عبارت فقط برای $x>\sqrt{7}$ تعریف شده است. اکنون به حل معادله می‌پردازیم:

$$-\log_3(x-1)+\log_3(x^2-7)=1\Rightarrow\log_3\frac{x^2-7}{x-1}=1\Rightarrow\frac{x^2-7}{x-1}=3^1\Rightarrow x^2-7=3x-3\Rightarrow x^2-3x-4=0$$

$(x-4)(x+1)=0\Rightarrow x=4$ یا $x=-1$

با توجه به دامنه‌ی تعریف فقط $x=4$ قابل قبول است و داریم:

$$\log_9(7x-1)=\log_9 27=\log_{3^2}3^3=\frac{3}{2}$$

۱۷- گزینه‌ی ۳ از معادله‌ی اول مقدار x را پیدا می‌کنیم، سپس با جایگذاری در معادله‌ی دوم، y را می‌یابیم:

$$4^x+2^x=72\Rightarrow 2^{2x}+2^x-72=0\xrightarrow{2^x=t}t^2+t-72=0\Rightarrow(t+9)(t-8)=0\Rightarrow\begin{cases}t=8\Rightarrow 2^x=8\Rightarrow x=3\\ t=-9\Rightarrow 2^x=-9\quad \text{غ‌ق‌ق}\end{cases}$$

$$\log(x+1)+\log(2y+x^2)=2\xrightarrow{x=3}\log 4+\log(2y+9)=2\Rightarrow\log 4(2y+9)=2\Rightarrow 8y+36=10^2\Rightarrow 8y=64\Rightarrow y=8$$

سراسری خارج از کشور - ۹۲

۱۸- گزینه‌ی ۱ با توجه به این که پایه‌ی لگاریتم (۱۰) از یک بیش‌تر است، داریم:

$$\log(\frac{x+2}{4})<-1\Rightarrow\frac{x+2}{4}<10^{-1}\Rightarrow x+2<0/4\Rightarrow x<-1/6\quad(1)$$

از طرف دیگر، برای یافتن دامنه‌ی متغیر داریم:

$$\frac{x+2}{4}>0\Rightarrow x+2>0\Rightarrow x>-2\quad(2)$$

$$(1)\cap(2):-2<x<-1/6$$

بنابراین جواب سؤال برابر است با:

$$-2+1/6=-0/4=-\frac{2}{5}$$

۱۹- گزینه‌ی ۱ اگر قرار باشد ۱۴۰ واحد را در طی یک روز کامل کند، باید فرض کنیم $f(t)=140$ و پس از آن به شکل زیر عمل کنیم:

$$140=180-80e^{-0/02t}\Rightarrow 40=80e^{-0/02t}\Rightarrow\frac{1}{2}=e^{-0/02t}$$

اگر از طرفین تساوی لگاریتم در پایه‌ی e یعنی $\ln$ بگیریم، داریم:

$$\ln\frac{1}{2}=\ln e^{-\frac{2}{100}t}\Rightarrow-\ln 2=-\frac{2}{100}t\Rightarrow t=50\ln 2=50\times\frac{68}{100}=34$$

۲۰- گزینه‌ی ۲ برای این که تعداد باکتری‌ها برابر ۱۰۰۰۰ شود، باید معادله‌ی $f(t)=10000$ را حل کنیم:

$$2000e^{0/012t}=10000\Rightarrow e^{0/012t}=5$$

از دو طرف معادله در پایه‌ی e لگاریتم می‌گیریم:

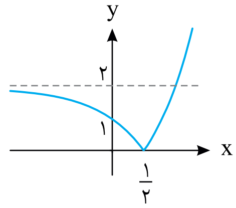
$$\ln e^{0/012t}=\ln 5\Rightarrow 0/012t=1/68\Rightarrow t=\frac{1/68}{\frac{12}{1000}}\Rightarrow t=\frac{1680}{12}\Rightarrow t=140$$

بنابراین ۱۴۰ دقیقه برابر دو ساعت و بیست دقیقه طول می‌کشد تا تعداد باکتری‌ها برابر ۱۰۰۰۰ شود.

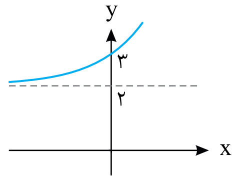
سراسری خارج از کشور - ۹۱

پاسخ تشریحی آزمون ۳۳

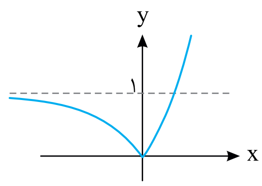
۱- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول**: با توجه به قوانین رسم نمودار و نمودار تابع $y=۲^x$ هر یک از گزینه‌ها در زیر رسم شده است.



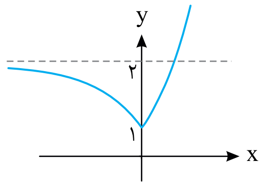
(گزینه‌ی ۲) $y=|۲^x-۲|$



(گزینه‌ی ۱) $y=|۲^x+۲|$



(گزینه‌ی ۴) $y=|۲^x-۱|$



(گزینه‌ی ۳) $y=|۲^x-۱|+۱$

راه‌حل دوم: با استفاده از روش عددگذاری گزینه‌های غلط را حذف می‌کنیم. مثلاً تابع گزینه‌ی (۴) از مبدأ مختصات می‌گذرد و تابع گزینه‌های (۱) و (۳) محور x ها را قطع نمی‌کند (زیرا معادله‌ی $f(x)=۰$ جواب ندارد). بنابراین تنها گزینه‌ی (۲) می‌تواند صحیح باشد.

۲- گزینه‌ی ۳ با توجه به اطلاعات سؤال، تابع مورد نظر از دو نقطه‌ی $A(-۱,۰)$ و $B(۱,-۱)$ می‌گذرد، بنابراین:

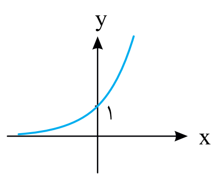
$$\begin{cases} A: ۰=\log_{\frac{۱}{۲}}(a(-۱)+b)\Rightarrow \log_{\frac{۱}{۲}}(-a+b)=۰\Rightarrow -a+b=۱ \\ B: -۱=\log_{\frac{۱}{۲}}(a\times ۱+b)\Rightarrow \log_{\frac{۱}{۲}}(a+b)=-۱\Rightarrow a+b=۲ \end{cases} \Rightarrow a=\frac{۱}{۲}\ ,\ b=\frac{۳}{۲}$$

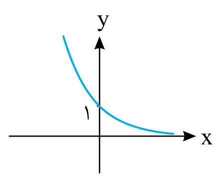
بنابراین ضابطه‌ی تابع برابر $y=\log_{\frac{۱}{۲}}(\frac{x+۳}{۲})$ می‌باشد، برای یافتن ضابطه‌ی وارون این تابع، ابتدا x را بر حسب y می‌نویسیم:

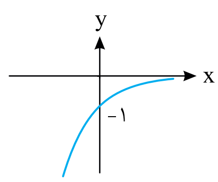
$$y=\log_{\frac{۱}{۲}}(\frac{x+۳}{۲})\Rightarrow \frac{x+۳}{۲}=(\frac{۱}{۲})^y\Rightarrow x+۳=۲\times ۲^{-y}\Rightarrow x=۲^{۱-y}-۳ \xrightarrow{f^{-۱}} y^{-۱}=۲^{۱-x}-۳$$

۳- گزینه‌ی ۳ می‌دانیم عدد e تقریباً برابر ۲/۷ و بزرگ‌تر از یک است. برای رسم نمودار، مطابق زیر عمل می‌کنیم:

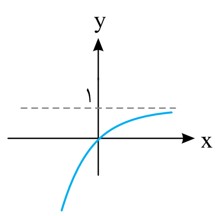
$$y=e^x \xrightarrow[\text{محور y ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y=e^{-x} \xrightarrow[\text{محور x ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y=-e^{-x}$$

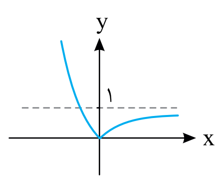






$$\xrightarrow[\text{به بالا}]{\text{یک واحد}} y=۱-e^{-x} \xrightarrow[\text{به بالا قرینه می‌کنیم}]{\text{پایین محور طول‌ها را}} y=|۱-e^{-x}|$$





۴- گزینه‌ی ۱ ابتدا با استفاده از $\log ۵$، مقدار لگاریتم ۲ را پیدا می‌کنیم:

$$\log ۵=b\Rightarrow\log\frac{۱۰}{۲}=b\Rightarrow\log ۱۰-\log ۲=b\Rightarrow ۱-\log ۲=b\Rightarrow\log ۲=۱-b$$

حال برای یافتن لگاریتم ۶ می‌توان نوشت:

$$\log ۶=\log\frac{۱۲}{۲}=\log ۱۲-\log ۲=a-(۱-b)=a+b-۱$$

۵- گزینه‌ی ۱ ابتدا لگاریتم خواسته شده را بر حسب لگاریتم ۵ می‌نویسیم:

$$\log\sqrt[۳]{۱/۶}=\log(\frac{۱۶}{۱۰})^{\frac{۱}{۳}}=\frac{۱}{۳}\log\frac{۸}{۵}=\frac{۱}{۳}(\log ۸-\log ۵)=\frac{۱}{۳}(۳\log ۲-\log ۵)=\frac{۱}{۳}(۳\log\frac{۱۰}{۵}-\log ۵)=$$

$$\frac{۱}{۳}(۳\log ۱۰-۳\log ۵-\log ۵)=\frac{۱}{۳}(۳-۴\log ۵)$$

سپس با جایگذاری $\log ۵=۳k$ داریم:

$$\log\sqrt[۳]{۱/۶}=\frac{۱}{۳}(۳-۴\times ۳k)=۱-۴k$$

سراسری خارج از کشور - ۹۰

۶- گزینه‌ی ۲ مقدار تقریبی هر یک از لگاریتم‌ها را محاسبه می‌کنیم:

گزینه‌ی (۱):

$$۲۷<۳۲<۸۱\Rightarrow ۳<\log_{۳} ۳۲<۴$$

گزینه‌ی (۲):

$$۱۶<۲۷<۳۲\Rightarrow ۴<\log_{۲} ۲۷<۵$$

گزینه‌ی (۳):

$$۶۴<۶۵<۲۵۶\Rightarrow ۳<\log_{۴} ۶۵<۴$$

گزینه‌ی (۴):

$$۱۰۰<۱۲۵<۱۰۰۰\Rightarrow ۲<\log ۱۲۵<۳$$

۷- گزینه‌ی ۴ **راه‌حل اول**: با توجه به این که $x=(۲^{۲})^{۳a-۱}=۲^{۶a-۲}$، با جایگذاری داریم:

$$\log_{x^{۲}} ۲x=\frac{\log_{۲} ۲x}{\log_{۲} x^{۲}}=\frac{\log_{۲} ۲\times ۲^{۶a-۲}}{\log_{۲}(۲^{۶a-۲})^{۲}}=\frac{\log_{۲} ۲^{۶a-۱}}{\log_{۲} ۲^{۱۲a-۴}}=\frac{۶a-۱}{۱۲a-۴}$$

راه‌حل دوم: می‌دانیم $x=۲^{۶a-۲}$، بنابراین $\log_{۲} x=۶a-۲$ و داریم:

$$\log_{x^{۲}} ۲x=\frac{۱}{۲}\log_{x} ۲x=\frac{۱}{۲}(\log_{x} ۲+\log_{x} x)=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{\log_{۲} x}+۱)=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۶a-۲}+۱)=\frac{۱}{۲}(\frac{۶a-۲+۱}{۶a-۲})=\frac{۶a-۱}{۱۲a-۴}$$

۸- گزینه‌ی ۲ با استفاده از قوانین، لگاریتم را ساده می‌کنیم:

$$\log(۶-۲\sqrt{۵})+۲\log(۱+\sqrt{۵})=\log(۶-۲\sqrt{۵})+\log(۶+۲\sqrt{۵})=\log((۶-۲\sqrt{۵})(۶+۲\sqrt{۵}))$$

$$=\log(۳۶-۲۰)=\log ۱۶=\log ۲^{۴}=۴\log ۲$$

با توجه به این که $\log ۲=k$، بنابراین مقدار خواسته شده برابر $۴k$ می‌باشد.

سراسری - ۹۰

۹- گزینه‌ی ۱ **راه‌حل اول**: با جایگذاری ۳×۱۵ به جای ۴۵ در عبارت داریم:

$$(\log_{۱۵} ۳)^{۲}+\log_{۱۵} ۵\times\log_{۱۵} ۴۵=(\log_{۱۵} ۳)^{۲}+\log_{۱۵} ۵\times(۱+\log_{۱۵} ۳)=(\log_{۱۵} ۳)^{۲}+\log_{۱۵} ۳\times\log_{۱۵} ۵+\log_{۱۵} ۵$$

$$=\log_{۱۵} ۳(\log_{۱۵} ۳+\log_{۱۵} ۵)+\log_{۱۵} ۵=\log_{۱۵} ۳(\log_{۱۵} ۱۵)+\log_{۱۵} ۵=\log_{۱۵} ۳+\log_{۱۵} ۵=\log_{۱۵} ۱۵=۱$$

راه‌حل دوم: با جایگذاری ۹×۵ به جای ۴۵ در عبارت داریم:

$$(\log_{۱۵} ۳)^{۲}+\log_{۱۵} ۵\times\log_{۱۵} ۴۵=(\log_{۱۵} ۳)^{۲}+\log_{۱۵} ۵(\log_{۱۵} ۳^{۲}+\log_{۱۵} ۵)$$

$$=(\log_{۱۵} ۳)^{۲}+۲\log_{۱۵} ۳\log_{۱۵} ۵+(\log_{۱۵} ۵)^{۲}=(\log_{۱۵} ۳+\log_{۱۵} ۵)^{۲}=(\log_{۱۵} ۱۵)^{۲}=۱$$

۱۰- گزینه‌ی ۲ ابتدا عبارت فارسی داده شده را به صورت یک معادله‌ی ریاضی نوشته و آن را حل می‌کنیم:

$$\log_{۳}(A+۲۴)=\log_{۳} A+۲\Rightarrow\log_{۳}(A+۲۴)=\log_{۳} A+\log_{۳} ۹\Rightarrow\log_{۳}(A+۲۴)=\log_{۳} ۹A\Rightarrow A+۲۴=۹A\Rightarrow ۸A=۲۴\Rightarrow A=۳$$

۱۱- گزینه‌ی ۲ ابتدا با حل معادله‌ی داده شده، مقدار x را پیدا می‌کنیم:

$$۹^{۱-x}=۳\sqrt[۳]{۳}\Rightarrow ۳^{۲-۲x}=۳^{۱+\frac{۱}{۳}}\Rightarrow ۲-۲x=\frac{۴}{۳}\Rightarrow ۲x=\frac{۲}{۳}\Rightarrow x=\frac{۱}{۳}$$

حال با جایگذاری x ، مقدار لگاریتم خواسته شده برابر است با:

$$\log_۳(۱۲x+۵)=\log_۳(\frac{۱۲}{۳}+۵)=\log_۳ ۹=۲$$

۱۲- گزینه‌ی ۴ **راه‌حل اول**: با تغییر متغیر $۳^x=t$ مسأله را حل می‌کنیم:

$$۳^{۲x+۱}-۳^{x-۱}=۳^{x+۲}-۱\Rightarrow ۳\times ۳^{۲x}-\frac{۳^x}{۳}=۳^۲\times ۳^x-۱\xrightarrow{۳^x=t} ۳t^۲-\frac{t}{۳}=۹t-۱\Rightarrow ۹t^۲-t=۲۷t-۳$$

$$\Rightarrow ۹t^۲-۲۸t+۳=۰\Rightarrow (۹t-۱)(t-۳)=۰\Rightarrow \begin{cases} t=۳\Rightarrow ۳^x=۳\Rightarrow x=۱ \\ t=\frac{۱}{۹}\Rightarrow ۳^x=\frac{۱}{۹}\Rightarrow x=-۲ \end{cases}$$

بنابراین مجموع ریشه‌های این معادله برابر -۱ است.

راه‌حل دوم: می‌توانیم بدون حل معادله‌ی $۹t^۲-۲۸t+۳=۰$ مجموع ریشه‌ها را پیدا کنیم:

$$\begin{cases} P=t_۱\times t_۲=۳^{x_۱}\times ۳^{x_۲}=۳^{x_۱+x_۲} \\ P=\frac{c}{a}=\frac{۳}{۹}=\frac{۱}{۳} \end{cases}\Rightarrow ۳^{x_۱+x_۲}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow x_۱+x_۲=-۱$$

۱۳- گزینه‌ی ۲ از دو طرف معادله‌ی داده شده در پایه‌ی e لگاریتم می‌گیریم:

$$e^x=۲^{\frac{۱}{x}}\Rightarrow \ln e^x=\ln ۲^{\frac{۱}{x}}\Rightarrow x=\frac{۱}{x}\ln ۲\Rightarrow x^۲=\ln ۲\Rightarrow \begin{cases} x_۱=+\sqrt{\ln ۲} \\ x_۲=-\sqrt{\ln ۲} \end{cases}\Rightarrow x_۱x_۲=-\ln ۲$$

۱۴- گزینه‌ی ۱ از دو طرف معادله در پایه‌ی ۲ لگاریتم می‌گیریم:

$$\log_۲(x^{۱+\log_۲ x})=\log_۲ ۶۴\Rightarrow (۱+\log_۲ x)\log_۲ x=۶\xrightarrow{\log_۲ x=t}(۱+t)t=۶\Rightarrow t^۲+t-۶=۰\Rightarrow (t+۳)(t-۲)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=۲\Rightarrow \log_۲ x=۲\Rightarrow x=۴ \\ t=-۳\Rightarrow \log_۲ x=-۳\Rightarrow x=\frac{۱}{۸} \end{cases}$$

بنابراین حاصل‌ضرب ریشه‌های این معادله برابر $۴\times\frac{۱}{۸}=\frac{۱}{۲}$ است.

۱۵- گزینه‌ی ۴ با تغییر متغیر $\log_۲ x=a$ داریم:

$$\log_۴ x+۲\log_x ۸=۴\Rightarrow \frac{۱}{۲}\log_۲ x+۶\log_x ۲=۴\Rightarrow \frac{۱}{۲}a+\frac{۶}{a}=۴\Rightarrow a^۲-۸a+۱۲=۰\Rightarrow (a-۲)(a-۶)=۰\Rightarrow \begin{cases} a=۲\Rightarrow \log_۲ x=۲\Rightarrow x=۴ \\ a=۶\Rightarrow \log_۲ x=۶\Rightarrow x=۶۴ \end{cases}$$

بنابراین حاصل‌جمع ریشه‌های این معادله برابر $۶۴+۴=۶۸$ است.

۱۶- گزینه‌ی ۴ از دو طرف معادله در پایه‌ی ۱۰ لگاریتم می‌گیریم:

$$\log(۳^{\log ۴})=\log(۲^{\log x})\Rightarrow \log ۴\times\log ۳=\log x\times\log ۲\Rightarrow ۲\log ۲\times\log ۳=\log x\times\log ۲\Rightarrow \log x=۲\log ۳$$

$$\Rightarrow \log x=\log ۳^۲\Rightarrow x=۹$$

۱۷- گزینه‌ی ۳ ابتدا با ساده کردن معادله‌ی لگاریتمی داده شده، x را بر حسب y پیدا می‌کنیم:

$$\log_۲ x=۱+\log_۲(y+۱)\Rightarrow \log_۲ x=\log_۲ ۲+\log_۲(y+۱)\Rightarrow \log_۲ x=\log_۲ ۲(y+۱)\Rightarrow x=۲y+۲$$

حال با جایگذاری $x=۲y+۲$ در معادله‌ی اول، x و y را پیدا می‌کنیم:

$$x^۲-y^۲=۳۲\Rightarrow (۲y+۲)^۲-y^۲=۳۲\Rightarrow ۳y^۲+۸y-۲۸=۰\Rightarrow y=\frac{-۴\pm\sqrt{۱۶+۸۴}}{۳}\Rightarrow y=۲ \text{ یا } y=-\frac{۱۴}{۳}$$

برای این که $\log_۲(y+۱)$ تعریف شده باشد، باید $y>-۱$ باشد، بنابراین مقدار $-\frac{۱۴}{۳}$ برای y غیر قابل قبول است، یعنی $y=۲$.

$$x=۲y+۲\xrightarrow{y=۲}x=۶$$

$$\log_۲(x+y)=\log_۲(۶+۲)=\log_۲ ۸=۳$$

۱۸- گزینه‌ی ۳ نامعادله را به صورت $(e-2)^{2x-1}>e-2$ بازنویسی کرده و از دو طرف نامعادله در پایه‌ی $e-2$ لگاریتم می‌گیریم، به این دلیل که پایه‌ی لگاریتم (عدد $e-2$)، حدوداً برابر ۰/۷ و کوچک‌تر از یک است، جهت نامساوی تغییر می‌کند:

$$(e-2)^{2x-1}>e-2\Rightarrow \log_{e-2}(e-2)^{2x-1}<\log_{e-2}(e-2)\Rightarrow 2x-1<1\Rightarrow 2x<2\Rightarrow x<1$$

۱۹- گزینه‌ی ۱ باید معادله‌ی $f(t)=65$ را حل کنیم:

$$f(t)=65\Rightarrow 90-50e^{-0/2t}=65\Rightarrow 50e^{-0/2t}=25\Rightarrow e^{-0/2t}=\frac{1}{2}$$

اکنون از دو طرف معادله در پایه‌ی e لگاریتم می‌گیریم:

$$\ln(e^{-0/2t})=\ln\frac{1}{2}\Rightarrow -0/2t=-\ln 2\Rightarrow 0/2t=\ln 2\xrightarrow{\log_e 2=0/7} 0/2t=0/7\Rightarrow t=\frac{7}{2}\Rightarrow t=3/5$$

سراسری خارج از کشور - ۸۹

۲۰- گزینه‌ی ۴ با توجه به این که در تابع رشد $f(t)=Ae^{kt}$، عدد A مقدار اولیه را نشان می‌دهد، بنابراین $A=1400$. اکنون به معادله‌ی $f(t)=7000$ می‌پردازیم:

$$f(t)=7000\Rightarrow 7000=1400e^{0/04t}\Rightarrow e^{0/04t}=\frac{70}{14}\Rightarrow e^{0/04t}=5$$

از دو طرف معادله در پایه‌ی e لگاریتم می‌گیریم:

$$\ln e^{0/04t}=\ln 5\Rightarrow 0/04t=1/68\Rightarrow t=\frac{168}{4}\Rightarrow t=42$$

سراسری - ۹۲

آزمون‌های مرحله‌ای

۸
مثلثات

پاسخ تشریحی آزمون‌های فصل هشتم

پاسخ تشریحی آزمون ۳۴

۱- گزینه‌ی ۱ ابتدا 125° را به رادیان تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{125^\circ}{180^\circ}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{25\pi}{36}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{cases}A+B=\dfrac{25\pi}{36}\\[2mm] A-B=\dfrac{5\pi}{12}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\dfrac{5\pi}{9}\\[2mm] B=\dfrac{5\pi}{36}\end{cases}\xrightarrow{A+B+C=\pi}C=\frac{11\pi}{36}$$

بنابراین اندازه‌ی کوچک‌ترین زاویه‌ی مثلث $\frac{5\pi}{36}$ رادیان است.

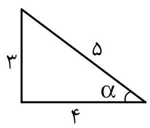
۲- گزینه‌ی ۱

$$\sin\theta(\tan\theta+\cot\theta)=\sin\theta\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)=\sin\theta\left(\frac{\overbrace{\sin^2\theta\cos^2\theta}^{1}}{\sin\theta\cos\theta}\right)=\frac{1}{\cos\theta}$$

۳- گزینه‌ی ۳ عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$A=\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\theta\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta-\sin\theta$$

حال با توجه به شکل مقابل داریم:



$$\tan\alpha=\frac{3}{4}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{3}{5},\ \cos\alpha=\frac{4}{5}$$

ولی چون θ در ناحیه‌ی سوم قرار دارد. داریم:

$$\tan\theta=\frac{3}{4}\Rightarrow\cos\theta=-\frac{4}{5},\ \sin\theta=-\frac{3}{5}$$

۴- گزینه‌ی ۱

$$A=\sin 240^\circ+\sin 210^\circ+\sin 150^\circ+\sin 120^\circ=\sin(180^\circ+60^\circ)+\sin(180^\circ+30^\circ)+\sin(180^\circ-30^\circ)+\sin(180^\circ-60^\circ)$$

$$\Rightarrow A=-\sin 60^\circ-\sin 30^\circ+\sin 30^\circ+\sin 60^\circ=0$$

۵- گزینه‌ی ۳ عبارت را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)+2\cos(\pi+\alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)+2\sin(\pi-\alpha)}=\frac{\cos\alpha-2\cos\alpha}{-\sin\alpha+2\sin\alpha}=\frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\cot\alpha$$

۶- گزینه‌ی ۴ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OMC داریم:

$$\cos\alpha=\frac{OM}{OC}=\frac{1}{OC}\Rightarrow OC=\frac{1}{\cos\alpha}$$

از طرفی داریم $OA=1$ پس می‌توان نوشت:

$$AC=OC-OA=\frac{1}{\cos\alpha}-1$$

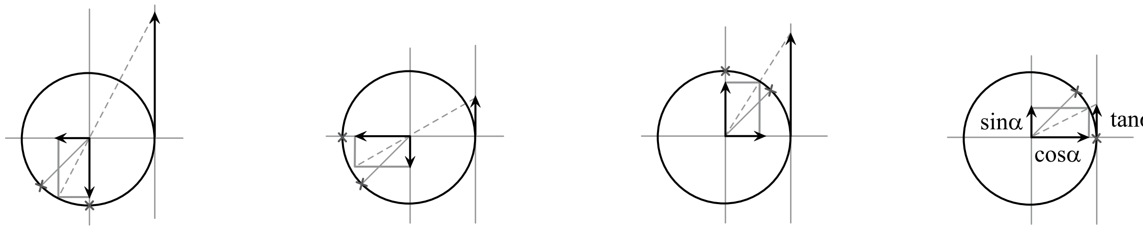
۷- گزینه‌ی ۲

$$\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{-1}{\sqrt{1+9}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$$

۸- گزینه‌ی ۳ طول پاره‌خط AB برابر $\tan\alpha$ است و α زاویه‌ای است که جهت مثبت محور xها با شعاع OM می‌سازد. بنابراین داریم:

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{-0/8}{1}=-0/8\Rightarrow 1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow 1+\tan^2\alpha=\frac{1}{(\frac{8}{10})^2}\Rightarrow\tan^2\alpha=\frac{100}{64}-1=\frac{36}{64}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}=0/75$$

۹- گزینه‌ی ۴ در هر کدام از گزینه‌ها داریم:



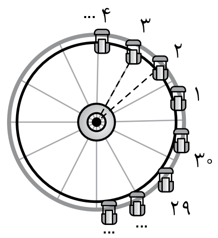
$\circ<x<\frac{\pi}{۴}\Rightarrow \sin x<\tan x$
$\cos x$ گاهی از $\tan x$ بزرگ‌تر و گاهی کوچک‌تر است.

$\frac{\pi}{۴}<x<\frac{\pi}{۲}$
$\Rightarrow \cos x<\sin x<\tan x$

$\pi<x<\frac{۵\pi}{۴}$
$\Rightarrow \cos x<\sin x<\tan x$

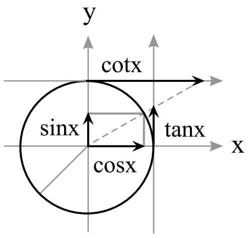
$\frac{۵\pi}{۴}<x<\frac{۳\pi}{۲}$
$\Rightarrow \sin x<\cos x<\tan x$

۱۰- گزینه‌ی ۳ زاویه‌ی بین هر دو کابین متوالی برابر است با: $\alpha=\frac{۲\pi}{۳۰}=\frac{\pi}{۱۵}$



اگـر چـرخ‌و فلک $\frac{۸۳\pi}{۱۵}$ دوران کند، هر کابین به موقعیت ۸۳ کابین جلوتر منتقل می‌شـود. یعنی هر کابین دو دور کامل می‌چرخد. (۶۰ کابین) سپس در موقعیت ۲۳ کابین جلوتر می‌ایستد. پس کابین ۴ به موقعیت کابین ۲۷ منتقل می‌شود.

۱۱- گزینه‌ی ۴ در ناحیه‌ی اول مثلثاتی داریم $\tan x>\sin x$ و $\cot x>\cos x$، بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست هستند.



در ناحیه‌ی دوم مثلثاتی $\tan x$ صعودی است پس $\tan ۱۳۰^\circ>\tan ۱۴۰^\circ$ و گزینه‌ی (۳) نادرست است.

در گزینه‌ی (۴) داریم:

$$\begin{cases}\sin ۲۲۰^\circ=-\sin ۴۰^\circ\\ \sin ۳۴۰^\circ=-\sin ۲۰^\circ\Rightarrow \sin ۲۲۰^\circ<\sin ۳۴۰^\circ\\ \sin ۲۰^\circ<\sin ۴۰^\circ\end{cases}$$

۱۲- گزینه‌ی ۴ چون طول کمان ACB برابر ۱۰π است، بنابراین طول کمان AB برابر است با محیط دایره منهای ۱۰π. یعنی:

$$\overset{\frown}{AB}=۲\pi\times ۶-۱۰\pi=۲\pi$$

از طرفی می‌دانیم اگر طول کمان روبه‌رو به زاویه‌ی مرکزی θ رادیان برابر L باشد، داریم:

$$L=R\theta$$

پس می‌توان نوشت:

$$۲\pi=۶\theta\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{۳}$$

پس مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است و داریم:

$$AB=R=۶$$

۱۳- گزینه‌ی ۳ می‌دانیم دوره تناوب توابع $y=a\sin(bx+c)$ و $y=a\cos(bx+c)$ برابر $T=\frac{۲\pi}{|b|}$ است. پس داریم:

$$T_f=\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۲}}=۴\quad,\ T_g=\frac{۲\pi}{|-a|}=\frac{۲\pi}{|a|}$$

بنابراین داریم:

$$T_f=۲T_g\Rightarrow ۴=\frac{۴\pi}{|a|}\Rightarrow |a|=\pi\Rightarrow a=\pm\pi$$

۱۴- گزینه‌ی ۲ نمودار از مبدأ مختصات عبور کرده است، پس $x=\circ$ و $y=\circ$ در ضابطه‌ی تابع صدق می‌کنند. بنابراین گزینه‌های (۱) و (۳) نادرست هستند.

در گزینه‌ی (۴) داریم:

$$x=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow y=۱-۲\cos(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۳})=۱+۲\sin\frac{\pi}{۳}=۱+\sqrt{۳}$$

در حالی که در نمودار داده شده داریم $f(\frac{\pi}{۲})<\circ$ پس گزینه‌ی (۴) نیز نادرست است. در گزینه‌ی (۲) داریم:

$$x=\circ\Rightarrow y=۱-۲\sin\frac{\pi}{۶}=\circ\ \checkmark$$

$$x=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow y=۱-۲\sin(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶})=۱-۲\cos\frac{\pi}{۶}=۱-\sqrt{۳}<\circ\ \checkmark$$

$$x=-\frac{\pi}{۲}\Rightarrow y=۱-۲\sin(-\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶})=۱+۲\cos\frac{\pi}{۶}=۱+\sqrt{۳}>\circ\ \checkmark$$

۱۵- گزینه‌ی ۲ در مثلث ABH داریم:

$$\sin\hat{B}=\frac{AH}{AB}\Rightarrow AH=2\sin\alpha$$

در مثلث AHC داریم:

$$\tan\hat{C}=\frac{AH}{HC}\Rightarrow\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\frac{2\sin\alpha}{x}\Rightarrow\cot\alpha=\frac{2\sin\alpha}{x}\Rightarrow x=\frac{2\sin\alpha}{\cot\alpha}\Rightarrow x=2\sin\alpha\tan\alpha$$

۱۶- گزینه‌ی ۱ از رابطه‌ی $\sin\frac{\hat{A}}{3}=\cos\hat{B}$ داریم:

$$\frac{\hat{A}}{3}=90^\circ-\hat{B}\Rightarrow\hat{A}=270^\circ-3\hat{B}$$

از طرفی داریم:

$$\hat{C}=60^\circ\Rightarrow\hat{A}+\hat{B}=120^\circ$$

پس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}\hat{A}=270^\circ-3\hat{B}\\ \hat{A}+\hat{B}=120^\circ\end{cases}\Rightarrow 270^\circ-3\hat{B}+\hat{B}=120^\circ\Rightarrow 2\hat{B}=150^\circ\Rightarrow\hat{B}=75^\circ$$

۱۷- گزینه‌ی ۳ از قضیه‌ی سینوس‌ها کمک می‌گیریم:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow\frac{a}{\sin 30^\circ}=\frac{2\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}\Rightarrow\frac{a}{\frac{1}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Rightarrow 2a=4\Rightarrow a=2$$

اندازه‌ی زاویه‌ی C برابر است با:

$$\hat{C}=180^\circ-30^\circ-120^\circ=30^\circ$$

بنابراین مثلث متساوی‌الساقین است و داریم:

$$c=a=2$$

۱۸- گزینه‌ی ۴ از قضیه‌ی کسینوس‌ها استفاده می‌کنیم:

$$3^2=5^2+6^2-2\times5\times6\cos\alpha$$

$$\Rightarrow 9=61-60\cos\alpha\Rightarrow 60\cos\alpha=52\Rightarrow\cos\alpha=\frac{52}{60}=\frac{13}{15}$$

۱۹- گزینه‌ی ۲ در مثلث OAB از قضیه‌ی کسینوس‌ها استفاده می‌کنیم:

$$AB^2=R^2+R^2-2R^2\cos\alpha\Rightarrow 4(2-\sqrt{2})=4+4-8\cos\alpha\Rightarrow -4\sqrt{2}=-8\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\alpha=45^\circ$$

۲۰- گزینه‌ی ۳ رابطه‌ی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$a^3-c^3=b^2(a-c)\Rightarrow(a-c)(a^2+ac+c^2)-b^2(a-c)=0$$

$$\Rightarrow(a-c)(a^2+c^2+ac-b^2)=0\Rightarrow\begin{cases}a=c\Rightarrow\hat{A}=\hat{C}\\ a^2+c^2+ac=b^2\Rightarrow a^2+c^2+ac=a^2+c^2-2ac\cos B\Rightarrow\cos B=-\frac{1}{2}\Rightarrow\hat{B}=120^\circ\end{cases}$$

پاسخ تشریحی آزمون ۳۵

۱- گزینه‌ی ۴ مخرج مشترک می‌گیریم:

$$A=\frac{1+\cos\theta-1+\cos\theta}{1-\cos^2\theta}\times\sin\theta=\frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}\times\sin\theta=\frac{2\cos\theta}{\sin\theta}=2\cot\theta$$

۲- گزینه‌ی ۴ در صورت کسر از $\cot^2 x$ و در مخرج کسر از $\tan^2 x$ فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{\cos^2 x-\cot^2 x}{\sin^2 x-\tan^2 x}=\frac{\cot^2 x(\sin^2 x-1)}{\tan^2 x(\cos^2 x-1)}=\frac{-\cot^2 x\times\cos^2 x}{-\tan^2 x\times\sin^2 x}=\cot^6 x$$

۳- گزینه‌ی ۲ با توجه به این که در ناحیه‌ی چهارم مقادیر $\sin$ منفی هستند، داریم:

$$\tan x=-\frac{1}{2}\Rightarrow\cot x=-2$$

$$1+\cot^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}\Rightarrow 1+4=\frac{1}{\sin^2 x}\Rightarrow\sin^2 x=\frac{1}{5}\Rightarrow\begin{cases}\sin x=\frac{\sqrt{5}}{5} & \text{غ‌ق‌ق}\\ \sin x=-\frac{\sqrt{5}}{5}\end{cases}$$

۴- گزینه‌ی ۳ زاویه‌ها را بر حسب $\frac{\pi}{10}$ می‌نویسیم:

$$\sin\frac{11\pi}{10}+\cos\frac{9\pi}{10}+\sin\frac{3\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}=\sin(\pi+\frac{\pi}{10})+\cos(\pi-\frac{\pi}{10})+\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{10})-\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10})=-\sin\frac{\pi}{10}-\cos\frac{\pi}{10}+\cos\frac{\pi}{10}-\sin\frac{\pi}{10}=-2\sin\frac{\pi}{10}$$

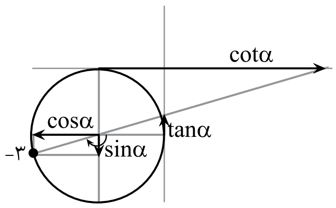
۵- گزینه‌ی ۱ زاویه‌های عبارت را بر حسب ۳۵° می‌نویسیم:

$$\frac{۳\sin ۱۲۵^\circ+۲\cos ۳۰۵^\circ}{۴\sin ۱۴۵^\circ+۳\cos ۲۳۵^\circ}=\frac{۳\sin(۹۰^\circ+۳۵^\circ)+۲\cos(۲۷۰^\circ+۳۵^\circ)}{۴\sin(۱۸۰^\circ-۳۵^\circ)+۳\cos(۲۷۰^\circ-۳۵^\circ)}=\frac{۳\cos ۳۵^\circ+۲\sin ۳۵^\circ}{۴\sin ۳۵^\circ-۳\sin ۳۵^\circ}=\frac{۳\cos ۳۵^\circ+۲\sin ۳۵^\circ}{\sin ۳۵^\circ}$$

$$=۳\cot ۳۵^\circ+۲=۳\times\frac{۱۰}{۷}+۲=\frac{۴۴}{۷}$$

۶- گزینه‌ی ۴ پس از دوران، نقطه‌ی A بر نقطه‌ی A' منطبق خواهد شد که مختصات آن $(-\frac{\sqrt{۲}}{۲},-\frac{\sqrt{۲}}{۲})$ است.

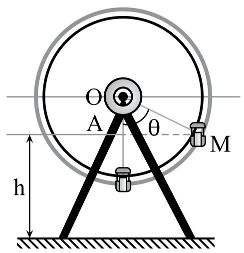
۷- گزینه‌ی ۲ نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی -۳ رادیان در شکل مقابل نمایش داده شده است.



واضح است که تانژانت و کتانژانت این زاویه مثبت و سینوس و کسینوس آن منفی هستند. همچنین داریم:

$$\alpha=-۳\Rightarrow\cos\alpha<\sin\alpha<\tan\alpha<\cot\alpha$$

۸- گزینه‌ی ۱ اگر فرض کنیم چرخ و فلک در t دقیقه θ رادیان می‌چرخد و در نقطه‌ی M قرار می‌گیرد، داریم:

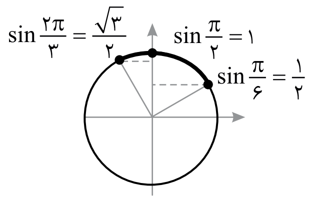


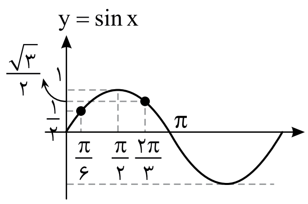
$$\theta=\frac{t}{۴}\times ۲\pi=\frac{\pi}{۲}t$$

$$h=۳۰-OA$$

$$OA=OM\cos\theta=۲۵\cos\theta\Rightarrow h=۳۰-۲۵\cos(\frac{\pi}{۲}t)$$

۹- گزینه‌ی ۲ با توجه به هر یک از شکل‌های مقابل می‌توان فهمید که اگر $\frac{\pi}{۶}<x<\frac{۲\pi}{۳}$ آن‌گاه $\frac{۱}{۲}<\sin x\le ۱$ و می‌توان نوشت:





$$\frac{۱}{۲}<\frac{m-۱}{۴}\le ۱\Rightarrow ۲<m-۱\le ۴\Rightarrow ۳<m\le ۵$$

بنابراین m می‌تواند مقادیر ۴ و ۵ را داشته باشد.

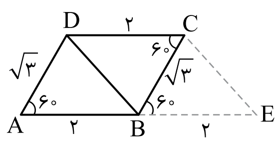
۱۰- گزینه‌ی ۱ مساحت قسمت رنگی برابر تفاضل مساحت قطاع OAB و مثلث OAB است. پس داریم:

$$\text{مساحت قطاع}=\frac{۱}{۲}R^۲\alpha=\frac{۱}{۲}\times ۴\alpha=۲\alpha\quad,\quad \text{مساحت مثلث}=\frac{۱}{۲}R^۲\sin\alpha=\frac{۱}{۲}\times ۴\sin\alpha=۲\sin\alpha\Rightarrow ۲\alpha-۲\sin\alpha=\frac{\pi-۳}{۳}\Rightarrow\alpha-\sin\alpha=\frac{\pi}{۶}-\frac{۱}{۲}$$

واضح است که $\alpha=\frac{\pi}{۶}$ جواب معادله‌ی فوق است. پس طول کمان برابر است با:

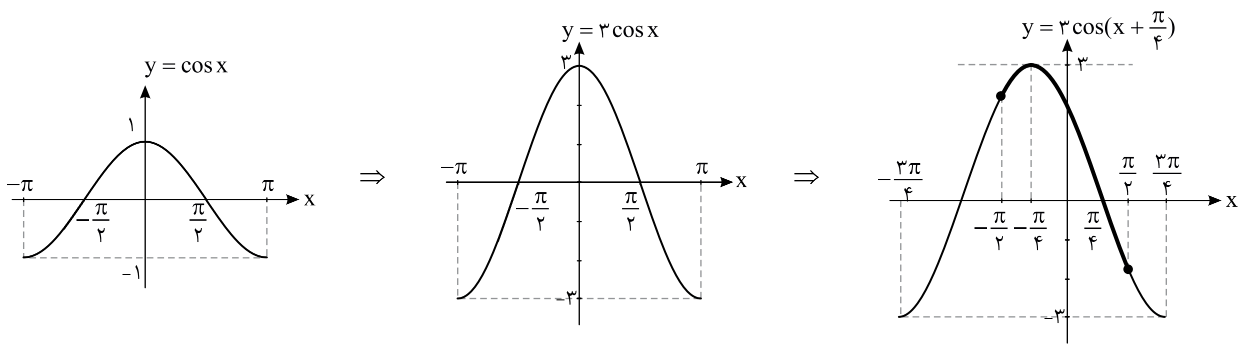
$$\overset{\frown}{AB}=R\alpha=۲\times\frac{\pi}{۶}=\frac{\pi}{۳}$$

۱۱- گزینه‌ی ۱ با توجه به شکل مقابل، مساحت ذوزنقه سه برابر مساحت مثلث ABD است. پس داریم:



$$S_{\overset{\Delta}{ABD}}=\frac{۱}{۲}\times AB\times AD\times\sin ۶۰^\circ=\frac{۱}{۲}\times ۲\times\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow S_{AECD}=۳\times\frac{۳}{۲}=\frac{۹}{۲}$$

۱۲- گزینه‌ی ۲ نمودار تابع را به ترتیب زیر رسم می‌کنیم:



همان‌طور که ملاحظه می‌کنید در بازه‌ی خواسته شده، نمودار در ناحیه‌ی سوم قرار نمی‌گیرد.

۱۳- گزینه‌ی (۳) با توجه به شکل $f(۰)=-۲$، پس می‌توان نوشت:

$$-۲=a\cos ۰\Rightarrow a=-۲$$

از طرفی دوره تناوب تابع برابر ۶ است. پس داریم:

$$\frac{۲\pi}{|b|}=۶\Rightarrow |b|=\frac{\pi}{۳}\Rightarrow b=\pm\frac{\pi}{۳}$$

بنابراین مقدار ab می‌تواند $\frac{۲\pi}{۳}$ یا $-\frac{۲\pi}{۳}$ باشد.

۱۴- گزینه‌ی (۱) در مثلث ABH داریم:

$$\cos B=\frac{BH}{c}\Rightarrow BH=c\cos B$$

در مثلث AHC داریم:

$$\cos C=\frac{HC}{b}\Rightarrow HC=b\cos C$$

از جمع کردن طرفین روابط فوق داریم:

$$BH+HC=b\cos C+c\cos B\Rightarrow b\cos C+c\cos B=BC=a$$

۱۵- گزینه‌ی (۴) می‌دانیم $\cot\alpha=\tan(۹۰^\circ-\alpha)$ بنابراین داریم:

$$\tan(A+۳۰^\circ)\tan(B+۳۰^\circ)=۱\Rightarrow\tan(A+۳۰^\circ)=\frac{۱}{\tan(B+۳۰^\circ)}=\cot(B+۳۰^\circ)\Rightarrow A+۳۰^\circ=۹۰^\circ-(B+۳۰^\circ)$$

$$\Rightarrow A+B=۳۰^\circ\Rightarrow C=۱۸۰^\circ-۳۰^\circ=۱۵۰^\circ$$

۱۶- گزینه‌ی (۳) از قضیه‌ی سینوس‌ها استفاده می‌کنیم:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow\frac{۶}{\sin ۳۰^\circ}=\frac{۶\sqrt{۲}}{\sin B}\Rightarrow\sin B=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\begin{cases}B=۴۵^\circ\Rightarrow C=۱۸۰^\circ-(۴۵^\circ+۳۰^\circ)=۱۰۵^\circ\\ B=۱۳۵^\circ\Rightarrow C=۱۸۰^\circ-(۱۳۵^\circ+۳۰^\circ)=۱۵^\circ\end{cases}$$

۱۷- گزینه‌ی (۳) رابطه‌ی داده شده را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$b\cos C=c\sin B\Rightarrow\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\cos C}$$

طبق قضیه‌ی سینوس‌ها داریم:

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}$$

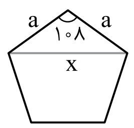
از دو رابطه‌ی فوق می‌توان نتیجه گرفت:

$$\sin C=\cos C\Rightarrow\hat{C}=۴۵^\circ$$

پس داریم:

$$A+B+C=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۱۱۰^\circ+B+۴۵^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{B}=۲۵^\circ$$

۱۸- گزینه‌ی (۳) اگر طول ضلع پنج ضلعی منتظم را a و طول قطر آن را x بنامیم، مطابق شکل داریم:



$$x^۲=a^۲+a^۲-۲a^۲\cos ۱۰۸^\circ=۲a^۲-۲a^۲\cos(۱۸۰^\circ-۷۲^\circ)=۲a^۲(۱+\cos ۷۲^\circ)=۲a^۲\times ۲\cos^۲ ۳۶^\circ$$

$$\frac{x^۲}{a^۲}=۴\cos^۲ ۳۶^\circ\Rightarrow\frac{x}{a}=۲\cos ۳۶^\circ$$

۱۹- گزینه‌ی (۳) از قضیه‌ی سینوس‌ها استفاده می‌کنیم:

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow c\sin B=b\sin C\Rightarrow c^۲\sin^۲ B=b^۲\sin^۲ C$$

حال با توجه به رابطه‌ی داده شده داریم:

$$b^۲\cos^۲ C+c^۲\sin^۲ B=۹\Rightarrow b^۲\cos^۲ C+b^۲\sin^۲ C=۹\Rightarrow b^۲(\sin^۲ C+\cos^۲ C)=۹\Rightarrow b^۲=۹\Rightarrow b=۳$$

۲۰- گزینه‌ی (۱) با توجه به قضیه‌ی سینوس‌ها داریم:

$$\frac{a}{\sin ۳۰^\circ}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow\sin B=\frac{b}{۲a}\ ,\ \sin C=\frac{c}{۲a}$$

با جایگذاری مقادیر فوق در رابطه‌ی داده شده داریم:

$$\frac{a(\sin B+\sin C)}{b+c}=\frac{a(\frac{b}{۲a}+\frac{c}{۲a})}{b+c}=\frac{\frac{b+c}{۲}}{b+c}=\frac{۱}{۲}$$

پاسخ تشریحی آزمون ۳۶

۱- گزینه‌ی (۱) از فرمول نسبت‌های مثلثاتی زوایای مرکب استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\cos ۲۰^\circ\cos ۴۰^\circ-\sin ۲۰^\circ\sin ۴۰^\circ}{\sin ۲۰^\circ\cos ۴۰^\circ+\sin ۴۰^\circ\cos ۲۰^\circ}=\frac{\cos(۲۰^\circ+۴۰^\circ)}{\sin(۲۰^\circ+۴۰^\circ)}=\cot ۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۲- گزینه‌ی ۴

$$\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 30^\circ\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{4}\Rightarrow|a-b|=|6-2|=4$$

۳- گزینه‌ی ۱ ابتدا عبارت را ساده می‌کنیم:

$$A=2\sin x\cos x\sin 3x-\cos 3x\cos 2x=\sin 2x\sin 3x-\cos 3x\cos 2x=-\cos(3x+2x)=-\cos 5x$$

حال مقدار A را به ازای $x=\frac{\pi}{15}$ محاسبه می‌کنیم:

$$x=\frac{\pi}{15}\Rightarrow A=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$

۴- گزینه‌ی ۳ اگر فرض کنیم $x=\tan(\alpha+\beta)$ خواهیم داشت:

$$\tan 2\alpha=\tan((\alpha+\beta)+(\alpha-\beta))=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha-\beta)}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan(\alpha-\beta)}$$

$$1=\frac{x+\frac{3}{7}}{1-\frac{3}{7}x}\rightarrow 1-\frac{3}{7}x=x+\frac{3}{7}\Rightarrow\frac{4}{7}=\frac{10}{7}x\Rightarrow x=\frac{2}{5}$$

۵- گزینه‌ی ۳ زاویه‌ها را به زاویه‌های کوچک‌تر تبدیل می‌کنیم:

$$\sin 195^\circ\sin 285^\circ=\sin(180^\circ+15^\circ)\sin(270^\circ+15^\circ)=(-\sin 15^\circ)(-\cos 15^\circ)=\sin 15^\circ\cos 15^\circ=\frac{1}{2}\sin 30^\circ=\frac{1}{4}$$

۶- گزینه‌ی ۱

$$\tan 15^\circ+\cot 15^\circ=\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}+\frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ}=\frac{\sin^2 15^\circ+\cos^2 15^\circ}{\sin 15^\circ\cos 15^\circ}=\frac{1}{\frac{1}{2}\sin 30^\circ}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4$$

۷- گزینه‌ی ۴ عبارت داده شده را بر حسب سینوس و کسینوس می‌نویسیم:

$$\tan 22/5^\circ-\cot 22/5^\circ=\frac{\sin 22/5^\circ}{\cos 22/5^\circ}-\frac{\cos 22/5^\circ}{\sin 22/5^\circ}=\frac{\sin^2 22/5^\circ-\cos^2 22/5^\circ}{\sin 22/5^\circ\cos 22/5^\circ}=\frac{-\cos(2\times 22/5^\circ)}{\frac{1}{2}\sin(2\times 22/5^\circ)}=\frac{-2\cos 45^\circ}{\sin 45^\circ}=-2\cot 45^\circ=-2$$

۸- گزینه‌ی ۱ ابتدا عبارت را ساده می‌کنیم:

$$A=\sin x\cos^3 x-\sin^3 x\cos x=\sin x\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)=\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x=\frac{1}{4}\sin 4x$$

حال به جای x مقدار $\frac{\pi}{24}$ را قرار می‌دهیم:

$$x=\frac{\pi}{24}\Rightarrow A=\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{8}$$

۹- گزینه‌ی ۱ از اتحاد $\tan x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{2}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}\Rightarrow 1-\tan^2\frac{x}{2}=4\tan\frac{x}{2}\Rightarrow\tan^2\frac{x}{2}+4\tan\frac{x}{2}-1=0\Rightarrow\begin{cases}\tan\frac{x}{2}=-2+\sqrt{5}\\ \tan\frac{x}{2}=-2-\sqrt{5}\end{cases}$$

چون $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$ پس $\frac{\pi}{2}<\frac{x}{2}<\frac{3\pi}{4}$ و $\tan\frac{x}{2}<0$ و مقدار $-2+\sqrt{5}$ قابل قبول نیست.

۱۰- گزینه‌ی ۳ از رابطه‌ی داده شده داریم:

$$\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}=3\Rightarrow\sin x=3\sin x+3\cos x\Rightarrow-2\sin x=3\cos x\Rightarrow\tan x=-\frac{3}{2}$$

بنابراین داریم:

$$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\frac{2(-\frac{3}{2})}{1-(-\frac{3}{2})^2}=\frac{12}{5}$$

۱۱- گزینه‌ی ۱ **راه‌حل اول:** مقدار $\tan 2x$، سپس مقدار $\cos 2x$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\frac{2(2-\sqrt{3})}{1-(2-\sqrt{3})^2}=\frac{2(2-\sqrt{3})}{2(2\sqrt{3}-3)}=\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$1+\tan^2 2x=\frac{1}{\cos^2 2x}\Rightarrow 1+\frac{1}{3}=\frac{1}{\cos^2 2x}\Rightarrow\cos^2 2x=\frac{3}{4}\Rightarrow\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

راه‌حل دوم:

$$\cos 2x=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\frac{1-(2-\sqrt{3})^2}{1+(2-\sqrt{3})^2}=\frac{-6+4\sqrt{3}}{8-4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱۲- گزینهٔ ۲ به اتحاد زیر توجه کنید:

$$\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\frac{1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\frac{\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$$

بنابراین داریم:

$$\frac{1-\tan^2(\frac{\pi}{4}-\alpha)}{1+\tan^2(\frac{\pi}{4}-\alpha)}=\cos(2(\frac{\pi}{4}-\alpha))=\cos(\frac{\pi}{2}-2\alpha)=\sin 2\alpha$$

۱۳- گزینهٔ ۲ می‌دانیم $1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$، پس داریم:

$$\tan 20^\circ(1+\cos 40^\circ)=\frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}\times 2\cos^2 20^\circ=2\sin 20^\circ\cos 20^\circ=\sin 40^\circ$$

۱۴- گزینهٔ ۳ از اتحاد $\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$ استفاده می‌کنیم و داریم:

$$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\frac{15}{17}}{1+\frac{15}{17}}=\frac{2}{32}=\frac{1}{16}\Rightarrow\begin{cases}\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{4}\\ \tan\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{4}\end{cases}$$

با توجه به فرض مسأله، $\pi\le\alpha\le\frac{3\pi}{2}$، بنابراین $\frac{\pi}{2}\le\frac{\alpha}{2}\le\frac{3\pi}{4}$ و $\tan\frac{\alpha}{2}$ منفی است. پس داریم:

$$\tan\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{4}$$

۱۵- گزینهٔ ۴ فرض مسأله را ساده می‌کنیم:

$$\sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cos x=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

طرفین رابطه را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\frac{1}{2}(\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x)=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{1}{2}(1+\sin 2x)=\frac{1}{3}\Rightarrow\sin 2x=-\frac{1}{3}$$

حال عبارت خواسته شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\tan x}{1+\tan^2 x}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x=\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{3})=-\frac{1}{6}$$

۱۶- گزینهٔ ۲ رابطه‌ی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\tan\frac{2\pi}{3}\sin(\frac{3\pi}{2}-x)=1\Rightarrow(-\sqrt{3})(-\cos x)=1\Rightarrow\cos x=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

بنابراین داریم:

$$\cos 2x=2\cos^2 x-1\Rightarrow\cos 2x=2(\frac{1}{\sqrt{3}})^2-1\Rightarrow\cos 2x=-\frac{1}{3}$$

سراسری - ۸۸

۱۷- گزینهٔ ۳ ابتدا $\tan\alpha$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\sin\alpha=\frac{3}{5}\ ,\ 1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}\Rightarrow 1+\cot^2\alpha=\frac{25}{9}\Rightarrow\cot^2\alpha=\frac{16}{9}\Rightarrow\begin{cases}\cot\alpha=+\frac{4}{3} & \text{غ ق ق}\\ \cot\alpha=-\frac{4}{3}\end{cases}$$

طبق فرض مسأله α منفرجه است، پس $\cot\alpha$ منفی است. پس داریم:

$$\cot\alpha=-\frac{4}{3}\Rightarrow\tan\alpha=-\frac{3}{4}$$

حال می‌توان نوشت:

$$\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\alpha}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}=\frac{1+(-\frac{3}{4})}{1-1\times(-\frac{3}{4})}=\frac{1}{7}$$

سراسری خارج از کشور - ۸۵

۱۸- گزینه‌ی ۲ عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\frac{2}{3}\Rightarrow \cot\alpha=\frac{2}{3}\Rightarrow \tan\alpha=\frac{3}{2}$$

بنابراین داریم:

$$\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{1-\frac{3}{2}}{1+\frac{3}{2}}=-\frac{1}{5}$$

سراسری خارج از کشور – ۸۸

۱۹- گزینه‌ی ۲ عبارت را بر حسب sin و cos می‌نویسیم:

$$(\tan 35^\circ+\tan 20^\circ)\sin 20^\circ=(\frac{\sin 35^\circ}{\cos 35^\circ}+\frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ})\sin 20^\circ=\frac{\sin 35^\circ\cos 20^\circ+\sin 20^\circ\cos 35^\circ}{\cos 20^\circ\cos 35^\circ}\times\sin 20^\circ=\frac{\sin(35^\circ+20^\circ)}{\cos 20^\circ\cos 35^\circ}\times\sin 20^\circ$$

$$=\frac{\sin 55^\circ\times\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ\times\cos 35^\circ}=\frac{\cancel{\cos 35^\circ}\times\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ\times\cancel{\cos 35^\circ}}=\tan 20^\circ$$

۲۰- گزینه‌ی ۲ ابتدا مقدار $\tan 2x$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\frac{2\times\frac{1}{3}}{1-(\frac{1}{3})^2}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}}=\frac{3}{4}$$

بنابراین داریم:

$$\tan(2x+\frac{\pi}{4})=\frac{\tan 2x+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan 2x\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{3}{4}+1}{1-\frac{3}{4}\times 1}=7$$

پاسخ تشریحی آزمون ۳۷

۱- گزینه‌ی ۴

$$\cot x=\frac{1}{3}\Rightarrow \tan x=3$$

$$\tan(\frac{\pi}{4}-x)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan x}=\frac{1-\tan x}{1+\tan x}=\frac{1-3}{1+3}=\frac{-1}{2}$$

۲- گزینه‌ی ۱

$$\sin x+\cos x=\frac{1}{4}\Rightarrow \sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=\frac{1}{16}\Rightarrow 1+\sin 2x=\frac{1}{16}\Rightarrow \sin 2x=-\frac{15}{16}$$

۳- گزینه‌ی ۳ صورت و مخرج کسر را بر ۲ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{3}\sin 20^\circ+\cos 20^\circ}{\cos 40^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20^\circ+\frac{1}{2}\cos 20^\circ}{\frac{1}{2}\cos 40^\circ}=\frac{\cos 30^\circ\sin 20^\circ+\sin 30^\circ\cos 20^\circ}{\frac{1}{2}\cos 40^\circ}=\frac{2\sin(20^\circ+30^\circ)}{\cos 40^\circ}=\frac{2\sin 50^\circ}{\cos 40^\circ}=\frac{2\sin 50^\circ}{\sin 50^\circ}=2$$

۴- گزینه‌ی ۳ با توجه به این که $65^\circ+70^\circ=135^\circ$ داریم:

$$\tan 135^\circ=\tan(65^\circ+70^\circ)=\frac{\tan 65^\circ+\tan 70^\circ}{1-\tan 65^\circ\tan 70^\circ}=-1\Rightarrow \tan 65^\circ+\tan 70^\circ=-1+\tan 65^\circ\tan 70^\circ$$

$$\Rightarrow \tan 65^\circ\tan 70^\circ-\tan 65^\circ-\tan 70^\circ=1\Rightarrow(1-\tan 65^\circ)(1-\tan 70^\circ)=1+1=2$$

۵- گزینه‌ی ۱ در رابطه‌ی $\cos 2\alpha=1-2\sin^2 a$ قرار می‌دهیم $\alpha=22/5^\circ$ و داریم:

$$\cos 45^\circ=1-2\sin^2 22/5^\circ\Rightarrow \sin^2 22/5=\frac{1-\cos 45^\circ}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}\Rightarrow \sin 22/5^\circ=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\Rightarrow a=2$$

۶- گزینه‌ی ۳ عبارت را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{16}(\sin^4\frac{\pi}{16}-\cos^4\frac{\pi}{16})=\sin\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{16}(\sin^2\frac{\pi}{16}+\cos^2\frac{\pi}{16})(\sin^2\frac{\pi}{16}-\cos^2\frac{\pi}{16})=-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}=-\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{4}$$
$$=-\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{8}$$

۷- گزینه‌ی ۲ می‌دانیم $\sin 75^\circ=\cos 15^\circ$ و $\cos 75^\circ=\sin 15^\circ$، پس داریم:

$$(\sin 15^\circ+\sin 75^\circ)^2+(\cos 15^\circ+\cos 75^\circ)^2=(\sin 15^\circ+\cos 15^\circ)^2+(\cos 15^\circ+\sin 15^\circ)^2=2(\sin 15^\circ+\cos 15^\circ)^2$$
$$=2(\sin^2 15^\circ+\cos^2 15^\circ+2\sin 15^\circ\cos 15^\circ)=2(1+\sin 30^\circ)=2(1+\frac{1}{2})=3$$

۸- گزینه‌ی ۲ مخرج مشترک می‌گیریم و عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}-\frac{\cos x+\sin x}{\sin x-\cos x}=\frac{(\sin x-\cos x)^2-(\sin x+\cos x)^2}{(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x-\sin^2 x-\cos^2 x-2\sin x\cos x}{\sin^2 x-\cos^2 x}$$
$$=\frac{-4\sin x\cos x}{\sin^2 x-\cos^2 x}=\frac{2\sin 2x}{\cos 2x}=2\tan 2x\Rightarrow$$

اگر $\frac{\pi}{8}$ را قرار دهیم، حاصل برابر با $2\tan\frac{\pi}{4}$، یعنی ۲ خواهد شد.

۹- گزینه‌ی ۴ ابتدا مقدار $\tan 2\alpha$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{1-(\sqrt{2}-1)^2}=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{2(\sqrt{2}-1)}=1$$

حال داریم:

$$\tan(\beta-2\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan 2\alpha}{1+\tan\beta\tan 2\alpha}=\frac{2-1}{1+2\times 1}=\frac{1}{3}$$

۱۰- گزینه‌ی ۳ تساوی را به صورت زیر می‌نویسیم و داریم:

$$\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin 2x+4\cos^2 x=3\Rightarrow 1+2\sin 2x+4\cos^2 x=3\Rightarrow 2\sin 2x=2-4\cos^2 x$$
$$\Rightarrow\sin 2x=1-2\cos^2 x\Rightarrow\sin 2x=-\cos 2x\Rightarrow\tan 2x=-1$$

۱۱- گزینه‌ی ۲ عبارت را بر حسب سینوس و کسینوس می‌نویسیم:

$$\sin 20^\circ(\frac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ}+\frac{\sin 50^\circ}{\cos 50^\circ})=\sin 20^\circ(\frac{\sin 40^\circ\cos 50^\circ+\sin 50^\circ\cos 40^\circ}{\cos 40^\circ\cos 50^\circ})=\sin 20^\circ\times\frac{\sin(40^\circ+50^\circ)}{\cos 40^\circ\cos 50^\circ}=\frac{\sin 20^\circ}{\cos 40^\circ\sin 40^\circ}=\frac{\sin 20^\circ}{\frac{1}{2}\sin 80^\circ}$$
$$=\frac{4\sin 10^\circ\cos 10^\circ}{\sin 80^\circ}\xrightarrow{\cos 10^\circ=\sin(90^\circ-10^\circ)}\frac{4\sin 10^\circ\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ}=4\sin 10^\circ$$

۱۲- گزینه‌ی ۴ می‌دانیم $\sin^4 x+\cos^4 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$ و $\sin^6 x+\cos^6 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$ پس داریم:

$$1-\frac{1}{2}\sin^2 2x+1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=\frac{6}{5}\Rightarrow-\frac{5}{4}\sin^2 2x=-\frac{4}{5}\Rightarrow\sin^2 2x=\frac{16}{25}$$

۱۳- گزینه‌ی ۴ از اتحادهای $1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$ و $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ استفاده می‌کنیم:

$$A=\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}=\sqrt{\frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}}=\sqrt{\cot^2\frac{x}{2}}=|\cot\frac{x}{2}|$$

از طرفی داریم:

$$3\pi<x<4\pi\Rightarrow\frac{3\pi}{2}<\frac{x}{2}<2\pi\Rightarrow\cot\frac{x}{2}<0$$

پس داریم:

$$\Rightarrow A=-\cot\frac{x}{2}$$

۱۴- گزینه‌ی ۳ از اتحاد $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ استفاده می‌کنیم:

$$\sin^2(\frac{\pi}{4}+x)-\sin^2(\frac{\pi}{4}-x)=\frac{1}{2}(1-\cos(\frac{\pi}{2}+2x))-\frac{1}{2}(1-\cos(\frac{\pi}{2}-2x))=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin 2x=\sin 2x$$

۱۵- گزینه‌ی ۳ می‌دانیم $\cot x-\tan x=2\cot 2x$ پس داریم:

$$\tan 20^\circ-\cot 20^\circ+2\tan 40^\circ=-2\cot 40^\circ+2\tan 40^\circ=2(\tan 40^\circ-\cot 40^\circ)=-4\cot 80^\circ=-4\tan 10^\circ$$

۱۶- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول:** ابتدا مقدار A^2 را محاسبه می‌کنیم:

$$A^2=\frac{(\sin 15^\circ+\cos 15^\circ)^2}{(\sin 15^\circ-\cos 15^\circ)^2}=\frac{1+2\sin 15^\circ\cos 15^\circ}{1-2\sin 15^\circ\cos 15^\circ}=\frac{1+\sin 30^\circ}{1-\sin 30^\circ}=\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3\Rightarrow\begin{cases}A=+\sqrt{3} & \text{غ ق ق }(\sin 15^\circ<\cos 15^\circ)\\ A=-\sqrt{3}\end{cases}$$

راه‌حل دوم: صورت و مخرج کسر را بر $\cos 15^\circ$ تقسیم می‌کنیم:

$$A=\frac{\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}+\frac{\cos 15^\circ}{\cos 15^\circ}}{\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}-\frac{\cos 15^\circ}{\cos 15^\circ}}=-\frac{1+\tan 15^\circ}{1-\tan 15^\circ}=-\frac{\tan 45^\circ+\tan 15^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 15^\circ}=-\tan(45^\circ+15^\circ)=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}$$

۱۷- گزینه‌ی ۳ عبارت را ساده می‌کنیم:

$$A=\frac{4\cos 2x}{\tan x+\cot x}=\frac{4\cos 2x}{\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}}=\frac{4\cos 2x}{\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}}=\frac{4\cos 2x}{\frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2x}}=2\sin 2x\cos 2x=\sin 4x$$

حال به ازای $x=\frac{\pi}{16}$ داریم:

$$A=\sin 4(\frac{\pi}{16})=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۸- گزینه‌ی ۱ عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{2(1-\sin 2x)}{1+\cos 2x}+2\tan x=\frac{\cancel{2}(1-\sin 2x)}{\cancel{2}\cos^2 x}+\frac{2\sin x}{\cos x}=\frac{1-\sin 2x}{\cos^2 x}+\frac{2\sin x}{\cos x}=\frac{1-\sin 2x+2\sin x\cos x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$$

۱۹- گزینه‌ی ۱ عبارت را ساده می‌کنیم:

$$(\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x})\tan^2(\frac{\pi}{4}-x)=(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x})^2\times\tan^2(\frac{\pi}{4}-x)=(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\times\frac{1-\tan x}{1+\tan x})^2=(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\times\frac{1-\frac{\sin x}{\cos x}}{1+\frac{\sin x}{\cos x}})^2$$

$$=(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\times\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x})^2=(-1)^2=1$$

۲۰- گزینه‌ی ۱ از اتحاد $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\cos 40^\circ-\cos^2 10^\circ}{1-8\sin^2 80^\circ}=\frac{2\cos^2 20^\circ-1-\cos^2 10^\circ}{1-8\sin^2 80^\circ}=\frac{2(2\cos^2 10^\circ-1)^2-1-\cos^2 10^\circ}{1-8\sin^2 80^\circ}=\frac{8\cos^4 10^\circ-9\cos^2 10^\circ+1}{1-8\cos^2 10^\circ}$$

$$=\frac{(8\cos^2 10^\circ-1)(\cos^2 10^\circ-1)}{1-8\cos^2 10^\circ}=1-\cos^2 10^\circ=\sin^2 10^\circ$$

پاسخ تشریحی آزمون ۳۸

۱- گزینه‌ی ۲ می‌دانیم جواب کلی معادله‌ی $\cos x=-1$ به صورت $x=2k\pi+\pi$ است. پس داریم:

$$\cos(4x+\frac{\pi}{6})=-1\Rightarrow 4x+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\pi\Rightarrow 4x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{24}$$

۲- گزینه‌ی ۱ معادله را بر حسب کسینوس می‌نویسیم:

$$2\sin^2 x-\cos x=1\Rightarrow-\cos x=1-2\sin^2 x\Rightarrow-\cos x=\cos 2x\Rightarrow\cos(\pi-x)=\cos 2x\Rightarrow\begin{cases}2x=2k\pi+\pi-x\Rightarrow x=\frac{(2k+1)\pi}{3}\\ 2x=2k\pi-\pi+x\Rightarrow x=(2k-1)\pi\end{cases}$$

جواب‌های واقع در بازه‌ی $[\pi,2\pi]$ عبارتند از $\frac{5\pi}{3}$ و π که مجموع آن‌ها برابر $\frac{8\pi}{3}$ است.

۳- گزینه‌ی ۳ معادله را ساده می‌کنیم:

$$2\sin(\pi-x)\cos(\frac{3\pi}{2}+x)+3\cot x\sin(\pi+x)=0\Rightarrow 2\sin x\times\sin x-3\cot x\times\sin x=0\Rightarrow$$

$$2\sin^2 x-3\cos x=0\Rightarrow 2(1-\cos^2 x)-3\cos x=0\Rightarrow 2\cos^2 x+3\cos x-2=0\Rightarrow(2\cos x-1)(\cos x+2)=0\Rightarrow\begin{cases}\cos x=-2 & \text{غ ق ق}\\ \cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\end{cases}$$

سراسری - ۸۷

۴- گزینه‌ی ۲ معادله را با استفاده از فرمول $\sin 2x$ ساده می‌کنیم:

$$\sin 2x=2\sin x\Rightarrow 2\sin x\cos x-2\sin x=0\Rightarrow 2\sin x(\cos x-1)=0$$

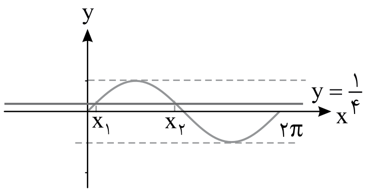
جواب‌های معادله را در بازه‌ی $[0,2\pi]$ مشخص می‌کنیم:

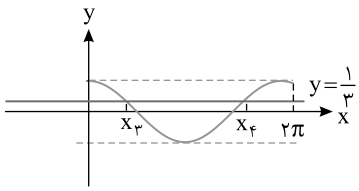
$$\begin{cases}\sin x=0\Rightarrow x=0,\pi,2\pi\\ \cos x=1\Rightarrow x=0,2\pi\end{cases}$$

پس معادله دارای ۳ جواب است.

۵- گزینه‌ی ۳

$$(4\sin x-1)(3\cos x-1)=0\Rightarrow\begin{cases}\sin x=\frac{1}{4}\\ \cos x=\frac{1}{3}\end{cases}$$

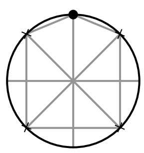




با توجه به شکل توابع سینوس و کسینوس در بازه‌ی $(0,2\pi)$ دو زاویه وجود دارد که سینوس آن $\frac{1}{4}$ و دو زاویه وجود دارد که کسینوس آن $\frac{1}{3}$ است. پس معادله ۴ جواب در بازه‌ی فوق دارد.

۶- گزینه‌ی ۴ معادله را به کمک فاکتورگیری حل می‌کنیم:

$$\cos 2x\sin x-\cos 2x=0\Rightarrow\cos 2x(\sin x-1)=0\Rightarrow\begin{cases}\cos 2x=0\Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\\ \sin x=1\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\end{cases}$$



• $2k\pi+\frac{\pi}{2}$

× $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$

پس از مقداردهی به k، نقاط مشخص شده روی دایره پنج ضلعی غیرمنتظم درست می‌کنند.

۷- گزینه‌ی ۴ معادله را ساده می‌کنیم:

$$(\sin^2 x-\cos^2 x)(\sin^2 x+\cos^2 x)=(-\frac{\sqrt{2}}{2})^2\Rightarrow-\cos 2x=\frac{1}{2}\Rightarrow\cos 2x=-\frac{1}{2}\Rightarrow 2x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

سراسری - ۹۲

۸- گزینه‌ی ۲ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم و از بسط فرمول $\sin(\alpha+\beta)$ استفاده می‌کنیم:

$$\sin x\cos 6x+\sin 6x\cos x=1\Rightarrow\sin(x+6x)=1\Rightarrow\sin 7x=1\Rightarrow 7x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{(4k+1)\pi}{14}$$

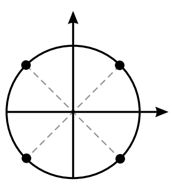
به ازای $k=1$ داریم:

$$x=\frac{5\pi}{14}$$

۹- گزینه‌ی ۳ معادله را ساده می‌کنیم:

$$\sin^3(\pi-x)\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin^4(x-\frac{\pi}{2})\Rightarrow\sin^3 x\sin x=\cos^4 x\Rightarrow\sin^4 x=\cos^4 x$$

$$\Rightarrow\tan^4 x=1\Rightarrow\begin{cases}\tan x=1\\ \tan x=-1\end{cases}$$



مطابق شکل در بازه‌ی $[0,2\pi]$ معادله دارای ۴ جواب است.

۱۰- گزینه‌ی ۱ معادله را بر حسب سینوس می‌نویسیم:

$$\cos ۲x+۲=\sin x$$

$$۱-۲\sin^{۲} x+۲=\sin x\Rightarrow ۲\sin^{۲} x+\sin x-۱=۰\Rightarrow (\sin x+۱)(۲\sin x-۱)=۰\Rightarrow \begin{cases}\sin x=-۱\\ \sin x=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

جواب‌های واقع در بازه‌ی $[-\pi,\pi]$ عبارتند از $-\frac{\pi}{۲}$، $\frac{\pi}{۶}$ و $\frac{۵\pi}{۶}$ که مجموع آن‌ها برابر است با $\frac{\pi}{۲}$.

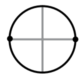
۱۱- گزینه‌ی ۳ جواب کلی معادله به شکل زیر است:

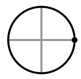
$$\tan ۳x=\tan ۲x\Rightarrow ۳x=k\pi+۲x\Rightarrow x=k\pi$$

بنابراین $x=\pi$، $x=۰$ و $x=-\pi$ جواب‌های معادله در بازه‌ی $[-\pi,\pi]$ هستند.

۱۲- گزینه‌ی ۳ صورت کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم. جواب‌ها به شرط این‌که باعث صفر شدن مخرج کسر نشوند، قابل قبول خواهند بود:

$$\frac{\sin x-\sin x\cos x}{۱+\cos x}=۰\Rightarrow \sin x-\sin x\cos x=۰\Rightarrow \sin x(۱-\cos x)=۰\Rightarrow \begin{cases}\sin x=۰\Rightarrow x=k\pi\\ \cos x=۱\Rightarrow x=۲k\pi\end{cases}$$





واضح است که اگر k عددی فرد باشد $x=k\pi$ قابل قبول نخواهد بود زیرا مخرج کسر صفر خواهد شد. پس $x=۲k\pi$ جواب معادله است.

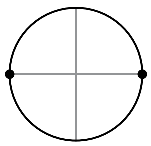
۱۳- گزینه‌ی ۱ تابع $y=-۴\cos\frac{x}{۳}$ وقتی می‌نیمم می‌شود که $\cos\frac{x}{۳}=۱$ باشد. پس داریم:

$$\frac{x}{۳}=۲k\pi\Rightarrow x=۶k\pi\xrightarrow{-۲\pi<x<۳\pi}-۲\pi<۶k\pi<۳\pi\Rightarrow -\frac{۱}{۳}<k<\frac{۱}{۲}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k=۰$$

بنابراین فقط یک بار تابع می‌نیمم می‌شود.

۱۴- گزینه‌ی ۳ معادله را به صورت $۱+\tan^{۲} x=\cos^{۲} x$ می‌نویسیم و داریم:

$$۱+\tan^{۲} x=\cos^{۲} x\Rightarrow \frac{۱}{\cos^{۲} x}=\cos^{۲} x\Rightarrow \cos^{۴} x=۱\Rightarrow \cos x=\pm۱\Rightarrow x=k\pi$$



بنابراین در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ معادله ۳ جواب دارد.

۱۵- گزینه‌ی ۱ مقدار $x=k\pi-\frac{\pi}{۳}$ را در معادله قرار می‌دهیم:

$$m\tan(k\pi-\frac{\pi}{۳})-۳\cot(k\pi-\frac{\pi}{۳})=\sqrt{۳}(۱+m)\Rightarrow -m\sqrt{۳}+۳\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\sqrt{۳}(۱+m)\Rightarrow ۲\sqrt{۳}m=۰\Rightarrow m=۰$$

۱۶- گزینه‌ی ۳ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\sin x+\sqrt{۳}\cos x=۰\Rightarrow \sin x=-\sqrt{۳}\cos x\Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x}=-\sqrt{۳}\Rightarrow \tan x=-\sqrt{۳}\Rightarrow \tan x=\tan(-\frac{\pi}{۳})$$

بنابراین جواب کلی معادله به صورت $x=k\pi-\frac{\pi}{۳}$ است و جواب‌های واقع در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ عبارتند از $x=\frac{۲\pi}{۳}$ و $x=\frac{۵\pi}{۳}$.

۱۷- گزینه‌ی ۲ معادله را بر حسب سینوس و کسینوس می‌نویسیم:

$$\tan\frac{x}{۲}-\cot\frac{x}{۲}=۲\sqrt{۳}\Rightarrow \frac{\sin\frac{x}{۲}}{\cos\frac{x}{۲}}-\frac{\cos\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}}=۲\sqrt{۳}\Rightarrow \frac{\sin^{۲}\frac{x}{۲}-\cos^{۲}\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}=۲\sqrt{۳}\Rightarrow \frac{-\cos x}{\frac{۱}{۲}\sin x}=۲\sqrt{۳}\Rightarrow \cot x=-\sqrt{۳}$$

$$x=k\pi-\frac{\pi}{۶}\Rightarrow \begin{cases}x=-\frac{\pi}{۶}\\ x=\frac{۵\pi}{۶}\end{cases}$$

۱۸- گزینه‌ی ۳ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\sqrt{۲}(\sin\frac{\pi}{۴}\cos x-\sin x\cos\frac{\pi}{۴})=۱+\cos x\Rightarrow \sqrt{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos x-\sin x\times\frac{\sqrt{۲}}{۲})=۱+\cos x\Rightarrow \cos x-\sin x=۱+\cos x$$

$$\sin x=-۱\Rightarrow x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}$$

۱۹- گزینه‌ی ۱ معادله را ساده می‌کنیم:

$$\sin^2 x-\cos^2 x=\sin(\frac{3\pi}{2}+x)\Rightarrow -\cos 2x=-\cos x\Rightarrow \cos 2x=\cos x\Rightarrow \begin{cases} 2x=2k\pi+x\Rightarrow x=2k\pi \\ 2x=2k\pi-x\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

واضح است که جواب $\frac{2k\pi}{3}$ شامل جواب $2k\pi$ نیز می‌شود. بنابراین جواب معادله $\frac{2k\pi}{3}$ است.

سراسری - ۹۱

۲۰- گزینه‌ی ۳ معادله را ساده می‌کنیم:

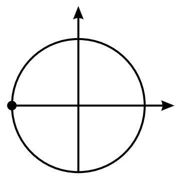
$$(\sin x-\tan x)\tan(\frac{3\pi}{2}-x)=\cos\frac{4\pi}{3}\Rightarrow(\sin x-\tan x)\cot x=-\frac{1}{2}\Rightarrow \cos x-1=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

سراسری خارج از کشور - ۹۰

پاسخ تشریحی آزمون ۳۹

۱- گزینه‌ی ۱ معادله را ساده می‌کنیم:



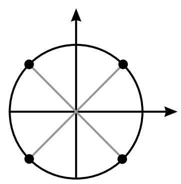
$$\cos^2 x+3\sin(\frac{\pi}{2}+x)+2=0\Rightarrow \cos^2 x+3\cos x+2=0\Rightarrow(\cos x+1)(\cos x+2)=0\Rightarrow \begin{cases} \cos x=-2 \quad \text{غ ق ق} \\ \cos x=-1\Rightarrow x=2k\pi+\pi \end{cases}$$

بنابراین جواب‌ها روی دایره فقط یک نقطه را مشخص می‌کنند.

۲- گزینه‌ی ۲ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$2\sin^2 x-1=0\Rightarrow \sin^2 x=\frac{1}{2}\Rightarrow \sin x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin(\pm\frac{\pi}{4})$$

بنابراین جواب‌های معادله به شکل زیر هستند:



$$\begin{cases} x=2k\pi\pm\frac{\pi}{4} \\ x=(2k+1)\pi\pm\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

انتهای کمان جواب‌های فوق روی دایره مثلثاتی به شکل مقابل هستند:

بنابراین جواب‌ها را می‌توان به صورت $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ نوشت.

۳- گزینه‌ی ۴ وقتی نمودار محور x ها را قطع می‌کند، داریم: $y=0$ پس می‌توان نوشت:

$$\sin(\frac{\pi}{4}-2x)=0\Rightarrow\frac{\pi}{4}-2x=k\pi\Rightarrow 2x=-k\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=-\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$$

جواب‌های واقع در بازه‌ی $[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ عبارتند از:

k	۰	۱	۲	۱-	۲-
x	$\frac{\pi}{8}$	$-\frac{3\pi}{8}$	$-\frac{7\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{9\pi}{8}$

سراسری خارج از کشور - ۹۱

۴- گزینه‌ی ۳ بیش‌ترین مقدار تابع وقتی خواهد بود که مقدار کسینوس برابر ۱- باشد. پس داریم:

$$\cos(\frac{\pi}{4}-3\pi x)=-1\Rightarrow\frac{\pi}{4}-3\pi x=2k\pi+\pi\Rightarrow\frac{1}{4}-3x=2k+1\Rightarrow 3x=-2k-\frac{3}{4}\Rightarrow x=-\frac{2k}{3}-\frac{1}{4}$$

چون در بازه‌ی $[-1,1]$ دنبال جواب هستیم، پس می‌توان نوشت:

$$-1\le\frac{-2k}{3}-\frac{1}{4}\le 1\Rightarrow -\frac{3}{4}\le\frac{-2k}{3}\le\frac{5}{4}\Rightarrow -\frac{15}{8}\le k\le\frac{9}{8}$$

با توجه به این‌که $k\in\mathbb{Z}$ می‌توان گفت: $k=1$، $k=0$ و $k=-1$. بنابراین ۳ بار در این بازه، تابع به حداکثر مقدار خود می‌رسد.

سراسری - ۹۱

۵- گزینه‌ی ۲ معادله را ساده می‌کنیم:

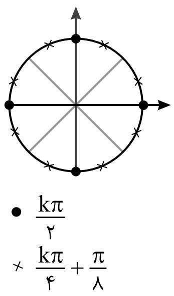
$$\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\sqrt{3}\Rightarrow \tan 2x=\sqrt{3}\Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$$

سراسری خارج از کشور - ۹۱

۶- گزینه‌ی ۲ جواب‌های کلی معادله را می‌نویسیم:

$$\sin 6x=\sin 2x \Rightarrow \begin{cases} 6x=2k\pi+2x \\ 6x=2k\pi+\pi-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{k\pi}{2} \\ x=\dfrac{k\pi}{4}+\dfrac{\pi}{8} \end{cases}$$

انتهای جواب‌ها را روی دایره مشخص می‌کنیم:



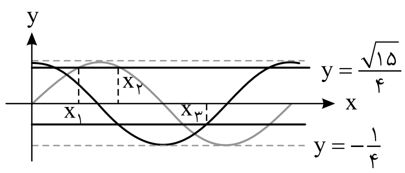
تعداد نقاط برابر ۱۲ است که به روش زیر نیز می‌توان تعداد آن‌ها را معین کرد:

$0\le \dfrac{k\pi}{2}<2\pi \Rightarrow 0\le k<4 \Rightarrow$ ۴ نقطه روی دایره

$0\le \dfrac{k\pi}{4}+\dfrac{\pi}{8}<2\pi \Rightarrow -\dfrac{1}{8}\le \dfrac{k}{4}<\dfrac{15}{8} \Rightarrow -\dfrac{1}{2}\le k<\dfrac{15}{2} \Rightarrow 0\le k\le 7 \Rightarrow$ ۸ نقطه روی دایره

۷- گزینه‌ی ۲

$$(4\cos x+1)(4\sin x-\sqrt{15})=0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x=-\dfrac{1}{4} \\ \sin x=\dfrac{\sqrt{15}}{4} \end{cases}$$



در بازه‌ی $(0, 2\pi)$ دو زاویه وجود دارد که سینوس آن $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ است و دو زاویه وجود دارد که کسینوس آن $-\dfrac{1}{4}$ اســـت. ولی با توجه به این که $\sin^2 x+\cos^2 x=\dfrac{1}{16}+\dfrac{15}{16}=1$ است، پس زاویه‌هایی که در ناحیه‌ی دوم هستند، یکسان هستند و معادله دارای ۳ ریشه‌ی متمایز در بازه‌ی فوق است.

$\cos x_2=-\dfrac{1}{4}\ ,\ \sin x_2=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

۸- گزینه‌ی ۳ فرض می‌کنیم $t=\tan x$ و داریم:

$$m\tan x+\cot x=4 \Rightarrow mt+\frac{1}{t}=4 \Rightarrow mt^2-4t+1=0$$

برای این‌که معادله‌ی فوق جواب داشته باشد، باید داشته باشیم:

$$\Delta\ge 0 \Rightarrow 16-4m\ge 0 \Rightarrow 4m\le 16 \Rightarrow m\le 4$$

۹- گزینه‌ی ۱ از زوایای متمم استفاده می‌کنیم:

$$\tan 4x=\cot x \Rightarrow \tan 4x=\tan(\frac{\pi}{2}-x) \Rightarrow 4x=k\pi+\frac{\pi}{2}-x \Rightarrow 5x=k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{5}+\frac{\pi}{10}$$

برای به‌دست آوردن جواب‌های حاده می‌توان نوشت:

$$0<\frac{k\pi}{5}+\frac{\pi}{10}<\frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{10}<\frac{k\pi}{5}<\frac{4\pi}{10} \Rightarrow -\frac{1}{2}<k<2 \Rightarrow \begin{cases} k=0 \Rightarrow x_1=\dfrac{\pi}{10} \\ k=1 \Rightarrow x_2=\dfrac{3\pi}{10} \end{cases} \Rightarrow x_1+x_2=\frac{2\pi}{5}$$

۱۰- گزینه‌ی ۳ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم و جواب کلی را محاسبه می‌کنیم:

$$\sin 3x+\cos x=0 \Rightarrow \cos x=-\sin 3x \Rightarrow \cos x=\cos(\frac{\pi}{2}+3x) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}+3x=2k\pi+x \\ \dfrac{\pi}{2}+3x=2k\pi-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=k\pi-\dfrac{\pi}{4} \\ x=\dfrac{k\pi}{2}-\dfrac{\pi}{8} \end{cases}$$

جواب‌های واقع در بازه‌ی $[0, \pi]$ عبارتند از:

k	$k\pi-\frac{\pi}{4}$	$\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$
0	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{8}$
1	$\frac{3\pi}{4}\checkmark$	$\frac{3\pi}{8}\checkmark$
2	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}\checkmark$
3	$\frac{11\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{8}$

بنابراین ۳ جواب در بازه‌ی $[0, \pi]$ وجود دارد.

۱۱- گزینه‌ی ۱ طرفین معادله را بر ۲ تقسیم می‌کنیم:

$$\sin x-\sqrt{۳}\cos x=۱\Rightarrow\frac{۱}{۲}\sin x-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\sin x\cos\frac{\pi}{۳}-\sin\frac{\pi}{۳}\cos x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\sin(x-\frac{\pi}{۳})=\frac{۱}{۲}=\sin\frac{\pi}{۶}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-\frac{\pi}{۳}=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\\ x-\frac{\pi}{۳}=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\\ x=۲k\pi+\frac{۷\pi}{۶}\xrightarrow{k=۱}x=\frac{۱۹\pi}{۶}\end{cases}$$

بنابراین $i=۱۹$ می‌تواند باشد.

۱۲- گزینه‌ی ۱ به شرط این‌که $\cos(\frac{\pi}{۴}+x)\neq ۰$ داریم:

$$\frac{\sin x-\cos x}{\cos(\frac{\pi}{۴}+x)}=۰\Rightarrow\sin x=\cos x\Rightarrow\tan x=۱\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{۴}\quad \text{غ ق ق}\\ x=\frac{۵\pi}{۴}\quad \text{غ ق ق}\end{cases}$$

پس معادله در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ جواب ندارد.

۱۳- گزینه‌ی ۳ معادله را ساده می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۱+\cot^{۲}۲x}+۱=۲\sin ۲x\Rightarrow\sin^{۲}۲x+۱=۲\sin ۲x\Rightarrow\sin^{۲}۲x-۲\sin ۲x+۱=۰\Rightarrow(\sin ۲x-۱)^{۲}=۰\Rightarrow\sin ۲x=۱\Rightarrow ۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴}$$

۱۴- گزینه‌ی ۲ معادله را بر حسب $\tan x$ می‌نویسیم:

$$\tan x+\cot x+۲=۰\Rightarrow\tan x+\frac{۱}{\tan x}+۲=۰\Rightarrow\frac{\tan^{۲}x+۲\tan x+۱}{\tan x}=۰$$

$$\Rightarrow\tan^{۲}x+۲\tan x+۱=۰\Rightarrow(\tan x+۱)^{۲}=۰\Rightarrow\tan x=-۱\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۴}\xrightarrow{-\pi\leq x\leq\pi}\begin{cases}x=-\frac{\pi}{۴}\\ x=\frac{۳\pi}{۴}\end{cases}$$

۱۵- گزینه‌ی ۴ معادله را ساده می‌کنیم:

$$۴(\sin x+\cos x)+a\sin ۲x=۳\Rightarrow ۴\sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴})+a\sin ۲x=۳$$

از جایگذاری $x=k\pi-\frac{\pi}{۴}$ در معادله داریم:

$$۴\sqrt{۲}\sin(k\pi-\cancel{\frac{\pi}{۴}}+\cancel{\frac{\pi}{۴}})+a\sin(۲k\pi-\frac{\pi}{۲})=۳\Rightarrow ۴\sqrt{۲}\sin k\pi-a\sin\frac{\pi}{۲}=۳\Rightarrow ۰-a=۳\Rightarrow a=-۳$$

۱۶- گزینه‌ی ۲ معادله را ساده می‌کنیم:

$$(\sin x\cos\frac{\pi}{۴}+\sin\frac{\pi}{۴}\cos x)(\cos x\cos\frac{\pi}{۴}+\sin x\sin\frac{\pi}{۴})=۱\Rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sin x+\cos x)\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sin x+\cos x)=۱\Rightarrow(\sin x+\cos x)^{۲}=۲$$

$$\Rightarrow\sin^{۲}x+\cos^{۲}x+۲\sin x\cos x=۲\Rightarrow ۱+\sin ۲x=۲\Rightarrow\sin ۲x=۱\Rightarrow ۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴}$$

در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ جواب‌ها به صورت $x=\frac{\pi}{۴}$ و $x=\frac{۵\pi}{۴}$ هستند که مجموع آن‌ها $\frac{۳\pi}{۲}$ است.

۱۷- گزینه‌ی ۲ معادله را ساده می‌کنیم:

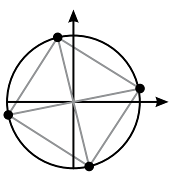
$$\cos^{۲}(\frac{۷\pi}{۴}+x)+\cos^{۲}x\times\frac{۱}{\cos^{۲}x}=۱\Rightarrow\cos^{۲}(\frac{۷\pi}{۴}+x)=۰\Rightarrow\cos(\frac{۷\pi}{۴}+x)=۰\Rightarrow\frac{۷\pi}{۴}+x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=k\pi-\frac{۵\pi}{۴}$$

تعداد جواب‌های در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ را به‌دست می‌آوریم:

$$۰\leq x\leq ۲\pi\Rightarrow ۰\leq k\pi-\frac{۵\pi}{۴}\leq ۲\pi\Rightarrow\frac{۵}{۴}\leq k\leq\frac{۱۳}{۴}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}K=۲,۳$$

بنابراین معادله ۲ جواب دارد.

۱۸- گزینه‌ی ۲ معادله را حل می‌کنیم و جواب‌ها را روی دایره مشخص می‌کنیم:



$$\frac{\sin^{۴}x-\cos^{۴}x}{\sin x\cos x}=-۲\sqrt{۳}\Rightarrow\frac{(\sin^{۲}x+\cos^{۲}x)(\sin^{۲}x-\cos^{۲}x)}{\sin x\cos x}=-۲\sqrt{۳}\Rightarrow\frac{-\cos ۲x}{\frac{۱}{۲}\sin ۲x}=-۲\sqrt{۳}\Rightarrow\cot ۲x=\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow ۲x=k\pi+\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۱۲}$$

همان‌طور که در شکل مشخص است، چهارضلعی مربع است.

۱۹- گزینه‌ی ۲ از فرمول $\cos 2x$ استفاده می‌کنیم:

$$\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=\cos 2x$$

$$\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=\cos^2 x-\sin^2 x\Rightarrow\sqrt{2}(\sin x+\cos x)+\sin^2 x-\cos^2 x=0$$

$$\sqrt{2}(\sin x+\cos x)+(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)=0\Rightarrow(\sin x+\cos x)(\sqrt{2}+\sin x-\cos x)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin x+\cos x=0\Rightarrow\sin x=-\cos x\Rightarrow\tan x=-1\Rightarrow x=\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\\ \sin x-\cos x=-\sqrt{2}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=-1\Rightarrow\sin(x-\frac{\pi}{4})=-1\Rightarrow x-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{7\pi}{4}\end{cases}$$

بنابراین معادله در بازه‌ی $[0,2\pi]$ دارای ۲ ریشه است.

۲۰- گزینه‌ی ۳ معادله‌ی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\sin(\pi+x)\cos(\frac{\pi}{2}+x)-2\sin(\pi-x)+1=0$$

$$(-\sin x)(-\sin x)-2\sin x+1=0\Rightarrow\sin^2 x-2\sin x+1=0\Rightarrow(\sin x-1)^2=0\Rightarrow\sin x=1\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

سراسری - ۹۰

پاسخ تشریحی آزمون ۴۰

۱- گزینه‌ی ۲ می‌دانیم $\tan 89^\circ=\cot 1^\circ$ پس می‌توان نوشت:

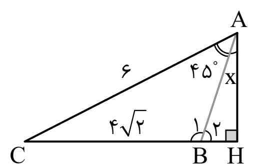
$$\frac{1}{1+\tan 1^\circ}+\frac{1}{1+\tan 89^\circ}=\frac{1}{1+\tan 1^\circ}+\frac{1}{1+\cot 1^\circ}=\frac{1+\cot 1^\circ+1+\tan 1^\circ}{(1+\tan 1^\circ)(1+\cot 1^\circ)}=\frac{2+\tan 1^\circ+\cot 1^\circ}{2+\tan 1^\circ+\cot 1^\circ}=1$$

۲- گزینه‌ی ۲ عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$(-\sin x)\sin x-\cos x(-\cos x)=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow-\sin^2 x+\cos^2 x=\frac{1}{2}\Rightarrow-\sin^2 x+1-\sin^2 x=\frac{1}{2}\Rightarrow\sin^2 x=\frac{1}{4}$$

۳- گزینه‌ی ۳ در مثلث ABC از قضیه‌ی سینوس‌ها استفاده می‌کنیم:



$$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin\hat{B}_1}\Rightarrow\frac{4\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{6}{\sin\hat{B}_1}\Rightarrow\sin\hat{B}_1=\frac{3}{4}$$

از طرفی داریم:

$$\sin\hat{B}_2=\sin(180^\circ-\hat{B}_1)=\sin\hat{B}_1=\frac{3}{4}$$

پس می‌توان نوشت:

$$\tan x=\tan(90^\circ-\hat{B}_2)=\cot\hat{B}_2$$

در نتیجه داریم:

$$1+\cot^2\hat{B}_2=\frac{1}{\sin^2\hat{B}_2}\Rightarrow1+\cot^2\hat{B}_2=\frac{16}{9}\Rightarrow\cot\hat{B}_2=\frac{\sqrt{7}}{3}\Rightarrow\tan x=\frac{\sqrt{7}}{3}$$

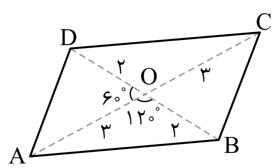
۴- گزینه‌ی ۲ با توجه به قضیه‌ی سینوس‌ها داریم:

$$\frac{AB}{\sin\hat{C}}=\frac{AC}{\sin\hat{B}}\Rightarrow\frac{2}{\sin\hat{C}}=\frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\Rightarrow\sin\hat{C}=\frac{1}{2}\Rightarrow\hat{C}=30^\circ$$

بنابراین داریم:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ\Rightarrow x+45^\circ+30^\circ=180^\circ\Rightarrow x=105^\circ$$

۵- گزینه‌ی ۲ در مثلث OAB قضیه‌ی کسینوس‌ها را می‌نویسیم:



$$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\times OB\cos 120^\circ=3^2+2^2-2\times2\times3\cos 120^\circ$$

$$AB^2=13+6\Rightarrow AB=\sqrt{19}$$

۶- گزینه‌ی ۳ از قضیه‌ی کسینوس‌ها استفاده می‌کنیم:

$$BC^۲=AB^۲+AC^۲-۲AB\times AC\cos\hat{A}$$

$$\Rightarrow(۲\sqrt{۱۹})^۲=۶^۲+AC^۲-۲\times۶\times AC\cos۱۲۰^\circ\Rightarrow AC^۲+۶AC-۴۰=۰\Rightarrow(AC-۴)(AC+۱۰)=۰\Rightarrow\begin{cases}AC=۴\\ AC=-۱۰ \text{ غ ق ق}\end{cases}$$

بنابراین مساحت مثلث به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$S=\frac{۱}{۲}AB\times AC\times\sin\hat{A}=\frac{۱}{۲}\times۶\times۴\sin۱۲۰^\circ=۶\sqrt{۳}$$

۷- گزینه‌ی ۴ **راه‌حل اول**: عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\sin(x+\frac{\pi}{۳})-\cos(x+\frac{\pi}{۶})=\sin x\cos\frac{\pi}{۳}+\sin\frac{\pi}{۳}\cos x-\cos x\cos\frac{\pi}{۶}+\sin x\sin\frac{\pi}{۶}$$

$$=\frac{۱}{۲}\sin x+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos x-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos x+\frac{۱}{۲}\sin x=\sin x$$

راه‌حل دوم: مقدار A را به ازای یک مقدار دلخواه x، مانند $\frac{\pi}{۶}$ حساب می‌کنیم:

$$x=\frac{\pi}{۶}\Rightarrow A=\sin\frac{\pi}{۲}-\cos\frac{\pi}{۳}=۱-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

حال اگر در گزینه‌ها به جای x مقدار $\frac{\pi}{۶}$ را قرار دهیم، فقط مقدار $\sin x$ برابر $\frac{۱}{۲}$ خواهد شد.

۸- گزینه‌ی ۳ عبارت را بسط می‌دهیم:

$$A=۲\sin(x+\frac{\pi}{۴})=۲(\sin x\cos\frac{\pi}{۴}+\sin\frac{\pi}{۴}\cos x)=\sqrt{۲}(\sin x+\cos x)$$

حال مربع عبارت را به دست می‌آوریم:

$$A^۲=۲(\sin^۲x+\cos^۲x+۲\sin x\cos x)=۲(۱+۲(-\frac{۱}{۸}))=\frac{۳}{۲}$$

بنابراین داریم:

$$A=\pm\frac{\sqrt{۶}}{۲}$$

۹- گزینه‌ی ۳ ابتدا عبارت را ساده می‌کنیم:

$$A=۲\sin x(\sin x+\cos x)-۱=۲\sin^۲x+۲\sin x\cos x-۱$$

$$\Rightarrow A=۲\sin x\cos x-(۱-۲\sin^۲x)=\sin۲x-\cos۲x=\sqrt{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin۲x-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos۲x)$$

$$\Rightarrow A=\sqrt{۲}(\sin۲x\cos۴۵^\circ-\sin۴۵^\circ\cos۲x)=\sqrt{۲}\sin(۲x-۴۵^\circ)$$

حال به جای x مقدار $۷/۵^\circ$ را قرار می‌دهیم:

$$x=۷/۵^\circ\Rightarrow A=\sqrt{۲}\sin(۱۵^\circ-۴۵^\circ)=-\sqrt{۲}\sin۳۰^\circ=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۰- گزینه‌ی ۲ با توجه به این‌که $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$، داریم:

$$\frac{۱}{\sin۲x}+\cot۲x=\frac{۱}{\sin۲x}+\frac{\cos۲x}{\sin۲x}=\frac{۱+\cos۲x}{\sin۲x}=\frac{۲\cos^۲x}{۲\sin x\cos x}=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$$

۱۱- گزینه‌ی ۳ با توجه به تساوی $(۱۵^\circ-\alpha)+(۳۰^\circ+\alpha)=۴۵^\circ$ داریم:

$$\tan۴۵^\circ=\tan((۱۵^\circ-\alpha)+(۳۰^\circ+\alpha))=\frac{\tan(۱۵^\circ-\alpha)+\tan(۳۰^\circ+\alpha)}{۱-\tan(۱۵^\circ-\alpha)\tan(۳۰^\circ+\alpha)}$$

$$\Rightarrow۱=\frac{x+\frac{۱}{۷}}{۱-\frac{۱}{۷}x}\Rightarrow x+\frac{۱}{۷}=۱-\frac{۱}{۷}x\Rightarrow\frac{۸}{۷}x=\frac{۶}{۷}\Rightarrow x=\frac{۳}{۴}$$

۱۲- گزینه‌ی ۲ عبارت را در $۸\sin۲۰^\circ$ ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{۸\sin۲۰^\circ\cos۲۰^\circ\cos۴۰^\circ\cos۸۰^\circ}{۸\sin۲۰^\circ}=\frac{۴\sin۴۰^\circ\cos۴۰^\circ\cos۸۰^\circ}{۸\sin۲۰^\circ}=\frac{۲\sin۸۰^\circ\cos۸۰^\circ}{۸\sin۲۰^\circ}=\frac{\sin۱۶۰^\circ}{۸\sin۲۰^\circ}=\frac{\sin۲۰^\circ}{۸\sin۲۰^\circ}=\frac{۱}{۸}$$

۱۳- گزینه‌ی ۴ ابتدا مقدار $\tan x$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\tan x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2\times\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$$

حال داریم:

$$\tan(y+\frac{x}{2})=\tan((y-\frac{x}{2})+x)=\frac{\tan(y-\frac{x}{2})+\tan x}{1-\tan(y-\frac{x}{2})\tan x}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{4}{3}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{4}{3}}\Rightarrow\tan(y+\frac{x}{2})=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{9}}=3$$

۱۴- گزینه‌ی ۲ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$1+\cos x-\cos\frac{x}{2}=0\Rightarrow 2\cos^2\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}=0$$

$$\Rightarrow\cos\frac{x}{2}(2\cos\frac{x}{2}-1)=0\Rightarrow\begin{cases}\cos\frac{x}{2}=0\Rightarrow\frac{x}{2}=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=2k\pi+\pi\\ \cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{x}{2}=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=4k\pi\pm\frac{2\pi}{3}\end{cases}$$

جواب‌های واقع در بازه‌ی $(0,2\pi)$ عبارتند از $x=\pi$ و $x=\frac{2\pi}{3}$.

۱۵- گزینه‌ی ۲

$$4\sin^3x\cos x-4\cos^3x\sin x=1\Rightarrow 4\sin x\cos x(\sin^2x-\cos^2x)=1$$

$$\Rightarrow-2\sin 2x\cos 2x=1\Rightarrow\sin 4x=-1\Rightarrow 4x=2k\pi-\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$$

$$-\pi\le x\le\pi\Rightarrow-\frac{7\pi}{8}\le\frac{k\pi}{2}\le\frac{9\pi}{8}\Rightarrow-\frac{7}{4}\le k\le\frac{9}{4}\Rightarrow k\in\{\pm1,2,0\}$$

پس معادله در بازه‌ی $[-\pi,\pi]$ دارای ۴ جواب است.

۱۶- گزینه‌ی ۱ معادله را برحسب $\tan x$ می‌نویسیم:

$$\tan x-3\cot x=0\Rightarrow\tan x-\frac{3}{\tan x}=0$$

$$\Rightarrow\frac{\tan^2x-3}{\tan x}=0\Rightarrow\tan^2x-3=0\Rightarrow\tan^2x=3\Rightarrow\tan x=\pm\sqrt{3}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

۱۷- گزینه‌ی ۴ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$2\cos^2x-1+2\sin x\cos x=0\Rightarrow\cos 2x+\sin 2x=0$$

$$\Rightarrow\sin 2x=-\cos 2x\Rightarrow\tan 2x=-1\Rightarrow 2x=k\pi-\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$$

۱۸- گزینه‌ی ۳ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\frac{1+\tan x}{1-\tan x}=\tan\frac{\pi}{8}\Rightarrow\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan x}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan x}=\tan\frac{\pi}{8}\Rightarrow\tan(\frac{\pi}{4}+x)=\tan\frac{\pi}{8}\quad\Rightarrow x+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{8}\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{8}$$

۱۹- گزینه‌ی ۴ جواب‌های کلی معادله را معین می‌کنیم:

$$\cos(x-\frac{\pi}{4})=\cos(\frac{x}{2}+\pi)\Rightarrow\begin{cases}x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{x}{2}+\pi\\ x-\frac{\pi}{4}=2k\pi-(\frac{x}{2}+\pi)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4k\pi+\frac{5\pi}{2}\\ x=\frac{4k\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

هیچ‌کدام از جواب‌های به شکل $4k\pi+\frac{5\pi}{2}$ در بازه‌ی $[-\pi,\pi]$ قرار ندارند.

اگر در جواب $x=\frac{4k\pi}{3}-\frac{\pi}{2}$ قرار دهیم $k=0$، $k=-1$ و $k=1$ داریم:

$$k=0\Rightarrow x=-\frac{\pi}{2}\quad,\quad k=1\Rightarrow x=\frac{5\pi}{6}\quad,\quad k=-1\Rightarrow x=-\frac{11\pi}{6}$$

بنابراین مجموع جواب‌ها در بازه‌ی $[-\pi,\pi]$ برابر $-\frac{3\pi}{2}$ است.

۲۰- گزینه‌ی ۴ معادله را برحسب سینوس و کسینوس می‌نویسیم:

$$\tan x+\cot x=4\sin 2x\Rightarrow\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=4\sin 2x$$

$$\Rightarrow\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin x\cos x}=4\sin 2x\Rightarrow\frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2x}=4\sin 2x\Rightarrow\sin^2 2x=\frac{1}{2}\Rightarrow\sin 2x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow 2x=k\pi\partial\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}\pm\frac{\pi}{8}$$

۹

حد و پیوستگی

پاسخ تشریحی آزمون‌های فصل نهم

پاسخ تشریحی آزمون ۴۱

۱- گزینه‌ی ۳ اگر حد تابع f را در $x=a$ برابر L_1 و حد تابع g در $x=a$ را برابر L_2 در نظر بگیریم، داریم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to a}(2f(x)+g(x))=0\Rightarrow 2L_1+L_2=0\Rightarrow 4L_1+2L_2=0\\ \lim\limits_{x\to a}(2g(x)+f(x))=-3\Rightarrow 2L_2+L_1=-3\end{cases}\Rightarrow 3L_1=3\Rightarrow L_1=1\Rightarrow L_2=-2\ \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{L_2}{L_1}=-2$$

۲- گزینه‌ی ۱ f در تمام $\mathbb{R}$ حد دارد. اگر حد f را در $x=1$، L در نظر بگیریم، داریم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2f(x)+1}{1-3f(x)}=\frac{-1}{4}\Rightarrow\frac{2L+1}{1-3L}=\frac{-1}{4}\Rightarrow 8L+4=-1+3L\Rightarrow 5L=-5\Rightarrow L=-1$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2f(x)-1}{1+3f(x)}=\frac{2(-1)-1}{1+3(-1)}=\frac{-3}{1-3}=\frac{3}{2}$$

۳- گزینه‌ی ۳ وقتی x به سمت صفر میل می‌کند، از بین $x+2$ و $2-x$ حتماً یکی از سمت راست و دیگری از سمت چپ به ۲ میل می‌کند، پس:

$$\lim_{x\to 0}f(2-x)+f(x+2)=\lim_{x\to 2^+}f(x)+\lim_{x\to 2^-}f(x)=3+1=4$$

۴- گزینه‌ی ۳ می‌دانیم $\lim\limits_{x\to 1}(3-x^2)=2$ و ضمناً داریم:

$$x\to 1^-\Rightarrow x<1\Rightarrow x^2<1\Rightarrow -x^2>-1\Rightarrow 3-x^2>2$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to 1^-}f(3-x^2)=\lim_{x\to 2^+}f(x)=-1$$

۵- گزینه‌ی ۳ با توجه به این‌که وقتی $x\to 2^-$ تابع f دقیقاً برابر ۲ است، داریم:

$$\lim_{x\to 2^-}fof(x)=f(2)=3$$

۶- گزینه‌ی ۳ ضابطه‌ی تابع g به‌صورت $g(x)=\begin{cases}1 & x>2\\ -1 & x<2\end{cases}$ است و با توجه به نمودار تابع داریم: $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=3$، پس:

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)\times g(x)=\lim_{x\to 2^+}f(x)\times\lim_{x\to 2^+}g(x)=3\times 1=3$$

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)\times g(x)=\lim_{x\to 2^-}f(x)\times\lim_{x\to 2^-}g(x)=3\times(-1)=-3$$

بنابراین اختلاف حد چپ و راست برابر است با: $3-(-3)=6$.

۷- گزینه‌ی ۴ در اطراف $x=1$، ضابطه‌ی تابع f به‌صورت x^3+2 است، پس:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}x^3+2=3$$

$$\lim_{x\to 1}gof(x)=\lim_{x\to 3}g(x)=\lim_{x\to 3}2x=6$$

۸- گزینه‌ی ۴ با توجه به این‌که ضابطه‌ی تابع f در سمت چپ و راست عدد صفر تغییر می‌کند، حد چپ و راست fof در $x=0$ برابر است با:

$$\lim_{x\to 0^-}f(f(x))=\lim_{x\to 1^-}f(x)=1-1=0$$

(توجه کنید: $x<0\Rightarrow f(x)=x+1<1$)

$$\lim_{x\to 0^+}f(f(x))=\lim_{x\to -1^+}f(x)=-1+1=0$$

(توجه کنید: $x>0\Rightarrow f(x)=x-1>-1$)

بنابراین این دو حد برابر هستند و اختلاف آن‌ها صفر است.

۹- گزینه‌ی ۳ با توجه به ضابطه‌ی $f(2x-1)=x^2-1$ داریم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 2} f(2x-1)=2^2-1=3\\ \lim\limits_{x\to 1} f(\frac{7}{x})=\lim\limits_{x\to 7} f(x)=\lim\limits_{x\to 4} f(2x-1)=4^2-1=15\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3} f(x)-\lim\limits_{x\to 1} f(\frac{7}{x})=3-15=-12$$

۱۰- گزینه‌ی ۲ با حل کردن معادله‌ی $\frac{x-1}{x+1}=-1$ به این نتیجه می‌رسیم که:

$$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-1}{x+1}=-1$$

بنابراین برای محاسبه‌ی حد خواسته شده، می‌توان چنین عمل کرد:

$$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} f(\frac{x-1}{x+1})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+2}{x-1}=-2$$

۱۱- گزینه‌ی ۴ در سمت راست $x=2$، x^2 به ۴ میل می‌کند و داریم:

$$\begin{cases}x\to 2^+\Rightarrow x>2\Rightarrow x^2>4\Rightarrow [x^2]=4\\ x\to 2^+\Rightarrow x>2\Rightarrow -x<-2\Rightarrow [-x]=-3\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} x[x^2]-2x[-x]=\lim\limits_{x\to 2^+}(4x+6x)=\lim\limits_{x\to 2^+}10x=20$$

۱۲- گزینه‌ی ۲ ضابطه‌ی تابع $f(x)=[x]+[-x]$ به‌صورت $f(x)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$ است، پس مقدار این تابع وقتی $x\to 2$ برابر -1 است و داریم:

$$\lim\limits_{x\to 2} x([x]+[-x])=\lim\limits_{x\to 2} x(-1)=-2$$

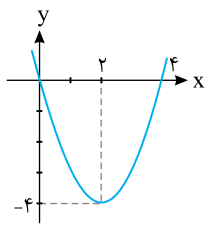
۱۳- گزینه‌ی ۱ می‌دانیم $\lim\limits_{x\to\pi}\sin x=0$ و $\lim\limits_{x\to\pi}\cos x=-1$، ضمناً می‌دانیم:

$$x<\pi\Rightarrow \sin x>0\quad,\quad \cos x>-1$$

پس داریم:

$$\lim\limits_{x\to\pi^-}[\sin x]-[\cos x]=[0^+]-[-1^+]=0-(-1)=1$$

۱۴- گزینه‌ی ۲ با توجه به این‌که نقطه‌ی $x=2$، رأس و مینیمم تابع است، پس در اطراف $x=2$ داریم:



$$f(x)>f(2)\Rightarrow f(x)>-4\Rightarrow [f(x)]=-4\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}[x^2-4x]=-4$$

۱۵- گزینه‌ی ۲ تابع $[x]$ در تمام نقاط صحیح دامنه‌اش حد ندارد، پس با توجه به محدوده $(0<x<2)$ تابع f در $x=1$ حد ندارد، حد چپ و راست تابع را در نقطه‌ی تغییر ضابطه $(x=2)$ محاسبه می‌کنیم:

$$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}[x]=1$$

$$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}|x|=2$$

پس تابع در $x=2$ نیز حد ندارد. در سایر نقاط دامنه، تابع دارای حد است.

۱۶- گزینه‌ی ۴ با توجه به نمودار تابع حد راست در $\frac{-\pi}{2}$ برابر -2 و حد چپ برابر یک است، پس:

$$\lim\limits_{x\to\frac{-\pi}{2}^+} a[\sin x]+b[\cos x]=-2\Rightarrow a[-1^+]+b[0^+]=-2\Rightarrow a=2$$

$$\lim\limits_{x\to\frac{-\pi}{2}^-} a[\sin x]+b[\cos x]=1\Rightarrow a[-1^+]+b[0^-]=1\Rightarrow -a-b=1\Rightarrow b=-3$$

۱۷- گزینه‌ی ۳ تابع $f(x)=[2x+1]$ در تمام نقاطی که عبارت $2x+1$ برابر عددی صحیح است، حد ندارد، پس:

$$(k\in\mathbb{Z})2x+1=k\Rightarrow 2x=k-1\Rightarrow x=\frac{k-1}{2}\xrightarrow{0<x<2} 0<\frac{k-1}{2}<2\Rightarrow 0<k-1<4\Rightarrow 1<k<5\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k=2,3,4$$

پس تابع فقط در ۳ نقطه در بازه‌ی داده شده دارای حد نیست $(x=\frac{1}{2},1,\frac{3}{2})$.

۱۸- گزینه‌ی ۴ با توجه به ضابطه‌ی $f(x)$ داریم:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)+\lim_{x\to ۱^-} f(x)=۲\Rightarrow \lim_{x\to ۱^+}(ax+۱)+\lim_{x\to ۱^-}(x^۲-۲a)=۲\Rightarrow a+۱+۱-۲a=۲\Rightarrow -a+۲=۲\Rightarrow a=۰$$

۱۹- گزینه‌ی ۱ **راه‌حل اول**: با توجه به این‌که داریم $-۱\le \cos\alpha\le ۱$، پس در سمت راست $x=۲$ می‌توان نوشت:

$$-۱\le\cos(\frac{۱}{x-۲})\le ۱\xrightarrow{x^۲-۴>۰}-(x^۲-۴)\le(x^۲-۴)\cos(\frac{۱}{x-۲})\le x^۲-۴$$

با توجه به این‌که $\lim_{x\to ۲^+}-(x^۲-۴)=\lim_{x\to ۲^+}(x^۲-۴)=۰$ ، پس طبق قضیه‌ی فشـــردگی داریم: $\lim_{x\to ۲^+}(x^۲-۴)\cos(\frac{۱}{x-۲})=۰$ ، به طریق مشابه برای حد چپ داریم:

$$-۱\le\cos(\frac{۱}{x-۲})\le ۱\xrightarrow{x^۲-۴<۰}-(x^۲-۴)\ge(x^۲-۴)\cos(\frac{۱}{x-۲})\ge x^۲-۴$$

بنابراین طبق قضیه‌ی فشردگی $\lim_{x\to ۲^-}(x^۲-۴)\cos(\frac{۱}{x-۲})=۰$ ، پس حد چپ و راست برابر صفر است و حد تابع در $x=۲$ برابر صفر است.

راه‌حل دوم: می‌دانیم حد حاصل‌ضرب دو تابع که یکی از آن‌ها کراندار باشد و دیگری حدی برابر صفر داشته باشد، برابر صفر است:

$$\lim_{x\to ۲}(x^۲-۴)=۰,-۱\le\cos(\frac{۱}{x-۲})\le ۱\,(\text{کراندار})\Rightarrow \lim_{x\to ۲}(x^۲-۴)\cos(\frac{۱}{x-۲})=۰$$

۲۰- گزینه‌ی ۱ با توجه به این‌که $\lim_{x\to ۲} ۱+۲\sin(\frac{\pi}{۴}x)=\lim_{x\to ۲} ۳+۵(x-۲)^۲=۳$ پس طبق قضیه‌ی فشردگی، داریم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۶}{۳f(x)-۱}=۳$$

اگر $\lim_{x\to ۲} f(x)$ را L بنامیم داریم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۶}{۳f(x)-۱}=۳\Rightarrow\frac{۶}{۳L-۱}=۳\Rightarrow ۶=۹L-۳\Rightarrow ۹L=۹\Rightarrow L=۱$$

پاسخ تشریحی آزمون ۴۲

۱- گزینه‌ی ۲ تابع f در $x=۱$ فقط حد راست دارد. در گزینه‌ی ۲، می‌توان نوشت:

$$x\to ۱^-\Rightarrow x<۱\Rightarrow -۲x>-۲\Rightarrow ۳-۲x>۱\Rightarrow \lim_{x\to ۱^-} f(۳-۲x)=\lim_{x\to ۱^+} f(x)=۲$$

۲- گزینه‌ی ۳ دامنه‌ی تعریف توابع را تعیین می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x^۳-x^۲}=|x|\sqrt{x-۱}\quad :D_f=[۱,+\infty)\cup\{۰\}$$

$$g(x)=\sqrt{x^۴-x^۲}=|x|\sqrt{x^۲-۱}:D_g=(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)\cup\{۰\}$$

$$h(x)=\sqrt{x^۳-x}=\sqrt{x(x^۲-۱)}\quad :D_h=[-۱,۰]\cup[۱,+\infty)$$

$$t(x)=\sqrt{x^۲-۱}\qquad :D_t=(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)$$

همان‌طور که مشخص است، توابع f و g و t در اطراف صفر تعریف نشده هستند و فقط تابع $h(x)$ در سمت چپ $x=۰$ تعریف شده است و داریم:

$$\lim_{x\to ۰} h(x)=\lim_{x\to ۰^-} h(x)=۰$$

۳- گزینه‌ی ۳ می‌دانیم $\lim_{x\to ۱}(۱-x^۲)=۰$ ، ضمناً در اطراف $x=۱$ داریم:

$$x\to ۱^+\Rightarrow x>۱\Rightarrow x^۲>۱\Rightarrow -x^۲<-۱\Rightarrow ۱-x^۲<۰\Rightarrow ۱-x^۲\to ۰^-$$

$$x\to ۱^-\Rightarrow x<۱\Rightarrow x^۲<۱\Rightarrow -x^۲>-۱\Rightarrow ۱-x^۲>۰\Rightarrow ۱-x^۲\to ۰^+$$

بنابراین حد خواسته شده برابر است با:

$$\lim_{x\to ۱^-} f(۱-x^۲)-\lim_{x\to ۱^+} f(۱-x^۲)=\lim_{x\to ۰^+} f(x)-\lim_{x\to ۰^-} f(x)=۲-(-۱)=۳$$

۴- گزینه‌ی ۴ وقتی $x \to 1^-$ یعنی x با مقادیر کم‌تر از یک به عدد یک نزدیک می‌شـود و با توجه به نمودار تابع $f(x)$ نیز با مقادیر کم‌تر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می‌شود، یعنی:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=2, f(x)<2 \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} fof(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=0$$

۵- گزینه‌ی ۲ با توجه به نمودار f، هرگاه $x \to -1^+$ آن‌گاه $f(x)\to 2^-$، پس هرگاه $x \to 2^-$ آن‌گاه $f^{-1}(x)=-1$ پس:

$$\lim_{x\to 2^-} f^{-1}(x)=-1$$

۶- گزینه‌ی ۳ تابع f در اطراف عدد $x=1$ همواره برابر یک است، پس:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=1 \Rightarrow \lim_{x\to 1} g(f(x))=\lim_{x\to 1} g(1)=g(1)=3\times 1=3$$

۷- گزینه‌ی ۴ در مورد تابع $g(x)=\frac{2x+4}{3x+2}$، با توجه به این‌که $ad-bc=4-12<0$ تابع $g(x)$ نزولی است، پس در اطراف عدد صفر داریم:

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2x+4}{3x+2}=2$$

$$x<0 \Rightarrow g(x)>g(0)\Rightarrow g(x)>2$$

پس برای حد خواسته شده داریم:

$$\lim_{x\to 0^-} f\left(\frac{2x+4}{3x+2}\right)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\sqrt{x+2}=\sqrt{4}=2$$

۸- گزینه‌ی ۲ با توجه به این‌که توابع $-\sqrt{x}$ و $-x$ اکیداً نزولی و تابع ثابت ۶ نزولی است، پس $g(x)$ همواره نزولی است و در سمت راست $x=4$ داریم:

$$x>4 \xrightarrow{\text{نزولی } g} g(x)<g(4)\Rightarrow g(x)<0$$

بنابراین با توجه به این‌که $\lim_{x\to 4^+} g(x)=0$، وقتی $x\to 4^+$، آن‌گاه $g(x)\to 0^-$ و داریم:

$$\lim_{x\to 4^+} fog(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=-1$$

۹- گزینه‌ی ۲ می‌دانیم $\lim_{x\to 1} 2\cos \pi x=2\cos\pi=-2$، ضمناً در اطراف $x=1$ می‌دانیم:

$$\cos\pi x>-1 \Rightarrow 2\cos\pi x>-2 \Rightarrow [2\cos\pi x]=-2$$

ضمناً با تبدیل واحد رادیان به درجه داریم:

$$\frac{D}{180}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow D=\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \xrightarrow{3<\pi<4} 45^\circ<\frac{180}{\pi}<60^\circ \Rightarrow 1<\tan\left(\frac{180}{\pi}\right)<\sqrt{3}$$

بنابراین در اطراف $x=1$، مقدار تابع تانژانت عددی بین ۱ و ۲ است و داریم:

$$\lim_{x\to 1}[2\cos\pi x]+[\tan x]=-2+1=-1$$

۱۰- گزینه‌ی ۱ می‌دانیم $\lim_{x\to 2^+}\frac{2x+4}{3x-2}=\frac{8}{4}=2$، ضمناً با توجه به این‌که در تابع $f(x)=\frac{2x+4}{3x-2}$، $ad-bc=-4-12<0$ یعنی تابع نزولی اســت و در سمت راست $x=2$ داریم:

$$x>2 \xrightarrow{\text{نزولی } f} f(x)<f(2)\Rightarrow f(x)<2 \Rightarrow [f(x)]=1$$

۱۱- گزینه‌ی ۲ برای آن‌که تابع در $x=2$ حد داشته باشد، می‌بایست حد چپ و راست برابر باشد، پس:

$$\begin{cases}\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(2x-a[x]+[-2x])=\lim_{x\to 2^+}(2x-2a-5)=-2a-1\\ \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(2x-a[x]+[-2x])=\lim_{x\to 2^-}(2x-a-4)=-a\end{cases} \Rightarrow -2a-1=-a\Rightarrow a=-1$$

۱۲- گزینه‌ی ۲ وقتی x با مقادیر کم‌تر از یک به عدد یک نزدیک می‌شود، داریم: $[x]=0$، ضمناً $x-1<0$ پس $|x-1|=1-x$، پس:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(1-x)=0$$

ضمناً با توجه به این‌که $x<1$، پس $1-x>0$، یعنی $f(x)\to 0^+$ و داریم:

$$\lim_{x\to 1^-} f(f(x))=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(1-x)-0=1$$

۱۳- گزینه‌ی ۲ وقتی $x\to 1^+$ با توجه به نمودار، تابع f با مقادیر کم‌تر از ۲ به سمت ۲ میل می‌کند، پس:

$$x\to 1^+ \Rightarrow f(x)\to 2^- \Rightarrow \lim_{x\to 1^+}[f(x)]=1$$

ضمناً با نزدیک شدن x با مقادیر بیش‌تر از یک به عدد یک، عبارت $[x]$ به‌صورت ثابت برابر یک است، یعنی: $\lim_{x\to 1^+} f([x])=f(1)=3$

بنابراین مقدار خواسته شده برابر $3-1=2$ است.

۱۴- گزینه‌ی ۲ تابع $y=[x]$ در تمام نقاط با طول صحیح حد ندارد، امّا با توجه به این‌که حد تابع $y=x^2+x$ در اعداد صفر و منفی یک برابر صفر است، پس تابع $f(x)=(x^2+x)[x]$ فقط در نقاط صحیح $x=0$ و $x=-1$ دارای حدی برابر صفر است.

۱۵- گزینه‌ی ۱ با توجه به این‌که در اطراف عدد $x=1$ وقتی $x\to 1$ همه‌ی اعداد غیرصحیح هستند، پس:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\sin(\pi x)=\sin\pi=0$$

۱۶- گزینه‌ی ۴ نقاط $x=1$ و $x=-1$ نقاط تغییر ضابطه‌ی تابع هستند، برای آن‌که تابع در $x=1$ حد داشته باشد، داریم:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)\Rightarrow \lim_{x\to 1^+}(ax^3+3x)=\lim_{x\to 1^-}(bx+a-2)\Rightarrow a+3=b+a-2\Rightarrow b=5$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^-} f(x)\Rightarrow \lim_{x\to -1^+}(bx+a-2)=\lim_{x\to -1^-}(ax^3+3x)\Rightarrow -b+a-2=-a-3\Rightarrow 2a+1=b \xrightarrow{b=5}$$

$$a=2\Rightarrow a+b=7$$

۱۷- گزینه‌ی ۳ با توجه به این‌که تابع $y=x$ در هر نقطه‌ی دلخواه a حد دارد، پس تابع $g(x)=x+f(x)$ قطعاً در $x=a$ حد ندارد، زیرا با استفاده از برهان خلف اگر $g(x)$ در a حد داشته باشد، تابع $f(x)=g(x)-x$ به‌صورت تفاضل دو تابع است که هر دو در a حد دارند، پس f نیز در این نقطه حد دارد که با فرض سؤال در تناقض است. برای گزینه‌های دیگر می‌توان مثال نقض ارائه کرد:

$$\text{گزینه‌ی (1): در صفر } f(x)=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}\quad ,\ \lim_{x\to 0}|f(x)|=1$$

$$\text{گزینه‌ی (2): در صفر } f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2} & x>0\\ \frac{4}{3} & x<0\end{cases}\quad ,\ \lim_{x\to 0}[f(x)]=1$$

$$\text{گزینه‌ی (4): در صفر } f(x)=[x]\quad ,\ \lim_{x\to 0} xf(x)=0$$

۱۸- گزینه‌ی ۳ با توجه به نامساوی داده شده داریم:

$$\begin{cases}|2f(x)-1|\le x-\sin x\Rightarrow \sin x-x\le 2f(x)-1\le x-\sin x\\ \lim_{x\to 0}(\sin x-x)=\lim_{x\to 0}(x-\sin x)=0\end{cases}\xrightarrow{\text{قضیه‌ی فشردگی}}\lim_{x\to 0}(2f(x)-1)=0\Rightarrow \lim_{x\to 0}2f(x)=1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=\frac{1}{2}\Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x-1)=\frac{1}{2}$$

۱۹- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول:** واضح است که $f(x)=\sin\frac{1}{x}$، پس داریم:

$$f(x)f(\frac{1}{x})=\sin\frac{1}{x}\times\sin x$$

با توجه به این‌که $\lim_{x\to 0}\sin x$ برابر صفر است و $\sin\frac{1}{x}$ تابعی کران‌دار است، پس:

$$\lim_{x\to 0}\sin x\sin\frac{1}{x}=0$$

راه‌حل دوم: با استفاده از قضیه‌ی فشردگی ثابت می‌کنیم حد راست تابع خواسته شده برابر صفر است، حد چپ نیز به‌طور مشابه برابر صفر به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases}-1\le\sin\frac{1}{x}\le 1\xrightarrow{\sin x>0}-\sin x\le\sin x\sin\frac{1}{x}\le\sin x\\ \lim_{x\to 0}\sin x=\lim_{x\to 0}(-\sin x)=0\end{cases}\xrightarrow{\text{قضیه‌ی فشردگی}}\lim_{x\to 0}\sin x\sin\frac{1}{x}=0$$

۲۰- گزینه‌ی ۲ در اطراف $x=-1$، توابع $\sin\frac{1}{x+1}$ و $[x]$ کران‌دار هســتند ولی حد ندارند، پس اگر عاملی که در آن‌ها ضرب می‌شــود، حدی برابر صفر داشته باشد، حد تابع مورد نظر نیز برابر صفر است، در غیر این‌صورت حد ندارد. پس با توجه‌به این‌که:

$$\lim_{x\to -1}(x^3+x+2)=0,\ \lim_{x\to -1}(x^2-1)=0$$

پس توابع «الف» و «ج» در $x=-1$ دارای حد هستند ولی توابع گزینه‌های «ب» و «د» در $x=-1$ حد ندارند، زیرا:

$$\lim_{x\to -1}(x^2+x+2)\neq 0,\ \lim_{x\to -1}(x^2-1)\neq 0$$

پاسخ تشریحی آزمون ۴۳

۱- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول**: عامل صفرکننده‌ی $(x-1)$ را از صورت و مخرج ساده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-4x+3}{2x^3+3x-5}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x-3)}{(x-1)(2x^2+2x+5)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-3}{2x^2+2x+5}=\frac{-1}{9}$$

راه‌حل دوم: با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-4x+3}{2x^3+3x-5}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-4}{6x^2+3}=\frac{-1}{9}$$

۲- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول**: با ضرب کردن صورت و مخرج در مزدوج، عامل صفرکننده را حذف می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{4-(5-x)}\times\frac{(2+\sqrt{5-x})}{(1+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{x-1}\times\frac{(2+\sqrt{5-x})}{(1+\sqrt{x})}=-\frac{2+2}{1+1}=-2$$

راه‌حل دوم: با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{-\frac{-1}{2\sqrt{5-x}}}=\frac{\frac{-1}{2}}{\frac{1}{4}}=-2$$

۳- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول**: با توجه به صفر بودن حد مخرج کســر، برای آن‌که حد مورد نظر موجود باشــد، باید حالت $\frac{0}{0}$ رخ دهد، یعنی حد صورت کسر نیز برابر صفر است:

$$\lim_{x\to 2}ax^2+bx+3=0\Rightarrow 4a+2b+3=0\Rightarrow b=-\frac{3}{2}-2a \qquad (I)$$

ضمناً با توجه به این‌که صورت کسر دارای عامل $(x-2)$ است داریم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{ax^2+bx+3}{x-2}=4\Rightarrow\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(ax-\frac{3}{2})}{x-2}=4\Rightarrow 2a-\frac{3}{2}=4\Rightarrow a=\frac{11}{4}\xrightarrow{(I)}b=-\frac{3}{2}-\frac{11}{2}=-7$$

راه‌حل دوم: با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{ax^2+bx+3}{x-2}=4\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to 2}\frac{2ax+b}{1}=4\Rightarrow\begin{cases}4a+b=4\\ (I)\ b=-\frac{3}{2}-2a\end{cases}\Rightarrow 2a-\frac{3}{2}=4\Rightarrow a=\frac{11}{4}\Rightarrow b=-7$$

۴- گزینه‌ی ۱ **راه‌حل اول**: عبارت داخل قدرمطلق به‌صورت $(x-2)(1-x)$ قابل تجزیه است. با توجه به منفی بودن $1-x$ در اطراف $x=2$ و منفی بودن $x-2$ در سمت چپ ۲، داخل قدرمطلق مثبت است و داریم:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{|-x^2+3x-2|}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(1-x)}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to 2}\frac{1-x}{x-3}=\frac{-1}{-1}=1$$

راه‌حل دوم: بعد از تعیین علامت داخل قدرمطلق به روش بالا، با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{-x^2+3x-2}{x^2-5x+6}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to 2}\frac{-2x+3}{2x-5}=\frac{-1}{-1}=1$$

۵- گزینه‌ی ۴ **راه‌حل اول**: عبارت را در چاق صورت و در مزدوج مخرج ضرب و تقسیم می‌کنیم تا بتوان عامل صفرکننده را ساده کرد:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt[۳]{۳x+۵}-۲}{\sqrt{۳x-۲}-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{۳x+۵-۸}{۳x-۲-۱}\times\frac{\sqrt{۳x-۲}+۱}{\sqrt[۳]{(۳x+۵)^۲}+۲\sqrt[۳]{۳x+۵}+۴}=\frac{۱+۱}{۴+۴+۴}=\frac{۲}{۱۲}=\frac{۱}{۶}$$

راه‌حل دوم: از قاعده‌ی هوپیتال کمک می‌گیریم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt[۳]{۳x+۵}-۲}{\sqrt{۳x-۲}-۱}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۱}\frac{\frac{۳}{۳\sqrt[۳]{(۳x+۵)^۲}}}{\frac{۳}{۲\sqrt{۳x-۲}}}=\frac{\frac{۳}{۳\times۴}}{\frac{۳}{۲\times۱}}=\frac{۱}{۶}$$

۶- گزینه‌ی ۴ با توجه به صفر بودن حد مخرج کسر، برای آن‌که حد موجود باشد، می‌بایست حد صورت نیز برابر صفر باشد:

$$\lim_{x\to ۲}۲x^۲+ax+۴=۸+۲a+۴=۰\Rightarrow a=-۶$$

حال به محاسبه‌ی حد می‌پردازیم:

راه‌حل اول: صورت کسر را تجزیه کرده و در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۲x^۲-۶x+۴}{۳-\sqrt{۴x+۱}}=\lim_{x\to ۲}\frac{۲(x-۲)(x-۱)(۳+\sqrt{۴x+۱})}{۹-۴x-۱}=\lim_{x\to ۲}\frac{۲(x-۱)(۳+\sqrt{۴x+۱})}{-۴}=\frac{۱\times(۳+۳)}{-۲}=-۳$$

راه‌حل دوم: از قاعده‌ی هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۲x^۲-۶x+۴}{۳-\sqrt{۴x+۱}}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۲}\frac{۴x-۶}{\frac{-۴}{۲\sqrt{۴x+۱}}}=\frac{۸-۶}{\frac{-۴}{۲\times۳}}=-۳$$

۷- گزینه‌ی ۱ **راه‌حل اول**: از روش حذف عامل صفرکننده با ضرب صورت و مخرج کسر در مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x-۱}-۱}{x-\sqrt{x+۲}}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۱)-۱}{x^۲-x-۲}\times\frac{x+\sqrt{x+۲}}{\sqrt{x-۱}+۱}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x+\sqrt{x+۲})}{(x-۲)(x+۱)(\sqrt{x-۱}+۱)}=\frac{۲+۲}{۳(۱+۱)}=\frac{۲}{۳}$$

راه‌حل دوم: از قاعده‌ی هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x-۱}-۱}{x-\sqrt{x+۲}}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۲}\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x-۱}}}{۱-\frac{۱}{۲\sqrt{x+۲}}}=\frac{\frac{۱}{۲}}{۱-\frac{۱}{۴}}=\frac{۲}{۳}$$

۸- گزینه‌ی ۳ با توجه به اتحاد چاق و لاغر $(a^۳-b^۳)=(a-b)(a^۲+ab+b^۲)$ صورت کسر را تجزیه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۲۷^x-۸^x}{۳^x-۲^x}=\lim_{x\to ۰}\frac{(۳^x-۲^x)(۳^{۲x}+۳^x\times۲^x+۲^{۲x})}{۳^x-۲^x}=\lim_{x\to ۰}(۳^{۲x}+۳^x\times۲^x+۲^{۲x})=۳$$

۹- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول**: در سمت راست $x=۱$ داخل قدرمطلق مثبت و در سمت چپ منفی است، پس برای حد راست داریم:

$$\lim_{x\to ۱^+}f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(x^۲-۱)}{x-\sqrt{x}}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(x^۲-۱)(x+\sqrt{x})}{x^۲-x}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(x-۱)(x+۱)(x+\sqrt{x})}{x(x-۱)}=\frac{۲\times۲}{۱}=۴$$

به همین ترتیب داریم $\lim_{x\to ۱^-}f(x)=-۴$، پس تفاضل این دو حد برابر ۸ است.

راه‌حل دوم:

$$\lim_{x\to ۱^+}f(x)-\lim_{x\to ۱^-}f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۲-۱}{x-\sqrt{x}}-\lim_{x\to ۱^-}\frac{۱-x^۲}{x-\sqrt{x}}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۱^+}\frac{۲x}{۱-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}-\lim_{x\to ۱^-}\frac{-۲x}{۱-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}=۲\times\frac{۲}{۱-\frac{۱}{۲}}=۲\times۴=۸$$

۱۰- گزینه‌ی ۱ **راه‌حل اول**: با استفاده از اتحادها، عامل صفرکننده را از صورت و مخرج ساده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\frac{\cos ۲x}{\cos x+\sin x}=\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\frac{\cos^۲ x-\sin^۲ x}{\cos x+\sin x}=\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\cos x+\sin x}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}=-\sqrt{۲}$$

راه‌حل دوم: از قاعده‌ی هوپیتال کمک می‌گیریم:

$$\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\frac{\cos ۲x}{\cos x+\sin x}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\frac{-۲\sin ۲x}{-\sin x+\cos x}=\frac{-۲\sin\frac{۳\pi}{۲}}{-\sin\frac{۳\pi}{۴}+\cos\frac{۳\pi}{۴}}=\frac{-۲\times(-۱)}{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=-\sqrt{۲}$$

۱۱- گزینه‌ی ۱ **راه‌حل اول**: با استفاده از اتحادهای مثلثاتی داریم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\tan x-۱}{\cos ۲x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-۱}{\cos^۲ x-\sin^۲ x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\frac{\sin x-\cos x}{\cos x}}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}=\frac{\frac{-۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}}{۲\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{-\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=-۱$$

راه‌حل دوم: با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\tan x-۱}{\cos ۲x}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{(۱+\tan^۲ x)}{-۲\sin ۲x}=\frac{۱+۱}{-۲}=-۱$$

سراسری خارج از کشور – ۹۱

۱۲- گزینه‌ی ۴ **راه‌حل اول**: با استفاده از اتحاد مزدوج و چاق و لاغر داریم:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{۱+\cos^۳ x}{\sin^۲ x}=\lim_{x\to\pi}\frac{(۱+\cos x)(۱-\cos x+\cos^۲ x)}{(۱-\cos x)(۱+\cos x)}=\lim_{x\to\pi}\frac{۱-\cos x+\cos^۲ x}{۱-\cos x}=\frac{۱+۱+۱}{۱+۱}=\frac{۳}{۲}$$

راه‌حل دوم: از قاعده‌ی هوپیتال کمک می‌گیریم:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{۱+\cos^۳ x}{\sin^۲ x}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to\pi}\frac{۳\cos^۲ x(-\sin x)}{۲\sin x\cos x}=\lim_{x\to\pi}\frac{-۳\cos x}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

۱۳- گزینه‌ی ۴ **راه‌حل اول**: وقتی $x\to ۰$، می‌دانیم $\sin x\sim x$ و $۱-\cos ۲x\sim\frac{۴x^۲}{۲}$، پس:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos ۲x}{x\sin x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲x^۲}{x\times x}=۲$$

راه‌حل دوم: دوبار از قاعده‌ی هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos ۲x}{x\sin x}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۰}\frac{۲\sin ۲x}{\sin x+x\cos x}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۰}\frac{۴\cos ۲x}{۲\cos x-x\sin x}=\frac{۴}{۲}=۲$$

سراسری خارج از کشور – ۹۰

۱۴- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول**: با استفاده از اتحادهای مثلثاتی داریم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۲x-۲\tan x}{x^۳}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲\sin x\cos x-۲\frac{\sin x}{\cos x}}{x^۳}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲\sin x(\frac{\cos^۲ x-۱}{\cos x})}{x^۳}=\lim_{x\to ۰}\frac{-۲\sin^۳ x}{\cos x\times x^۳}$$

با توجه به این‌که $\sin x\sim x$ است، پس حاصل حد برابر -۲ است.

تذکر: اگر از ابتدا از هم‌ارزی استفاده کنیم، صورت کسر برابر صفر می‌شود و نمی‌توان حد را رفع ابهام کرد.

راه‌حل دوم: ۳بار از قاعده‌ی هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۲x-۲\tan x}{x^۳}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۰}\frac{۲\cos ۲x-۲(۱+\tan^۲ x)}{۳x^۲}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۰}\frac{-۴\sin ۲x-۴\tan x(۱+\tan^۲ x)}{۶x}$$

$$\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۰}\frac{-۸\cos ۲x-۴(۱+\tan^۲ x)-۱۲\tan^۲ x(۱+\tan^۲ x)}{۶}=\frac{-۸-۴+۰}{۶}=-۲$$

۱۵- گزینه‌ی ۴ **راه‌حل اول**: در اطراف $u=۰$، هم‌ارزی $\cos u\sim ۱-\frac{u^۲}{۲}$ برقرار است، پس:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\cos x-\cos ۲x}{x^۲}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\frac{x^۲}{۲}-(۱-\frac{۴x^۲}{۲})}{x^۲}=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{۳}{۲}x^۲}{x^۲}=\frac{۳}{۲}$$

راه‌حل دوم: ۲بار از قاعده‌ی هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\cos x-\cos ۲x}{x^۲}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۰}\frac{-\sin x+۲\sin ۲x}{۲x}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۰}\frac{-\cos x+۴\cos ۲x}{۲}=\frac{-۱+۴}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

سراسری – ۹۱

۱۶- گزینه‌ی ۳ برای آن‌که تابع f در $x=۲$ پیوسته باشد، باید حد چپ و راست تابع در این نقطه برابر ۵ باشد:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^+}f(x)=۵\Rightarrow\lim\limits_{x\to ۲^+}(ax+b)=۵\Rightarrow ۲a+b=۵\\[2mm]\lim\limits_{x\to ۲^-}f(x)=۵\Rightarrow\lim\limits_{x\to ۲^-}(x^۲+bx-۱)=۵\Rightarrow ۴+۲b-۱=۵\Rightarrow b=۱\end{cases}\Rightarrow a=۲$$

سراسری خارج از کشور – ۹۱

۱۷- گزینه‌ی ۴ باید حد چپ و راست تابع در $x=\frac{3\pi}{4}$ برابر باشد تا تابع پیوسته شود، پس:

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^+} f(x)\Rightarrow \lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^-} a\sin 2x=\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^+}\cos(x+\frac{\pi}{4})\Rightarrow a\sin\frac{3\pi}{2}=\cos\pi\Rightarrow -a=-1\Rightarrow a=1$$

سراسری خارج از کشور - ۹۰

۱۸- گزینه‌ی ۱ حد چپ و راست تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^3-3x^2+4}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x^2-x-2)}{x-2}=4-2-2=0$$

$$\lim_{x\to 2^-}(2x+b)=4+b$$

برای پیوسته بودن تابع در $x=2$، اعداد به‌دست آمده باید برابر باشند:

$$4+b=0\Rightarrow b=-4$$

سراسری خارج از کشور - ۸۹

۱۹- گزینه‌ی ۴ حد چپ و راست تابع، در $x=2$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} 3x-[x]=6-1=5$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} x+2=4$$

حد چپ و راست این تابع در $x=2$ برابر نیست، پس تابع در $x=2$ حد ندارد و به ازای هیچ مقداری برای $f(2)=a$ نمی‌تواند در $x=2$ پیوسته باشد.

سراسری - ۹۲

۲۰- گزینه‌ی ۱ تابع باید در $x=\frac{\pi}{2}$ پیوسته باشد، پس:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{2x-\pi}=a\xrightarrow{\sin(2x-\pi)=-\sin 2x}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin(2x-\pi)}{2x-\pi}=a\Rightarrow -1=a$$

توجه: حاصل حد را با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال نیز می‌توان محاسبه کرد:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{2x-\pi}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos 2x}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

سراسری خارج از کشور - ۹۲

پاسخ تشریحی آزمون ٤٤

۱- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول**: صورت کسر را با استفاده از اتحاد چاق و لاغر تجزیه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)^6-1}{(x-1)^2-1}=\lim_{x\to 0}\frac{((x-1)^2-1)((x-1)^4+(x-1)^2+1)}{(x-1)^2-1}=\lim_{x\to 0}((x-1)^4+(x-1)^2+1)=3$$

راه‌حل دوم: با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)^6-1}{(x-1)^2-1}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 0}\frac{6(x-1)^5}{2(x-1)}=\lim_{x\to 0}3(x-1)^4=3(-1)^4=3$$

راه‌حل سوم: هرچند جمله‌ای وقتی $x\to 0$ با کم‌ترین توان خود هم‌ارز است، پس:

$$(x-1)^2-1\sim -2x \quad , \quad (x-1)^6-1\sim -6x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)^6-1}{(x-1)^2-1}=\lim_{x\to 0}\frac{-6x}{-2x}=3$$

۲- گزینه‌ی ۲ با ضرب کردن پرانتزها در هم، صورت و مخرج را ساده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{(1-2x)(1-3x)(1-4x)-1}=\lim_{x\to 0}\frac{1+6x+11x^2+6x^3-1}{1-9x+26x^2-24x^3-1}=\lim_{x\to 0}\frac{6+11x+6x^2}{-9+26x-24x^2}=\frac{-6}{9}=\frac{-2}{3}$$

تذکر: همان‌طور که ملاحظه کردید، فقط جمله‌ی درجه یک در تعیین مقدار حد، مؤثّر بود و لازم نبود ضریب جملات درجه ۲ و ۳ را به‌دســت آوریم، زیرا با صفر گذاشتن x آن‌ها حذف می‌شوند. این نکته به قاعده‌ی کم توان معروف است که هرچند جمله‌ای در نزدیکی $x=0$ با کم‌ترین توان خود هم‌ارز است.

۳- گزینه‌ی ۴ **راه‌حل اول**: حد صورت کسر برابر صفر است، پس حد مخرج نیز باید برابر صفر باشد، پس $k\neq 0$ یعنی کم‌ترین درجه‌ی صورت، عبارت درجه اول $4kx$ است. با ساده کردن یک عامل x از صورت و مخرج داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+2x^2+4kx}{ax^k}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x+4k}{ax^{k-1}}$$

با توجه به این‌که حد صورت کسر در این حالت صفر نیست، حد مخرج کسر نیز نباید برابر صفر باشد. پس $k=1$. در این حالت داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+2x^2+4kx}{ax^k}=2\xrightarrow{k=1}\lim_{x\to 0}\frac{4}{a}=2\Rightarrow a=2\Rightarrow a+k=3$$

راه‌حل دوم: هرچند جمله‌ای در اطراف $x=0$ هم‌ارز کم‌ترین توان خود است، پس:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+2x^2+4kx}{ax^k}=2\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{4kx}{ax^k}=2\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{4k}{ax^{k-1}}=2\Rightarrow\begin{cases}k-1=0\Rightarrow k=1\\ \frac{4k}{a}=2\end{cases}\Rightarrow a=2$$

راه‌حل سوم: با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+2x^2+4kx}{ax^k}=2\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 0}\frac{3x^2+4x+4k}{akx^{k-1}}=2\Rightarrow\begin{cases}k-1=0\Rightarrow k=1\\ \frac{4}{a}=2\Rightarrow a=2\end{cases}$$

۴- گزینه‌ی ۳ مخرج کسر را با استفاده از اتحاد چاق و لاغر و مزدوج تجزیه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})}{(1-x)(1-x)}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}=\frac{1}{2\times 3}=\frac{1}{6}$$

۵- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول**: با ضرب صورت و مخرج کسر در مزدوج صورت داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{x+a}-\sqrt{2x+4a}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{4(x+a)-(2x+4a)}{x(2\sqrt{x+a}+\sqrt{2x+4a})}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(2\sqrt{x+a}+\sqrt{2x+4a})}=\frac{2}{2\sqrt{a}+\sqrt{4a}}=\frac{2}{4\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

از آن‌جایی که این حد برابر ۲ است، پس:

$$\frac{1}{2\sqrt{a}}=2\Rightarrow\sqrt{a}=\frac{1}{4}\Rightarrow a=\frac{1}{16}$$

راه‌حل دوم: از قاعده‌ی هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{x+a}-\sqrt{2x+4a}}{x}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 0}\frac{2\frac{1}{2\sqrt{x+a}}-\frac{2}{2\sqrt{2x+4a}}}{x}=\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{4a}}=\frac{2-1}{2\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

چون $\frac{1}{2\sqrt{a}}=2$، پس $a=\frac{1}{16}$.

۶- گزینه‌ی ۳ با تغییر متغیر $\sqrt{x+1}=t$، وقتی $x\to 3$، آن‌گاه $t\to 2$ و داریم:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1+\sqrt{x+1}-2}-2}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{t\to 2}\frac{\sqrt{t^2+t-2}-2}{t-2}=\lim_{t\to 2}\frac{t^2+t-2-4}{(t-2)(\sqrt{t^2+t-2}+2)}=\lim_{t\to 2}\frac{(t-2)(t+3)}{(t-2)(\sqrt{t^2+t-2}+2)}=\frac{5}{2+2}=\frac{5}{4}$$

۷- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول**: با تغییر متغیر $\sqrt[6]{x}=t$ داریم:

$$x\to 64,\ \sqrt[6]{x}=t\Rightarrow t\to 2,\ x=t^6$$

$$\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}}{x-8\sqrt{x}}=\lim_{t\to 2}\frac{t^3-2t^2}{t^6-8t^3}=\lim_{t\to 2}\frac{t^2(t-2)}{t^3(t-2)(t^2+2t+4)}=\lim_{t\to 2}\frac{t^2}{t^3(t^2+2t+4)}=\frac{4}{8(4+4+4)}=\frac{1}{24}$$

راه‌حل دوم: از قاعده‌ی هوپیتال کمک می‌گیریم:

$$\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}}{x-8\sqrt{x}}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 64}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}}{1-\frac{8}{2\sqrt{x}}}=\frac{\frac{1}{2\times 8}-\frac{2}{3\times 16}}{1-\frac{8}{2\times 8}}=\frac{\frac{3-2}{48}}{\frac{16-8}{16}}=\frac{\frac{1}{48}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{24}$$

۸- گزینه‌ی ۱ اگر از تغییر متغیر $3^x=t$ استفاده کنیم، وقتی $x\to 1$، آن‌گاه $t\to 3$، پس:

$$\lim_{x\to 1}\frac{9^x-3^{x+2}+18}{9^x-3^x-6}=\lim_{x\to 1}\frac{(3^x)^2-9\times 3^x+18}{(3^x)^2-3^x-6}=\lim_{t\to 3}\frac{t^2-9t+18}{t^2-t-6}=\lim_{t\to 3}\frac{(t-3)(t-6)}{(t-3)(t+2)}=\frac{3-6}{3+2}=\frac{-3}{5}$$

۹- گزینه‌ی ۱ با توجه به این‌که x در سمت چپ عدد ۳ قرار دارد، پس $[x]=2$ و $[-x]=-3$، پس:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{[x]\sqrt{(x-3)^2}}{x[-x]+9}=\lim_{x\to 3^-}\frac{2|x-3|}{-3x+9}=\lim_{x\to 3^-}\frac{-2(x-3)}{-3(x-3)}=\frac{2}{3}$$

۱۰- گزینه‌ی ۴ ابتدا تابع $f(x)$ را با استفاده از اتحادهای مثلثاتی ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+\cos 4x}}{1-\tan x}=\frac{\sqrt{1+2\cos^2 2x-1}}{1-\frac{\sin x}{\cos x}}=\frac{\sqrt{2}|\cos 2x|}{\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}}$$

با توجه به این‌که در سمت راست $x=\frac{\pi}{4}$، $\cos 2x$ مقداری مثبت است، داریم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}\frac{\sqrt{2}\cos 2x}{\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}\frac{\sqrt{2}(\cos^2 x-\sin^2 x)\cos x}{\cos x-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}\sqrt{2}(\cos x+\sin x)\cos x=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

ضمناً با توجه به این‌که در سمت چپ $x=\frac{\pi}{4}$، $\cos 2x$ مقداری منفی است، به روش مشابه داریم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-}\frac{-\sqrt{2}\cos 2x}{\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}}=-\sqrt{2}$$

بنابراین اختلاف حد چپ و راست برابر است با $\sqrt{2}-(-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$.

۱۱- گزینه‌ی ۱ **راه‌حل اول**: با تغییر متغیر $t=x-\pi$، حد را به گونه‌ای می‌نویسیم که $t\to 0$؛

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt[3]{\cos x}+1}{(x-\pi)^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{\cos(t+\pi)}+1}{(t+\pi-\pi)^2}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{\cos t}}{t^2}\times\frac{1+\sqrt[3]{\cos t}+\sqrt[3]{\cos^2 t}}{1+\sqrt[3]{\cos t}+\sqrt[3]{\cos^2 t}}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2(1+\sqrt[3]{\cos t}+\sqrt[3]{\cos^2 t})}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^2}{2}}{t^2\times 3}=\frac{1}{6}$$

در محاسبه‌ی حد در مرحله‌ی آخر از هم‌ارزی $1-\cos t\sim\frac{t^2}{3}$ استفاده شده است.

راه‌حل دوم: حد را در چاق صورت ضرب و تقسیم می‌کنیم، سپس دوبار از قضیه‌ی هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt[3]{\cos x}+1}{(x-\pi)^2}\times\frac{\sqrt[3]{\cos^2 x}+\sqrt[3]{\cos x}+1}{\sqrt[3]{\cos^2 x}+\sqrt[3]{\cos x}+1}=\lim_{x\to\pi}\frac{\cos x+1}{3(x-\pi)^2}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to\pi}\frac{-\sin x}{6(x-\pi)}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to\pi}\frac{-\cos x}{6}=\frac{1}{6}$$

۱۲- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول**: با استفاده از اتحادهای مثلثاتی داریم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)}{1+\cos 2x}\times\frac{1+\sin x}{1+\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 x}{(1+2\cos^2 x-1)(1+\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{2\cos^2 x(1+\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2(1+\sin x)}=\frac{1}{4}$$

راه‌حل دوم: دوبار از قضیه‌ی هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{1+\cos 2x}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-2\sin 2x}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{-4\cos 2x}=\frac{1}{-4(-1)}=\frac{1}{4}$$

۱۳- گزینه‌ی ۲ با ضرب کردن کسر در مزدوج صورت و استفاده از اتحاد مثلثاتی $\cot x-\tan x=2\cot 2x$ داریم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{\tan x}-\sqrt{\cot x}}{\cot 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-\cot x}{\frac{1}{2}(\cot x-\tan x)(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x})}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-2}{\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}}=\frac{-2}{2}=-1$$

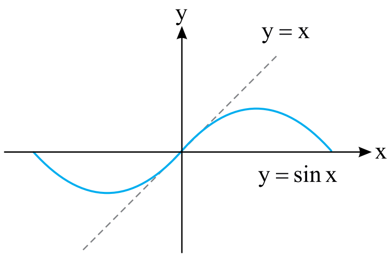
۱۴- گزینه‌ی ۲ با استفاده از اتحادهای مثلثاتی داریم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\sin x}}{\cos(\frac{\pi}{4}+x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\sin x}}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\sin x}}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{\cos x}-\sqrt{\sin x})(\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x})}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2\frac{1}{\sqrt[4]{2}}}=\frac{\sqrt{2}\sqrt[4]{2}}{2}=\frac{2^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{1}{4}}}{2}=2^{\frac{3}{4}-1}=2^{\frac{-1}{4}}$$

بنابراین با توجه به این‌که حد برابر 2^a است، پس $a=\frac{-1}{4}$.

۱۵- گزینه‌ی ۳ با توجه به نمودار $y=\sin x$ و $y=x$ در سـمت راست صفر $x>\sin x$ و در سمت چپ صفر $x<\sin x$، پس در هر دو طرف داریم:



$$\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}<1 \Rightarrow [\dfrac{\sin x}{x}]=0 \\ \dfrac{x}{\sin x}>1 \Rightarrow [\dfrac{x}{\sin x}]=1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0}[\frac{\sin x}{x}]-[\frac{x}{\sin x}]=-1$$

۱۶- گزینه‌ی ۴ ضابطه‌ی تابع f به‌صورت زیر است:

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & x>1 \\ 2x & -1\le x\le 1 \\ x-1 & x<-1 \end{cases}$$

در اطراف نقطه‌ی ۱ و ۱− داریم:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} x-1=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} 2x=2 \end{cases} \Rightarrow \text{تابع در } x=1 \text{ حد ندارد و ناپیوسته است}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} 2x=-2 \\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} x-1=-2 \\ f(-1)=-2 \end{cases} \Rightarrow \text{تابع در } x=-1 \text{ پیوسته است}$$

۱۷- گزینه‌ی ۱ تابع در هر نقطه‌ای غیر از $x=2$، یک تابع چندجمله‌ای و پیوسته است. برای نقطه‌ی $x=2$ داریم:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} x^2+ax-5=4+2a-5=2a-1$$

$$f(2)=2a-1$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} ax-1=2a-1$$

سه مقدار به‌دست آمده به ازای همه‌ی مقادیر a، مساوی هستند. پس تابع در $x=2$ و درنتیجه در کل اعداد حقیقی به ازای هر مقدار a پیوسته است.

سراسری - ۹۱

۱۸- گزینه‌ی ۴ برای آن‌که تابع در $x=\frac{\pi}{2}$ پیوسته باشد، می‌بایست حد چپ و راست تابع در $x=\frac{\pi}{2}$ برابر $f(\frac{\pi}{2})$ یعنی برابر ۲ باشد:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (a+\sin 3x)=a+\sin\frac{3\pi}{2}=a-1 \\ f(\frac{\pi}{2})=2 \\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} b\cos 2x=b\cos\pi=-b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-1=2 \\ -b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-2 \end{cases} \Rightarrow a-b=3-(-2)=5$$

سراسری - ۸۹

۱۹- گزینه‌ی ۴ حد چپ و راست تابع در $x=1$ برابر است با:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{|x^2+x-2|}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{|(x-1)(x+2)|}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}=3$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{|x^2+x-2|}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{|(x-1)(x+2)|}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)(x+2)}{x-1}=-3$$

دو مقدار به‌دست آمده با هم برابر نیستند، پس تابع در $x=1$ حد ندارد، پس تابع به ازای هیچ مقدار a در $x=1$ و درنتیجه بر $\mathbb{R}$ پیوسته نیست.

سراسری - ۹۰

۲۰- گزینه‌ی ۴ تابع f در تمامی نقاطی که عبارت $4\sin^2 \pi x$ برابر عددی صحیح نیست پیوسته است، با توجه به این‌که $0\le 4\sin^2\pi x\le 4$، داریم:

$$\text{(I)}\ 4\sin^2\pi x=0\Rightarrow \sin\pi x=0\xrightarrow{0\le x\le \frac{1}{2}} x=0$$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}[4\sin^2\pi x]=f(0)=0\Rightarrow$ تابع f در $x=0$ پیوسته است

$$\text{(II)}\ 4\sin^2\pi x=1\Rightarrow \sin^2\pi x=\frac{1}{4}\Rightarrow \sin\pi x=\frac{1}{2}\xrightarrow{0\le x\le \frac{1}{2}} \pi x=\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=\frac{1}{6}$$

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to \frac{1}{6}^+}[4\sin^2\pi x]=[4\times\frac{1}{4}^+]=[1^+]=1\\ \lim\limits_{x\to \frac{1}{6}^-}[4\sin^2\pi x]=[4\times\frac{1}{4}^-]=[1^-]=0\end{cases}\Rightarrow$ تابع f در $x=\frac{1}{6}$ ناپیوسته است

$$\text{(III)}\ 4\sin^2\pi x=2\Rightarrow \sin^2\pi x=\frac{1}{2}\Rightarrow \sin\pi x=\frac{\sqrt{2}}{2}\xrightarrow{0\le x\le \frac{1}{2}} \pi x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=\frac{1}{4}$$

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to \frac{1}{4}^+}[4\sin^2\pi x]=[4\times\frac{1}{2}^+]=[2^+]=2\\ \lim\limits_{x\to \frac{1}{4}^-}[4\sin^2\pi x]=[4\times\frac{1}{2}^-]=[2^-]=1\end{cases}\Rightarrow$ تابع f در $x=\frac{1}{4}$ ناپیوسته است

$$\text{(IV)}\ 4\sin^2\pi x=3\Rightarrow \sin^2\pi x=\frac{3}{4}\Rightarrow \sin\pi x=\frac{\sqrt{3}}{2}\xrightarrow{0\le x\le \frac{1}{2}} \pi x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{1}{3}$$

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}^+}[4\sin^2\pi x]=[4\times\frac{3}{4}^+]=[3^+]=3\\ \lim\limits_{x\to \frac{1}{3}^-}[4\sin^2\pi x]=[4\times\frac{3}{4}^-]=[3^-]=2\end{cases}\Rightarrow$ تابع f در $x=\frac{1}{3}$ ناپیوسته است

$$\text{(V)}\ 4\sin^2\pi x=4\Rightarrow \sin\pi x=1\xrightarrow{0\le x\le \frac{1}{2}} x=\frac{1}{2}$$

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}[4\sin^2\frac{\pi}{2}]=3\\ f(\frac{1}{2})=4\end{cases}\Rightarrow$ تابع f در $x=\frac{1}{2}$ ناپیوسته است

بنابراین تابع f در نقاط $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{4}$، $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{6}$ ناپیوسته است.

توجه: با توجه به دامنه‌ی تابع $[0,\frac{1}{2}]$ برای نقطه‌ی صفر، فقط حد راست و برای نقطه‌ی $\frac{1}{2}$، فقط حد چپ تابع را با مقدار تابع مقایسه می‌کنیم.

سراسری خارج از کشور – ۸۹

پاسخ تشریحی آزمون ۴۵

۱- گزینه‌ی ۲ با مخرج مشترک گرفتن حاصل حد را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to -2}\left(\frac{1}{x^2-4}+\frac{1}{4x+8}\right)=\lim_{x\to -2}\left(\frac{1}{(x-2)(x+2)}+\frac{1}{4(x+2)}\right)=\lim_{x\to -2}\frac{4+(x-2)}{4(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{4(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to -2}\frac{1}{4(x-2)}=\frac{1}{-16}$$

۲- گزینه‌ی ۲ وقتی $x\to ۲^-$ یعنی $x<۲$، پس $[x]=۱$ و داریم:

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{x+۲}{x^۲-۲x}+\frac{۲[x]}{۲-x}=\lim_{x\to ۲^-}\left(\frac{x+۲}{x(x-۲)}+\frac{۲}{۲-x}\right)=\lim_{x\to ۲^-}\frac{x+۲-۲x}{x(x-۲)}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{-x+۲}{x(x-۲)}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{-۱}{x}=\frac{-۱}{۲}$$

سراسری خارج از کشور - ۹۲

۳- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول**: با استفاده از اتحادهای مثلثاتی داریم:

$$\lim_{x\to ۰}\left(\frac{۱}{۱-\cos x}-\frac{۱}{\sin^۲ x}\right)=\lim_{x\to ۰}\left(\frac{۱}{۱-\cos x}-\frac{۱}{۱-\cos^۲ x}\right)=\lim_{x\to ۰}\left(\frac{۱}{۱-\cos x}-\frac{۱}{(۱-\cos x)(۱+\cos x)}\right)=\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{۱-\cos x}\left(۱-\frac{۱}{۱+\cos x}\right)$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{۱-\cos x}\left(\frac{۱+\cos x-۱}{۱+\cos x}\right)=\lim_{x\to ۰}\frac{\cos x}{(۱-\cos x)(۱+\cos x)}=\lim_{x\to ۰}\frac{\cos x}{\sin^۲ x}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$$

راه‌حل دوم:

$$\lim_{x\to ۰}\left(\frac{۱}{۱-\cos x}-\frac{۱}{\sin^۲ x}\right)=\lim_{x\to ۰}\left(\frac{۱+\cos x}{۱-\cos^۲ x}-\frac{۱}{\sin^۲ x}\right)=\lim_{x\to ۰}\left(\frac{۱+\cos x}{\sin^۲ x}-\frac{۱}{\sin^۲ x}\right)=\lim_{x\to ۰}\frac{\cos x}{\sin^۲ x}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$$

۴- گزینه‌ی ۱ وقتی $x\to ۲\pi^-$، آن‌گاه x در ربع چهارم دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد و سینوس زاویه‌ای در ربع چهارم حتماً منفی است، پس:

$$\sin x\to ۰^-\Rightarrow[\sin x]=-۱\Rightarrow \lim_{x\to ۲\pi^-}\frac{[\sin x]-۱}{\tan x}=\lim_{x\to ۲\pi^-}\frac{-۱-۱}{\tan x}=\frac{-۲}{۰^-}=+\infty$$

۵- گزینه‌ی ۴ **راه‌حل اول**: با توجه به این‌که $x=۲\times\frac{x}{۲}$ می‌توان نوشت:

$$\frac{\cos x}{۱-\sin x}=\frac{\cos^۲\frac{x}{۲}-\sin^۲\frac{x}{۲}}{۱-۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}=\frac{(\cos\frac{x}{۲}-\sin\frac{x}{۲})(\cos\frac{x}{۲}+\sin\frac{x}{۲})}{(\cos\frac{x}{۲}-\sin\frac{x}{۲})^۲}=\frac{\cos\frac{x}{۲}+\sin\frac{x}{۲}}{\cos\frac{x}{۲}-\sin\frac{x}{۲}}$$

با توجه به این‌که حد مخرج کسر در $x=\frac{\pi}{۲}$ برابر صفر است و این‌که در سمت راست $\frac{\pi}{۴}$، کسینوس کم‌تر از سینوس است پس:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+}\frac{\cos\frac{x}{۲}+\sin\frac{x}{۲}}{\cos\frac{x}{۲}-\sin\frac{x}{۲}}=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۰^-}=-\infty$$

راه‌حل دوم: از قاعده‌ی هوپیتال برای محاسبه‌ی حد کمک می‌گیریم:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+}\frac{\cos x}{۱-\sin x}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+}\frac{-\sin x}{-\cos x}=\frac{-۱}{-۰^-}=-\infty$$

سراسری - ۸۹

۶- گزینه‌ی ۱ با توجه به این‌که در اطراف $x=\frac{\pi}{۲}$، مقدار $\sin x$ عددی نزدیک به یک ولی کم‌تر از یک است $(\sin x<۱)$ پس $[\sin x]=۰$ و داریم:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{[\sin x]}{\cos x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{۰}{\cos x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}}۰=۰$$

توجه کنید، صورت کسر دقیقاً برابر صفر است، پس مخرج کسر هرچه باشد، تابع برابر صفر است.

۷- گزینه‌ی ۳ حد صورت کسر وقتی $x\to ۳$ برابر -۱ است، برای آن‌که حد تابع در $x=۳$ برابر $-\infty$ باشد، می‌بایست مخرج کسر از طرف چپ و راست، با مقادیر مثبت به صفر میل کند. یعنی $x=۳$ ریشه‌ی مضاعف مخرج است، تا مخرج کسر در $x=۳$ تغییر علامت ندهد، پس:

$$۲x^۲+ax+b=۲(x-۳)^۲\Rightarrow ۲x^۲+ax+b=۲x^۲-۱۲x+۱۸\Rightarrow a=-۱۲, b=۱۸\Rightarrow a+b=۶$$

۸- گزینه‌ی ۱ از صورت و مخرج کسر x را فاکتور می‌گیریم، مشخص است که وقتی $x\to\infty$، عبارت $\frac{\cos x}{x}$ به سمت صفر میل می‌کند، زیرا $\cos x$ کران‌دار است:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{۲x+\cos x}{x+۲\cos x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x(۲+\frac{\cos x}{x})}{x(۱+۲\frac{\cos x}{x})}=\lim_{x\to +\infty}\frac{۲+\frac{\cos x}{x}}{۱+۲\frac{\cos x}{x}}=\frac{۲}{۱}=۲$$

۹- گزینه‌ی ۴ مخرج کسر از درجه‌ی دوم است، برای آن‌که حد تابع f در بی‌نهایت برابر عددی غیرصفر باشد، صورت کسر نیز باید از درجه‌ی ۲ باشد، پس $n=۲$ و داریم:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{۲}{۳}\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{ax^۲-۳x+۱}{۳x^۲+x}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{ax^۲}{۳x^۲}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{a}{۳}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow a=۲$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{۲x^۲-۳x+۱}{۳x^۲+x}\Rightarrow f(-۱)=\frac{۲+۳+۱}{۳-۱}=\frac{۶}{۲}=۳$$

سراسری خارج از کشور - ۹۱

۱۰- گزینه‌ی ۳ برای آن‌که حد تابع در بی‌نهایت برابر صفر شود، باید درجه‌ی مخرج بیش از صورت باشد. مخرج از درجه‌ی اول است، پس باید ضریب جملات درجه ۲ و ۳ در صورت برابر صفر باشد:

$$\begin{cases} a-۱=۰\Rightarrow a=۱\\ ۲a-b=۰\Rightarrow ۲a=b\end{cases}\Rightarrow b=۲\Rightarrow a+b=۳$$

۱۱- گزینه‌ی ۴ با استفاده از هم‌ارزی پرتوان داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+۹}{۱-x+\sqrt{x+۱}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{-x}=-a=۳\Rightarrow a=-۳$$

بنابراین حد تابع وقتی $x\to۳$ برابر است با:

$$\lim_{x\to۳}\frac{-۳x+۹}{۱-x+\sqrt{x+۱}}=\lim_{x\to۳}\frac{-۳(x-۳)(۱-x-\sqrt{x+۱})}{(۱-x)^۲-(x+۱)}=\lim_{x\to۳}\frac{-۳(x-۳)(۱-x-\sqrt{x+۱})}{x^۲-۳x}=\lim_{x\to۳}\frac{-۳(۱-x-\sqrt{x+۱})}{x}=\frac{-۳(-۲-۲)}{۳}=۴$$

سراسری - ۹۲

۱۲- گزینه‌ی ۴ مخرج کسر عبارتی از درجه‌ی ۳ می‌باشد، پس برای آن‌که حاصل حد در بی‌نهایت برابر عددی غیرصفر باشد، باید صورت کسر نیز از درجه‌ی ۳ باشد، پس $n\le۳$. اگر n کم‌تر از ۳ باشد، حاصل حد با استفاده از هم‌ارزی پرتوان برابر $\frac{-۲}{۴}$ یا $\frac{-۱}{۲}$ است و برابر ۲ نیست، پس حتماً $n=۳$ و داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^۳-۲x^۳+x-۱}{۴x^۳+x^۲-۱}=۲\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{(a-۲)x^۳}{۴x^۳}=۲\Rightarrow\frac{a-۲}{۴}=۲\Rightarrow a-۲=۸\Rightarrow a=۱۰\xrightarrow{n=۳}a+n=۱۳$$

۱۳- گزینه‌ی ۴ **راه‌حل اول:** تابع $f(x)=\frac{x+۱}{x+۲}$ در $+\infty$ حدی برابر یک دارد و با توجه به این‌که $ad-bc=۲-۱>۰$ یعنی تابع f صعودی است، پس تابع f با مقادیر کم‌تر از یک در بی‌نهایت به سمت یک میل می‌کند، پس:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x+۱}{x+۲}\right]=[۱^-]=۰$$

راه‌حل دوم:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x+۱}{x+۲}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x+۲-۱}{x+۲}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[۱-\frac{۱}{x+۲}\right]$$

با توجه به این‌که عبارت $\frac{۱}{x+۲}$ در بی‌نهایت با مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند، پس:

$$\frac{۱}{x+۲}\to۰^+\Rightarrow-\frac{۱}{x+۲}\to۰^-\Rightarrow۱-\frac{۱}{x+۲}\to۱^-\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left[۱-\frac{۱}{x+۲}\right]=[۱^-]=۰$$

۱۴- گزینه‌ی ۲ تابع از نقطه‌ی $(۲,۱)$ می‌گذرد، پس:

$$f(۲)=۱\Rightarrow\frac{۲a+۱+\sqrt{۲۵}}{۶-۲}=۱\Rightarrow۲a+۶=۴\Rightarrow a=-۱$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+۱+\sqrt{۴x^۲+۹}}{۳x-۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+۱+|۲x|}{۳x-۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+۱}{۳x-۲}=\frac{۱}{۳}$$

سراسری - ۹۱

۱۵- گزینه‌ی ۱ در بی‌نهایت با استفاده از هم‌ارزی $\sqrt{ax^۲+bx}\sim\sqrt{a}\,|x+\frac{b}{۲a}|$ داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x+\sqrt{x^۲+۳x}}{۳x-\sqrt{x^۲-۳x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x+|x+\frac{۳}{۲}|}{۳x-|x-\frac{۳}{۲}|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x-x-\frac{۳}{۲}}{۳x+x-\frac{۳}{۲}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\frac{۳}{۲}}{۴x-\frac{۳}{۲}}=\frac{۱}{۴}$$

۱۶- گزینه‌ی ۳ با استفاده از هم‌ارزی $\sqrt{x^۲+۶x}\sim|x+۳|$ در بی‌نهایت داریم:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x-|x+۳|}{ax-۲}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x+(x+۳)}{ax-۲}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۳x}{ax}=\frac{۳}{a}$$

برای آن‌که این حد برابر ۳ باشد، باید داشته باشیم $a=۱$، پس:

$$\lim_{x\to۲} f(x)=\lim_{x\to۲}\frac{۲x-\sqrt{x^۲+۶x}}{x-۲}\times\frac{۲x+\sqrt{x^۲+۶x}}{۲x+\sqrt{x^۲+۶x}}=\lim_{x\to۲}\frac{۳x^۲-۶x}{(x-۲)(۲x+\sqrt{x^۲+۶x})}=\lim_{x\to۲}\frac{۳x}{۲x+\sqrt{x^۲+۶x}}=\frac{۶}{۴+۴}=\frac{۳}{۴}$$

سراسری خارج از کشور – ۸۹

۱۷- گزینه‌ی ۲ دو حد خواسته شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲^x+(\frac{۱}{۲})^x}{۲^x-(\frac{۱}{۲})^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲^x+۰}{۲^x-۰}=۱$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲^x+(\frac{۱}{۲})^x}{۲^x-(\frac{۱}{۲})^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۰+(\frac{۱}{۲})^x}{۰-(\frac{۱}{۲})^x}=-۱$$

بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با: $۱-(-۱)=۲$

۱۸- گزینه‌ی ۲ با توجه به نمودار تابع، در اطراف $x=۲$ تابع به سمت $+\infty$ میل می‌کند، پس:

$$\lim_{x\to۲} fof(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=۱$$

۱۹- گزینه‌ی ۲ وقتی $x\to-\infty$ تابع $y=\frac{۲x+۱}{x+۳}$ به سمت ۲ میل می‌کند و از آنجا که y تابعی صعودی است $(ad-bc=۶-۱>۰)$ y در $-\infty$ کم‌تر از ۲ است، پس:

$$\lim_{x\to-\infty} f(\frac{۲x+۱}{x+۳})=\lim_{x\to۲^-}\frac{|x-۲|}{x-۲}=\lim_{x\to۲^-}\frac{-(x-۲)}{x-۲}=-۱$$

۲۰- گزینه‌ی ۳ ابتدا حد f را در $x\to۱^-$ محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to۱^-} f(x)=\lim_{x\to۱^-}\frac{x^۲-x+۱}{|x^۲-۱|}=\frac{۱-۱+۱}{۰^+}=+\infty$$

حال به محاسبه‌ی حد f در $+\infty$ می‌پردازیم:

$$\lim_{x\to۱^-} fof(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۲-x+۱}{|x^۲-۱|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۲-x+۱}{x^۲-۱}=۱$$

پاسخ تشریحی آزمون ٤٦

۱- گزینه‌ی ۱ وقتی $x\to\pi^-$ یعنی $x<\pi$ و x در ربع دوم است، در ربع دوم cot مقداری منفی است و وقتی $x\to\pi^-$، داریم $\cot x\to-\infty$، پس:

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{۱}{۲+۳^{\cot x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۱}{۲+۳^x}=\lim_{x\to۰}\frac{۱}{۲+x}=\frac{۱}{۲}$$

۲- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول:** از صورت و مخرج کم‌ترین توان موجود x را فاکتور می‌گیریم:

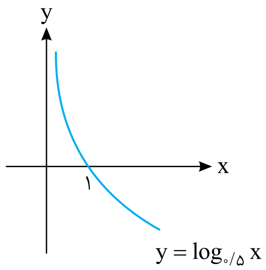
$$\lim_{x\to۰}\frac{x-x^{\frac{۱}{۳}}}{x-x^{\frac{۱}{۲}}}=\lim_{x\to۰}\frac{x^{\frac{۱}{۳}}(x^{\frac{۲}{۳}}-۱)}{x^{\frac{۱}{۲}}(x^{\frac{۱}{۲}}-۱)}=\lim_{x\to۰}\frac{-۱}{x^{\frac{۱}{۶}}(-۱)}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$$

راه‌حل دوم: با تغییر متغیر $\sqrt[۶]{x}=t$ داریم $t\to۰^+$، پس $x=t^۶$ و داریم:

$$\lim_{x\to۰^+}\frac{x-\sqrt[۳]{x}}{x-\sqrt{x}}=\lim_{x\to۰^+}\frac{t^۶-t^۲}{t^۶-t^۳}=\lim_{x\to۰^+}\frac{t^۲(t^۴-۱)}{t^۳(t^۳-۱)}=\lim_{x\to۰^+}\frac{t^۴-۱}{t(t^۳-۱)}=\frac{-۱}{۰^+(-۱)}=\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$$

نکته: با توجه به وجود عبارت $\sqrt{x}$ در حد، حتماً x عددی مثبت است و $x\to۰$ به معنی $x\to۰^+$ است.

۳- گزینه‌ی ۲ در سمت چپ صفر داریم $[x]=[۰^-]=-۱$، پس:



$$\lim_{x\to ۰^-}\log_{۰/۵}\left(\frac{[x]}{x}\right)=\lim_{x\to ۰^-}\log_{۰/۵}\left(\frac{-۱}{x}\right)$$

با توجه به این‌که وقتی $x\to ۰^-$، عبارت $\frac{-۱}{x}$ به سمت $+\infty$ میل می‌کند و لگاریتم عدد بسیار بزرگ در پایه‌ی ۰/۵ بسیار کوچک است، پس حد خواسته شده برابر $-\infty$ است.

۴- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول:** اگر جزء اعشاری عدد a را با $\{a\}$ نمایش دهیم، داریم $a=[a]+\{a\}$ یعنی هر عدد برابر جزء صحیح به‌اضافه‌ی جزء اعشاری است، پس:

$$\lim_{x\to ۰^-}|x|\left[\frac{۱}{x}\right]=\lim_{x\to ۰^-}(-x)\left(\frac{۱}{x}-\left\{\frac{۱}{x}\right\}\right)=\lim_{x\to ۰^-}\left(-۱+x\left\{\frac{۱}{x}\right\}\right)=-۱+\lim_{x\to ۰^-}x\left\{\frac{۱}{x}\right\}$$

با توجه به این‌که جزء اعشاری هر عدد، عددی بین صفر و یک و کران‌دار است، پس $\lim_{x\to ۰}x\left\{\frac{۱}{x}\right\}=۰$ و حد خواسته شده برابر -۱ است.

راه‌حل دوم: اگر $u\to\infty$، هم‌ارزی $[u]\sim u$ برقرار است، پس:

$$\lim_{x\to ۰^-}|x|\left[\frac{۱}{x}\right]=\lim_{x\to ۰^-}(-x)\left(\frac{۱}{x}\right)=-۱$$

۵- گزینه‌ی ۴ **راه‌حل اول:** حد مورد نظر به‌صورت $۰\times\infty$ است، آن را به حالت $\frac{۰}{۰}$ تبدیل کرده، سپس رفع ابهام می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲}(۴-x^۲)\tan\left(\frac{\pi}{x}\right)=\lim_{x\to ۲}\frac{۴-x^۲}{\cot\frac{\pi}{x}}=\lim_{x\to ۲}\frac{۴-x^۲}{\tan\left(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{x}\right)}$$

با استفاده از هم‌ارزی $\tan u\sim u$ وقتی $u\to ۰$ و با توجه به این‌که $\frac{\pi}{x}-\frac{\pi}{۲}\to ۰$ داریم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{(۴-x^۲)}{\tan\left(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{x}\right)}=\lim_{x\to ۲}\frac{۴-x^۲}{\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{x}}=\lim_{x\to ۲}\frac{۴-x^۲}{\frac{\pi x-۲\pi}{۲x}}=\lim_{x\to ۲}\frac{۲x(۲-x)(۲+x)}{\pi(x-۲)}=\frac{۴\times۴}{-\pi}=\frac{-۱۶}{\pi}$$

راه‌حل دوم: حد را به حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ تبدیل کرده و از قاعده‌ی هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲}(۴-x^۲)\tan\frac{\pi}{x}=\lim_{x\to ۲}\frac{۴-x^۲}{\cot\frac{\pi}{x}}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۲}\frac{-۲x}{\frac{-\pi}{x^۲}(-۱)\left(\cot^۲\frac{\pi}{x}+۱\right)}=\frac{-۴}{\frac{\pi}{۴}\times۱}=\frac{-۱۶}{\pi}$$

۶- گزینه‌ی ۱ با توجه به این‌که وقتی $x\to ۰^+$ یعنی $x>۰$ و درنتیجه $-x<۰$ و با توجه به نمودار تابع در سمت چپ صفر $f(-x)+۱$ وقتی $x\to ۰^+$ دقیقاً برابر صفر است و صفر تقسیم بر هر عددی حتی اگر آن عدد بسیار کوچک باشد برابر صفر است.

۷- گزینه‌ی ۲ برای آن‌که حد تابع برابر $+\infty$ باشد، باید حد چپ و حد راست در $x=۲$ هر دو برابر $+\infty$ باشد:

$$\begin{cases}\lim_{x\to ۲^+}\dfrac{[x]-k}{x-۲}=\dfrac{۲-k}{۰^+}=+\infty\Rightarrow ۲-k>۰\Rightarrow k<۲\\[2mm]\lim_{x\to ۲^-}\dfrac{[x]-k}{x-۲}=\dfrac{۱-k}{۰^-}=+\infty\Rightarrow ۱-k<۰\Rightarrow k>۱\end{cases}\Rightarrow ۱<k<۲$$

۸- گزینه‌ی ۱ در $x\to+\infty$، داریم $\sqrt{x^۲+۵}\sim x$، پس صورت کسر از درجه‌ی اول است. پس مخرج کسر نیز باید درجه یک باشد یعنی $n=۱$.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{۳-x}{ax+۴}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{-۱}{a}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=-۲\Rightarrow\lim_{x\to ۲}f(x)=\lim_{x\to ۲}\frac{۳-\sqrt{x^۲+۵}}{-۲x+۴}\times\frac{۳+\sqrt{x^۲+۵}}{۳+\sqrt{x^۲+۵}}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{۹-x^۲-۵}{(-۲x+۴)(۳+\sqrt{x^۲+۵})}=\lim_{x\to ۲}\frac{(۲-x)(۲+x)}{۲(۲-x)(۳+\sqrt{x^۲+۵})}=\frac{۴}{۲(۳+۳)}=\frac{۱}{۳}$$

۹- گزینه‌ی ۴ می‌دانیم وقتی $u\to 0$ هم‌ارزی $\sin u\sim u$ برقرار است. پس وقتی $x\to\infty$، آن‌گاه $\sin(\frac{2}{x^3+1})\sim\frac{2}{x^3+1}$، بنابراین برای آن‌که حد مورد نظر برابر عددی غیرصفر باشد، می‌بایست صورت و مخرج هم‌درجه باشند یعنی $n=3$ و داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}(ax^n+2)\sin(\frac{2}{x^3+1})=\lim_{x\to+\infty}(ax^3+2)(\frac{2}{x^3+1})=\lim_{x\to+\infty}\frac{2ax^3+4}{x^3+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2ax^3}{x^3}=2a\Rightarrow 2a=4\Rightarrow a=2\xrightarrow{n=3}an=6$$

۱۰- گزینه‌ی ۳ تابع را با استفاده از مخرج مشترک گرفتن ساده می‌کنیم:

$$\frac{x^3+2}{x^2-1}+ax+b=\frac{x^3+2+ax^3-ax+bx^2-b}{x^2-1}=\frac{(a+1)x^3+bx^2-ax-b+2}{x^2-1}$$

برای آن‌که حد تابع در بی‌نهایت برابر عددی غیر صفر شود باید درجه‌ی صورت و مخرج یکی باشد، پس ضریب بزرگ‌ترین درجه‌ی صورت برابر صفر است $(a=-1)$، و داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{bx^2+x-b+2}{x^2-1}=3\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{bx^2}{x^2}=3\Rightarrow b=3\xrightarrow{a=-1}ab=-3$$

۱۱- گزینه‌ی ۲ با استفاده از هم‌ارزی $\sqrt{ax^2+bx}\sim\sqrt{a}\,|x+\frac{b}{2a}|$ در بی‌نهایت داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+4ax-1})=\lim_{x\to-\infty}(|x+\frac{a}{2}|-|x+2a|)=\lim_{x\to-\infty}(-x-\frac{a}{2}+x+2a)=2a-\frac{a}{2}=\frac{3a}{2}$$

با توجه به فرض سؤال حاصل حد برابر ۳ می‌باشد، پس $a=2$.

۱۲- گزینه‌ی ۲ حد خواسته شده برابر است با:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-1})=\lim_{x\to+\infty}(|x+\frac{1}{2}|-|x|)=\lim_{x\to+\infty}(x+\frac{1}{2}-x)=\frac{1}{2}$$

۱۳- گزینه‌ی ۴ با ضرب و تقسیم کردن تابع در مزدوج آن داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{\frac{x+a}{x+2}}-1)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\frac{x+a}{x+2}-1)}{\sqrt{\frac{x+a}{x+2}}+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{(a-2)x}{x+2}}{\sqrt{\frac{x+a}{x+2}}+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{(a-2)x}{x}}{\sqrt{\frac{x}{x}}+1}=\frac{\frac{a-2}{1}}{2}=\frac{a-2}{2}$$

با توجه به این‌که حاصل حد برابر ۳ می‌باشد، پس:

$$\frac{a-2}{2}=3\Rightarrow a-2=6\Rightarrow a=8$$

۱۴- گزینه‌ی ۱ با استفاده از هم‌ارزی $\sqrt{x^2+2x}\sim|x+1|$ در بی‌نهایت داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(|x+1|+ax+b)=\lim_{x\to+\infty}((a+1)x+b+1)$$

با توجه به صورت سؤال حاصل این حد متناهی است، پس $a+1=0$ و از جایی‌که این حد برابر ۳ است، پس $b+1=3$، یعنی $a=-1$ و $b=2$ و داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+2x)=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x+2+2x)=\lim_{x\to-\infty}(-x-1+x+2)=1$$

۱۵- گزینه‌ی ۲ در بی‌نهایت هم‌ارزی $\sqrt[3]{ax^3+bx^2+cx+d}\sim\sqrt[3]{a}(x+\frac{b}{3a})$ برقرار است، پس:

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{x^3+6x^2+1}-x)=\lim_{x\to-\infty}((x+\frac{6}{3})-x)=2$$

۱۶- گزینه‌ی ۴ **راه‌حل اول**: از عبارت 4^x در صورت و مخرج فاکتور می‌گیریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4^x-4^{x-1}}{3^x+4^{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4^x(1-\frac{1}{4})}{4^x((\frac{3}{4})^x+4)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{4}}{(\frac{3}{4})^x+4}$$

با توجه به این‌که در $x\to+\infty$، عبارت $(\frac{3}{4})^x$ به سمت صفر میل می‌کند، پس:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{4}}{(\frac{3}{4})^x+4}=\frac{\frac{3}{4}}{4}=\frac{3}{16}$$

راه‌حل دوم: وقتی $x\to+\infty$، هم‌ارزی $(a>b>1)a^x+b^x\sim a^x$ برقرار است، پس:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4^x-4^{x-1}}{3^x+4^{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4^x-\frac{1}{4}\times4^x}{3^x+4\times4^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{4}\times4^x}{4\times4^x}=\frac{\frac{3}{4}}{4}=\frac{3}{16}$$

۱۷- گزینه‌ی ۳ با توجه به نمودار تابع، وقتی $x\to-\infty$ تابع f با مقادیر کم‌تر از ۲ به ۲ میل می‌کند، یعنی $f(x)\to ۲^-$ پس:

$$\lim_{x\to-\infty} fof(x)=\lim_{t\to ۲^-} f(t)=-\infty$$

۱۸- گزینه‌ی ۲ ابتدا حد عبارت $\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x^۲}$ را در $x\to ۰$ پیدا می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۰}(\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x^۲})=\lim_{x\to ۰}\frac{x-۱}{x^۲}=\frac{-۱}{۰^+}=-\infty$$

بنابراین حد خواسته شده همان حد تابع f در $x\to-\infty$ است، پس:

$$\lim_{x\to ۰} f(\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x^۲})=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^۲+۲x}+x)=\lim_{x\to-\infty}(|x+۱|+x)=\lim_{x\to-\infty}(-x-۱+x)=-۱$$

۱۹- گزینه‌ی ۱ به‌جای آن‌که حد تابع f در $-\infty$ را پیدا کنیم حد تابع $f(\frac{۲x-۱}{x-۱})$ را در $x\to ۱^-$ پیدا می‌کنیم، زیرا $\lim_{x\to ۱^-}\frac{۲x-۱}{x-۱}=-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to ۱^-} f(\frac{۲x-۱}{x-۱})=\lim_{x\to ۱^-}\frac{x+۱}{[x]-۲}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{x+۱}{۰-۲}=-۱$$

۲۰- گزینه‌ی ۱ ابتدا حد f در $x\to+\infty$ را پیدا کرده، سپس حد f را در آن نقطه محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty} fof(x)=\lim_{x\to+\infty} f(\frac{x^۲-x-۱}{x^۲-۱})=\lim_{x\to+\infty} f(\frac{(x^۲-۱)-x}{x^۲-۱})=\lim_{x\to+\infty} f(۱-\frac{x}{x^۲-۱})\xrightarrow{\frac{x}{x^۲-۱}>۰}$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{x^۲-x-۱}{x^۲-۱}=\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$$

پاسخ تشریحی آزمون ۴۷

۱- گزینه‌ی ۳ با توجه به نمودار تابع وقتی $x\to ۱^-$، $f(x)$ با مقادیر کمتر از ۲ به ۲ میل می‌کند، پس:

$$\lim_{x\to ۱^-}[f(x)]=[۲^-]=۱$$

ضمناً وقتی $x\to ۱^+$ یعنی $x>۱$، پس $\frac{۱}{x}<۱$ و داریم:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(\frac{۱}{x})=\lim_{x\to ۱^-} f(x)=۲$$

پس حاصل حد خواسته شده برابر است با:

$$۱-۲=-۱$$

۲- گزینه‌ی ۴ با توجه به نمودار تابع داریم $\lim_{x\to ۱} f(x)=+\infty$، پس:

$$\lim_{x\to ۱} fof(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=-۲$$

۳- گزینه‌ی ۲ در اطراف $x=۲$ و در سمت چپ آن داریم:

$$\begin{cases} x\to ۲^-\Rightarrow x<۲\Rightarrow x^۲<۴\Rightarrow[x^۲]=۳ \\ x\to ۲^-\Rightarrow x<۲\Rightarrow[x]=۱ \end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(\frac{[x^۲]}{x}+\frac{[x]}{x^۲})=\lim_{x\to ۲^-}(\frac{۳}{x}+\frac{۱}{x^۲})=\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۴}=\frac{۷}{۴}$$

۴- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول:** عامل صفرکننده‌ی $x-۱$ را از صورت و مخرج ساده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۳+۲x^۲+x-۴}{۲x^۳-x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x^۲+۳x+۴)}{(x-۱)(۲x^۲+۲x+۱)}=\frac{۸}{۵}$$

راه‌حل دوم: با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۳+۲x^۲+x-۴}{۲x^۳-x-۱}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۱}\frac{۳x^۲+۴x+۱}{۶x^۲-۱}=\frac{۸}{۵}$$

۵- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول**: صورت و مخرج کسر را در چاق صورت و مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x+6}-2}{\sqrt{5x-1}-3}\times\frac{\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4}{\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4}\times\frac{\sqrt{5x-1}+3}{\sqrt{5x-1}+3}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+6-8)(\sqrt{5x-1}+3)}{(5x-1-9)(\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4)}=\frac{6}{5\times 12}=\frac{1}{10}$$

راه‌حل دوم: با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x+6}-2}{\sqrt{5x-1}-3}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+6)^2}}}{\frac{5}{2\sqrt{(5x-1)}}}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{5}{6}}=\frac{1}{10}$$

۶- گزینه‌ی ۴ تابع f در $x=2$ حدی برابر صفر دارد، اما g در $x=2$ حد چپ و راست نابرابر دارد، پس حد ندارد. از جایی‌که حد f برابر صفر است، حد چپ و راست تابع $\frac{f}{g}$ نیز در $x=2$ برابر صفر است، پس $\frac{f}{g}$ در $x=2$ حدی برابر صفر دارد.

۷- گزینه‌ی ۳

$$|x-f(\frac{2}{x})|\le x^2-4x+4\Rightarrow -x^2+4x-4\le x-f(\frac{2}{x})\le x^2-4x+4$$

$$\Rightarrow -x^2+3x-4\le -f(\frac{2}{x})\le x^2-5x+4\Rightarrow -x^2+5x-4\le f(\frac{2}{x})\le x^2-3x+4$$

با توجه به این‌که $\lim_{x\to 2}(x^2-3x+4)=2$ $\lim_{x\to 2}(-x^2+5x-4)=$، پس بنابر قضیه‌ی فشردگی داریم:

$$\lim_{x\to 2}f(\frac{2}{x})=\lim_{x\to 1}f(x)=2\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{1-f(x)}{1+f(2x-1)}=\frac{1-2}{1+2}=\frac{-1}{3}$$

۸- گزینه‌ی ۱ در اطراف $x=0$، x^2+1 عبارتی مثبت و x^2-1 عبارتی منفی است، پس:

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x^2+1|-|x^2-1|}{1-\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1+x^2-1}{1-\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{2\sin^2 x}=1$$

۹- گزینه‌ی ۴ با ضرب صورت و مخرج در مزدوج صورت و استفاده از هم‌ارزی u به جای $\sin u$ و $1-\frac{u^2}{2}$ به جای $\cos u$ داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos 2x}-\sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos x}{\sin^2 x(\sqrt{\cos 2x}+\sqrt{\cos x})}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{4x^2}{2}-1+\frac{x^2}{2}}{x^2\times 2}=\frac{\frac{-3}{2}}{2}=-\frac{3}{4}$$

۱۰- گزینه‌ی ۳ حد دو تابع g و $y=\frac{\sin \pi x}{x-1}$ در $x=1$ برابر است، پس طبق قضیه‌ی فشردگی، حد تابع f هم برابر این حد است، پس:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi-\pi x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\pi-\pi x}{x-1}=-\pi\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{1}{f(x)}=\frac{-1}{\pi}$$

۱۱- گزینه‌ی ۱ با ضرب کسر مورد نظر در مزدوج صورت به رفع ابهام از این حد مبهم می‌پردازیم:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}{x^3-3x+2}\times\frac{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{3x+1-x-3}{(x^3-3x+2)(2+2)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2(x-1)}{(x-1)(x^2+x-2)\times 4}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{2(x^2+x-2)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{2(x-1)(x+2)}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

۱۲- گزینه‌ی ۳ دو جمله‌ی اول بسط‌های $(x+1)^4$ و $(x-1)^4$ به ترتیب x^4+4x^3 و x^4-4x^3 می‌باشد. پس در عبارت صورت بزرگ‌ترین جمله $8x^3$ است. ضمناً جمله‌ی اول بسط‌های $(x+1)^3$ و $(x-1)^3$، عبارت x^3 است. پس بزرگ‌ترین جمله‌ی مخرج $2x^3$ می‌باشد. بنابراین با استفاده از هم‌ارزی پرتوان داریم:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{(x+1)^4-(x-1)^4}{(x+1)^3+(x-1)^3}=\lim_{x\to +\infty}\frac{8x^3}{2x^3}=4$$

۱۳- گزینه‌ی ۴ حد مورد نظر را در ۳ حالت زیر به دست می‌آوریم:

$$n<۳ \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{x^۳+۲x^n+۲}{-x^۳+۳x^n+۴}=-۱$$

$$n=۳ \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{۳x^۳+۲}{۲x^۳+۴}=\frac{۳}{۲}$$

$$n>۳ \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{۲x^n+x^۳+۲}{۳x^n-x^۳+۴}=\frac{۲}{۳}$$

بزرگ‌ترین مقدار بین حدهای به دست آمده $\frac{۳}{۲}$ است.

۱۴- گزینه‌ی ۱ با توجه به این که داریم $\lim\limits_{x\to۲}\frac{x}{۲x^۲+ax-b}=+\infty$، صورت این حد عددی مثبت است، پس مخرج کسر با نزدیک شدن به ۲ از هر دو طرف باید برابر صفر مثبت باشد، پس مخرج کسر ریشه‌ی مضاعفی برابر ۲ دارد:

$$۲x^۲+ax-b=۲(x-۲)^۲ \Rightarrow ۲x^۲+ax-b=۲x^۲-۸x+۸ \Rightarrow a=-۸ \quad , \quad b=-۸$$

بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to۱}\frac{ax+۸}{۶۴x^۲-b^۲}=\lim_{x\to۱}\frac{-۸x+۸}{۶۴x^۲-۶۴}=\lim_{x\to۱}\frac{-۸(x-۱)}{۶۴(x-۱)(x+۱)}=\frac{-۱}{۱۶}$$

۱۵- گزینه‌ی ۳ $\lim\limits_{x\to۱}\frac{۱}{x-۱}$ وجود ندارد، پس باید $\lim\limits_{x\to۱}\frac{۳}{x^۲+ax-۲}$ نیز موجود نباشد تا تفاضل آن‌ها حد داشته باشد. پس حد مخرج کسر برابر صفر است:

$$\lim_{x\to۱}x^۲+ax-۲=۰ \Rightarrow ۱+a-۲=۰ \Rightarrow a=۱$$

برای محاسبه‌ی حد از مخرج مشترک و رفع ابهام کمک می‌گیریم:

$$\lim_{x\to۱}\left(\frac{۱}{x-۱}-\frac{۳}{x^۲+x-۲}\right)=\lim_{x\to۱}\left(\frac{(x+۲)-۳}{(x-۱)(x+۲)}\right)=\lim_{x\to۱}\frac{x-۱}{(x-۱)(x+۲)}=\frac{۱}{۳}$$

۱۶- گزینه‌ی ۱ ابتدا حد $y=\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x^۳}$ را وقتی $x\to۰$ به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to۰}\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x^۳}=\lim_{x\to۰}\frac{x^۲-۱}{x^۳}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to۰^+}\frac{x^۲-۱}{x^۳}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to۰^-}\frac{x^۲-۱}{x^۳}=-\infty\end{cases}$$

بنابراین کافی است حد f را در $\pm\infty$ محاسبه کنیم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt[۳]{x^۳+x}-x+۱)=\lim_{x\to\pm\infty}(x-x+۱)=۱$$

توجه کنید که حد این تابع در $+\infty$ و $-\infty$ برابر یک است.

۱۷- گزینه‌ی ۲ با تغییر متغیر $\frac{۱}{\sqrt{x}}=t$ داریم:

$$x\to۰^+ \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{x}}=t \Rightarrow t\to+\infty, \frac{۱}{x}=t^۲$$

$$\lim_{x\to۰^+}\left(\sqrt{\frac{۴}{x}+\frac{۱}{\sqrt{x}}}-\sqrt{\frac{۴}{x}+\frac{۲}{\sqrt{x}}}\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{۴t^۲+t}-\sqrt{۴t^۲+۲t}\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(۲\left|t+\frac{۱}{۸}\right|-۲\left|t+\frac{۱}{۴}\right|\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(۲t+\frac{۱}{۴}-۲t-\frac{۱}{۲}\right)=\frac{-۱}{۴}$$

نکته: در محاسبه‌ی حد از هم‌ارزی $\sqrt{ax^۲+bx}\sim\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{۲a}\right|$ در بی‌نهایت استفاده شده است.

۱۸- گزینه‌ی ۲ حد چپ و حد راست و مقدار تابع باید برابر باشند:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to۲^-}f(x)=\lim\limits_{x\to۲^-}a[x]+x=a+۲\\ f(۲)=۳\\ \lim\limits_{x\to۲^+}f(x)=\lim\limits_{x\to۲^+}b[-x]-a+۱=\lim\limits_{x\to۲^+}b[-۲^-]-a+۱=-۳b-a+۱\end{cases} \Rightarrow a+۲=۳=-۳b-a+۱ \Rightarrow a=۱ \quad , \quad b=-۱ \Rightarrow a-b=۲$$

۱۹- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول**: حد چپ و راست و مقدار دو تابع را در $x=\frac{\pi}{۲}$ مقایسه می‌کنیم:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^{+}} [-\sin x]=[-۱^{+}]=-۱ \\ f(\frac{\pi}{۲})=[-۱]=-۱ \\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^{-}} [-\sin x]=[-۱^{+}]=-۱ \end{cases} \Rightarrow \text{f در } x=\frac{\pi}{۲} \text{ پیوسته است.}$$

توجه کنید هم در سمت چپ و هم در سمت راست $x=\frac{\pi}{۲}$ داریم $-\sin x>-۱$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^{+}} [-\cos x]=[\circ^{+}]=\circ \\ g(\frac{\pi}{۲})=[\circ]=\circ \\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^{-}} [-\cos x]=[\circ^{-}]=-۱ \end{cases} \Rightarrow \text{g در } x=\frac{\pi}{۲} \text{ ناپیوسته است.}$$

راه‌حل دوم: با توجه به این‌که تابع $y=-\sin x$ در $x=\frac{\pi}{۲}$ دارای مینیمم نسبی با عرض صحیح است، پس تابع $f(x)=[-\sin x]$ پیوسته است. ولی از آنجا که تابع $y=-\cos x$ در $x=\frac{\pi}{۲}$ صعودی با عرض صحیح است، پس تابع $g(x)=[-\cos x]$ ناپیوسته است.

۲۰- گزینه‌ی ۲ تابع $y=[-x]$ در تمام نقاط صحیح حد ندارد. از جایی‌که تابع $y=x$ در تمامی نقاط دارای حد اســت، پس تابع $f(x)=x+[-x]$ در تمام نقاط با طول صحیح حد ندارد، یعنی تابع f در بازه‌ی $(-۲,۲)$ در ۳ نقطه‌ی ۱-، ۰ و ۱ حد ندارد و طبیعتاً تابع در این نقاط ناپیوسته است.

آزمون‌های مرحله‌ای

۱۰

مجانب

پاسخ تشریحی آزمون ۴۸

۱- گزینه‌ی ۳ ضابطه‌ی تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^۲-۳x+۲}{x^۳-x}=\frac{(x-۱)(x-۲)}{x(x-۱)(x+۱)}=\frac{x-۲}{x(x+۱)}$$

ریشه‌های مخرج یعنی $x=۰$ و $x=-۱$ مجانب‌های قائم تابع هستند.

۲- گزینه‌ی ۲ این تابع تنها در صورتی مجانب قائم ندارد که مخرج آن ریشه نداشته باشد، پس داریم:

$$\Delta<۰\Rightarrow a^۲-۴\times\frac{۱}{۴}\times ۲۵<۰\Rightarrow a^۲-۲۵<۰\Rightarrow -۵<a<۵$$

a می‌تواند مقادیر صحیح ۴- تا ۴ را اختیار کند که تعداد آن‌ها برابر است با:

$$۴-(-۴)+۱=۹$$

۳- گزینه‌ی ۴ ابتدا تابع را ساده می‌کنیم و مجانب قائم آن را پیدا می‌کنیم:

$$y=\frac{(۱-x)(۱+x)}{(x-۱)(x-۲)}=\frac{-(x+۱)}{x-۲}$$

پس خط $x=۲$ مجانب قائم این تابع است. برای پیدا کردن رفتار تابع در اطراف مجانب آن، حد چپ و راست تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{-(x+۱)}{x-۲}=\frac{-۳}{۰^+}=-\infty\quad,\quad \lim_{x\to ۲^-}\frac{-(x+۱)}{x-۲}=\frac{-۳}{۰^-}=+\infty$$

۴- گزینه‌ی ۲ ریشه‌های مخرج $x=۱$ و $x=۳$ می‌باشند، از طرفی دامنه‌ی تابع عبارت است از:

$$۴-x^۲\geq ۰\Rightarrow x^۲\leq ۴\Rightarrow -۲\leq x<۲\xrightarrow{x^۲-۴x+۳\neq ۰} D_f=[-۲,۲]-\{۱\}$$

$x=۱$ که ریشه‌ی مخرج است و ریشه‌ی صورت نیست، مجانب قائم است ولی اطراف $x=۳$ در دامنه‌ی تابع موجود نیست و مجانب قائم نیست.

۵- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول**: با توجه به اتحادهای مثلثاتی داریم:

$$y=\frac{\tan x}{۱-\tan^۲ x}\Rightarrow y=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{۱-\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos^۲ x-\sin^۲ x}{\cos^۲ x}}=\frac{\sin x\ \cos x}{\cos^۲ x-\sin^۲ x}=\frac{\frac{۱}{۲}\sin ۲x}{\cos ۲x}\ y=\frac{۱}{۲}\tan ۲x$$

از طرفی می‌دانیم تابع $y=\tan x$ در مضارب فرد $\frac{\pi}{۲}$ دارای مجانب قائم است، پس:

$$۲x=(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=(۲k+۱)\frac{\pi}{۴}\xrightarrow{۰<x<۲\pi} x=\frac{\pi}{۴},\frac{۳\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۴},\frac{۷\pi}{۴}$$

بنابراین تابع دارای ۴ مجانب قائم است.

راه‌حل دوم: تابع در ریشه‌های مخرج (با توجه به این که ریشه‌ی صورت نیستند)، دارای مجانب قائم می‌باشد:

$$۱-\tan^۲ x=۰\Rightarrow\begin{cases}\tan x=۱\Rightarrow x=\frac{\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۴}\\ \tan x=-۱\Rightarrow x=\frac{۳\pi}{۴},\frac{۷\pi}{۴}\end{cases}$$

از طرفی با این که در نقاط $x=\frac{\pi}{۲}$ و $x=\frac{۳\pi}{۲}$، تابع $\tan x$ به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، ولی دارای حد است:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\tan x}{۱-\tan^۲ x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\tan x}{-\tan^۲ x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{۱}{-\tan x}=۰$$

به همین ترتیب $\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۲}}\frac{\tan x}{۱-\tan^۲ x}=۰$، بنابراین تابع در بازه‌ی $(۰,۲\pi)$ ۴ مجانب قائم دارد.

۶- گزینه‌ی ۴ ابتدا ضابطه‌ی تابع fog را می‌نویسیم:

$$fog(x)=\frac{\frac{2x-1}{x+2}+3}{2(\frac{2x-1}{x+2})+1}=\frac{\frac{5x+5}{x+2}}{\frac{5x}{x+2}}=\frac{x+1}{x}$$

تابع $y=\frac{x+1}{x}$ دارای مجانب قائم $x=0$ و مجانب افقی $y=1$ است که محل تقاطع آن‌ها نقطه‌ی $(0,1)$ می‌باشد.

سراسری - ۹۱

۷- گزینه‌ی ۳ در گزینه‌ی (۳) تابع $y=\frac{x+1}{x\sqrt{x-1}}$ دارای مجانب افقی $y=0$ است، زیرا درجه‌ی مخرج آن از صورت بیش‌تر است. در گزینه‌های (۱) و (۲) درجه‌ی صورت از مخرج بیش‌تر اسـت و حد تابع در بی‌نهایت، برابر بی‌نهایت می‌شـود. دامنه‌ی تابع گزینه‌ی (۴) شـامل بی‌نهایت نیست $(1\le x\le 4)$، بنابراین تابع نمی‌تواند مجانب افقی داشته باشد.

۸- گزینه‌ی ۴ تابع $y=\frac{x|x|}{x^2-4}$ دارای دو مجانب قائم $x=2$ و $x=-2$ است (ریشه‌های مخرج که ریشه‌ی صورت نیستند). از طرفی این تابع دارای دو مجانب افقی $y=1$ و $y=-1$ است، زیرا:

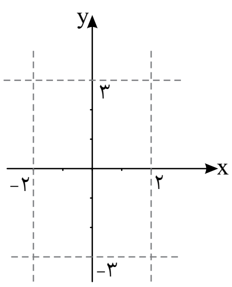
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x|x|}{x^2-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2-4}=1 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x|x|}{x^2-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{x^2-4}=-1$$

۹- گزینه‌ی ۱ **راه‌حل اول:** می‌دانیم $y=-1$ مجانب افقی تابع $y=\frac{-x+1}{x+1}$ اسـت. برای یافتن رفتار این تابع در اطراف مجانب افقی باید ببینیم این تابع در بی‌نهایت بیش‌تر از -1 است یا کم‌تر از آن:

$$y=\frac{-x+1}{x+1}=\frac{-(x+1)+2}{x+1}=-1+\frac{2}{x+1}\Rightarrow\begin{cases}x\to+\infty\Rightarrow y>-1\\ x\to-\infty\Rightarrow y<-1\end{cases}$$

راه‌حل دوم: با توجه به مشتق تابع $y'=\frac{-2}{(x+1)^2}$، تابع در $+\infty$ و $-\infty$ نزولی است و تنها گزینه‌ی (۱) در اطراف بی‌نهایت نزولی است.

۱۰- گزینه‌ی ۴ تابـع $y=\frac{3x-1}{|x|-2}$ دارای دو مجانـب قائـم $x=2$ و $x=-2$ و دو مجانب افقی $y=3$ و $y=-3$ است. مساحت مستطیل به وجود آمده توسط این چهار خط برابر $6\times4=24$ است.



۱۱- گزینه‌ی ۲ برای یافتن مجانب قائم، ریشه یا ریشه‌های مخرج را می‌یابیم:

$$e^x-e^{-x}=0\Rightarrow e^x=\frac{1}{e^x}\Rightarrow e^{2x}=1\Rightarrow 2x=0\Rightarrow x=0$$

با توجه به این که صفر ریشـه‌ی صورت نیسـت، بنابراین $x=0$ مجانب قائم تابع اسـت. برای پیدا کردن مجانب‌های دیگر، حد تابع را در $\pm\infty$ پیدا می‌کنیم. توجه کنید که اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه $e^x\to+\infty$ و $e^{-x}\to0$ و اگر $x\to-\infty$، آن‌گاه $e^x\to0$ و $e^{-x}\to+\infty$. بنابراین:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{-e^{-x}}=-1$$

بنابرایـن $y=1$ و $y=-1$ دو مجانـب افقی تابع هسـتند و محل تقاطع مجانب‌ها دو نقطه‌ی $A(0,1)$ و $B(0,-1)$ اسـت. بنابرایـن فاصله‌ی دو نقطه برابر $AB=1-(-1)=2$ است.

۱۲- گزینه‌ی ۲ با استفاده از هم‌ارزی می‌دانیم در بی‌نهایت $\sqrt{x^2+6x}$ هم‌ارز $|x+3|$ می‌باشد، پس:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+6x}-|x|=\lim_{x\to+\infty}(x+3)-x=3 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+6x}-|x|=\lim_{x\to-\infty}-(x+3)+x=-3$$

بنابراین فاصله‌ی دو مجانب افقی برابر $3-(-3)=6$ است.

۱۳- گزینه‌ی ۱ ابتدا با گرفتن حد تابع در بی‌نهایت، مجانب یا مجانب‌های افقی تابع را می‌یابیم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x}{|x|}=-1 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1-x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x}{|x|}=1$$

بنابراین $y=1$ و $y=-1$ دو مجانب افقی تابع هستند، با مساوی قرار دادن تابع و مجانب‌هایش محل تلاقی آن‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{1-x}{\sqrt{x^2+1}}=1\Rightarrow 1-x=\sqrt{x^2+1}\xrightarrow{1-x\geq 0}x^2-2x+1=x^2+1\Rightarrow x=0$$

$$\frac{1-x}{\sqrt{x^2+1}}=-1\Rightarrow x-1=\sqrt{x^2+1}\xrightarrow{x-1\geq 0}x^2-2x+1=x^2+1\Rightarrow x=0 \text{ غق}$$

بنابراین نقطه‌ی $(0,1)$ محل تقاطع تابع و مجانب افقی آن است.

۱۴- گزینه‌ی ۳ با استفاده از قوانین لگاریتم داریم:

$$y=\ln x-\ln(x+1)\Rightarrow y=\ln\frac{x}{x+1}$$

با توجه به نمودار توابع لگاریتمی، اگر $\frac{x}{x+1}$ به سمت صفر یا بی‌نهایت میل کند، تابع دارای مجانب قائم است. یعنی دو خط $x=0$ و $x=-1$ دو مجانب قائم تابـع هسـتند. برای پیدا کردن مجانــب افقی، حد تابع را در $x\to+\infty$ پیدا می‌کنیم (توجه کنید اعداد منفـی در دامنه‌ی تابع اصلی قرار ندارند و $x\to-\infty$ بی‌معنی است):

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{x}{x+1}=\ln 1=0$$

بنابراین تابع دارای مجانب افقی $y=0$ است.

۱۵- گزینه‌ی ۲ برای تعیین مجانب مایل این تابع، صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} x^2+2x & x+3 \\ \cline{2-2} -x^2-3x & x-1 \\ \hline -x & \\ x+3 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

بنابراین $y=x-1$ مجانب مایل تابع است.

۱۶- گزینه‌ی ۲ تابع دارای مجانب قائم $x=1$ است. برای یافتن مجانب مایل، صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2-2x+1 \\ \cline{2-2} -x^3+2x^2-x & x+2 \\ \hline 2x^2-x & \\ -2x^2+4x-2 & \\ \hline 3x-2 & \end{array}$$

بنابراین خط $y=x+2$ مجانب مایل این تابع است. نقطه‌ی برخورد این دو مجانب نقطه‌ی $A(1,3)$ می‌باشد.

۱۷- گزینه‌ی ۴ تابع فاقد مجانب افقی است و مجانب‌های قائم آن دو خط $x=0$ و $x=-1$ می‌تواند باشد که محور x ها را با طول -2 قطع نمی‌کنند. بنابراین مجانب مورد نظر مایل است. برای یافتن آن، صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+ax^2+5 & x^2+x \\ \cline{2-2} -2x^3-2x^2 & 2x+(a-2) \\ \hline (a-2)x^2+5 & \\ -(a-2)x^2-(a-2)x & \\ \hline -(a-2)x+5 & \end{array}$$

بنابراین خط $y=2x+(a-2)$ مجانب مایل این تابع است. نقطه‌ی $(-2,0)$ روی این خط است، پس $2(-2)+(a-2)=0\Rightarrow a=6$.

۱۸- گزینه‌ی ۱ با استفاده از هم‌ارزی $\sqrt{x^۲+۶x}\sim|x+۳|$، می‌دانیم که تابع در $+\infty$ مجانب افقی و در $-\infty$ مجانب مایل دارد که برابر است با:

$$y=-(x+۳)-x\Rightarrow y=-۲x-۳\xrightarrow{y=۰}x=-\frac{۳}{۲}$$

این تابع محور طول‌ها را در نقطه‌ی $(-\frac{۳}{۲},۰)$ قطع می‌کند.

۱۹- گزینه‌ی ۳ با توجه به هم‌ارزی $\sqrt{x^۲+۲bx}\sim|x+b|$ داریم:

$$x\to+\infty: f(x)\sim(x+b)-ax=(۱-a)x+b$$

با توجه به این که تابع در $+\infty$ دارای مجانب افقی $y=-۲$ است، داریم:

$$a=۱\ ,\ b=-۲$$

بنابراین:

$$f(x)=\sqrt{x^۲-۴x}-x\Rightarrow x\to-\infty\ :\ f(x)\sim-(x-۲)-x=-۲x+۲$$

یعنی $y=-۲x+۲$ مجانب مایل تابع در $-\infty$ است.

۲۰- گزینه‌ی ۲ تابع f دارای دو مجانب قائم $x=۲$ و $x=-۲$ اســت. حد تابع در بی‌نهایت برابر بی‌نهایت اســت، بنابراین تابع مجانب افقی نداشــته و مجانب مایل دارد. شیب و عرض از مبدأ مجانب‌های مایل تابع را پیدا می‌کنیم:

$$m_۱=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^۲-۴}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|}=۱\ ,\ b_۱=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-m_۱x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۲-x\sqrt{x^۲-۴}}{\sqrt{x^۲-۴}}=۰$$

$$m_۲=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^۲-۴}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|}=-۱\ ,\ b_۲=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-m_۲x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^۲+x\sqrt{x^۲-۴}}{\sqrt{x^۲-۴}}=۰$$

بنابراین $y=x$ و $y=-x$ دو مجانب مایل تابع هستند. دو خط $y=x$ و $x=۲$ هم‌دیگر را در ربع اول در نقطه‌ی $(۲,۲)$ قطع می‌کنند.

پاسخ تشریحی آزمون ۴۹

۱- گزینه‌ی ۲ تابــع $y_۱=\frac{۱}{\sqrt{x-۱}}\times\frac{۱}{\sqrt{x-۲}}$ فقــط دارای مجانب قائم $x=۲$ اســت، زیــرا اطراف ریشــه‌ی دیگر مخرج، یعنــی $x=۱$ در دامنه‌ی $D=(۲,+\infty)$ تابع موجود نیســت. تابع $y_۲=\frac{۱}{\sqrt{x-۱}}\times\frac{۱}{\sqrt{۲-x}}$ دارای دو مجانب قائم $x=۱$ و $x=۲$ اســت، زیرا اطراف هر دو ریشــه در دامنه‌ی تابع $D=(۱,۲)$ موجود هستند.

۲- گزینه‌ی ۴ می‌دانیم معادله‌ی $۴x^۲-ax=۰$ حتماً دارای دو ریشه‌ی $x=\frac{a}{۴}$ و $x=۰$ است. بنابراین برای این که تابع به سمت بی‌نهایت میل نکند، این دو ریشــه‌ی مخرج حتماً ریشــه‌های صورت نیز هســتند. $x=۰$ ریشه‌ی صورت است، بنابراین $b=۲$، پس صورت کسر به صورت $x(x+۲)$ در می‌آید، یعنی ریشه‌ی دیگر صورت یعنی $\frac{a}{۴}$ برابر -۲ است:

$$\frac{a}{۴}=-۲\Rightarrow a=-۸\xrightarrow{b=۲}ab=-۱۶$$

۳- گزینه‌ی ۳ برای آن که تابع فقط یک مجانب قائم داشته باشد، یا مخرج کسر فقط یک ریشه دارد و یا دارای دو ریشه است که یکی از آن‌ها ریشه‌ی صورت $x=-۲$ نیز هست، بنابراین دو حالت زیر ممکن است اتفاق بیفتد:

$$\begin{cases}\Delta=۰\Rightarrow m^۲-۴m=۰\Rightarrow m=۰\ \text{یا}\ m=۴\\(-۲)^۲-m(-۲)+m=۰\Rightarrow ۳m+۴=۰\Rightarrow m=-\frac{۴}{۳}\end{cases}$$

بنابراین m می‌تواند ۳ مقدار ۴، صفر و $\frac{۴}{۳}$ را داشته باشد.

۴- گزینه‌ی ۳ تابع کسری در ریشه‌های مخرج که اطراف آن‌ها در دامنه موجود است، ممکن است مجانب قائم داشته باشد:

$$x-[x]=0 \Rightarrow x \in \mathbb{Z} \xrightarrow{-1\le x\le 1} x=0 \text{ یا } x=1 \text{ یا } x=-1$$

حال برای آن که تعیین کنیم هر یک از ریشه‌های مخرج، مجانب قائم هستند یا خیر باید حد تابع را در اطراف این نقاط محاسبه کنیم:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x-[x]}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x-0}=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x-[x]}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x-0}=0$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x-[x]}=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x+1}=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x-[x]}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x+1}=1$$

تابع در اطراف $x=0$ و $x=-1$ لااقل از یک طرف دارای حد نامتناهی است، بنابراین این دو خط مجانب قائم هستند. توجه کنید که سمت راست $x=1$ و سمت چپ $x=-1$ در دامنه‌ی تابع موجود نیستند.

۵- گزینه‌ی ۴ تابع کتانژانت در نقاطی که تعریف نشده است $(k\pi)$ دارای مجانب قائم است:

$$2\pi x=k\pi \Rightarrow x=\frac{k}{2} \quad (k\in\mathbb{Z}) \xrightarrow{0<x<\pi} x=\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3$$

با توجه به مقدار تقریبی $\pi \simeq 3/14$، x می‌تواند دارای ۶ مقدار فوق باشد.

۶- گزینه‌ی ۴ برای آن که تابع در بی‌نهایت دارای حدی برابر ۲ باشد، می‌بایست درجه‌ی صورت و مخرج یکسان باشد، یعنی صورت نیز باید از درجه‌ی اول باشد، یعنی $a=2$. با این شرط حد تابع در بی‌نهایت برابر $\frac{1}{b}$ است:

$$\frac{1}{b}=2 \Rightarrow b=\frac{1}{2} \xrightarrow{a=2} f(x)=\frac{x}{\frac{1}{2}x-4}$$

بنابراین معادله‌ی مجانب قائم تابع، همان ریشه‌ی مخرج یعنی $x=8$ است.

۷- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول**: خط $y=0$ مجانب افقی این تابع است. برای تعیین رفتار تابع در کنار مجانب افقی، علامت تفاضل تابع از مجانبش را محاسبه می‌کنیم:

$$x\to+\infty: \frac{x}{x^2-1}-0>0 \quad , \quad x\to-\infty: \frac{x}{x^2-1}-0<0$$

بنابراین تابع در $+\infty$ بالای $y=0$ و در $-\infty$ پایین آن است.

راه‌حل دوم:

$$f'(x)=\frac{(x^2-1)-2x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{-x^2-1}{x^2-1}<0$$

با توجه به این که تابع در $+\infty$ و $-\infty$ نزولی است.

۸- گزینه‌ی ۲ حد تابع را در $+\infty$ و $-\infty$ محاسبه می‌کنیم تا مجانب‌های افقی پیدا شوند:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{kx^2+x-1}{x|x|+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{kx^2}{-x^2}=-k \Rightarrow y=-k \text{ مجانب افقی} \quad , \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{kx^2+x-1}{x|x|+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{kx^2}{x^2}=k \Rightarrow y=k \text{ مجانب افقی}$$

با توجه به این‌که k عددی مثبت است، فاصله‌ی دو مجانب افقی برابر است با:

$$k-(-k)=4 \Rightarrow 2k=4 \Rightarrow k=2$$

۹- گزینه‌ی ۴ با استفاده از هم‌ارزی توابع رادیکالی در بی‌نهایت می‌دانیم:

$$y=\sqrt{x^2+2ax}-\sqrt{x^2+4x}+b=|x+a|-|x+2|+b$$

$$x\to+\infty: y\sim(x+a)-(x+2)+b=a+b-2 \quad , \quad x\to-\infty: y\sim-(x+a)+(x+2)+b=b-a+2$$

با توجه به این که تابع دارای دو مجانب افقی $y=-1$ و $y=2$ است، دو حالت زیر ممکن است اتفاق بیفتد:

$$\begin{cases} a+b-2=2 \\ b-a+2=-1 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{7}{2} \ , \ b=\frac{1}{2} \quad , \quad \begin{cases} a+b-2=-1 \\ b-a+2=2 \end{cases} \Rightarrow a=b=\frac{1}{2}$$

در هر دو حالت $b=\frac{1}{2}$ است.

۱۰- گزینه‌ی ۳ مجانب افقی تابع، خط $y=a$ است، به این دلیل که $(1,-2)$ روی این خط افقی است، داریم $a=-2$. همچنین $(1,-2)$ روی تابع نیز هست، یعنی:

$$-2=\frac{-2\times1^2}{1^2+b\times1+1} \Rightarrow b+2=1 \Rightarrow b=-1 \xrightarrow{a=-2} a+b=-3$$

۱۱- گزینه‌ی ۲ برای یافتن مجانب‌های قائم، ریشه‌های مخرج را پیدا می‌کنیم:

$$۲x-|x-۱|=۰\Rightarrow |x-۱|=۲x\begin{cases} x>۱\Rightarrow x-۱=۲x\Rightarrow x=-۱ \quad \text{غ‌ق‌ق} \\ x<۱\Rightarrow x-۱=-۲x\Rightarrow x=\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

از آن‌جا که $\frac{۱}{۳}$ ریشه‌ی صورت نیست، خط $x=\frac{۱}{۳}$ تنها مجانب قائم تابع است. برای یافتن مجانب‌های افقی حد تابع در $+\infty$ و $-\infty$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{۲x-|x-۱|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{۲x-(x-۱)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=۱ \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{۲x-|x-۱|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{۲x+(x-۱)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{۳x}=\frac{۱}{۳}$$

یعنی تابع دارای دو مجانب افقی $y=۱$ و $y=\frac{۱}{۳}$ است.

۱۲- گزینه‌ی ۲ از آن‌جا که $\lim_{x\to۱} ۲^{\frac{۱}{(x-۱)^۲}}=۲^{+\infty}=+\infty$ است، خط $x=۱$ مجانب قائم این تابع است. برای محاسبه‌ی مجانب افقی داریم:

$$\lim_{x\to\infty} ۲^{\frac{۱}{(x-۱)^۲}}=۲^{\frac{۱}{\infty}}=۲^۰=۱$$

پس خط $y=۱$ مجانب افقی تابع است و نقطه‌ی $A(۱,۱)$ محل تقاطع این دو مجانب می‌باشد:

$$AO=\sqrt{۱^۲+۱^۲}=\sqrt{۲}$$

۱۳- گزینه‌ی ۲ خط $y=۲$ مجانب افقی تابع است، بنابراین:

$$\lim_{x\to\infty}\log_۲\left(\frac{ax-۴}{x-a}\right)=\lim_{x\to\infty}\log_۲\frac{ax}{x}=\log_۲ a\xrightarrow{\lim_{x\to\infty} f(x)=۲}\log_۲ a=۲\Rightarrow a=۲^۲\Rightarrow a=۴$$

مجانب‌های قائم تابع $y=\log_۲\left(\frac{۴x-۴}{x-۴}\right)$ ریشه‌های صورت و مخرج $\frac{۴x-۴}{x-۴}$ هستند. یعنی دو خط $x=۱$ و $x=۴$ مجانب قائم تابع لگاریتمی هستند که فاصله‌ی آن‌ها برابر $۴-۱=۳$ است.

۱۴- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول**: ابتدا با استفاده از فرمول $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ شیب را پیدا می‌کنیم:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x+۱+\frac{\sqrt{۴x-۱}}{x+۱}}{x}=\lim_{x\to+\infty} ۲+\frac{۱}{x}+\frac{\sqrt{۴x-۱}}{x\sqrt{x+۱}}=۲$$

بنابراین با استفاده از فرمول $b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)$ برای عرض از مبدأ داریم:

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(۲x+۱+\frac{\sqrt{۴x-۱}}{\sqrt{x+۱}}-۲x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(۱+\frac{\sqrt{۴x}}{\sqrt{x}}\right)=۳$$

بنابراین خط $y=۲x+۳$ مجانب مایل این تابع است.

راه‌حل دوم: در $+\infty$ داریم:

$$\frac{\sqrt{۴x-۱}}{\sqrt{x+۱}}\sim\frac{\sqrt{۴x}}{\sqrt{x}}=۲\Rightarrow f(x)\sim ۲x+۱+۲=۲x+۳$$

۱۵- گزینه‌ی ۳ $x=۰$ و $x=۱$ دو ریشه‌ی مخرج هستند. برای آن که خط $x=۰$ تنها مجانب قائم تابع باشد، باید $x=۱$ ریشه‌ی صورت کسر هم باشد:

$$(۱)^۳+a(۱)-۲=۰\Rightarrow a=۱\Rightarrow y=\frac{x^۳+x-۲}{x^۲-x}\Rightarrow y=\frac{(x-۱)(x^۲+x+۲)}{x(x-۱)}\Rightarrow y=\frac{x^۲+x+۲}{x}\Rightarrow y=x+۱+\frac{۲}{x}$$

بنابراین خط $y=x+۱$ مجانب مایل تابع است.

سراسری خارج از کشور – ۹۱

۱۶- گزینه‌ی ۱ برای یافتن مجانب مایل، صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l} ax^۲+x & x+b \\ \cline{2-2} -ax^۲-abx & ax+۱-ab \\ \hline (۱-ab)x & \\ -(۱-ab)x-b(۱-ab) & \\ \hline ab^۲-b & \end{array}$$

بنابراین خط $y=ax+(۱-ab)$ مجانب مایل تابع یا همان $y=۲x-۵$ است، پس:

$$a=۲ \quad , \quad ۱-ab=-۵\Rightarrow ۲b=۶\Rightarrow b=۳$$

بنابراین مقدار $a-b$ برابر -۱ است.

۱۷- گزینه‌ی ۳ با استفاده از هم‌ارزی رادیکال‌ها در بی‌نهایت می‌دانیم:

$$\sqrt{x^۲-۲x}\sim|x-۱|\xrightarrow{x\leq ۰}x\to-\infty : y\sim x+(x-۱)=۲x-۱$$

بنابراین خط $-۲x+y+۱=۰$ مجانب مایل این تابع در منفی بی‌نهایت است و فاصله‌ی نقطه‌ی $(-۲,۰)$ از آن برابر است با:

$$\frac{|-۲(-۲)+۰+۱|}{\sqrt{(-۲)^۲+۱^۲}}=\frac{۵}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}$$

سراسری خارج از کشور - ۹۰

۱۸- گزینه‌ی ۱ **راه‌حل اول**: با محاسبه‌ی حد $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ شیب مجانب مایل را تعیین می‌کنیم:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{۱+x^۴}}{(۱+x)x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{۱+x^۴}{x^۲(۱+x)^۲}}=۱$$

برای محاسبه‌ی عرض از مبدأ می‌نویسیم:

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{۱+x^۴}}{۱+x}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{۱+x^۴}-x-x^۲}{۱+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۱+x^۴-(x+x^۲)^۲}{(۱+x)(\sqrt{۱+x^۴}+x+x^۲)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{۱-x^۲-۲x^۳}{(۱+x)(\sqrt{۱+x^۴}+x+x^۲)}=-۱$$

پس خط $y=x-۱$ مجانب مایل این تابع در $+\infty$ است.

راه‌حل دوم: با توجه به این که $x\to+\infty$ تابع را به صورت $f(x)=\sqrt{\frac{۱+x^۴}{(۱+x)^۲}}$ بازنویسی می‌کنیم، حال صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l} x^۴+۱ & x^۲+۲x+۱ \\ \cline{2-2} -x^۴-۲x^۳-x^۲ & x^۲-۲x+۳ \\ \hline -۲x^۳-x^۲+۱ & \\ ۲x^۳+۴x^۲+۲x & \\ \hline ۳x^۲+۲x+۱ & \\ -۳x^۲-۶x-۳ & \\ \hline -۴x-۲ & \end{array}$$

حال با استفاده از هم‌ارزی در $+\infty$ می‌توان نوشت:

$$f(x)=\sqrt{x^۲-۲x+۳+\frac{-۴x-۲}{x^۲+۲x+۱}}\sim\sqrt{x^۲-۲x+۳}\sim|x-۱|=x-۱$$

بنابراین $y=x-۱$ مجانب مایل این تابع در $+\infty$ است.

راه‌حل سوم: با توجه به این که در بی‌نهایت $\sqrt{۱+x^۴}\sim x^۲$ و با تقسیم $x^۲$ بر $۱+x$ مجانب مایل به‌دست می‌آید:

$$\begin{array}{l|l} x^۲ & x+۱ \\ \cline{2-2} -x^۲-x & x-۱ \\ \hline -x+۱ & \\ x+۱ & \\ \hline ۲ & \end{array}$$

کتاب درسی

۱۹- گزینه‌ی ۲ با توجه به هم‌ارزی $\sqrt{x^{2}+1}\sim|x|$ دو خط $y=x$ و $y=-x$ مجانب‌های مایل این تابع به ترتیب در $+\infty$ و $-\infty$ هستند. برای تعیین رفتار تابع در اطراف مجانب مایل می‌توان با استفاده تعیین علامت تفاضل تابع از مجانبش، تعیین کرد تابع بالای مجانب قرار دارد یا پایین آن:

$$x\to+\infty:(\sqrt{1+x^{2}}-x)=\frac{\sqrt{1+x^{2}}-x}{1}\times\frac{\sqrt{1+x^{2}}+x}{\sqrt{1+x^{2}}+x}=\frac{1}{\sqrt{1+x^{2}}+x}>0$$

$$x\to-\infty:(\sqrt{1+x^{2}}-(-x))=\frac{\sqrt{1+x^{2}}+x}{1}\times\frac{\sqrt{1+x^{2}}-x}{\sqrt{1+x^{2}}-x}=\frac{1}{\sqrt{1+x^{2}}-x}>0$$

بنابراین تابع هم در $+\infty$ و هم در $-\infty$ بالای مجانب مایل خود قرار دارد.

۲۰- گزینه‌ی ۱ **راه‌حل اول**: شیب و عرض از مبدأ مجانب مایل را با استفاده از فرمول محاسبه می‌کنیم:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^{3}+x^{2}}{x-3}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{\frac{x^{3}+x^{2}}{x^{2}(x-3)}}=-1$$

توجه کنید علامت منفی در حد به خاطر منفی بودن x ظاهر شده است:

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^{3}+x^{2}}{x-3}}+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^{3}+x^{2}}{x-3}-x^{2}}{\sqrt{\frac{x^{3}+x^{2}}{x-3}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{4x^{2}}{x-3}}{-2x}=-2$$

بنابراین خط $y=-x-2$ مجانب مایل تابع است.

راه‌حل دوم: ابتدا صورت و مخرج عبارت زیر رادیکال را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l}
x^{3}+x^{2} & x-3 \\ \cline{2-2}
-x^{3}+3x^{2} & x^{2}+4x+12 \\ \cline{1-1}
4x^{2} & \\
-4x^{2}+12x & \\ \cline{1-1}
12x & \\
-12x+36 & \\ \cline{1-1}
36 &
\end{array}$$

با استفاده از هم‌ارزی‌ها داریم:

$$f(x)=\sqrt{x^{2}+4x+12+\frac{36}{x-3}}\sim\sqrt{x^{2}+4x+12}\sim|x+2|=-x-2$$

عرض از مبدأ خط $y=-x-2$ برابر -2 است.

آزمون‌های مرحله‌ای

۱۱ مشتق

پاسخ تشریحی آزمون‌های فصل یازدهم

پاسخ تشریحی آزمون ۵۰

۱- گزینه‌ی ۴ ابتدا ضابطه‌ی تابع را در سمت چپ ۲، تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} -2<x<2 \Rightarrow x^2-4<0 \Rightarrow |x^2-4|=4-x^2 \\ -1<x<2 \Rightarrow x+1>0 \Rightarrow |x+1|=x+1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=4-x^2-3(x+1)=-x^2-3x+1$$

حال، از ضابطه‌ی به دست آمده درنقطه‌ی ۲ مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=-2x-3 \Rightarrow f'(2)=-4-3=-7$$

۲- گزینه‌ی ۱ ابتدا ضابطه‌ی تابع را در سمت چپ ۳ تعیین می‌کنیم:

$$2<x<3 \Rightarrow [x]|x-3|=2(3-x) \Rightarrow f(x)=6-2x \Rightarrow f'(x)=-2$$

۳- گزینه‌ی ۱ مشــتق تابع در هر نقطه، شــیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه اســت. با توجه به نمودار تابع f خطوط مماس بر تابع در نقطه‌ی $x=1$ و $x=-1$ بر هم عمود هستند، بنابراین داریم:

$$f'(1)\times f'(-1)=-1 \Rightarrow -2f'(-1)=-1 \Rightarrow f'(-1)=\frac{1}{2}$$

۴- گزینه‌ی ۲ نقطه‌ای با طول صفر محل تغییر ضابطه‌ی تابع $|x|$ است، بنابراین تابع $f(x)$ (احتمالاً) در این نقطه مشتق‌ناپذیر است. برای محاسبه‌ی مشتق چپ و راست، ضابطه‌ی تابع را بدون قدرمطلق بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} x(x+a) & x\geq 0 \\ -x(x+a) & x<0 \end{cases}=\begin{cases} x^2+ax & x\geq 0 \\ -x^2-ax & x<0 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 2x+a & x>0 \\ -2x-a & x<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} f'_+(0)=a \\ f'_-(0)=-a \end{matrix}$$

با توجه به این که مماس چپ و راست تابع در این نقطه بر هم عمود هستند، بنابراین داریم:

$$f'_+(0)\times f'_-(0)=-1 \Rightarrow a(-a)=-1 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=\pm 1$$

۵- گزینه‌ی ۱ ضابطه‌ی تابع در سمت چپ و راست نقطه‌ی $x=-1$ را تعیین می‌کنیم:

$$-2<x<-1 \Rightarrow 2^{[x]}(x+1)=2^{-2}(x+1) \Rightarrow f(x)=\frac{x+1}{4}$$

$$-1<x<0 \Rightarrow 2^{[x]}(x+1)=2^{-1}(x+1) \Rightarrow f(x)=\frac{x+1}{2}$$

حال با محاسبه‌ی مشتق چپ و راست در نقطه‌ی $x-1$ داریم:

$$\begin{cases} f'_-(-1)=\frac{1}{4} \\ f'_+(-1)=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow f'_+(-1)-f'_-(-1)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$$

۶- گزینه‌ی ۳ تابــع $g(x)=\frac{x}{f(x)}$، برخلاف تابع f در نقطه‌ی صفر پیوســته اســت،زیرا $g(0)=\frac{0}{f(0)}=\frac{0}{-2}=0$ و $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{f(x)}=\frac{0}{2}=0$ بنابراین تابع $\frac{x}{f(x)}$ می‌تواند مشتق‌پذیر باشد، با استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{f(x)}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{f(x)}$$

از جایی که $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$ می‌باشد، $g'(0)$ برابر $\frac{1}{2}$ است.

۷- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول:** عبارت (x^3-1) عامل صفرکننده‌ی این تابع در $x=1$ اســت، بنابراین فقط از آن مشــتق می‌گیریم و بقیه‌ی ضابطه‌ی تابع را بدون مشتق حساب می‌کنیم.

$$(x^3-1)'=3x^2 \xrightarrow{x=1} 3\times 1^2=3$$

$$y'(1)=3\times 1^1=3$$

راه‌حل دوم: با نوشتن تعریف مشتق در نقطه‌ی صفر، آن را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^3-1)x^x-0}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)x^x=3$$

۸- گزینه‌ی ۱ صورت و مخرج حد مورد نظر را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم، تا عامل صفرکننده از رادیکال خارج شود:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{f(x)}-2}{x^2-9}\times\frac{\sqrt{f(x)}+2}{\sqrt{f(x)}+2}\right)=\lim_{x\to 3}\left(\frac{f(x)-4}{x-3}\times\frac{1}{(x+3)(\sqrt{f(x)}+2)}\right)=f'(3)\times\frac{1}{(3+3)(\sqrt{f(3)}+2)}\xrightarrow[f(3)=4]{f'(3)=2}2\times\frac{1}{6\times(2+2)}=\frac{1}{12}$$

۹- گزینه‌ی ۴ با توجه به تعریف تابع مشتق و با توجه به این‌که $(\cos x)'=-\sin x$ داریم:

$$g(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{2h}=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{2}f'(x)=\frac{-1}{2}\sin x$$

اکنون، از تابع $g(x)$ به دست آمده مشتق می‌گیریم:

$$g'(x)=\frac{-1}{2}\cos x$$

۱۰- گزینه‌ی ۲ مشتق تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{(\sqrt{x}+2)'(x^2+1)-(x^2+1)'(\sqrt{x}+2)}{(x^2+1)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\times(x^2+1)-2x(\sqrt{x}+2)}{(x^2+1)^2}\Rightarrow f'(1)=\frac{\frac{1}{2\times 1}(1+1)-2(1+2)}{(1+1)^2}\Rightarrow f'(1)=\frac{1-6}{4}=\frac{-5}{4}$$

۱۱- گزینه‌ی ۱ **راه‌حل اول:** با توجه به این‌که $\left(\frac{au+b}{cu+d}\right)'=u'\times\frac{ad-bc}{(cu+d)^2}$ برای تابع $y=\frac{-\tan 2x+1}{\tan 2x+1}$ می‌توان نوشت:

$$y'=\frac{-1\times 1-1\times 1}{(\tan 2x+1)^2}\times(\tan 2x)'\Rightarrow y'=\frac{-2\times(1+\tan^2 2x)\times 2}{(\tan 2x+1)^2}\xrightarrow{x=\frac{\pi}{8}}y'=\frac{-4(1+\tan^2\frac{\pi}{4})}{(\tan\frac{\pi}{4}+1)^2}=\frac{-4(1+1)}{(1+1)^2}=\frac{-8}{4}=-2$$

راه‌حل دوم: ابتدا با استفاده از اتحادهای مثلثاتی ضابطه‌ی تابع را به صورت ساده‌تری می‌نویسیم:

$$y=\frac{1-\tan 2x}{1+\tan 2x}=\frac{1-\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{1+\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}=\frac{\frac{\cos 2x-\sin 2x}{\cos 2x}}{\frac{\cos 2x+\sin 2x}{\cos 2x}}=\frac{\cos 2x-\sin 2x}{\sin 2x+\cos 2x}=\frac{\sqrt{2}\cos(2x+\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})}=\cot(2x+\frac{\pi}{4})$$

اکنون از تابع ساده شده مشتق می‌گیریم:

$$y'=-\left(1+\cot^2(2x+\frac{\pi}{4})\right)\times 2\xrightarrow{x=\frac{\pi}{8}}y'=-2\left(1+\cot^2(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4})\right)=-2(1+\cot^2\frac{\pi}{2})=-2$$

سراسری - ۸۹

۱۲- گزینه‌ی ۲ از تابع داده شده مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=(\sin^2 x)'\cos x+\sin^2 x(\cos x)'=2\sin x\cos x\times\cos x+\sin^2 x(-\sin x)=2\sin x\cos^2 x-\sin^3 x$$

با جایگذاری $x=\frac{\pi}{6}$ داریم:

$$f'(\frac{\pi}{6})=2\sin\frac{\pi}{6}\cos^2\frac{\pi}{6}-\sin^3\frac{\pi}{6}=2\times\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2})^2-(\frac{1}{2})^3=\frac{2\times 3}{8}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$$

۱۳- گزینه‌ی ۱ با توجه به این‌که $\cos^2\frac{\pi}{3x}=\left(\cos\frac{\pi}{3x}\right)^2$، مشتق تابع را پیدا می‌کنیم:

$$y'=2\cos\frac{\pi}{3x}\times\left(-\sin\frac{\pi}{3x}\right)\times\frac{\pi}{3}(-\frac{1}{x^2})$$

با توجه به اتحاد مثلثاتی $2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$ تابع مشتق را ساده می‌کنیم:

$$y'=-\sin(2\times\frac{\pi}{3x})\times\frac{\pi}{3}(-\frac{1}{x^2})\Rightarrow y'=\frac{\pi}{3x^2}\sin\frac{2\pi}{3x}$$

حال با جایگذاری $x=4$ در تابع مشتق داریم:

$$y'=\frac{\pi}{3\times 4^2}\sin\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{48}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{48}\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{96}$$

سراسری خارج از کشور - ۹۰

۱۴- گزینه‌ی ۲ ابتدا ضابطه‌ی تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=x(x-1)(x+1)(x^2+1)=x(x^2-1)(x^2+1)=x(x^4-1)=x^5-x$$

با مشتق گرفتن از تابع ساده شده داریم:

$$f'(x)=5x^4-1\Rightarrow f'(\sqrt[4]{3})=5(\sqrt[4]{3})^4-1\Rightarrow f'(\sqrt[4]{3})=5\times 3-1=14$$

۱۵- گزینه‌ی ۲ با استفاده از اتحادهای مثلثاتی تابع را ساده می‌کنیم:

$$y=\frac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}=\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)+2\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}=\frac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin x+\cos x}=\sin x+\cos x$$

اکنون از تابع ساده شده مشتق می‌گیریم.

$$y'=(\sin x)'+(\cos x)'=\cos x-\sin x$$

۱۶- گزینه‌ی ۳ عبارت داده شده، همان مشتق تابع $f(x)\times g(x)$ می‌باشد. بنابراین ابتدا $f(x)g(x)$ را محاسبه و ساده می‌کنیم:

$$f(x)g(x)=\sin x\tan x\times\cos x\cot x\Rightarrow f(x)g(x)=\sin x\times\cos x\times 1\Rightarrow f(x)g(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$$

اکنون به محاسبه‌ی مشتق این تابع در $x=\frac{\pi}{12}$ می‌پردازیم:

$$(fg)'=\frac{1}{2}\cos 2x\times 2=\cos 2x\xrightarrow{x=\frac{\pi}{12}}(fg)'(\frac{\pi}{12})=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱۷- گزینه‌ی ۲ مقدار تابع به ازای $x=3$ برابر صفر اســت و $\sin\pi x$ عامل صفرکننده‌ی این تابع اســت، بنابراین می‌توان تنها مشتق عامل صفرکننده را حساب کرد و بقیه‌ی تابع را به همان صورت نوشت:

$$\begin{cases} x=3 \text{ مشتق عامل صفرکننده در } : \pi\cos 3\pi=-\pi \\ x=3 \text{ بقیه‌ی تابع به ازای } : \frac{\sqrt{3+1}}{3-4}=-2 \end{cases}\Rightarrow f'(3)=-2\times(-\pi)=2\pi$$

۱۸- گزینه‌ی ۴ **راه‌حل اول:** با استفاده از فرمول مشتق تابع کسری، مشتق تابع مورد نظر را می‌یابیم:

$$f'(x)=\frac{(1-\cos^2 x)'(2-\sin^2 x)-(2-\sin^2 x)'(1-\cos^2 x)}{(2-\sin^2 x)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{2\cos x\sin x\,(2-\sin^2 x)-(-2\sin x\cos x)(1-\cos^2 x)}{(2-\sin^2 x)^2}$$

$$\Rightarrow f'(\frac{\pi}{4})=\frac{2\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}(2-\frac{1}{2})+2\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times(1-\frac{1}{2})}{(2-\frac{1}{2})^2}\Rightarrow f'(\frac{\pi}{4})=\frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{9}{4}}\Rightarrow f'(\frac{\pi}{4})=\frac{8}{9}$$

راه‌حل دوم: تابع را فقط با استفاده از $\sin$ بازنویسی می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{\sin^2 x}{-\sin^2 x+2}$$

با توجه به این‌که مشتق تابع $\frac{au+b}{cu+d}$ برابر $\frac{ad-bc}{(cu+d)^2}\times u'$ است داریم:

$$f'(x)=\frac{1\times 2-(-1)\times 0}{(-\sin^2 x+2)^2}\times 2\sin x\cos x\Rightarrow f'(x)=\frac{2\sin 2x}{(2-\sin^2 x)^2}\Rightarrow f'(\frac{\pi}{4})=\frac{2\times 1}{(2-\frac{1}{2})^2}\Rightarrow f'(\frac{\pi}{4})=\frac{2}{\frac{9}{4}}=\frac{8}{9}$$

سراسری - ۹۱

۱۹- گزینه‌ی ۴ از طرفین رابطه‌ی داده شده مشتق می‌گیریم:

$$g(\frac{1}{x})=f(\sqrt{x})\Rightarrow\frac{-1}{x^2}g'(\frac{1}{x})=\frac{1}{2\sqrt{x}}f'(\sqrt{x})$$

با قرار دادن $x=4$، $g'(\frac{1}{4})$ را می‌یابیم:

$$\frac{-1}{4^2}g'(\frac{1}{4})=\frac{1}{2\sqrt{4}}f'(\sqrt{4})\Rightarrow g'(\frac{1}{4})=\frac{-16}{2\times 2}f'(2)\xrightarrow{f'(2)=3}g'(\frac{1}{4})=-4\times 3=-12$$

۲۰- گزینه‌ی ۱ از تابع $y=g(x)$ مشتق می‌گیریم:

$$g(x)=2x^2-f(2x)\Rightarrow g'(x)=4x-2f'(2x)$$

با توجه به این‌که $f'(x)=\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$ داریم:

$$g'(x)=4x-2\times\frac{2(2x)}{\sqrt{1+(2x)^2}}\Rightarrow g'(x)=4x-\frac{8x}{\sqrt{1+4x^2}}$$

با جایگذاری $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ در رابطه‌ی به دست آمده داریم:

$$g'(\frac{\sqrt{3}}{2})=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{8\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{1+4\times\frac{3}{4}}}=2\sqrt{3}-\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{4}}=2\sqrt{3}-2\sqrt{3}=0$$

پاسخ تشریحی آزمون ۵۱

۱- گزینه‌ی ۲ ضابطه‌ی تابع در سمت چپ نقطه‌ی $x=۲$ برابر است با:

$$\begin{cases} -۲<x<۲ \Rightarrow x^۲-۴<۰ \Rightarrow |x^۲-۴|=۴-x^۲ \\ x<۲ \Rightarrow x-۲<۰ \Rightarrow |x-۲|=۲-x \end{cases} \Rightarrow f(x)=\frac{۴-x^۲-۴}{۲-x+x} \Rightarrow f(x)=\frac{-x^۲}{۲} \Rightarrow f'(x)=\frac{-۲x}{۲} \Rightarrow f'(۲)=-۲$$

۲- گزینه‌ی ۲ ابتدا شیب خط مماس سمت چپ تابع $y=|\tan x|$ در نقطه‌ی $x=۰$ را محاسبه می‌کنیم. این شیب برابر مشتق چپ تابع در این نقطه است:

$$-\frac{\pi}{۲}<x<۰ \Rightarrow \tan x<۰ \Rightarrow f(x)=-\tan x \Rightarrow f'(x)=-(۱+\tan^۲ x) \Rightarrow f'_-(۰)=-(۱+۰^۲) \Rightarrow f'_-(۰)=-۱$$

با توجه به این‌که شیب این خط برابر -۱ است، بنابراین تانژانت زاویه‌ی بین این خط و سمت راست محور طول‌ها برابر -۱ است و داریم:

$$\tan(\pi-\theta)=-۱ \Rightarrow -\tan\theta=-۱ \Rightarrow \tan\theta=۱ \xrightarrow{۰<\theta<۱۸۰} \theta=۴۵^\circ$$

۳- گزینه‌ی ۳ ضابطه‌ی تابع را در سمت راست و چپ نقطه‌ی $x=۱$ بدون قدرمطلق بازنویسی می‌کنیم، سپس از آن مشتق می‌گیریم:

$$x>۱ \Rightarrow |x-۱|=x-۱ \Rightarrow f(x)=x\sqrt{x}+x-۱ \Rightarrow f'(x)=\sqrt{x}+\frac{x}{۲\sqrt{x}}+۱ \Rightarrow f'_+(۱)=۱+\frac{۱}{۲}+۱=\frac{۵}{۲}$$

$$x<۱ \Rightarrow |x-۱|=-(x-۱) \Rightarrow f(x)=x\sqrt{x}+۱-x \Rightarrow f'(x)=\sqrt{x}+\frac{x}{۲\sqrt{x}}-۱ \Rightarrow f'_-(۱)=۱+\frac{۱}{۲}-۱=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین داریم:

$$f'_+(۱)+۳f'_-(۱)=\frac{۵}{۲}+۳\times\frac{۱}{۲}=۴$$

سراسری - ۹۰

۴- گزینه‌ی ۳ با استفاده از تعریف مشتق راست در نقطه‌ی $x=۳$، می‌توان نوشت:

$$f'_+(۳)=\lim_{x\to ۳^+}\frac{|x-۳|\sqrt{a-x}-۰}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^+}\frac{(x-۳)\sqrt{a-x}}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^+}\sqrt{a-x}=\sqrt{a-۳} \xrightarrow{f'_+(۳)=۲} \sqrt{a-۳}=۲ \Rightarrow a-۳=۴ \Rightarrow a=۷$$

۵- گزینه‌ی ۱ برای بررســی مشــتق‌پذیری یک تابع، ابتدا پیوســتگی آن را بررســی می‌کنیم، برای این کار حد و مقدار تابع را در نقطه‌ی صفر محاسبه می‌کنیم. می‌دانیم مقدار عبارت $[x]+[-x]$ به ازای تمام اعداد غیرصحیح برابر -۱ است، پس حد این عبارت در صفر برابر منفی یک می‌باشد.

$$\lim_{x\to ۰} f(x)=\lim_{x\to ۰} x([x]+[-x])=۰\times(-۱)=۰ \quad , \quad f(۰)=۰\times۰=۰$$

حد و مقدار تابع در نقطه‌ی صفر برابرند، پس تابع در این نقطه پیوسته است، برای محاسبه‌ی مشتق این تابع از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم:

$$f'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{x([x]+[-x])}{x}=\lim_{x\to ۰}([x]+[-x])=-۱$$

بنابراین مشتق این تابع در $x=۰$ موجود و برابر -۱ است.

۶- گزینه‌ی ۲ ضابطه‌ی تابع را در سمت راست $x=۲$ و سمت چپ $x=-۲$ تعیین می‌کنیم و مشتق می‌گیریم:

$$x\to ۲^+ \Rightarrow -۳x\to -۶^- \Rightarrow [-۳x]=-۷ \Rightarrow f(x)=-۷(x^۲-۴) \Rightarrow f'(x)=-۱۴x \Rightarrow f'_+(۲)=-۲۸$$

$$x\to -۲^- \Rightarrow -۳x\to ۶^+ \Rightarrow [-۳x]=۶ \Rightarrow f(x)=۶(x^۲-۴) \Rightarrow f'(x)=۱۲x \Rightarrow f'_-(-۲)=-۲۴$$

بنابراین:

$$f'_-(-۲)-f'_+(۲)=-۲۴+۲۸=۴$$

۷- گزینه‌ی ۲ تعریف مشتق تابع f را در نقطه‌ی ۲ می‌نویسیم:

$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{\frac{(x^۲-۴)g(۳x-۲)}{g(۲x)}-۰}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x+۲)g(۳x-۲)}{g(۲x)} \xrightarrow{\text{پیوسته } g} f'(۲)=\frac{۴g(۴)}{g(۴)} \xrightarrow{g\neq ۰} f'(۲)=۴$$

۸- گزینه‌ی ۲ در بین توابع داده شده در گزینه‌ها، گزینه‌ی (۱) و گزینه‌ی (۴) در $x=0$ پیوسته نیستند، بنابراین مشتق‌پذیر نیستند:

گزینه‌ی (۱): $\lim\limits_{x\to 0} f^2(x)=4 \ , \ f^2(0)=1$ ، گزینه‌ی (۴): $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=2 \ , \ |f(0)|=1$

تابع گزینه‌ی (۳) پیوسته است ولی مشتق چپ و راست برابر نیستند:

گزینه‌ی (۳): $\lim\limits_{x\to 0} x\times f(x)=0 \ , \ 0\times f(0)=0$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{xf(x)-0}{x}=2 \quad , \quad f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{xf(x)-0}{x-0}=-2$$

تابع داده شده در گزینه‌ی (۲) پیوسته و مشتق‌پذیر است:

$\lim\limits_{x\to 0}|x|f(x)=0 \ , \ |0|\times f(0)=0$

$$\begin{cases} f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|f(x)-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{xf(x)}{x}=2 \\ f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|f(x)-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-xf(x)}{x}=2\end{cases}\Rightarrow f'(0)=2$$

۹- گزینه‌ی ۴ مشتق تابع $\dfrac{au+b}{cu+d}$ برابر $\dfrac{ad-bc}{(cu+d)^2}\times u'$ است، پس:

$$y=\frac{1\times 0-1\times 1}{\cos^2 2x}\times(-\sin 2x)\times 2\Rightarrow y'=\frac{2\sin 2x}{\cos^2 2x}\xrightarrow{x=\frac{\pi}{12}}y'=\frac{2\sin\frac{\pi}{6}}{\cos^2\frac{\pi}{6}}\Rightarrow y'=\frac{2\times\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}$$

سراسری خارج از کشور - ۸۹

۱۰- گزینه‌ی ۴ با توجه به اتحادهای مثلثاتی، تابع را ساده می‌کنیم:

$$y=\frac{\cos 2x}{\cos(x-\frac{\pi}{4})}\Rightarrow y=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin x\times\frac{\sqrt{2}}{2}}\Rightarrow y=\frac{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)}\Rightarrow y=\sqrt{2}(\cos x-\sin x)$$

حال، از تابع ساده شده مشتق می‌گیریم:

$$y'=\sqrt{2}(-\sin x-\cos x)=-\sqrt{2}(\sin x+\cos x)$$

۱۱- گزینه‌ی ۴ مقدار خواسته شده، همان مشتق تابع $(fg)(x)$ در نقطه‌ی $x=4$ است. بنابراین تابع $(fg)(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$(fg)(x)=\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)^3\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)^3=\left(x-(x-\sqrt{x})\right)^3=(\sqrt{x})^3=x^{\frac{3}{2}}\Rightarrow(fg)'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$$\xrightarrow{x=4}(fg)'(4)=\frac{3}{2}\times\sqrt{4}=3$$

۱۲- گزینه‌ی ۱ با استفاده از قوانین مشتق‌گیری از توابع مرکب، مشتق تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$y=\sqrt{1+\tan^2\frac{1}{x}}\Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{1+\tan^2\frac{1}{x}}}\times 2\tan\frac{1}{x}\times(1+\tan^2\frac{1}{x})\times\frac{-1}{x^2}\xrightarrow{x=\frac{3}{\pi}}$$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}}\times 2\sqrt{3}\times(1+(\sqrt{3})^2)\times\frac{-1}{(\frac{3}{\pi})^2}\Rightarrow y'=\frac{1}{2\times\sqrt{4}}\times 2\sqrt{3}\times 4\times\frac{-\pi^2}{9}\Rightarrow y'=\frac{-2\sqrt{3}\pi^2}{9}$$

سراسری خارج از کشور - ۹۱

۱۳- گزینه‌ی ۱ باتوجه به این‌که $\sin^2 t=(\sin t)^2$ از تابع مشتق می‌گیریم:

$$y=\left(\sin(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2})\right)^2\Rightarrow y'=2\sin(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2})\times\cos(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2})\times(-\frac{1}{2})\Rightarrow y'=\frac{-\sin 2(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2})}{2}\Rightarrow y'=\frac{-\sin(\frac{\pi}{3}-x)}{2}\xrightarrow{x=\frac{5\pi}{6}}$$

$$y'=\frac{-\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{6})}{2}\Rightarrow y'=\frac{-\sin(-\frac{\pi}{2})}{2}\Rightarrow y'=\frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{2}\Rightarrow y'=\frac{1}{2}$$

۱۴- گزینه‌ی ۴ از تابع مورد نظر مشتق می‌گیریم، سپس آن را ساده می‌کنیم:

$$y'=۴\sin^۳ x\cos x-۲\cos x\sin x\Rightarrow y'=۲\sin x\cos x(۲\sin^۲ x-۱)=\sin ۲x(-\cos ۲x)\Rightarrow y'=\frac{-۲\sin ۲x\cos ۲x}{۲}\Rightarrow y'=\frac{-\sin ۴x}{۲}$$

حال، با جایگذاری $x=\frac{\pi}{۲۴}$ در مشتق، داریم:

$$y'=\frac{-\sin(۴\times\frac{\pi}{۲۴})}{۲}\Rightarrow y'=\frac{-\sin\frac{\pi}{۶}}{۲}=\frac{-\frac{۱}{۲}}{۲}=-\frac{۱}{۴}$$

۱۵- گزینه‌ی ۱ ابتدا مشتق دو تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=۲\sin\pi x\cos\pi x\times\pi=\pi\sin ۲\pi x \quad , \quad g'(x)=\frac{۱}{۴}\times\frac{۵}{۲\sqrt{۵x-۹}}=\frac{۵}{۸\sqrt{۵x-۹}}$$

با توجه به فرمول مشتق تابع مرکب $\big(fog(x)\big)'=f'\big(g(x)\big)\times g'(x)$ در نقطه‌ی $x=۲$ داریم:

$$\begin{cases}(fog)'(۲)=f'\big(g(۲)\big)\times g'(۲)\\ g(۲)=\frac{۱}{۴}\sqrt{۱۰-۹}=\frac{۱}{۴}\end{cases}\Rightarrow(fog)'(۲)=f'(\frac{۱}{۴})\times g'(۲)$$

با جایگذاری اعداد ۲ و $\frac{۱}{۴}$ در مشتق‌های به دست آمده داریم:

$$\begin{cases}g'(۲)=\frac{۵}{۸\sqrt{۱۰-۹}}=\frac{۵}{۸}\\ f'(\frac{۱}{۴})=\pi\sin\frac{۲\pi}{۴}=\pi\end{cases}\Rightarrow(fog)'(۲)=f'(\frac{۱}{۴})\times g'(۲)=\frac{۵\pi}{۸}$$

۱۶- گزینه‌ی ۱ شیب خط مماس بر تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ی $x=۱$، برابر $f'(۱)$ است، بنابراین با توجه به خط مماس رسم شده در شکل:

$$f'(۱)=m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۰-۳}{۲-۰}=\frac{-۳}{۲}$$

حال برای یافتن شیب خط مماس بر تابع $y=f(\frac{۲}{x+۱})$، با استفاده از قانون مشتق تابع مرکب، از این تابع در $x=۱$ مشتق می‌گیریم:

$$y'=f'(\frac{۲}{x+۱})\times(\frac{۲}{x+۱})'\Rightarrow y'=f'(\frac{۲}{x+۱})\times\frac{-۲}{(x+۱)^۲}\xrightarrow{x=۱}y'=f'(\frac{۲}{۲})\times\frac{-۲}{۴}\Rightarrow y'=f'(۱)\times\frac{-۱}{۲}=\frac{-۳}{۲}\times\frac{-۱}{۲}=\frac{۳}{۴}$$

۱۷- گزینه‌ی ۴ تعریف مشتق تابع f در نقطه‌ی $x=۲$ برابر است با $f'(۲)=\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-۰}{x-۲}$، بنابراین:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)}{x^۲-۴}=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-۰}{(x-۲)}\times\lim_{x\to ۲}\frac{۱}{x+۲}=f'(۲)\times\frac{۱}{۴}$$

اکنون به محاسبه‌ی مشتق تابع در $x=۲$ می‌پردازیم:

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{۲x}}\cos\frac{\pi}{x}+\sqrt{۲x}\,(-\sin\frac{\pi}{x})(\frac{-\pi}{x^۲})\Rightarrow f'(۲)=\frac{۱}{۲\times\sqrt{۴}}\cos\frac{\pi}{۲}+\sqrt{۴}\times\sin\frac{\pi}{۲}\times\frac{\pi}{۴}\Rightarrow f'(۲)=\frac{\pi}{۲}$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)}{x^۲-۴}=\frac{۱}{۴}\times\frac{\pi}{۲}=\frac{\pi}{۸}$$

۱۸- گزینه‌ی ۴ ابتدا مشتق تابع $f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=۱-\frac{-۱}{۲\sqrt{۲-x}}=۱+\frac{۱}{۲\sqrt{۲-x}}$$

با استفاده از قانون مشتق تابع مرکب داریم:

$$y=۸\,fof(x)\Rightarrow y'=۸f'\big(f(x)\big)\times f'(x)\xrightarrow{x=۱}y'=۸f'\big(f(۱)\big)\times f'(۱)$$

با جایگذاری $f(۱)=۱-۱=۰$ و $f'(۱)=۱+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$ داریم:

$$\begin{cases}y'=۸f'(۰)\times\frac{۳}{۲}=۱۲f'(۰)\\ f'(۰)=۱+\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}=۱+\frac{\sqrt{۲}}{۴}=\frac{۴+\sqrt{۲}}{۴}\end{cases}\Rightarrow y'=۱۲+۳\sqrt{۲}$$

۱۹- گزینه‌ی ۱ از تابع مورد نظر مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=\frac{۴}{۳}\left(\frac{۱}{۲\sqrt{x+\sqrt{x+a}}}\right)\times\left(۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x+a}}\right)\xrightarrow{x=۰}f'(۰)=\frac{۴}{۳}\left(\frac{۱}{۲\sqrt{\sqrt{a}}}\right)\times\left(۱+\frac{۱}{۲\sqrt{a}}\right)\Rightarrow f'(۰)=\frac{۴}{۳}\left(\frac{۱}{۲\sqrt[۴]{a}}\right)\left(\frac{۲\sqrt{a}+۱}{۲\sqrt{a}}\right)=\frac{۲\sqrt{a}+۱}{۳\sqrt[۴]{a}\times\sqrt{a}}$$

با توجه به این‌که $f'(۰)=\sqrt[۴]{a}$ داریم:

$$\frac{۲\sqrt{a}+۱}{۳\sqrt[۴]{a}\sqrt{a}}=\sqrt[۴]{a}\Rightarrow ۲\sqrt{a}+۱=۳(\sqrt[۴]{a})^۲\sqrt{a}\Rightarrow ۲\sqrt{a}+۱=۳a\Rightarrow ۳a-۲\sqrt{a}-۱=۰\Rightarrow(۳\sqrt{a}+۱)(\sqrt{a}-۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{a}=\frac{-۱}{۳} & \text{غ‌ق‌ق}\\ \sqrt{a}=۱\end{cases}\Rightarrow a=۱$$

۲۰- گزینه‌ی ۳ دو تابع f و g را بدون قدرمطلق بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{۳} & x\geq ۰\\ x & x<۰\end{cases}\quad,\quad g(x)=\begin{cases}۳x & x\geq ۰\\ x & x<۰\end{cases}$$

برای یافتن تابع fog دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\text{حالت (۱)}: x\geq ۰\Rightarrow g(x)=۳x\xrightarrow{۳x\geq ۰}fog(x)=f(۳x)=\frac{۳x}{۳}=x$$

$$\text{حالت (۲)}: x<۰\Rightarrow g(x)=x\xrightarrow{x<۰}fog(x)=f(x)=x$$

بنابراین تابع $fog(x)$ در هر دو حالت برابر x است:

$$fog(x)=x\Rightarrow\big((fog)(x)\big)'=۱$$

پاسخ تشریحی آزمون ۵۲

۱- گزینه‌ی ۱ برای آن‌که تابع در $x=۲$ مشتق‌پذیرباشد، باید تابع در این نقطه پیوسته باشد:

$$\lim_{x\to ۲^+}f(x)=\lim_{x\to ۲^-}f(x)=f(۲)\Rightarrow ۲a+b=۸+۲b\Rightarrow ۲a=۸+b$$

با محاسبه‌ی تابع مشتق داریم:

$$f'(x)=\begin{cases}a & x>۲\\ ۳x^۲+b & x\leq ۲\end{cases}\Rightarrow f'_+(۲)=f'_-(۲)\Rightarrow a=۳\times ۲^۲+b\Rightarrow a=۱۲+b\Rightarrow ۲a=۲۴+۲b\xrightarrow{۲a=۸+b}۸+b=۲۴+۲b\Rightarrow b=-۱۶$$

۲- گزینه‌ی ۲ تابع مشتق را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=\begin{cases}۳x^۲+۱ & x>-۱\\ ۲x+۲ & x<-۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'_+(-۱)=۳(-۱)^۲+۱=۴\\ f'_-(-۱)=۲(-۱)+۲=۰\end{cases}\Rightarrow f'_+(-۱)-f'_-(-۱)=۴-۰=۴$$

۳- گزینه‌ی ۱ برای آن‌که تابع در $x=۰$ مشتق‌پذیر باشد، می‌بایست در $x=۰$ پیوسته باشد:

$$\lim_{x\to ۰^-}f(x)=\lim_{x\to ۰^+}f(x)=f(۰)\Rightarrow ۰+a\times ۰=۲\times ۰+b\Rightarrow b=۰$$

ضمناً باید مشتق چپ و راست در صفر برابر باشند:

$$f'(x)=\begin{cases}۱+a\cos x & x<۰\\ ۲ & x>۰\end{cases}\Rightarrow f'_+(۰)=f'_-(۰)\Rightarrow ۱+a\times ۱=۲\Rightarrow a=۱\xrightarrow{b=۰}a+b=۱$$

۴- گزینه‌ی ۴ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه‌ی (۱): تابع در $x=۲$، حد چپ برابر ۸ و حد راست برابر ۴ دارد، بنابراین تابع پیوسته نبوده و مشتق‌پذیر نیست.

گزینه‌ی (۲): تابع پیوسته است و داریم:

$$f'(x)=\begin{cases}۲x & x>۲\\ ۱ & x<۲\end{cases}\Rightarrow f'_+(۲)=۴\quad,\quad f'_-(۲)=۱$$

پس مشتق چپ و راست نابرابر است و مشتق نداریم.

گزینه‌ی (۳): تابع در $x=۲$، حد چپ برابر ۸ و حد راست برابر ۴ دارد، بنابراین تابع پیوسته نبوده و مشتق‌پذیر نیست.

گزینه‌ی (۴): تابع پیوسته است و داریم:

$$f'(x)=\begin{cases}۲x & x>۲\\ ۴ & x<۲\end{cases}\Rightarrow f'_+(۲)=f'_-(۲)=۴\Rightarrow f'(۲)=۴$$

۵- گزینه‌ی ۴ برای این‌که $f'(1)$ موجود باشد، می‌بایست تابع در $x=1$ پیوسته باشد:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1)\Rightarrow \sqrt[3]{(2\times 1+6)^2}=a\times 1+b\Rightarrow \sqrt[3]{8^2}=a+b\Rightarrow a+b=4$$

با محاسبه‌ی تابع مشتق داریم:

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}\times\frac{1}{\sqrt[3]{(2x+6)}}\times 2 & x>1\\ a & x<1\end{cases}\Rightarrow f'_+(1)=f'_-(1)\Rightarrow\frac{2}{3}\times\frac{1}{\sqrt[3]{8}}\times 2=a\Rightarrow a=\frac{2}{3}\xrightarrow{a+b=4} b=\frac{10}{3}$$

سراسری خارج از کشور – ۹۰

۶- گزینه‌ی ۳ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه‌ی (۱)، (۲) و (۴): $x=1$ ریشه‌ی ساده‌ی داخل قدرمطلق است و مشتق‌پذیر نیست.

گزینه‌ی (۳): تابع $y=|x^2+x|$ در ریشه‌های ساده‌ی داخل قدرمطلق یعنی $x=0$ و $x=-1$ مشتق‌ناپذیر است و در بقیه‌ی نقاط مشتق دارد.

۷- گزینه‌ی ۴ ضابطه‌ی تابع f را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x)=|x^2-2ax+a^2|=|(x-a)^2|=(x-a)^2$$

واضح است که تابع با ضابطه‌ی $(x-a)^2$ در همه‌ی نقاط مشتق‌پذیر است.

۸- گزینه‌ی ۳ برای آن‌که تابع همواره مشتق‌پذیر باشد، می‌بایست عبارت داخل قدرمطلق یا ریشه نداشته باشد یا دارای ریشه‌ی مضاعف باشد، یعنی:

$$\Delta\le 0\Rightarrow a^2-4\le 0\Rightarrow -2\le a\le 2$$

۹- گزینه‌ی ۳ برای آن‌که تابع همواره مشتق‌پذیر باشد، باید عبارت درون قدرمطلق دارای ریشه‌ی مضاعف یعنی دو ریشه‌ی برابر باشد:

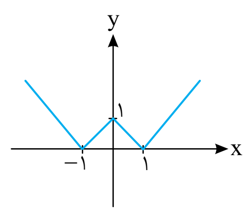
$$\begin{cases}2x-m=0\Rightarrow x=\frac{m}{2}\\ x+m-1=0\Rightarrow x=1-m\end{cases}\Rightarrow\frac{m}{2}=1-m\Rightarrow m=2-2m\Rightarrow 3m=2\Rightarrow m=\frac{2}{3}$$

۱۰- گزینه‌ی ۴ **راه‌حل اول:** تابع مورد نظر دارای دو قدرمطلق است، هر جا عبارت داخل این دو قدرمطلق صفر شود، تابع در آن نقاط مشتق‌ناپذیر است.

$$|x|-1=0\Rightarrow|x|=1\Rightarrow x=\pm 1$$
$$x=0$$

بنابراین تابع در نقاط $x=\pm 1$ و $x=0$ مشتق‌ناپذیر است.

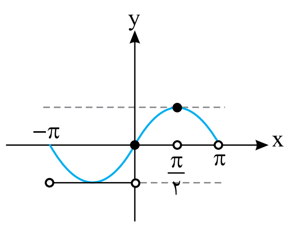
راه‌حل دوم: اگر نمودار تابع را رسم کنیم، شکل روبه‌رو به دست می‌آید. این شکل در ۳ نقطه دارای شکستگی است، بنابراین تابع در این ۳ نقطه مشتق‌ناپذیر است.



۱۱- گزینه‌ی ۴ تابع $f(x)$ در نقاطی که x یا $x+\frac{1}{3}$ عدد صحیح شوند، ناپیوسته و لذا مشتق‌ناپذیر است، این نقاط در بازه‌ی $(0,3)$ عبارتند از:

$$\frac{2}{3},1,\frac{5}{3},2,\frac{8}{3}$$

۱۲- گزینه‌ی ۲ تابع در $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=0$ ناپیوسته است و مشتق ندارد و در بقیه‌ی نقاط بازه‌ی $(-\pi,\pi)$ دارای مشتق صفر است.



۱۳- گزینه‌ی ۱ ضابطه‌ی تابع برابر $f(x)=x|x|$ یا $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\ge 0\\ -x^2 & x<0\end{cases}$ می‌باشد و داریم:

$$\lim_{x\to 0^+} x^2=\lim_{x\to 0^-}(-x^2)=f(0)=0$$

پس تابع در صفر پیوسته است. برای بررسی مشتق‌پذیری داریم:

$$f'(x)=\begin{cases}2x & x>0\\ -2x & x<0\end{cases}\Rightarrow f'_+(0)=2x\Big|_{x=0}=0\ ,\ f'_-(0)=-2x\Big|_{x=0}=0$$

مشتق چپ و راست برابر است، بنابراین تابع در صفر مشتق‌پذیر است.

۱۴- گزینه‌ی ۱ تابع $y=|x^۲-x|=|x(x-۱)|$ در صفر و یک مشتق ندارد (صفر و یک ریشه‌های ساده‌ی داخل قدر مطلق هستند) ولی ضرب شدن عامل صفرکننده‌ی x در قدرمطلق باعث مشتق‌پذیری تابع در صفر می‌شود و تابع فقط در $x=۱$ مشتق‌ناپذیر است.

۱۵- گزینه‌ی ۴ عبارت داخل قدر مطلق $\left(x^۲-۴=(x-۲)(x+۲)\right)$ دارای دو ریشه‌ی ساده‌ی ۲ و ۲- است، برای آن‌که تابع مورد نظر مشتق‌پذیر باشد، می‌بایست عامل صفرکننده به ازای ۲ و ۲-، در قدرمطلق ضرب شود، یعنی:

$$\begin{cases} x=۲\Rightarrow ۲^۲+a\times ۲+b=۰\Rightarrow ۲a+b=-۴ \\ x=-۲\Rightarrow (-۲)^۲+a(-۲)+b=۰\Rightarrow -۲a+b=-۴ \end{cases}\Rightarrow a=۰\ ,\ \ b=-۴\Rightarrow ۳a+b=-۴$$

۱۶- گزینه‌ی ۱ تابع $[x]$ در صفر ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است. برای این‌که این تابع در صفر مشتق داشته باشد، باید دو عامل $(x-۰)$ یعنی $x^۲$ در آن ضرب شود، پس باید $x^۲+۴ax$ همان $x^۲$ باشد، یعنی $a=۰$.

۱۷- گزینه‌ی ۱ تابع مشتق را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{۳x^۲+۱}{۳\sqrt[۳]{(x^۳+x)^۲}}=\frac{۳x^۲+۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲(x^۲+۱)^۲}}$$

$x=۰$ تنها ریشه‌ی مخرج است که در آن مشتق وجود ندارد و مماس بر تابع در این نقطه خطی عمودی است.

۱۸- گزینه‌ی ۳ با استفاده از قانون هوپیتال داریم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱+۳h)}{h}\xrightarrow{\text{Hop}}\lim_{h\to ۰}\frac{۱\times f'(۱+h)-۳f'(۱+۳h)}{۱}=f'(۱)-۳f'(۱)=-۲f'(۱)=-۲\times ۳=-۶$$

۱۹- گزینه‌ی ۱ با استفاده از قانون هوپیتال داریم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(-۱+h)-f(-۱-h)}{h^۲+۳h}\xrightarrow{\text{Hop}}\lim_{h\to ۰}\frac{f'(-۱+h)-f'(-۱-h)(-۱)}{۲h+۳}=\lim_{h\to ۰}\frac{f'(-۱+h)+f'(-۱-h)}{۲h+۳}=\frac{۲f'(-۱)}{۳}$$

با توجه به این‌که $f'(-۱)=\frac{-۱}{۱+۱}=\frac{-۱}{۲}$ حد مورد نظر برابر $\frac{۲(\frac{-۱}{۲})}{۳}=\frac{-۱}{۳}$ است.

۲۰- گزینه‌ی ۱ با استفاده از قانون هوپیتال داریم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h^۲)-f(۱-h^۲)}{h^۲}\xrightarrow{\text{Hop}}\lim_{h\to ۰}\frac{f'(۱+h^۲)\times ۲h-f'(۱-h^۲)(-۲h)}{۲h}=\lim_{h\to ۰}f'(۱+h^۲)+f'(۱-h^۲)=f'_+(۱)+f'_-(۱)$$

با توجه به این‌که $f'(x)=\begin{cases} ۳ & x>۱ \\ ۲x & x<۱ \end{cases}$، بنابراین $f'_+(۱)=۳$ و $f'_-(۱)=۲$، پس حاصل حد مورد نظر برابر است با $۳+۲=۵$.

پاسخ تشریحی آزمون ۵۳

۱- گزینه‌ی ۴ توابع داده شده در گزینه‌های ۱ و ۲ حدی نابرابر با مقدار تابع در نقطه‌ی $x=۰$ دارند. پس پیوسته نبوده و مشتق‌پذیر نیستند.

گزینه‌ی (۳): ضابطه‌ی تابع را بدون علامت قدرمطلق بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^۲}{x}=x & x>۰ \\ ۰ & x=۰ \\ \frac{x^۲}{-x}=-x & x<۰ \end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} ۱ & x>۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases}$$

مشتق چپ و راست در نقطه‌ی $x=۰$ نابرابر است، بنابراین در این نقطه مشتق نداریم.

گزینه‌ی (۴): ضابطه‌ی تابع f را بدون علامت قدرمطلق بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^۳}{x}=x^۲ & x>۰ \\ ۰ & x=۰ \\ \frac{x^۳}{-x}=-x^۲ & x<۰ \end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} ۲x & x>۰ \\ -۲x & x<۰ \end{cases}\Rightarrow f'_+(۰)=f'_-(۰)=۰\Rightarrow f'(۰)=۰$$

۲- گزینه‌ی ۱ تابع در دو نقطه‌ی $x=1$ و $x=-1$ تغییر ضابطه می‌دهد، در این دو نقطه پیوستگی و مشتق چپ و راست تابع را بررسی می‌کنیم.

$$f(x)=\begin{cases} -x-1 & x>1 \\ x^2+x & -1\le x\le 1 \\ -x-1 & x<-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} -x-1=-2 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2+x=2 \end{cases} \Rightarrow$$

تابع در $x=1$ حد ندارد و پیوسته نیست، پس مشتق‌ناپذیر است.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} x^2+x=1-1=0 \\ f(-1)=1-1=0 \\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} -x-1=1-1=0 \end{cases} \Rightarrow$$

تابع در $x=-1$ پیوسته است.

$$\begin{cases} f'_+(x)\Big|_{x=-1}=2x+1\Big|_{x=-1}=-2+1=-1 \\ f'_-(x)\Big|_{x=1}=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

مشتق چپ و راست در $x=-1$ برابر است.

بنابراین تابع فقط در نقطه‌ی $x=1$ مشتق‌ناپذیر است.

۳- گزینه‌ی ۱ ضابطه‌ی تابع مشتق را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+1 & x>a \\ a & x<a \end{cases}$$

$$f'_+(a)=3f'_-(a)\Rightarrow 2a+1=3a\Rightarrow a=1$$

توجه کنید به ازای هر مقدار a تابع f در $x=a$ پیوسته است، زیرا:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)=a^2+a$$

۴- گزینه‌ی ۴ تابع در همه‌ی نقاط به جز $x=1$ مشتق‌پذیر است، برای آن که در $x=1$ نیز تابع مشتق‌پذیر باشد، می‌بایست اولاً در این نقطه پیوسته باشد:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)\Rightarrow \frac{2}{1}=a+b=2$$

ثانیاً مشتق چپ و راست تابع در $x=1$ برابر باشند:

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{\frac{2}{2\sqrt{x}}\times x-1\times 2\sqrt{x}}{x^2} & x\ge 1 \\ 2ax+b & x<1 \end{cases}$$

$$f'_+(1)=f'_-(1)\Rightarrow \frac{2}{2}\times 1-1\times 2=2a\times 1+b\Rightarrow 2a+b=-1\xrightarrow{a+b=2} a=-3,\ b=5$$

۵- گزینه‌ی ۴ تابع در همه‌ی نقاط به جز $x=1$ مشتق‌پذیر است، برای آن‌که این تابع در $x=1$ مشتق‌پذیر باشد، می‌بایست در این نقطه پیوسته بوده و مشتق چپ و راست برابر داشته باشد.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 1+a\cos\pi x=1+a(-1)=1-a \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)=b(1)^2+1=b+1 \end{cases} \Rightarrow 1-a=b+1 \quad (1)$$

$$\begin{cases} f'_+(1)=-a\times\pi\sin\pi x\Big|_{x=1}=0 \\ f'_-(1)=1+2bx\Big|_{x=1}=2b+1 \end{cases} \Rightarrow 2b+1=0 \quad (2)$$

بنابراین از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$b=-\frac{1}{2}\ ,\ a=\frac{1}{2}$$

۶- گزینه‌ی ۳ پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع را در نقاط تغییر ضابطه‌ی آن بررسی می‌کنیم:

پیوسته	$\Rightarrow$	$\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=۱ \ , \ \lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=f(۰)=۱$	$x=۰$
مشتق‌ناپذیر	$\Rightarrow$	$f'_-(۰)=۰ \ , \ f'_+(۰)=۱$	
ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر	$\Rightarrow$	$\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=۲ \ , \ \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=f(۱)=۴$	$x=۱$
پیوسته	$\Rightarrow$	$\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=۶ \ , \ \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=f(۲)=۶$	$x=۲$
مشتق‌ناپذیر	$\Rightarrow$	$f'_-(۲)=۲ \ , \ f'_+(۲)=۲x\|_{x=۲}=۴$	

بنابراین تابع در نقطه‌ی $x=۱$ ناپیوسته است و در نقاط $x=۰$، $x=۱$ و $x=۲$ مشتق‌ناپذیر است.

۷- گزینه‌ی ۱ برای آن‌که تابع همواره مشتق‌پذیر باشد، می‌بایست عبارت داخل قدرمطلق یا ریشه نداشته باشد، یا دارای ریشه‌ی مضاعف باشد، یعنی:

$$\Delta \le ۰ \Rightarrow a^۲-۴(-a^۲)\le ۰ \Rightarrow ۵a^۲ \le ۰ \Rightarrow a^۲ \le ۰$$

می‌دانیم $a^۲$ همواره نامنفی است، پس تنها مقدار قابل قبول برای a صفر است.

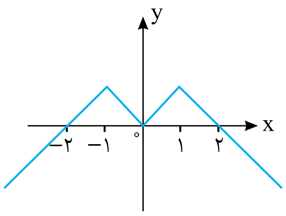
۸- گزینه‌ی ۳ ضابطه‌ی تابع مورد نظر برابر $y=f(f(x))=۱-|۱-|x||$ است.

راه‌حل اول: تابع دارای دو قدرمطلق است، هر جا عبارت داخل این دو قدرمطلق صفر شود، تابع در آن نقاط مشتق‌ناپذیر است.

$$x=۰ \ , \ ۱-|x|=۰ \Rightarrow |x|=۱ \Rightarrow x=\pm۱$$

بنابراین تابع در نقاط ±۱ , $x=۰$ مشتق‌ناپذیر است.

راه‌حل دوم: اگر نمودار تابع $y=۱-|۱-|x||$ را از روی نمودار $y=|x|$ رسم کنیم، نمودار روبه‌رو به دست می‌آید.
این نمودار در ۳ نقطه‌ی ±۱ , $x=۰$ شکستگی دارد و در این سه نقطه مشتق‌ناپذیر است.



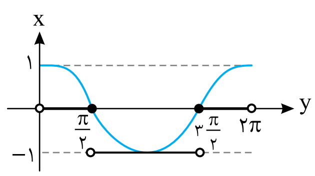
۹- گزینه‌ی ۱ گزینه‌ی یک صحیح است، زیرا در این بازه داریم:

$$x<-۱ \Rightarrow -۱<\frac{۱}{x}<۰ \Rightarrow [\frac{۱}{x}]=-۱ \Rightarrow f(x)=-۱$$

بنابراین در این بازه ثابت و پیوسته است و مشتق‌پذیر نیز می‌باشد. در گزینه‌ی (۲) نقاط $\frac{-۱}{۲}$ و $\frac{-۱}{۳}$ و ...، نقاط ناپیوستگی و مشتق‌ناپذیری هستند. در گزینه‌ی (۴) نقاط $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ و ...، نقاط ناپیوستگی و مشتق‌ناپذیری هستند. در گزینه‌ی (۳) نقطه‌ی $x=۱$ ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است.

$$f(۱)=[\frac{۱}{۱}]=۱ \ , \ \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=۰$$

۱۰- گزینه‌ی ۲ تابع $y=[\cos x]$ در نقاط $x=\frac{\pi}{۲}$ و $x=۳\frac{\pi}{۲}$ از بازه‌ی $(۰ , ۲\pi)$ پیوسته نیست و مشتق ندارد و در بقیه‌ی نقاط بازه‌ی $(۰ , ۲\pi)$ دارای مشتق صفر است.



۱۱- گزینه‌ی ۳ عبارت داخل قدرمطلق $(x^۲-۳x+۲=(x-۱)(x-۲))$ دارای دو ریشه‌ی ساده‌ی ۱ و ۲ می‌باشد، برای آن‌که تابع مورد نظر مشتق‌پذیر شود، باید عامل صفرکننده به‌ازای ۱ و ۲ در قدرمطلق ضرب شود، یعنی:

$$\begin{cases} x=۱ \Rightarrow ۱^۳-a\times۱+b=۰ \Rightarrow a-b=۱ \\ x=۲ \Rightarrow ۲^۳-a\times۲+b=۰ \Rightarrow ۲a-b=۸ \end{cases} \Rightarrow a=۷, b=۶$$

۱۲- گزینه‌ی ۴ نقاط ۲ و ۲- ریشه‌های ساده‌ی داخل قدرمطلق هستند، برای آن‌که یکی از آن‌ها مشتق‌پذیر شود باید عامل صفرکننده در قدرمطلق ضرب شود. یعنی باید عبارت ضرب شده در قدرمطلق به ازای ۲ یا ۲- صفر شود:

$$x=۲ \Rightarrow ۲\times۲+m=۰ \Rightarrow m=-۴$$
$$x=-۲ \Rightarrow ۲\times(-۲)+m=۰ \Rightarrow m=۴$$

بنابراین حاصل‌ضرب مقادیر m در هر حالت برابر $-۴\times۴=-۱۶$ است.

۱۳- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول**: تابع را در اطراف $x=۱$ به صورت دو ضابطه‌ای بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} ۰ & ۰\le x<۱ \\ x^۳+ax+b & ۱\le x<۲ \end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=۰ \quad , \quad \lim_{x\to ۱^+} f(x)=f(۱)=۱+a+b$$

برای آن‌که تابع پیوسته باشد، باید داشته باشیم: $۱+a+b=۰$.

$$f'_-(۱)=۰ \quad , \quad f'_+(۱)=۳x^۲+a\Big|_{x=۱}=۳+a$$

برای آن‌که تابع مشتق‌پذیر شود، باید داشته باشیم: $۳+a=۰$، پس:

$$a=-۳, b=۲\Rightarrow a-b=-۵$$

راه‌حل دوم: برای مشتق‌پذیری این تابع در $x=۱$ باید دو عامل $(x-۱)$ در $[x]$ ضرب شود، پس عبارت $x^۳+ax+b$ باید ریشه‌ی مضاعفی برابر یک داشته باشد، یعنی هم خود عبارت به ازای یک برابر صفر شود و هم مشتق آن:

$$\begin{cases} x^۳+ax+b\Big|_{x=۱}=۰\Rightarrow ۱+a+b=۰ \\ ۳x^۲+a\Big|_{x=۱}=۰\Rightarrow ۳+a=۰\Rightarrow a=-۳ \end{cases} \Rightarrow b=۲ \quad , \quad a=-b=-۳-۲=-۵$$

۱۴- گزینه‌ی ۲ تابع $[x]$ در $x=-۳$ ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است. برای این‌که تابع در $x=-۳$ مشتق داشته باشد، باید دو عامل $(x+۳)$ در $[x]$ ضرب شود، یعنی داریم:

$$(x+۳)^۲=(x^۲+۲ax+۹)\Rightarrow x^۲+۶x+۹=x^۲+۲ax+۹\Rightarrow a=۳$$

۱۵- گزینه‌ی ۴ محل تقاطع نمودار تابع با محور yها نقطه‌ای با طول صفر است. پس مشتق توابع داده شده را به کمک تعریف در $x=۰$ محاسبه می‌کنیم:

گزینه‌ی (۱): $f'(۰)=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{x\sqrt[۳]{x}-۰}{x-۰}=\lim\limits_{x\to ۰}\sqrt[۳]{x}=۰$

گزینه‌ی (۲): $f'(۰)=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{x\sqrt{x}-۰}{x-۰}=\lim\limits_{x\to ۰}\sqrt{x}=۰$

گزینه‌ی (۴): $f'(۰)=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sqrt[۳]{x^۲-x}-۰}{x-۰}=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sqrt[۳]{x-۱}}{\sqrt[۳]{x^۲}}=\infty$

بنابراین خط مماس در این نقطه عمودی است.

دامنه‌ی گزینه‌ی (۳): $D=(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)\cup\{۰\}$ می‌باشد و اطراف صفر در دامنه نیست، بنابراین نمی‌توان در مورد خط مماس بر تابع در اطراف $x=۰$ اظهارنظر کرد.

۱۶- گزینه‌ی ۱ مقدار مشتق تابع را در $x=-۱$ به کمک تعریف مشتق محاسبه می‌کنیم:

$$f'(-۱)=\lim_{x\to -۱}\frac{f(x)-f(-۱)}{x-(-۱)}=\lim_{x\to -۱}\frac{\sqrt[۳]{x^۳+۱}}{x+۱}=\lim_{x\to -۱}\frac{\sqrt[۳]{x^۲-x+۱}}{\sqrt[۳]{(x+۱)^۲}}=\infty$$

بنابراین خط مماس در این نقطه خطی عمودی است و گزینه‌های ۳ و ۴ نادرست هستند. همچنین تابع به ازای $x>-۱$، مثبت است، پس گزینه‌ی (۲) نیز نادرست است.

۱۷- گزینه‌ی ۴ مقدار حد را با استفاده از قانون هوپیتال پیدا می‌کنیم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲-۲h)-f(۲+h)}{h}\xrightarrow{HOP}\lim_{h\to ۰}\frac{-۲f'(۲-۲h)-f'(۲+h)\times ۱}{۱}=-۲f'(۲)-f'(۲)=-۳f'(۲)$$

با توجه به صورت سؤال حاصل این حد برابر ۳ است، بنابراین داریم:

$$f'(۲)=\frac{۳}{-۳}=-۱$$

۱۸- گزینه‌ی ۱ **راه‌حل اول**: با توجه به این‌که $f(۴)=۲\times ۵=۱۰$ حد مورد نظر، مبهم از نوع $\frac{۰}{۰}$ است. با استفاده از قانون هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to ۴}\frac{f^۲(x)-۱۰۰}{\sqrt{x}-۲}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۴}\frac{۲f(x)f'(x)}{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}=\lim_{x\to ۴}\frac{۴\sqrt{x}^۲(x+۱)\times(\frac{x+۱}{۲\sqrt{x}}+\sqrt{x}\times ۱)}{۱}=۴\times ۴\times ۵\times(\frac{۵}{۴}+۲)=۱۶۰+۱۰۰=۲۶۰$$

راه‌حل دوم: حد مورد نظر را به تعریف مشتق تبدیل می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۴}\frac{f^۲(x)-۱۰۰}{\sqrt{x}-۲}\times\frac{\sqrt{x}+۲}{\sqrt{x}+۲}=\lim_{x\to ۴}\frac{(f(x)-۱۰)}{x-۴}\times(f(x)+۱۰)(\sqrt{x}+۲)=f'(۴)\times ۲۰\times ۴=۸۰f'(۴)$$

با توجه به این‌که $f'(x)=\frac{(x+۱)}{۲\sqrt{x}}+\sqrt{x}$ داریم:

$$f'(۴)=\frac{۵}{۴}+۲=\frac{۱۳}{۴}\Rightarrow ۸۰f'(۴)=۸۰\times\frac{۱۳}{۴}=۲۶۰$$

راه‌حل سوم: با جایگذاری $f(x)$ داده شده در حد، داریم:

$$\lim_{x\to ۴}\frac{f^۲(x)-۱۰۰}{\sqrt{x}-۲}=\lim_{x\to ۴}\frac{x(x+۱)^۲-۱۰۰}{\sqrt{x}-۲}=\lim_{x\to ۴}\frac{x^۳+۲x^۲+x-۱۰۰}{\sqrt{x}-۲}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۴}\frac{۳x^۲+۴x+۱}{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}=\frac{۴۸+۱۶+۱}{\frac{۱}{۴}}=۴\times ۶۵=۲۶۰$$

۱۹- گزینه‌ی ۳ با استفاده از قانون هوپیتال داریم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f^۲(۱+h)-f^۲(۱-h)}{h}\xrightarrow{HOP}\lim_{h\to ۰}\frac{۲f(۱+h)f'(۱+h)-۲f(۱-h)f'(۱-h)(-۱)}{۱}=۴f(۱)f'(۱)=۴\times۴\times\frac{۴}{۲}=۳۲$$

۲۰- گزینه‌ی ۳ با استفاده از قانون هوپیتال داریم:

$$\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(۳-h)+f(۳+۲h)}{h}\xrightarrow{HOP}\lim_{h\to ۰^-}\frac{-f'(۳-h)+۲f'(۳+۲h)}{۱}=-f'_+(۳)+۲f'_-(۳)$$

با توجه به تعریف تابع $f(x)$ داریم:

$$f(x)=\begin{cases}x^۲-۳x & x>۳ \text{ یا } x<۰\\ -x^۲+۳x & ۰\le x\le ۳\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}۲x-۳ & x>۳ \text{ یا } x<۰\\ -۲x+۳ & ۰<x<۳\end{cases}\Rightarrow f'_+(۳)=۳,\ f'_-(۳)=-۳$$

$$\Rightarrow -f'_+(۳)+۲f'_-(۳)=-۳-۶=-۹$$

پاسخ تشریحی آزمون ۵۴

۱- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول**: با استفاده از روش سریع محاسبه‌ی مشتق تابع ضمنی داریم:

$$y'=\frac{-F'_x}{F'_y}=-\frac{۲x-۳y+۰}{۰-۳x+۲y+۰}=\frac{۳y-۲x}{-۳x+۲y}\xrightarrow{A(۲,۱)}y'=\frac{۳-۴}{-۶+۲}=\frac{-۱}{-۴}=\frac{۱}{۴}$$

راه‌حل دوم: از دو طرف تساوی داده شده نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$۲x-۳y-۳xy'+۲yy'+۰=۰\xrightarrow{A(۲,۱)}۴-۳-۶y'+۲y'=۰\Rightarrow y'=\frac{۱}{۴}$$

۲- گزینه‌ی ۴ با توجه به این‌که $F(x,y)=\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{y}-x-y=۰$، داریم:

$$y'=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}-۱}{\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{y^۲}}-۱}\xrightarrow{A(۱,۱)}y'=-\frac{\frac{۱}{۳}-۱}{\frac{۱}{۳}-۱}=-۱$$

۳- گزینه‌ی ۲ خط مماس بر منحنی، در نقطه‌ای افقی است، که مشتق در آن نقطه برابر صفر باشد:

$$y'=۰\Rightarrow -\frac{F'_x}{F'_y}=۰\Rightarrow -\frac{۲x+y}{۲y+x}=۰\Rightarrow y=-۲x$$

نقطه‌ی موردنظر در معادله‌ی منحنی صدق می‌کند، پس:

$$x^۲+(-۲x)^۲+x(-۲x)-۳=۰\Rightarrow ۵x^۲-۲x^۲=۳\Rightarrow x^۲=۱\Rightarrow x=\pm۱\Rightarrow y=\pm۲$$

بنابراین خط مماس در دو نقطه‌ی $A(۱,-۲)$ و $B(-۱,۲)$ افقی است.

۴- گزینه‌ی ۲ خط مماس بر یک منحنی در نقطه‌ای موازی محور عرض‌ها است که مشتق در آن نقطه تعریف نشده است و به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

$$y'=-\frac{۳x^۲+۲y}{۲y+۲x}\xrightarrow{y'\to\infty}۲y+۲x=۰\Rightarrow y=-x$$

از طرفی مختصات نقطه‌ی موردنظر (x,y) در معادله‌ی منحنی صدق می‌کند، پس:

$$x^۳+(-x)^۲+۲x(-x)=۴\Rightarrow x^۳+x^۲-۲x^۲=۴\Rightarrow x^۳-x^۲-۴=۰$$

از بین گزینه‌های داده شده تنها $x=۲$ در معادله‌ی $x^۳-x^۲-۴=۰$ صدق می‌کند.

۵- گزینه‌ی ۳ با ساده کردن عبارت داده شده به صورت $e^y+\ln x-\ln y-e=۰$، داریم:

$$y'=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{\frac{۱}{x}}{e^y-\frac{۱}{y}}\xrightarrow{A(۱,۱)}y'=-\frac{۱}{\frac{۱}{e-۱}}=\frac{-۱}{e-۱}=\frac{۱}{۱-e}$$

۶- گزینه‌ی ۳ ابتدا نقاط A و B را پیدا می‌کنیم:

$$A: y=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow A(1,0) \qquad B: x=0 \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1 \Rightarrow B(0,-1)$$

حال به محاسبه‌ی مشتق در دو نقطه‌ی A و B می‌پردازیم:

$$y'=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{2x-y}{2y-x} \Rightarrow \begin{cases} A: y'=-\frac{2}{-1}=2 \\ B: y'=-\frac{1}{-2}=\frac{1}{2} \end{cases}$$

بنابراین اختلاف مشتق در این دو نقطه برابر با $2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ است.

۷- گزینه‌ی ۴ تابع مشتق را محاسبه می‌کنیم:

$$y'=\frac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'}{\frac{x+1}{x-1}}=\frac{\frac{-1-1}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}}=\frac{-2}{(x-1)(x+1)}=\frac{-2}{x^2-1} \xrightarrow{x=-3} y'=\frac{-2}{9-1}=\frac{-1}{4}$$

۸- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول**: با توجه به این‌که $fof(x)=\ln(\ln x)$ داریم:

$$y'=(\ln(\ln x))'=\frac{(\ln x)'}{\ln x}=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}=\frac{1}{x\ln x} \xrightarrow{x=e} y'=\frac{1}{e\ln e}=\frac{1}{e}$$

راه‌حل دوم: با توجه به قاعده‌ی زنجیره‌ای در مشتق تابع مرکب می‌توان نوشت:

$$(fof)'(x)=f'(f(x))\times f'(x)=\frac{1}{\ln x}\times\frac{1}{x} \Rightarrow (fof)'(e)=\frac{1}{\ln e}\times\frac{1}{e}=\frac{1}{e}$$

۹- گزینه‌ی ۴ قبل از مشتق گرفتن ضابطه‌ی تابع را ساده می‌کنیم:

$$y=\ln(e^{\sqrt{\sin x}})=\sqrt{\sin}(\ln e)=\sqrt{\sin x} \Rightarrow y'=\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} \xrightarrow{x=\frac{\pi}{6}} y'=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\times\sqrt{\frac{1}{2}}} \Rightarrow y'=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{2}{\sqrt{2}}} \Rightarrow y'=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

سراسری خارج از کشور - ۹۲

۱۰- گزینه‌ی ۴ با مشتق‌گیری، عدد α را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{(\ln x)'x-x'\ln x}{x^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2} \xrightarrow{f'(\alpha)=0} 1-\ln\alpha=0 \Rightarrow \ln\alpha=1 \Rightarrow \alpha=e \Rightarrow f(\alpha)=\frac{\ln e}{e}=\frac{1}{e}$$

۱۱- گزینه‌ی ۴ مشتق تابع $y=\ln|u|$ برابر $y'=\frac{u'}{u}$ است، پس:

$$y'=\frac{\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}}{\sqrt[5]{x}} \Rightarrow y'=\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}\times\sqrt[5]{x}} \Rightarrow y'=\frac{1}{5x} \xrightarrow{x=-2} y'=\frac{-1}{10}$$

۱۲- گزینه‌ی ۲ برای آن‌که خط مماس در نقطه‌ای افقی باشد، می‌بایست مشتق برابر صفر باشد:

$$y'=1\times e^{-x^2}+x\times(-2x)e^{-x^2} \Rightarrow y'=e^{-x^2}(-2x^2+1)$$

با توجه به این که e به توان هیچ عددی برابر صفر نمی‌شود، پس:

$$y'=0 \Rightarrow -2x^2+1=0 \Rightarrow x^2=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

یعنی دو نقطه با مشتق صفر و مماس افقی وجود دارد.

۱۳- گزینه‌ی ۱ مشتق تابع را محاسبه و با استفاده از قوانین مثلثات، ساده می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{(\tan x)'}{\tan x}=\frac{\tan^2 x+1}{\tan x}=\frac{2}{\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}}=\frac{2}{\sin 2x} \Rightarrow f'(\frac{\pi}{8})=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

۱۴- گزینه‌ی ۳ مشتق اول و دوم تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=3ax^2+2bx \Rightarrow f''(x)=6ax+2b$$

با توجه به مقدارهای داده شده، a و b را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f'(1)=4 \Rightarrow 3a+2b=4 \\ f''(-1)=-5 \Rightarrow -6a+2b=-5 \end{cases} \Rightarrow 9a=9 \Rightarrow a=1 \Rightarrow b=\frac{1}{2} \Rightarrow ab=\frac{1}{2}$$

۱۵- گزینه‌ی ۲ حد داده شده، دقیقاً برابر تعریف مشتقِ تابع مشتق f یعنی مشتق دوم در نقطه‌ی $\frac{\pi}{۴}$ است، پس به محاسبه‌ی $f''(\frac{\pi}{۴})$ می‌پردازیم:

$$f(x)=\cos x\cos ۲x\Rightarrow f'(x)=-\sin x\cos ۲x-۲\sin ۲x\cos x$$
$$\Rightarrow f''(x)=-\cos x\cos ۲x+۲\sin ۲x\sin x-۴\cos ۲x\cos x+۲\sin ۲x\sin x$$
$$\Rightarrow f''(x)=-۵\cos ۲x\cos x+۴\sin ۲x\sin x\Rightarrow f''(\frac{\pi}{۴})=۰+۴\times ۱\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۲\sqrt{۲}$$

۱۶- گزینه‌ی ۲ مشتق اول و دوم تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$y'=۲\cos ۲x-۲\sin ۲x\Rightarrow y''=-۴\sin ۲x-۴\cos ۲x\Rightarrow y''^{۲}+۴y'^{۲}=(-۴(\sin ۲x+\cos ۲x))^{۲}+۴(۲(\cos ۲x-\sin ۲x))^{۲}$$
$$=۱۶(\sin ۲x+\cos ۲x)^{۲}+۱۶(\cos ۲x-\sin ۲x)^{۲}=۱۶(\sin^{۲} ۲x+\cos^{۲} ۲x+۲\sin ۲x\cos ۲x+\cos^{۲} ۲x+\sin^{۲} ۲x-۲\sin ۲x\cos ۲x)$$
$$=۱۶(۲(\sin^{۲} ۲x+\cos^{۲} ۲x))=۳۲$$

۱۷- گزینه‌ی ۳ مشتق دوم تابع f را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=۲x\ln x+x^{۲}\times\frac{۱}{x}\Rightarrow f'(x)=x(۲\ln x+۱)\Rightarrow f''(x)=۱\times(۲\ln x+۱)+x(\frac{۲}{x})\Rightarrow f''(x)=۲\ln x+۳\Rightarrow f''(e)=۲\ln e+۳=۵$$

۱۸- گزینه‌ی ۳ تابع $f(x)=x^{۲}[x]$ در $x=۰$ پیوسته است، بنابراین شرط صحبت کردن در مورد مشتق‌پذیری را داراست. با تعیین ضابطه‌ی آن تابع مشتق را در اطراف صفر محاسبه می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}x^{۲}\times ۰ & ۰\le x<۱\\ x^{۲}(-۱) & -۱\le x<۰\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}۰ & ۰\le x<۱\\ -x^{۲} & -۱\le x<۰\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}۰ & ۰<x<۱\\ -۲x & -۱\le x<۰\end{cases}$$

مشتق چپ و راست در $x=۰$ برابر صفر است، پس این تابع در صفر، مشتق اول دارد. با محاسبه‌ی مشتق دوم داریم:

$$f''(x)=\begin{cases}۰ & ۰<x<۱\\ -۲ & -۱<x<۰\end{cases}\Rightarrow \begin{matrix}f''_{+}(۰)=۰\\ f''_{-}(۰)=-۲\end{matrix}$$

بنابراین مشتق دوم در صفر وجود ندارد.

۱۹- گزینه‌ی ۱ مشتق دوم تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$y=x^{۲}+e^{ax}\Rightarrow y'=۲x+ae^{ax}\Rightarrow y''=۲+a^{۲}e^{ax}\xrightarrow{y''(۰)=۶}۲+a^{۲}e^{a\times ۰}=۶\Rightarrow a^{۲}=۴\Rightarrow a=\pm ۲$$

۲۰- گزینه‌ی ۲ از طرفین رابطه‌ی $g(x)=f(\frac{۱}{x})$ دوبار مشتق می‌گیریم:

$$g'(x)=\frac{-۱}{x^{۲}}f'(\frac{۱}{x})\Rightarrow g''(x)=(\frac{-۱}{x^{۲}})'f'(\frac{۱}{x})+(\frac{-۱}{x^{۲}})(f'(\frac{۱}{x}))'\Rightarrow g''(x)=\frac{۲}{x^{۳}}f'(\frac{۱}{x})+(\frac{-۱}{x^{۲}})f''(\frac{۱}{x})\times(\frac{-۱}{x^{۲}})$$
$$\Rightarrow g''(x)=\frac{۲}{x^{۳}}f'(\frac{۱}{x})+\frac{۱}{x^{۴}}f''(\frac{۱}{x})\xrightarrow{x=۲}g''(۲)=\frac{۲}{۸}f'(\frac{۱}{۲})+\frac{۱}{۱۶}f''(\frac{۱}{۲})=\frac{۲}{۸}\times ۱۶+\frac{۱}{۱۶}\times ۱۶=۵$$

پاسخ تشریحی آزمون ۵۵

۱- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول:** با استفاده از روش سریع محاسبه‌ی مشتق ضمنی، داریم:

$$y^{۲}+x^{۲}+\sin x-y=۰\Rightarrow y'=\frac{-F'_x}{F'_y}=-\frac{۲x+\cos x}{۲y-۱}\xrightarrow{A(۰,۱)}y'=-\frac{۰+۱}{۲-۱}=-۱$$

راه‌حل دوم: از طرفین تساوی داده شده، نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$y'=۲yy'+۲x+\cos x\xrightarrow{A(۰,۱)}y'=۲y'+۰+۱\Rightarrow y'=-۱$$

۲- گزینه‌ی ۲ با استفاده از فرمول محاسبه‌ی مشتق تابع ضمنی، داریم:

$$y'=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{\frac{۱}{y}\times\frac{۱}{۲\sqrt{x}}+\sqrt{y}}{\frac{-\sqrt{x}}{y^{۲}}+\frac{x}{۲\sqrt{y}}}\xrightarrow{A(۴,۱)}y'=-\frac{\frac{۱}{۱}\times\frac{۱}{۲\times ۲}+۱}{\frac{-۲}{۱}+\frac{۴}{۲\times ۱}}=-\frac{\frac{۹}{۴}}{۰}$$

بنابراین مشتق تابع در این نقطه تعریف نشده است و به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، پس خط مماس در این نقطه قائم و موازی محور عرض‌ها است.

۳- گزینه‌ی ۲ با استفاده از فرمول محاسبه‌ی سریع مشتق ضمنی داریم:

$$y'=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{۲x+y}{x+۲y}\xrightarrow{y'=۲}-\frac{۲x+y}{x+۲y}=۲\Rightarrow -۲x-y=۲x+۴y\Rightarrow ۴x=-۵y\Rightarrow y=\frac{-۴}{۵}x$$

با قرار دادن مختصات به دست آمده برای نقطه‌ی موردنظر در معادله‌ی منحنی، داریم:

$$x^۲-\frac{۴}{۵}x\times x+\frac{۱۶}{۲۵}x^۲=۱\Rightarrow x^۲(\frac{۲۵-۲۰+۱۶}{۲۵})=۱\Rightarrow x^۲=\frac{۲۵}{۲۱}\Rightarrow x=\pm\frac{۵}{\sqrt{۲۱}}\Rightarrow y=\pm\frac{۴}{\sqrt{۲۱}}$$

بنابراین دو نقطه‌ی موردنظر، نقاط $A(\frac{۵}{\sqrt{۲۱}},\frac{-۴}{\sqrt{۲۱}})$ و $B(\frac{-۵}{\sqrt{۲۱}},\frac{۴}{\sqrt{۲۱}})$ می‌باشند و برای محاسبه‌ی شیب AB داریم:

$$m_{AB}=\frac{\frac{۴}{\sqrt{۲۱}}+\frac{۴}{\sqrt{۲۱}}}{\frac{-۵}{\sqrt{۲۱}}-\frac{۵}{\sqrt{۲۱}}}=-\frac{۸}{۱۰}=-\frac{۴}{۵}$$

سراسری خارج از کشور - ۹۰

۴- گزینه‌ی ۳ مشتق ضمنی عبارت $۲e^{xy}-e^x-e^y=۰$ برابر است با:

$$y'=-\frac{۲ye^{xy}-e^x}{۲xe^{xy}-e^y}\xrightarrow{(۱,۱)}y'=-\frac{۲e-e}{۲e-e}=-\frac{e}{e}=-۱$$

۵- گزینه‌ی ۱ در نقطه‌ای که خط مماس بر منحنی موازی محور عرض‌ها است، مشتق به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

$$y'=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{۲x-۲y-۲}{-۲x+۲y}\xrightarrow{y'\to\infty}-۲x+۲y=۰\Rightarrow x=y$$

$$(x,y)\in F\Rightarrow x^۲-۲x^۲+x^۲-۲x=۴\Rightarrow x=-۲\Rightarrow y=-۲$$

۶- گزینه‌ی ۱ اگر خط مماس بر منحنی افقی باشد، آن‌گاه $y'=۰$، پس:

$$y'=-\frac{y(\sqrt{x}+\frac{x}{۲\sqrt{x}})-۶}{\frac{۱}{۲\sqrt{y}}+x\sqrt{x}}=۰\Rightarrow y\times\frac{۳}{۲}\sqrt{x}=۶\Rightarrow\sqrt{x}=\frac{۴}{y}$$

مختصات نقطه‌ی موردنظر در معادله‌ی منحنی صدق می‌کند، پس:

$$\sqrt{y}+y\times\frac{۱۶}{y^۲}\times\frac{۴}{y}=۶\times\frac{۱۶}{y^۲}\Rightarrow\sqrt{y}=\frac{۳۲}{y^۲}\Rightarrow\sqrt{y}y^۲=۳۲\Rightarrow\sqrt{y^۵}=۲^۵\Rightarrow y=۴\Rightarrow x=۱$$

۷- گزینه‌ی ۲ با توجه به این که می‌دانیم $(\ln u)'=\frac{u'}{u}$ داریم:

$$f'(x)=\frac{(e^x+e^{-x})'}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\Rightarrow f'(۰)=\frac{۱-۱}{۱+۱}=۰$$

۸- گزینه‌ی ۲ ابتدا تابع را در اطراف صفر به صورت دو ضابطه‌ای بازنویسی می‌کنیم، سپس مشتق چپ و راست را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}\ln(۱+kx) & x\geq ۰\\ \ln(۱-kx) & x<۰\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\frac{k}{۱+kx} & x>۰\\ \frac{-k}{۱-kx} & x<۰\end{cases}\Rightarrow f'_-(۰)-f'_+(۰)=-۴\Rightarrow -k-k=-۴\Rightarrow k=۲$$

۹- گزینه‌ی ۴ با توجه به این‌که $۴^{\cos x}=e^{\ln ۴^{\cos x}}$ داریم:

$$f(x)=e^{\cos x\times\ln۴}\Rightarrow f'(x)=e^{\cos x\times\ln۴}\times\ln۴\times(-\sin x)\Rightarrow f'(\frac{\pi}{۲})=e^{\circ}\times\ln۴\times(-۱)=-\ln۴=-\ln۲^۲=-۲\ln۲$$

۱۰- گزینه‌ی ۴ با توجه به این‌که $(fog(x))'=f'(g(x))g'(x)$، داریم:

$$fog(x)=f(e^{۲x})=\frac{\ln e^{۲x}+۲}{\ln e^{۲x}-۳}=\frac{۲x+۲}{۲x-۳}$$

$$y'=(fog(x))'=\frac{۲(-۳)-۲\times۲}{(۲x-۳)^۲}=\frac{-۱۰}{(۲x-۳)^۲}\xrightarrow{x=۱}y'=\frac{-۱۰}{(-۱)^۲}=-۱۰$$

سراسری خارج از کشور - ۹۰

۱۱- گزینه‌ی ۴ شیب خط مماس برابر مشتق تابع در نقطه‌ی موردنظر است، بنابرین از تابع موردنظر مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=\log_x ۲=\frac{\ln ۲}{\ln x}\Rightarrow f'(x)=\frac{(\ln ۲)'\ln x-(\ln x)'\ln ۲}{(\ln x)^۲}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{۰-\frac{۱}{x}\ln ۲}{(\ln x)^۲}\Rightarrow f'(۲)=\frac{\frac{-۱}{۲}\ln ۲}{(\ln ۲)^۲}\Rightarrow f'(۲)=\frac{\frac{-۱}{۲}}{\ln ۲}=\frac{-۱}{۲\ln ۲}=\frac{-۱}{\ln ۴}$$

سراسری خارج از کشور - ۸۹

۱۲- گزینه‌ی ۳ مشتق تابع داده شده را محاسبه می‌کنیم:

$$y=e^{e^x}\Rightarrow y'=e^{e^x}\times e^x\Rightarrow \ln\frac{y'}{y}=\ln\frac{e^{e^x}\times e^x}{e^{e^x}}=\ln e^x=x$$

سراسری - ۸۹

۱۳- گزینه‌ی ۲ با استفاده از قوانین لگاریتم تابع را ساده می‌کنیم، سپس از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=\ln\sqrt{۲x+۱}-\ln(x^۲+۱)=\frac{۱}{۲}\ln(۲x+۱)-\ln(x^۲+۱)$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۲x+۱}-\frac{۲x}{x^۲+۱}\Rightarrow f'(۱)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۳}-\frac{۲}{۲}\Rightarrow f'(۱)=\frac{-۲}{۳}$$

۱۴- گزینه‌ی ۴ ابتدا با توجه به عرض داده شده، طول نقطه‌ی موردنظر را پیدا می‌کنیم:

$$۳e=۳e^{\sqrt[۳]{\ln x}}\Rightarrow\sqrt[۳]{\ln x}=۱\Rightarrow \ln x=۱\Rightarrow x=e$$

حال، به محاسبه‌ی مشتق تابع موردنظر در $x=e$ می‌پردازیم:

$$y'=۳e^{\sqrt[۳]{\ln x}}\times\frac{۱}{۳(\sqrt[۳]{\ln x})^۲}\times\frac{۱}{x}\xrightarrow{x=e}y'=۳e^{\sqrt[۳]{\ln e}}\times\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{\ln e}^{۲}}\times\frac{۱}{e}=۳e^۱\times\frac{۱}{۳\times۱}\times\frac{۱}{e}=۱$$

۱۵- گزینه‌ی ۴ با استفاده از قاعده‌ی مشتق زنجیره‌ای داریم:

$$y'=(۱+\tan^۲(\frac{\pi e^{\cos ۲x}}{۴}))\times\frac{\pi}{۴}e^{\cos ۲x}\times(-۲\sin ۲x)\xrightarrow{x=\frac{\pi}{۴}}y'=(۱+\tan^۲(\frac{\pi e^۰}{۴}))\times\frac{\pi}{۴}e^۰\times(-۲\sin\frac{\pi}{۲})=۲\times\frac{\pi}{۴}\times-۲=-\pi$$

۱۶- گزینه‌ی ۴ با استفاده از اتحادهای مثلثاتی، تابع را ساده می‌کنیم، سپس دوبار مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=\frac{\tan\frac{\pi}{۴}-\tan x}{۱+\tan x\tan\frac{\pi}{۴}}\Rightarrow f(x)=\tan(\frac{\pi}{۴}-x)\Rightarrow f'(x)=-(۱+\tan^۲(\frac{\pi}{۴}-x))\Rightarrow$$

$$f''(x)=-۲\tan(\frac{\pi}{۴}-x)(۱+\tan^۲(\frac{\pi}{۴}-x))(-۱)\Rightarrow f''(۰)=۲\tan\frac{\pi}{۴}(۱+\tan^۲\frac{\pi}{۴})=۲\times۱\times(۱+۱)=۴$$

۱۷- گزینه‌ی ۲ مشتق اول و دوم تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$y=e^{kx}\Rightarrow y'=ke^{kx}\Rightarrow y''=k^۲e^{kx}$$

$$y''+۵y'+۶y=۰\Rightarrow k^۲e^{kx}+۵ke^{kx}+۶e^{kx}=۰\Rightarrow e^{kx}(k^۲+۵k+۶)=۰\xrightarrow{e^{kx}\neq۰}k^۲+۵k+۶=۰\Rightarrow k=-۲ \text{ یا } k=-۳$$

۱۸- گزینه‌ی ۱ عبارت $y^{(۳)}$ به معنای مشتق سوم تابع y است، یعنی:

$$y=\cos^۲\pi x\Rightarrow y'=۲\cos\pi x\times(-\sin\pi x)\times\pi=-\pi\sin ۲\pi x\Rightarrow y''=-\pi\cos ۲\pi x\times ۲\pi=-۲\pi^۲\cos ۲\pi x$$

$$y^{(۳)}=-۲\pi^۲(-\sin ۲\pi x)\times ۲\pi=۴\pi^۳\sin ۲\pi x$$

با توجه به معادله‌ی $y^{(۳)}+ky'=۰$ داریم:

$$y^{(۳)}=-ky'\Rightarrow ۴\pi^۳\sin ۲\pi x=-k(-\pi\sin ۲\pi x)\Rightarrow ۴\pi^۳=k\pi\Rightarrow k=۴\pi^۲$$

۱۹- گزینه‌ی ۱ ابتدا با استفاده از قوانین لگاریتم تابع را ساده می‌کنیم:

$$y=\ln x^۲+\ln\sqrt{x}=۲\ln x+\frac{۱}{۲}\ln x=\frac{۵}{۲}\ln x$$

حال با محاسبه‌ی مشتق دوم تابع داریم:

$$y'=\frac{۵}{۲}\times\frac{۱}{x}\Rightarrow y''=\frac{۵}{۲}\times(\frac{-۱}{x^۲})\xrightarrow{y''(\alpha)=-۱۰}\frac{۵}{۲}\times\frac{-۱}{\alpha^۲}=-۱۰\Rightarrow\alpha^۲=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\alpha=\pm\frac{۱}{۲}$$

با توجه به دامنه‌ی تابع $(D=\mathbb{R}^{۴})$، فقط مقدار مثبت قابل قبول است.

۲۰- گزینه‌ی ۴ از تابع موردنظر دو بار مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=1\times e^{-x}+xe^{-x}(-1)=e^{-x}(1-x)\Rightarrow f''(x)=-1\times e^{-x}+(1-x)e^{-x}(-1)=e^{-x}(x-2)$$

حال با توجه به این‌که $f''(\alpha)=0$، داریم:

$$e^{-\alpha}(\alpha-2)=0\xrightarrow{e^{-\alpha}\neq 0}\alpha=2\Rightarrow f'(\alpha)=f'(2)=e^{-2}(-1)=\frac{-1}{e^2}$$

پاسخ تشریحی آزمون ۵۶

۱- گزینه‌ی ۲ آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازه‌ی $[1,a]$ برابر است با:

$$\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=\frac{a+\frac{4}{a}-(1+\frac{4}{1})}{a-1}=\frac{\frac{a^2+4-5a}{a}}{a-1}=\frac{(a-1)(a-4)}{a(a-1)}=\frac{a-4}{a}$$

از آن‌جا که آهنگ متوسط تغییر برابر -1 است، داریم:

$$\frac{a-4}{a}=-1\Rightarrow a-4=-a\Rightarrow 2a=4\Rightarrow a=2$$

۲- گزینه‌ی ۱ مقدار دو آهنگ را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع در بازه‌ی } [2,3]=\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=\frac{\frac{36}{9}-\frac{36}{4}}{1}=4-9=-5$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تابع در } \sqrt[3]{12}=f'(x)=\frac{-36\times 2}{x^3}\Rightarrow f'(\sqrt[3]{12})=\frac{-72}{12}=-6$$

تفاضل دو مقدار به دست آمده برابر است با:

$$-5-(-6)=1$$

سراسری - ۹۰

۳- گزینه‌ی ۳ ابتدا آهنگ متوسط را به دست می‌آوریم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر در بازه‌ی } [2,5]=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{\frac{5}{4}-\frac{2}{1}}{3}=\frac{-1}{4}$$

آهنگ لحظه‌ای در $x=\alpha$ همان مشتق تابع در نقطه‌ی α است، پس:

$$f'(\alpha)=\frac{-1}{(\alpha-1)^2}\xrightarrow{f'(\alpha)=\frac{-1}{4}}\frac{-1}{(\alpha-1)^2}=\frac{-1}{4}\Rightarrow(\alpha-1)^2=4\Rightarrow\alpha-1=\pm 2\Rightarrow\alpha=3 \text{ یا } \alpha=-1$$

سراسری خارج از کشور - ۹۰

۴- گزینه‌ی ۳ آهنگ متوسط تغییر تابع در بازه‌ی $[1,a]$ برابر است با:

$$\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=\frac{\frac{a^2+a}{a}-\frac{1+a}{1}}{a-1}=\frac{a+1-(1+a)}{a-1}=0$$

حال باید دید، آهنگ لحظه‌ای تغییر، یعنی مشتق تابع در کدام نقطه برابر صفر است:

$$f'(x)=\frac{2x\times x-1\times(x^2+a)}{x^2}=\frac{x^2-a}{x^2}\xrightarrow{f'=0}\frac{x^2-a}{x^2}=0\Rightarrow x^2=a^2\Rightarrow x=\pm\sqrt{a}$$

۵- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول:** ابتدا تابع محیط برحسب مساحت را می‌نویسیم:

$$\begin{cases}S=\pi r^2\Rightarrow r=\sqrt{\frac{S}{\pi}}\\ P=2\pi r\end{cases}\Rightarrow P=2\pi\times\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\pi}}\Rightarrow P=2\sqrt{\pi}\sqrt{S}$$

حال مشتق P نسبت به S را محاسبه می‌کنیم:

$$P'=\frac{2\sqrt{\pi}}{2\sqrt{S}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{S}}$$

هنگامی‌که شعاع دایره برابر $\frac{2}{\pi}$ است، مساحت آن برابر $S=\pi(\frac{2}{\pi})^2=\frac{4}{\pi}$ است، بنابراین:

$$P'=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{4}{\pi}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\frac{2}{\sqrt{\pi}}}=\frac{\pi}{2}$$

راه‌حل دوم: به جای محاسبه‌ی تابع محیط برحسب مساحت، می‌توان مشتق دو تابع محیط و مساحت نسبت به شعاع را بر هم تقسیم کرد.

$$\frac{dP}{dS}=\frac{\frac{dP}{dr}}{\frac{dS}{dr}}=\frac{۲\pi}{۲\pi r}=\frac{۱}{r}\xrightarrow{r=\frac{۲}{\pi}}\frac{dP}{dS}=\frac{\pi}{۲}$$

۶- گزینه‌ی ۲ آهنگ تغییر (لحظه‌ای) تابع، همان مشتق تابع است و داریم:

$$f'(x)=-۳x^۲+۱۲x+۱$$

می‌دانیم بیش‌ترین مقدار آهنگ تغییر تابع درجه دوم در $x=\frac{-b}{۲a}$ (طول رأس سهمی) اتفاق می‌افتد، یعنی $\frac{-b}{۲a}=\frac{-۱۲}{-۶}=۲$.

۷- گزینه‌ی ۱ آهنگ تغییر y نسبت به x، برابر تقسیم آهنگ تغییر y نسبت t بر آهنگ تغییر x نسبت به t می‌باشد.

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{۲t+\frac{۴}{۲\sqrt{t}}}{۱+\frac{۱۶}{t^۲}}\xrightarrow{t=۴}y'_x=\frac{۸+\frac{۴}{۴}}{۱+\frac{۱۶}{۱۶}}=\frac{۹}{۲}$$

۸- گزینه‌ی ۱ معادله‌ی خط مماس در نقطه‌ی $(۰,۱)$ مورد سؤال قرار گرفته است. برای یافتن شیب این خط داریم:

$$f'(x)=۲-\sin x\Rightarrow f'(۰)=۲$$

بنابراین معادله‌ی خط مماس به شکل روبه‌رو است:

$$y-۱=۲(x-۰)\Rightarrow y=۲x+۱$$

۹- گزینه‌ی ۴ معادله‌ی خط قائم در نقطه‌ی $(۲,۴)$ مدنظر است. ابتدا مشتق تابع در این نقطه را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=۱\times e^{۲-x}+(x+۲)e^{۲-x}(-۱)\Rightarrow f'(۲)=۱-۴=-۳$$

بنابراین شیب خط قائم برابر است با:

$$\frac{-۱}{f'(۲)}=\frac{۱}{۳}$$

معادله‌ی خط قائم به صورت روبه‌رو است:

$$y-۴=\frac{۱}{۳}(x-۲)\Rightarrow y=\frac{۱}{۳}x+۴-\frac{۲}{۳}\Rightarrow y=\frac{۱}{۳}x+\frac{۱۰}{۳}$$

محل تلاقی این خط با محور x ها با قرار دادن صفر به جای y به دست می‌آید:

$$۰=\frac{۱}{۳}x+\frac{۱۰}{۳}\Rightarrow x=-۱۰$$

۱۰- گزینه‌ی ۱ با استفاده از قاعده‌ی مشتق ضمنی، y' را در نقطه‌ی $(۲,-۲)$ محاسبه می‌کنیم:

$$y\ln(x^۲-۳)+۲x-y^۲=۰\Rightarrow y'=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{y\times\frac{۲x}{x^۲-۳}+۲}{\ln(x^۲-۳)-۲y}\xrightarrow{(۲,-۲)}y'=-\frac{-۲\times\frac{۴}{۴-۳}+۲}{\ln(۴-۳)-۲(-۲)}=-\frac{-۸+۲}{۰+۴}=\frac{۳}{۲}$$

معادله‌ی خط قائم به صورت روبه‌رو است:

$$y-(-۲)=\frac{-۱}{\frac{۳}{۲}}(x-۲)\Rightarrow y=\frac{-۲}{۳}x+\frac{۴}{۳}-۲\Rightarrow y=\frac{-۲}{۳}x-\frac{۲}{۳}$$

بنابراین عرض از مبدأ این خط برابر $\frac{-۲}{۳}$ است.

سراسری خارج از کشور - ۹۰

۱۱- گزینه‌ی ۱ مشتق تابع برابر شیب خط مماس است و داریم:

$$y=(۴x)^{\frac{-۱}{۳}}\Rightarrow y'=\frac{-۱}{۳}(۴x)^{\frac{-۴}{۳}}\times۴\Rightarrow y'=\frac{-۴}{۳\sqrt[۳]{(۴x)^۴}}\xrightarrow{x=۲}y'=\frac{-۴}{۳\sqrt[۳]{۸^۴}}=\frac{-۴}{۳\times۲^۴}=\frac{-۱}{۱۲}$$

بنابراین معادله‌ی خط مماس برابر است با:

$$y-\frac{۱}{۲}=\frac{-۱}{۱۲}(x-۲)\Rightarrow y=\frac{-۱}{۱۲}x+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۲}\Rightarrow y=\frac{-۱}{۱۲}x+\frac{۲}{۳}$$

محل تلاقی این خط با محور عرض‌ها همان عرض از مبدأ خط $(\frac{۲}{۳})$ است.

سراسری خارج از کشور - ۸۹

۱۲- گزینه‌ی ۳ شیب خط $x-۳y=۲$، برابر $\frac{۱}{۳}$ است، زیرا $y=\frac{۱}{۳}x-\frac{۲}{۳}$. بنابراین شیب خط مماس مورد نظر برابر $\frac{-۱}{\frac{۱}{۳}}$ یا -۳ می‌باشد:

$$y'=۳x^۲+۶x\xrightarrow{y'=-۳}۳x^۲+۶x=-۳\Rightarrow x^۲+۲x+۱=۰\Rightarrow x=-۱$$

بنابراین خط مماس بر تابع در نقطه‌ی $(-۱,۳)$ با شیب -۳ مدنظر است.

$$y-۳=-۳(x+۱)\Rightarrow y=-۳x$$

از بین نقاط داده شده در گزینه‌ها، تنها نقطه‌ی $(۲,-۶)$ روی این خط است.

سراسری - ۸۹

۱۳- گزینه‌ی ۳ با قرار دادن $x=y$ در معادله‌ی تابع خط را با تابع قطع می‌دهیم:

$$a(x+1)(x+4)=x \Rightarrow ax^2+5ax+4a=x \Rightarrow ax^2+(5a-1)x+4a=0$$

برای آن‌که خط بر تابع مماس باشد، باید معادله‌ی به دست آمده دارای ریشه‌ی مضاعف باشد، یعنی: $\Delta=0$

$$(5a-1)^2-4\times 4a\times a=0 \Rightarrow (5a-1)^2-16a^2=0 \Rightarrow (5a-1-4a)(5a-1+4a)=0 \Rightarrow (a-1)(9a-1)=0 \Rightarrow a=1 \text{ یا } a=\frac{1}{9}$$

۱۴- گزینه‌ی ۳ نقطـه ی $(\alpha,\frac{\alpha+1}{\alpha-3})$ را روی تابـع در نظـر می‌گیریم، معادله‌ی خط مماس به صورت $y-\frac{\alpha+1}{\alpha-3}=m(x-\alpha)$ می‌باشـد، که در آن $m=f'(\alpha)=\frac{-3-1}{(\alpha-3)^2}$، با توجه به این‌که نقطه‌ی $A(-1,4)$ روی این خط است، می‌توان نوشت:

$$4-\frac{\alpha+1}{\alpha-3}=\frac{-4}{(\alpha-3)^2}(-1-\alpha) \Rightarrow \frac{4\alpha-12-\alpha-1}{\alpha-3}=\frac{4+4\alpha}{(\alpha-3)^2} \Rightarrow (3\alpha-13)(\alpha-3)=4+4\alpha \Rightarrow 3\alpha^2-22\alpha+39=4+4\alpha \Rightarrow 3\alpha^2-26\alpha+35=0$$

بنابراین، مجموع طول‌های نقاط مماس برابر $\frac{-b}{a}$ یعنی $\frac{26}{3}$ می‌باشد.

۱۵- گزینه‌ی ۲ نقطه‌ی (a,a^2-2a) روی تابع قرار دارد، معادله‌ی خط مماس گذرنده از این نقطه برابر است با:

$$y-(a^2-2a)=(2a-2)(x-a)$$

نقطه‌ی $(-2,-1)$ روی این خط است، پس:

$$-1-a^2+2a=(2a-2)(-2-a) \Rightarrow -1-a^2+2a=-4a-2a^2+4+2a \Rightarrow a^2+4a-5=0 \Rightarrow a=1 \text{ یا } a=-5$$

بنابراین نقاط $B(1,-1)$ و $C(-5,35)$ نقاط مماس هستند. با توجه به عرض نقطه‌های B و A آن‌ها روی یک خط افقی هستند و معادله‌ی خط AC برابر است با:

$$y+1=-12(x+2) \Rightarrow y=-12x-25$$

عرض از مبدأ این خط برابر -25 است.

۱۶- گزینه‌ی ۲ مختصات نقطه‌ی M برابر $(a,\frac{1}{\sqrt{a}})$ می‌باشـد، خط مماس گذرنده از M از معادله‌ی $y-\frac{1}{\sqrt{a}}=f'(a)(x-a)$ به دسـت می‌آید که در آن $f'(a)=\frac{-1}{2\sqrt{a^3}}$:

$$y-\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{-1}{2a\sqrt{a}}(x-a)$$

طول پاره‌خط OA برابر عرض از مبدأ خط مماس است:

$$x=0 \Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{2a\sqrt{a}}(-a)=\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{2\sqrt{a}}=\frac{3}{2\sqrt{a}}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{OA}{MH}=\frac{\frac{3}{2\sqrt{a}}}{\frac{1}{\sqrt{a}}}=\frac{3}{2}$$

۱۷- گزینه‌ی ۲ نقطه‌ی موردنظر $(0,1)$ است، مشتق در این نقطه برابر است با:

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}e^{-x}+\sqrt{x+1}(-e^{-x}) \xrightarrow{x=0} y'=\frac{1}{2}-1=\frac{-1}{2}$$

بنابراین شیب خط قائم برابر $\frac{-1}{\frac{-1}{2}}=2$ است.

معادله‌ی این خط برابر است با:

$$y-1=2(x-0) \Rightarrow y=2x+1$$

برای یافتن محل تقاطع این خط با نیمساز ربع اول و سوم $(y=x)$ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} y=x \\ y=2x+1 \end{cases} \Rightarrow 2x+1=x \Rightarrow x=-1$$

۱۸- گزینه‌ی ۱ معادله‌ی خط گذرنده از نقاط A و B برابر است با:

$$y-1=\frac{3-1}{1-2}(x-2) \Rightarrow y=-2x+5$$

برای این‌که این خط بر تابع داده شده مماس باشد، می‌بایست معادله‌ی حاصل از تقاطع خط و سهمی ریشه‌ی مضاعف داشته باشد:

$$-x^2-ax+1=-2x+5 \Rightarrow x^2+(a-2)x+4=0 \xrightarrow{\Delta=0} (a-2)^2-16=0 \Rightarrow a-2=\pm 4 \Rightarrow a=6\,,-2$$

۱۹- گزینه‌ی ۴ خط $y=2x$ و تابع داده شده در نقطه‌ی $x=1$ دارای عرض برابر هستند، پس:

$$2\times 1=1+a-b+3\Rightarrow a-b=-2$$

ضمناً شیب خط مماس برابر مشتق تابع در نقطه‌ی $x=1$ است، یعنی $y'=2$

$$y'=3x^2+2ax-b\xrightarrow{x=1}3+2a-b=2\Rightarrow 2a-b=-1$$

با توجه به دو معادله‌ی به دست آمده داریم:

$$\begin{cases}a-b=-2\\2a-b=-1\end{cases}\Rightarrow a=1\ ,\ b=3\Rightarrow a+b=4$$

۲۰- گزینه‌ی ۱ ضابطه‌ی تابع در اطراف نقطه‌ی $(1,1)$ برابر $y=x^2$ است، معادله‌ی خط مماس در این نقطه برابر است با:

$$y-1=2\times 1(x-1)\Rightarrow y=2x-1$$

خط $y=2x-1$ قسمت منفی تابع $f(x)$ یعنی $y^2=-x^2$ را در نقطه‌ی B قطع می‌کند که مختصات آن را به دست می‌آوریم:

$$2x-1=-x^2\Rightarrow x^2+2x-1=0\Rightarrow\begin{cases}x=-1+\sqrt{2}\ \text{غ ق ق}\\x=-1-\sqrt{2}\end{cases}$$

پاسخ تشریحی آزمون ۵۷

۱- گزینه‌ی ۲ آهنگ متوسط تغییر تابع در بازه‌ی $[a^2,4]$ برابر است با:

$$\frac{f(4)-f(a^2)}{4-a^2}=\frac{4-2-a^2+\sqrt{a^2}}{4-a^2}=\frac{2-a^2+|a|}{4-a^2}$$

با توجه به گزینه‌ها، a عددی مثبت است، بنابراین آهنگ متوسط تغییر برابر است با:

$$\frac{2-a^2+a}{4-a^2}=\frac{(2-a)(1+a)}{(2-a)(2+a)}=\frac{1+a}{2+a}$$

چون این مقدار برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است، داریم:

$$\frac{1+a}{2+a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow 2+2a=2\sqrt{2}+\sqrt{2}\,a\Rightarrow a=\frac{2\sqrt{2}-2}{2-\sqrt{2}}\Rightarrow a=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{2-\sqrt{2}}\times\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\Rightarrow a=\frac{2(2\sqrt{2}-2+2-\sqrt{2})}{2}\Rightarrow a=\sqrt{2}$$

۲- گزینه‌ی ۲ آهنگ متوسط تغییر تابع f با نموِ ۰/۵ در نقطه‌ای با طول ۰/۵ برابر است با:

$$\frac{f(0/5+0/5)-f(0/5)}{0/5}=\frac{\log_{0/5}1-\log_{0/5}0/5}{0/5}=\frac{0-1}{\frac{1}{2}}=-2$$

۳- گزینه‌ی ۲ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع (S) برحسب ضلع آن (a) برابر است با:

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

آهنگ متوسط تغییر این مساحت در بازه‌ی $[2,4]$ برابر است با:

$$\frac{S(4)-S(2)}{4-2}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}\times 16-\frac{\sqrt{3}}{4}\times 4}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

۴- گزینه‌ی ۲ آهنگ تغییر تابع f برابر مشتق آن است:

$$f(x)=x-\sin x\Rightarrow f'(x)=1-\cos x$$

برای پیدا کردن حدود تغییرات $f'(x)$ به این‌گونه عمل می‌کنیم:

$$-1\le\cos x\le 1\Rightarrow -1\le-\cos x\le 1\Rightarrow 0\le 1-\cos x\le 2\Rightarrow 0\le f'(x)\le 2\Rightarrow\max\left(f'(x)\right)=2$$

۵- گزینه‌ی ۱ دو آهنگ تغییر را جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر در بازه‌ی }[-4,0]=\frac{f(0)-f(-4)}{0-(-4)}=\frac{\sqrt{9}-\sqrt{25}}{4}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}=-0/5$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر در }x=-4=f'(-4)=\frac{2(-4)}{2\sqrt{(-4)^2+9}}=\frac{-8}{2\times 5}=-0/8$$

اختلاف این دو مقدار برابر $-0/5-(-0/8)=0/3$ می‌باشد.

۶- گزینه‌ی ۳ ابتدا نقاط با طول یک روی منحنی را پیدا می‌کنیم:

$$x^2+y^2-xy=1 \xrightarrow{x=1} 1+y^2-y=1 \Rightarrow y(y-1)=0 \Rightarrow y=0 \text{ یا } y=1$$

بنابراین دو نقطه‌ی $(1,0)$ و $(1,1)$ با طول یک روی منحنی هستند، با استفاده از مشتق ضمنی، آهنگ تغییر y نسبت به x را در این دو نقطه پیدا می‌کنیم:

$$y'=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{2x-y}{2y-x}\begin{cases}\xrightarrow{(1,0)} y'=-\frac{2}{-1}=2\\ \xrightarrow{(1,1)} y'=-\frac{2-1}{2-1}=-1\end{cases}$$

۷- گزینه‌ی ۴ از رابطه‌ی $x^2+y^2-2x+4y=0$ نسبت به t مشتق می‌گیریم. توجه کنید که x و y هر دو تابعی از t هستند و مشتق آن‌ها برابر $\frac{dx}{dt}$ و $\frac{dy}{dt}$ است.

$$x^2+y^2-2x+4y=0 \Rightarrow 2x\times\frac{dx}{dt}+2y\times\frac{dy}{dt}-2\frac{dx}{dt}+4\frac{dy}{dt}=0 \xrightarrow[\frac{dx}{dt}=0/2]{(3,-3)} 2\times3\times0/2+2\times(-3)\frac{dy}{dt}-2\times0/2+4\frac{dy}{dt}=0$$

$$\Rightarrow 1/2-0/4=6\frac{dy}{dt}-4\frac{dy}{dt}\Rightarrow\frac{2dy}{dt}=0/8\Rightarrow\frac{dy}{dt}=0/4$$

۸- گزینه‌ی ۲ اگر خط مماس بر منحنی موازی محور عرض‌ها باشد، مشتق در آن نقطه بی‌نهایت است.

$$f'(x)=1-\frac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}\xrightarrow{f'(x)\to\infty}3\sqrt[3]{\sin^2 x}=0\Rightarrow\sin x=0\Rightarrow x=k\pi$$

از بین گزینه‌های داده شده فقط در $x=\pi$ خط مماس عمودی است.

۹- گزینه‌ی ۱ شیب خط مماس در این نقطه برابر مشتق در $x=2$ است.

$$f'(x)=\frac{25(x^2+1)-2x\times25x}{(x^2+1)^2}=\frac{-25x^2+25}{(x^2+1)^2}\Rightarrow f'(2)=\frac{-25\times4+25}{(4+1)^2}=\frac{-75}{25}=-3$$

نقطه‌ای به طول ۲ روی تابع برابر $(2,\frac{25\times2}{4+1})=(2,10)$ است و معادله‌ی خط مماس در این نقطه برابر است با: $y-10=-3(x-2)\Rightarrow y=-3x+16$

۱۰- گزینه‌ی ۲ اگر خط مماس موازی محور طول‌ها باشد، مشتق برابر صفر و اگر خط مماس موازی محور عرض‌ها باشد مشتق، بی‌نهایت است. بنابراین تابع در ریشه‌های صورت و مخرج تابع مشتق، مماسی موازی یکی از محورها دارد.

$$y'=\frac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}}\Rightarrow\begin{cases}4-2x=0\Rightarrow x=2\\x(4-x)=0\Rightarrow x=0,4\end{cases}$$

هر ۳ نقطه در دامنه هستند، پس ۳ نقطه با شرایط خواسته شده وجود دارد.

۱۱- گزینه‌ی ۱ نقطه‌ای به طول یک روی این تابع، عرضی برابر $m(1-2)^2+1=m+1$ دارد. شیب خط مماس در این نقطه برابر $f'(1)$ است:

$$y'=m\times2\times(x^2-2)\times2x \xrightarrow{x=1} y'=2m(1-2)\times2=-4m$$

بنابراین معادله‌ی خط مماس در نقطه‌ی $(1,m+1)$ برابر است با: $y-(m+1)=-4m(x-1)$

نقطه‌ی $(0,0)$ روی این خط است، پس: $-(m+1)=-4m(-1)\Rightarrow -m-1=4m\Rightarrow 5m=-1\Rightarrow m=\frac{-1}{5}$

۱۲- گزینه‌ی ۲ برای یافتن شیب خط مماس، مشتق تابع را در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{2}$ محاسبه می‌کنیم، برای این کار ابتدا تابع را با استفاده از قوانین لگاریتم بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=\ln\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^{\frac12}=\frac12\left(\ln\sin x-\ln(1+\cos x)\right)\Rightarrow f'(x)=\frac12\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{-\sin x}{1+\cos x}\right)\xrightarrow{x=\frac{\pi}{2}}f'(\frac{\pi}{2})=\frac12(0-\frac{-1}{1})\Rightarrow f'(\frac{\pi}{2})=\frac12$$

عرض نقطه‌ای با طول $\frac{\pi}{2}$ روی تابع برابر است با: $f(\frac{\pi}{2})=\ln\sqrt{\frac{1}{1+0}}=\ln 1=0$

خط مماس بر تابع در نقطه‌ی $(\frac{\pi}{2},0)$ برابر است با: $y-0=\frac12(x-\frac{\pi}{2})\Rightarrow y=\frac12 x-\frac{\pi}{4}$

۱۳- گزینه‌ی ۴ با استفاده از قاعده‌ی مشتق ضمنی شیب خط مماس در نقطه‌ی $(۲,۳)$ را پیدا می‌کنیم:

$$\ln(x^۲-y)-\sqrt{y+۱}+x=۰\Rightarrow y'=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{\frac{۲x}{x^۲-y}+۱}{\frac{-۱}{x^۲-y}-\frac{۱}{۲\sqrt{y+۱}}}\xrightarrow{(۲,۳)}y'=-\frac{\frac{۴}{۴-۳}+۱}{\frac{-۱}{۴-۳}-\frac{۱}{۲\sqrt{۴}}}=-\frac{۴+۱}{-۱-\frac{۱}{۴}}=-\frac{۵}{\frac{-۵}{۴}}=۴$$

معادله‌ی خط مماس برابر است با: $y-۳=۴(x-۲)\Rightarrow y=۴x-۵$

محل تلاقی خط $y=۴x-۵$ و خط $y=x$ از حل معادله‌ی زیر به دست می‌آید: $x=۴x-۵\Rightarrow ۳x=۵\Rightarrow x=\frac{۵}{۳}$

سراسری - ۹۰

۱۴- گزینه‌ی ۱ اگر خطی بر یک منحنی مماس باشد، معادله‌ی حاصل از تقاطع خط و منحنی ریشه‌ی مضاعف دارد:

$$\begin{cases}y=x^۲+a\\y=۲x\end{cases}\Rightarrow x^۲+a=۲x\Rightarrow x^۲-۲x+a=۰\xrightarrow{\Delta=۰}۴-۴a=۰\Rightarrow a=۱$$

دقت کنید که به دلیل تقارن نمودارهای دو سهمی، اگر خط $y=۲x$ بر یکی از آن‌ها مماس باشد بر دیگری نیز مماس خواهد بود.

۱۵- گزینه‌ی ۳ سهمی بر نیمساز ناحیه‌ی سوم یعنی خط $y=x$ مماس است، پس معادله‌ی حاصل از مساوی قرار دادن این دو، ریشه‌ی مضاعف دارد.

$$۲x^۲+(۲m+۱)x+۲m+۶=x\Rightarrow ۲x^۲+۲mx+۲m+۶=۰\Rightarrow \underbrace{x^۲+mx+(m+۳)=۰}_{(I)}\xrightarrow{\Delta=۰}m^۲-۴(m+۳)=۰\Rightarrow m^۲-۴m-۱۲=۰$$

$$\Rightarrow m=۶\ ,\ m=-۲$$

با جایگذاری m در معادله‌ی (I) داریم:

$m=-۲\Rightarrow x^۲-۲x+۱=۰\Rightarrow(x-۱)^۲=۰\Rightarrow x=۱$ غ‌ق‌ق

$m=۶\Rightarrow x^۲+۶x+۹=۰\Rightarrow(x+۳)^۲=۰\Rightarrow x=-۳$

توجه کنید که به ازای $m=-۲$ خط در ناحیه‌ی اول بر نمودار تابع مماس می‌شود.

۱۶- گزینه‌ی ۱ $x=۱$ ریشـه‌ی مخرج حد اسـت، پس برای این‌که حد $\lim\limits_{x\to۱}\frac{f(x+۱)}{x^۲-۱}$ موجود باشـد باید $\lim\limits_{x\to۱}f(x+۱)=۰$ باشد. با توجه به این که تابع $f(x)$ مشـتق‌پذیر و طبیعتاً پیوسـته اسـت، بنابراین حد تابع با مقدار تابع در هر نقطه برابر اسـت و $f(۲)=\lim\limits_{x\to۱}f(x+۱)=۰$، بنابراین می‌توان برای محاسبه‌ی حد مورد نظر از قاعده‌ی هوپیتال استفاده کرد.

$$\lim_{x\to۱}\frac{f(x+۱)}{x^۲-۱}\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to۱}\frac{f'(x+۱)}{۲x}=\frac{f'(۲)}{۲}$$

طبق فرض مسأله این حد برابر ۲ است، پس $f'(۲)=۴$.

از طرفی شیب خط مماس بر نمودار $y=x\,f(x)$ در $x=۲$ برابر مشتق y در این نقطه است.

$$y'=۱\times f(x)+x\times f'(x)\xrightarrow{x=۲}y'=f(۲)+۲\times f'(۲)=۰+۲\times۴=۸$$

بنابراین شیب خط قائم برابر $\frac{-۱}{۸}$ است.

۱۷- گزینه‌ی ۳ نقطه‌ی $(a,\frac{۱}{a})$ را نقطه‌ی تماس خط مماس با منحنی در نظر می‌گیریم. شیب خط مماس در این نقطه برابر مشتق تابع یعنی $\frac{-۱}{a^۲}$ است.

معادله‌ی خط مماس برابر است با: $y-\frac{۱}{a}=\frac{-۱}{a^۲}(x-a)$

نقطه‌ی $(۰,۳)$ روی این خط است، پس: $۳-\frac{۱}{a}=\frac{-۱}{a^۲}(۰-a)\Rightarrow ۳-\frac{۱}{a}=\frac{۱}{a}\Rightarrow\frac{۲}{a}=۳\Rightarrow a=\frac{۲}{۳}$

بنابراین نقطه‌ی مورد نظر $(\frac{۲}{۳},\frac{۳}{۲})$ می‌باشد.

۱۸- گزینه‌ی ۲ معادله‌ی خطوط گذرنده از مبدأ مختصات به صورت $y=mx$ می‌باشد. محل تلاقی این خطوط با سهمی از معادله‌ی $mx=x^۲-۲x+a$ به دست می‌آید. برای این‌که خط و سهمی بر هم مماس باشند، باید این معادله ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.

$$mx=x^۲-۲x+a\Rightarrow x^۲-(m+۲)x+a=۰\xrightarrow{\Delta=۰}(m+۲)^۲-۴a=۰\Rightarrow m^۲+۴m+(۴-۴a)=۰$$

دو مماس بر هم عمود هستند، پس ضرب آن‌ها برابر (-۱) است. ضرب ریشه‌ها در معادله‌ی درجه دوم برابر $P=\frac{c}{a}$ است، پس:

$$P=\frac{۴-۴a}{۱}\xrightarrow{P=-۱}۴-۴a=-۱\Rightarrow۴a=۵\Rightarrow a=\frac{۵}{۴}$$

۱۹- گزینه‌ی ۳ خط و منحنی بر هم مماس هستند، پس معادله‌ی حاصل از مساوی قرار دادن آن دو، ریشه‌ی مضاعف دارد:

$$۳-x=\frac{k}{x}\Rightarrow ۳x-x^۲=k\Rightarrow x^۲-۳x+k=۰\xrightarrow{\Delta=۰}۹-۴k=۰\Rightarrow k=\frac{۹}{۴}$$

با قرار دادن مقدار k ، طول محل تماس یعنی a را پیدا می‌کنیم.

$$x^۲-۳x+\frac{۹}{۴}=۰\Rightarrow(x-\frac{۳}{۲})^۲=۰\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}\Rightarrow a=\frac{۳}{۲}$$

پس داریم:

$$ka=\frac{۹}{۴}\times\frac{۳}{۲}=\frac{۲۷}{۸}$$

۲۰- گزینه‌ی ۲ شیب خط مماس بر $f(x)=\sqrt{۲}\sin x$ در $x=\frac{\pi}{۴}$ برابر است با:

$$f'(x)=\sqrt{۲}\cos x\Rightarrow f'(\frac{\pi}{۴})=\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۱$$

نمودار تابع f از نقطه‌ی $(\frac{\pi}{۴},۱)$ می‌گذرد. نمودار تابع g نیز از همین نقطه می‌گذرد. مشتق تابع g در نقطه‌ی $\frac{\pi}{۴}$ برابر است با:

$$g'(x)=-\sqrt{۲}\sin x\Rightarrow g'(\frac{\pi}{۴})=-\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=-۱$$

ضرب مشتق f و g در نقطه‌ی $\frac{\pi}{۴}$ برابر -۱ است. یعنی خطوط مماس بر این دو تابع در نقطه‌ی $\frac{\pi}{۴}$ بر هم عمود هستند.

پاسخ تشریحی ۵۸

۱- گزینه‌ی ۴ با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال حد مورد نظر را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}^-}\frac{۳۶f(x)}{\pi-۶x}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}^-}\frac{۳۶f'(x)}{-۶}=f'_-(\frac{\pi}{۶})\times(-۶)$$

ضابطه‌ی تابع در سمت چپ $\frac{\pi}{۶}$ به صورت $f(x)=-x(۲\sin x-۱)$ است، پس:

$$f'(x)=-(۲\sin x-۱)-x\times ۲\cos x\Rightarrow f'_-(\frac{\pi}{۶})=(-\frac{\pi}{۶})\times ۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow(-۶)f'_-(\frac{\pi}{۶})=\sqrt{۳}\pi$$

۲- گزینه‌ی ۲ ابتدا تابع f را ساده می‌کنیم، سپس مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=\frac{\tan x+۱}{\sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴})}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}+۱}{\sqrt{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin x+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos x)}=\frac{\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}}{\sin x+\cos x}=\frac{۱}{\cos x}\Rightarrow f'(x)=\frac{\sin x}{\cos^۲ x}\Rightarrow f'(\frac{\pi}{۶})=\frac{\frac{۱}{۲}}{(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۴}}=\frac{۲}{۳}$$

۳- گزینه‌ی ۳ از تابع کسری f مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=\frac{(۴-\frac{۱}{۲\sqrt{x}})(\sqrt{x}+۲)-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۴x-\sqrt{x})}{(\sqrt{x}+۲)^۲}\Rightarrow f'(۴)=\frac{(۴-\frac{۱}{۴})(۲+۲)-\frac{۱}{۴}(۱۶-۲)}{(۲+۲)^۲}=\frac{۱۵-\frac{۷}{۲}}{۱۶}=\frac{۲۳}{۳۲}$$

۴- گزینه‌ی ۲ می‌دانیم $(fg)'=f'g+g'f$، پس ابتدا تابع $(fg)(x)$ را محاسبه کرده، سپس از آن مشتق می‌گیریم:

$$(fg)(x)=f(x)g(x)=\frac{۱-\cos x}{۱+\sin x}\times\frac{۱+\cos x}{۱-\sin x}=\frac{۱-\cos^۲ x}{۱-\sin^۲ x}=\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}=\tan^۲ x\Rightarrow(fg)'(x)=۲\tan x(۱+\tan^۲ x)$$

$$\Rightarrow(fg)'(\frac{\pi}{۴})=۲\times۱\times(۱+۱)=۴$$

۵- گزینه‌ی ۲ مشتق تابع $f(x)=\frac{e^{-x}(x+۱)}{e^x(۲x+۱)}$ را با استفاده از تعریف مشتق، محاسبه می‌کنیم:

$$f'(-۱)=\lim_{x\to-۱}\frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱}=\lim_{x\to-۱}\frac{\frac{e^{-x}(x+۱)}{e^x(۲x+۱)}-۰}{x+۱}=\lim_{x\to-۱}\frac{e^{-x}}{e^x(۲x+۱)}=-e^۲$$

۶- گزینه‌ی ۳ می‌دانیم $(\ln u)'=\frac{u'}{u}$، پس مشتق تابع f برابر است با:

$$f'(x)=\frac{e^x-\sin x}{e^x+\cos x}\Rightarrow f'(۰)=\frac{e^۰-۰}{e^۰+۱}=\frac{۱}{۲}$$

۷- گزینه‌ی ۴ وقتی $x=۱$، آن‌گاه $u=۲\cos\frac{\pi}{۳}=۱$، حال با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای به محاسبه‌ی $\frac{dy}{dx}$ می‌پردازیم:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=(۱-۸(-\frac{۱}{۲})\times\frac{۱}{\sqrt{u^۳}})(-\frac{۲\pi}{۳}\sin(\frac{\pi x}{۳}))\xrightarrow{x=۱}\frac{dy}{dx}=(۱+۴\times\frac{۱}{۱})(\frac{-۲\pi}{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\frac{-۵\pi\sqrt{۳}}{۳}$$

۸- گزینه‌ی ۳ باتوجه به مقادیر $g'(\frac{۱}{۲})=۳$ و $g(\frac{۱}{۲})=\frac{۳}{۲}$ و با مشتق‌گیری از f داریم:

$$f(x)=x^۲g(\frac{۱}{x})\Rightarrow f'(x)=۲xg(\frac{۱}{x})+x^۲(\frac{-۱}{x^۲})g'(\frac{۱}{x})\Rightarrow f'(۲)=۴g(\frac{۱}{۲})-g'(\frac{۱}{۲})\Rightarrow f'(۲)=۴\times\frac{۳}{۲}-۳=۳$$

۹- گزینه‌ی ۲ در محدوده‌ی سمت چپ $x=۱$ می‌دانیم:

$$x<۱\Rightarrow -x>-۱\Rightarrow[-x]=[-۱^+]=-۱$$

پس ضابطه‌ی تابع به صورت $f(x)=۲(x^۲+x)$ است و داریم: $f'(x)=۴x+۲\Rightarrow f'_-(۱)=۴+۲=۶$

۱۰- گزینه‌ی ۳ تابع $f(x)$ را به صورت دو ضابطه‌ای در اطراف نقطه‌ی $x=۲$ می‌نویسیم و سپس مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=\begin{cases}x^۲+x(x^۲-۲x) & x\geq ۲\\ x^۲+x(۲x-x^۲) & x<۲\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}x^۳-x^۲ & x\geq ۲\\ -x^۳+۳x^۲ & x<۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}۳x^۲-۲x & x>۲\\ -۳x^۲+۶x & x<۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'_+(۲)=۱۲-۴=۸\\ f'_-(۲)=-۱۲+۱۲=۰\end{cases}$$

بنابراین مقدار خواسته شده برابر $۸-۰=۸$ است.

۱۱- گزینه‌ی ۴ در گزینه‌ی (۴)، ضرب عامل صفرکننده‌ی $(x-۱)$، در تابع مشتق‌ناپذیر $|x-۱|$ باعث مشتق‌پذیری تابع می‌شود.
مشتق چپ و راست در سایر گزینه‌ها برابر نیست.

گزینه‌ی (۱): $y'_+(۱)=۱\quad,\quad y'_-(۱)=-۱$

گزینه‌ی (۲): $y'_+(۱)=۱\quad,\quad y'_-(۱)=۰$

گزینه‌ی (۳): $y'_+(۱)=۱\quad,\quad y'_-(۱)=۰$

۱۲- گزینه‌ی ۳ برای آن که تابع f مشتق‌پذیر باشد، باید پیوسته بوده و مشتق چپ و راست آن برابر باشد:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۰^+}f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^-}f(x)\Rightarrow e^۰+b=۲a+\ln ۱\Rightarrow ۱+b=۲a\\ f'(x)=\begin{cases}ae^{ax} & x>۰\\ \frac{۱}{x+۱} & x<۰\end{cases}\quad,\quad f'_+(۰)=f'_-(۰)\Rightarrow ae^۰=\frac{۱}{۰+۱}\Rightarrow a=۱\end{cases}\Rightarrow ۱+b=۲\Rightarrow b=۱\Rightarrow a+b=۲$$

۱۳- گزینه‌ی ۴ آهنگ متوسط تغییر در بازه‌ی $[۲,۶]$ برابر است با:

$$\frac{f(۶)-f(۲)}{۶-۲}=\frac{\frac{۶}{۷}-\frac{۲}{۳}}{۴}=\frac{۱۸-۱۴}{۲۱\times۴}=\frac{۱}{۲۱}$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر در یک نقطه برابر مشتق تابع در آن نقطه است:

$$f(x)=\frac{x}{x+۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{۱-۰}{(x+۱)^۲}\xrightarrow{f'(x)=\frac{۱}{۲۱}}\frac{۱}{(x+۱)^۲}=\frac{۱}{۲۱}\Rightarrow(x+۱)^۲=۲۱\Rightarrow x+۱=\sqrt{۲۱}\Rightarrow x=\sqrt{۲۱}-۱$$

۱۴- گزینه‌ی ۴ ضابطه‌ی تابع را به صورت $y=۸x^{\frac{۳}{۲}}-۲۷x^{\frac{۱}{۳}}$ می‌نویسیم و مشتق می‌گیریم:

$$y'=۸\times\frac{۳}{۲}x^{\frac{۱}{۲}}-۲۷\times\frac{۱}{۳}x^{\frac{-۲}{۳}}\Rightarrow y''=۱۲\times\frac{۱}{۲}x^{-\frac{۱}{۲}}-۹(\frac{-۲}{۳})x^{\frac{-۵}{۳}}\Rightarrow y'''=۶(\frac{-۱}{۲})x^{-\frac{۳}{۲}}+۶(\frac{-۵}{۳})x^{\frac{-۸}{۳}}\xrightarrow{x=۱}y'''(۱)=-۳-۱۰=-۱۳$$

۱۵- گزینه‌ی ۴ شیب خط مماس بر تابع برابر مقدار مشتق تابع در نقطه‌ی تماس است:

$$\begin{cases} f'(x)=4x^3+2ax \Rightarrow m=f'(-1)=4(-1)^3+2a(-1)=-2a-4 \\ m'=f'(1)=4+2a \end{cases} \xrightarrow{mm'=-1} (-2a-4)(4+2a)=-1$$

$$\Rightarrow (2a+4)^2=1 \Rightarrow \begin{cases} 2a+4=1 \Rightarrow a=\frac{-3}{2} \\ 2a+4=-1 \Rightarrow a=\frac{-5}{2} \end{cases}$$

بنابراین مجموع مقادیر ممکن برای a برابر است با: $\frac{-3}{2}-\frac{5}{2}=-4$

۱۶- گزینه‌ی ۱ با استفاده از قوانین لگاریتم، تابع را ساده می‌کنیم، سپس مشتق می‌گیریم:

$$y=\ln\left(\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\ln\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}=\frac{1}{3}\ln\frac{2\sin x\cos x}{2\sin^2 x}=\frac{1}{3}\ln\cot x \Rightarrow y'=\frac{1}{3}\times\frac{-(1+\cot^2 x)}{\cot x} \xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}} y'=\frac{1}{3}\times\left(\frac{-2}{1}\right)=\frac{-2}{3}$$

معادله‌ی خط مماس بر منحنی در نقطه‌ای با طول $\frac{\pi}{4}$ و عرض $\frac{1}{3}\ln 1=0$ برابر است با: $y-0=\frac{-2}{3}(x-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow y=\frac{-2}{3}x+\frac{\pi}{6}$

پس عرض از مبدأ خط مماس موردنظر برابر $\frac{\pi}{6}$ است.

۱۷- گزینه‌ی ۳ خط بر سهمی مماس است، پس معادله‌ی حاصل از مساوی قرار دادن این دو، باید ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.

$$x-k=x^2+2x+k \Rightarrow x^2+x+2k=0 \xrightarrow{\Delta=0} 1-8k=0 \Rightarrow k=\frac{1}{8}$$

۱۸- گزینه‌ی ۳ مشتق ضمنی باید برابر صفر باشد:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-F_x}{F_y}=0 \Rightarrow -\frac{-4y+4x^3}{4y^3-4x}=0 \Rightarrow y=x^3$$

با جایگذاری معادله‌ی به‌دست آمده در معادله‌ی منحنی داریم: $x^{12}-4x^4+x^4=0 \Rightarrow 3x^4=x^{12} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^8=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt[8]{3} \end{cases}$

پس در سه نقطه خط مماس موازی محور طول‌هاست.

۱۹- گزینه‌ی ۱ از معادله‌ی $x^4y+\sin\frac{x}{y}+1-y=0$ مشتق ضمنی می‌گیریم:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{4x^3y+\cos\frac{x}{y}\times\frac{1}{y}}{x^4+\cos\frac{x}{y}\times\left(-\frac{x}{y^2}\right)-1} \xrightarrow{(0,1)} y'=-\frac{0+1}{0-1}=1$$

بنابراین معادله‌ی خط قائم برابر است با: $y-1=\frac{1}{-1}(x-0) \Rightarrow y=-x+1$

این خط از نقطه‌ی $(1,0)$ می‌گذرد.

۲۰- گزینه‌ی ۱ مشتق تابع داده شده برابر است با:

$$y'=\frac{8}{5}x^{\frac{3}{5}}-\frac{12}{5}x^{\frac{-2}{5}}=\frac{4}{5}\left(\frac{2x-3}{\sqrt[5]{x^2}}\right)$$

تابع در مبدأ مختصات مشتق ندارد و حد تابع مشتق در صفر از چپ و راست برابر منفی بی‌نهایت است، پس تابع دارای مماس قائم $x=0$ است.

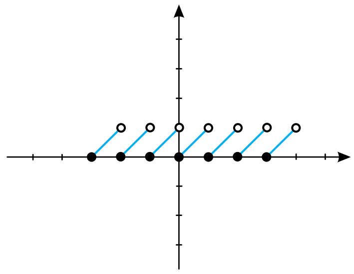
سراسری خارج از کشور - ۹۱

آزمون‌های مرحله‌ای

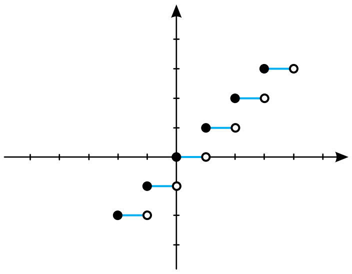
۱۲ کاربردهای مشتق

پاسخ تشریحی آزمون ۵۹

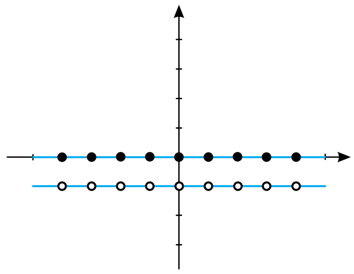
۱- گزینه‌ی ۳ بهتر است، شکل تمامی گزینه‌ها را بدانیم:



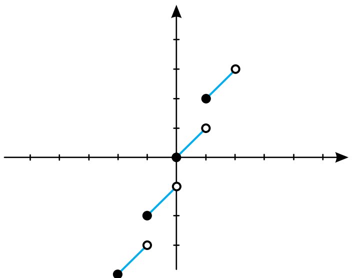
$y=x-[x]$



$y=[x]$



$y=[x]+[-x]$



$y=x+[x]$

توجه کنید با توجه به تعریف $[x]$ داریم:

$$y=x+[x]=\begin{cases}\vdots & \\ x+1 & 1\le x<2\\ x & 0\le x<1\\ x-1 & -1\le x<0\\ \vdots & \end{cases}$$

از روی نمودار توابع مشخص است گزینه‌ی (۲) و (۴) غیریکنوا و گزینه‌ی (۱) صعودی غیراکید است. تنها گزینه‌ی (۳) صعودی اکید است.

۲- گزینه‌ی ۳ می‌دانیم اگر $f'(x)\le 0$ و نقاطی که $f'(x)=0$، تشکیل پاره‌خط ندهند تابع نزولی اکید است.

در بازه‌ی $(3,6)$ نمودار تابع مشتق زیر محور x ها است و فقط در نقطه‌ی $x=5$ مشتق برابر صفر است. پس تابع فقط در بازه‌ی $(3,6)$ نزولی اکید است.

۳- گزینه‌ی ۳ برای این‌که تابع چندجمله‌ای f همواره نزولی باشد، باید در همه‌ی نقاط داشته باشیم:

$$f'(x)\le 0$$

$$f'(x)=3ax^2+6x-1\Rightarrow\begin{cases}3a<0\Rightarrow a<0\\ \Delta\le 0\Rightarrow 36+4\times 3a\le 0\Rightarrow 12a\le -36\Rightarrow a\le -3\end{cases}\Rightarrow a\le -3$$

۴- گزینه‌ی ۴ برای تعیین ناحیه‌ی صعودی بودن تابع، باید نامعادله‌ی $f'(x)\ge 0$ را حل کنیم:

$$f'(x)=\frac{1\times(x^2+4)-2x(x)}{(x^2+4)^2}=\frac{-x^2+4}{(x^2+4)^2}\ge 0\Rightarrow -x^2+4\ge 0\Rightarrow -2\le x\le 2$$

بنابراین تابع در بازه‌ی $(-2,2)$ صعودی است.

۵- گزینه‌ی ۴ برای به‌دست آوردن بازه‌ی صعودی بودن تابع، باید نامعادله‌ی $f'(x)\ge 0$ را حل کنیم:

$$f'(x)=\frac{2x\ln x-\frac{1}{x}\times x^2}{(\ln x)^2}=\frac{2x\ln x-x}{(\ln x)^2}\ge 0\Rightarrow x(2\ln x-1)\ge 0$$

برای حل این نامعادله باید ابتدا ریشه‌های $f'(x)$ را محاسبه کنیم، سپس با توجه به صعودی بودن $\ln x$ جدول تعیین علامت f' را رسم می‌کنیم.

$$2\ln x-1=0\Rightarrow \ln x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

		0		$\sqrt{e}$	
x	$-$	0	$+$		$+$
$2\text{Ln}x-1$	$-$		$-$	0	$+$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$

پس تابع f در بازه‌های $(\sqrt{e},+\infty)$ و $(-\infty,0)$ صعودی است و کم‌ترین مقدار a برابر $\sqrt{e}$ می‌باشد.

۶- گزینه‌ی ۴ تابع در بازه‌ای صعودی است که مشتق f در آن بازه نامنفی باشد.

$$f'(x)=2xe^{-x}-(x^2+1)e^{-x}=e^{-x}(-x^2+2x-1)\Rightarrow f'(x)=-e^{-x}(x-1)^2$$

با توجه به مثبت بودن تابع نمایی e^{-x}، داریم $f'(x)\le 0$. با توجه به این‌که مشــتق فقط در یک نقطه برابر صفر اســت بنابراین در هیچ بازه‌ای، تابع صعودی نیست بلکه در $\mathbb{R}$ نزولی اکید است.

۷- گزینه‌ی ۳ برای محاسبه‌ی نقاط بحرانی، ابتدا از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=2x(1-x)^3-3x^2(1-x)^2=0\Rightarrow(1-x)^2(2x(1-x)-3x^2)\Rightarrow(1-x)^2(-5x^2+2x)=0\Rightarrow x=1,0,\frac{2}{5}$$

۸- گزینه‌ی ۲ ابتدا باید از تابع مشتق بگیریم، ریشه‌های صورت و مخرج مشتق اگر در دامنه‌ی تابع باشند، طول نقاط بحرانی هستند.

$$f'(x)=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}=\frac{4\sqrt[3]{x}}{3}-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{4\sqrt[3]{x^2}-2}{3\sqrt[3]{x}}=0\Rightarrow\sqrt[3]{x^2}=\frac{1}{2}\Rightarrow x^2=\frac{1}{8}\Rightarrow x=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$$

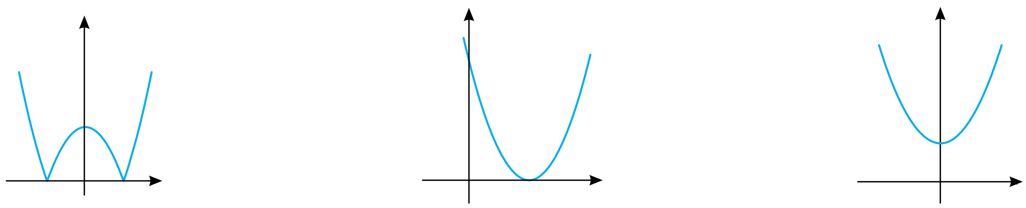
ریشه‌ی مخرج: $3\sqrt[3]{x}=0\Rightarrow x=0$

۹- گزینه‌ی ۳ ریشه‌های صورت و مخرج تابع مشتق اگر در دامنه باشند، طول نقاط بحرانی هستند.

$$f'(x)=2x\sqrt[3]{x}+\frac{(x^2-1)}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{6x^2+x^2-1}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{7x^2-1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

مشخص است که صورت کسر، دو ریشه و مخرج آن یک ریشه دارد.

۱۰- گزینه‌ی ۳ نمودار قدرمطلق یک تابع درجه‌ی دوم به یکی از صورت‌های زیر است:



$\Delta>0$ $\Delta=0$ $\Delta<0$

بنابراین برای این‌که این تابع دارای ۳ نقطه‌ی بحرانی باشد، باید داشته باشیم:

$$\Delta>0\Rightarrow m^2-4m(m+1)=-3m^2-4m>0\Rightarrow -m(3m+4)>0\Rightarrow\frac{-4}{3}<m<0$$

تنها گزینه‌ای که در این محدوده قرار دارد عدد $m=-1$ است.

۱۱- گزینه‌ی ۱ مشتق تابع را برابر صفر قرار می‌دهیم و تعداد ریشه‌های آن را در بازه‌ی $(0,2\pi)$ می‌یابیم.

$$y'=2\sin x\cos x+3\sin x=\sin x(2\cos x+3)=0\Rightarrow\begin{cases}\sin x=0\Rightarrow x=\pi\\ 2\cos x+3=0\Rightarrow\cos x=\frac{-3}{2}\ \text{جواب ندارد}\end{cases}$$

تنها ریشه‌ی مشتق $x=\pi$ می‌باشد.

۱۲- گزینه‌ی ۳ ابتدا از تابع مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا طول نقطه‌ی بحرانی به‌دست آید.

$$f'(x)=8x^3+1=0\Rightarrow x^3=\frac{-1}{8}\Rightarrow x=\frac{-1}{2}$$

$$f(\frac{-1}{2})=2(\frac{-1}{2})^4-\frac{1}{2}=\frac{1}{8}-\frac{1}{2}=\frac{-3}{8}$$

۱۳- گزینه‌ی ۴ می‌دانیم در تابع درجه‌ی دوم اگر ضریب درجه‌ی دوم مثبت باشد، دارای مینیمم است و طول نقطه‌ی مینیمم آن برابر با $\frac{-b}{2a}$ و عرض آن برابر $\frac{-\Delta}{4a}$ می‌باشد.

$$m-1>0$$

$$\frac{-b}{2a}=\frac{4}{2(m-1)}=\frac{2}{m-1}>0 \quad , \quad \frac{-\Delta}{4a}=\frac{-(16+4(m-1))}{4(m-1)}<0$$

پس نقطه‌ی مینیمم دارای طولی مثبت و عرضی منفی است و در ناحیه‌ی چهارم قرار دارد.

۱۴- گزینه‌ی ۱ نقطه‌ی بحرانی، نقطه‌ای درونی از دامنه‌ی تابع است که مشتق در آن نقطه صفر یا تعریف نشده است. نقطه‌ی ماکزیمم نیز یکی از نقاط بحرانی است و داریم:

$$f'(x)=\frac{8-2x}{8x-x^2}=0\Rightarrow x=4$$

توجه کنید ریشه‌های مخرج، نقطه‌ی بحرانی (یا ماکزیمم) نیستند، زیرا در دامنه‌ی تابع قرار ندارند.

۱۵- گزینه‌ی ۲ ابتدا نقاط بحرانی تابع f را می‌یابیم:

$$f'(x)=\frac{4x(x^2+1)-2x(2x^2-1)}{(x^2+1)^2}=\frac{6x}{(x^2+1)^2}=0\Rightarrow x=0\Rightarrow f(0)=-1$$

با توجه به این‌که می‌دانیم مینیمم و ماکزیمم مطلق توابع فقط در نقاط بحرانی اتفاق می‌افتد، بنابراین -1 ، مینیمم مطلق است.

۱۶- گزینه‌ی ۲ برای یافتن بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار تابع در بازه‌ی $[1,3]$ کافی است، مقادیر ابتدا و انتهای بازه را با نقاط بحرانی این بازه مقایسه کنیم.

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)\Rightarrow\begin{cases}x=0 \text{ غ ق ق}\\ x=2\end{cases}$$

$$f(1)=1-3+k=k-2\ ,\quad f(2)=8-12+k=k-4\Rightarrow \text{مینیمم مطلق}\ ,\quad f(3)=27-27+k=k\Rightarrow \text{ماکزیمم مطلق}$$

$$\Rightarrow k=-(k-4)\Rightarrow 2k=4\Rightarrow k=2$$

۱۷- گزینه‌ی ۱ ابتدا نقاط بحرانی تابع را می‌یابیم:

$$f'(x)=\frac{1\times(x^2+4)-2x\times x}{(x^2+4)^2}=\frac{-x^2+4}{(x^2+4)^2}=0\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm 2$$

با توجه به پیوستگی تابع در دامنه‌اش $(D=\mathbb{R})$ داریم:

$$f(2)=\frac{2}{4+4}=\frac{1}{4} \quad , \quad f(-2)=\frac{-2}{4+4}=\frac{-1}{4}$$

با توجه به این‌که می‌دانیم تابع حتماً ماکزیمم و مینیمم مطلق دارد، پس این دو نقطه اکسترمم هستند. بنابراین داریم:

$$\max+\min=\frac{1}{4}+(\frac{-1}{4})=0$$

۱۸- گزینه‌ی ۲ مقادیر نقاط بحرانی و ابتدا و انتهای بازه را مقایسه می‌کنیم، بزرگ‌ترین آن‌ها ماکزیمم و کوچک‌ترین آن‌ها مینیمم مطلق است.

$$f'(x)=2\sin x\cos x-\cos x=\cos x(2\sin x-1)=0\Rightarrow\begin{cases}\cos x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}\\ \sin x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{5\pi}{6}\end{cases}$$

$$f(\frac{\pi}{2})=1-1=0$$

$$f(\frac{5\pi}{6})=(\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}=\frac{-1}{4}\Rightarrow\min \quad , \quad f(\frac{3\pi}{2})=(-1)^2+1=2\Rightarrow\max$$

$$\max+\min=2-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$$

۱۹- گزینه‌ی ۱ از آن‌جا که تابع در دامنه‌اش $(D=\mathbb{R})$ پیوسته و مشتق‌پذیر است حتماً در اکسترمم خود، مشتق برابر صفر دارد.

$$y'=۴x^۳+a \xrightarrow{x=۱} ۴x^۳+a=۰ \Rightarrow ۴+a=۰ \Rightarrow a=-۴ \Rightarrow f(۱)=(۱)^۴+a(۱)+b=-۲ \xrightarrow{a=-۴} b=۱ \Rightarrow ab=-۴$$

۲۰- گزینه‌ی ۱ تابع f در دامنه‌اش پیوسته است و داریم:

$$f'(x)=-۲xe^{-x^۲}=۰ \Rightarrow x=۰ \Rightarrow A(۰,۱) \Rightarrow AO=\sqrt{۰^۲+۱^۲}=۱$$

پاسخ تشریحی آزمون ٦٠

۱- گزینه‌ی ۲ با توجه به خواسته‌ی مسأله باید طولانی‌ترین بازه‌ای را بیابیم که نقاط آن بازه، مشتق نامنفی و مقداری منفی دارند.

$$f(x)<۰ \Rightarrow \frac{x^۲-۴}{(x^۲+۱)^۲}<۰ \Rightarrow x^۲-۴<۰ \Rightarrow -۲<x<۲ \quad (\text{I})$$

$$f'(x)\geq ۰ \Rightarrow \frac{۲x(x^۲+۱)^۲-۲(x^۲+۱)\times ۲x(x^۲-۴)}{(x^۲+۱)^۴}\geq ۰ \Rightarrow \frac{۲x(x^۲+۱)(x^۲+۱-۲x^۲+۸)}{(x^۲+۱)^۴}\geq ۰ \Rightarrow \frac{۲x(۹-x^۲)}{(x^۲+۱)^۳}\geq ۰$$

جدول تعیین علامت $f'(x)$ مطابق زیر است:

x		-۳		۰		۳	
$f'(x)$	+	۰	−	۰	+	۰	−

$$f'(x)\geq ۰ \Rightarrow x\leq -۳ \ \text{یا}\ ۰\leq x\leq ۳ \quad (\text{II})$$

با اشتراک گرفتن از شرط‌های I و II می‌بینیم، تابع در بازه‌ی $(۰,۲)$ دارای شرایط خواسته شده است.

۲- گزینه‌ی ۴ باید نقاطی از دامنه‌ی تابع را بیابیم که مشتق در آن نقاط مثبت است.

$$f'(x)=\frac{۸\ln x\times\frac{۱}{x}\times x-۱\times ۴(\ln x)^۲}{x^۲}=\frac{۴\ln x(۲-\ln x)}{x^۲}\xrightarrow{\text{صعودی}} f'(x)>۰ \Rightarrow ۴\ln x(۲-\ln x)>۰$$

با تغییر متغیر $\ln x=t$ داریم:

$$۴t(۲-t)>۰ \Rightarrow ۰<t<۲ \Rightarrow ۰<\ln x<۲ \Rightarrow e^۰<x<e^۲ \Rightarrow ۱<x<e^۲$$

۳- گزینه‌ی ۱ برای نزولی اکید بودن f علامت f' و برای نزولی اکید بودن f'، علامت f'' را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$$f'=۱\times e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(۱-x)\xrightarrow{\text{f نزولی اکید}} f'<۰ \Rightarrow ۱-x<۰ \Rightarrow x>۱$$

$$f''=-۱\times e^{-x}-(۱-x)e^{-x}=e^{-x}(x-۲)\xrightarrow{\text{f' نزولی اکید}} f''<۰ \Rightarrow x-۲<۰ \Rightarrow x<۲$$

$$\Rightarrow ۱<x<۲$$

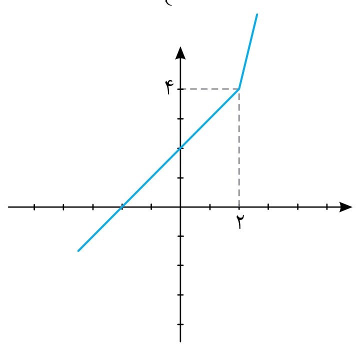
۴- گزینه‌ی ۱ ابتدا از تابع مشتق می‌گیریم و آن را براساس خواسته‌ی سؤال مثبت قرار می‌دهیم.

$$f'(x)=\cos x-\cos x+x\sin x=x\sin x\xrightarrow{\text{صعودی اکید}} f'(x)>۰ \Rightarrow x\sin x>۰$$

با توجه به مثبت بودن $\sin x$ در ربع اول و دوم، مشخص است که مشتق در بازه‌ی $(۰,\pi)$ مثبت است.

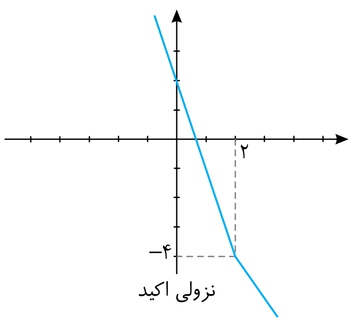
۵- گزینه‌ی ۲ به کمک تعریف قدرمطلق $|x|=\begin{cases} x & x\geq ۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}$ نمودار توابع را رسم می‌کنیم.

$$y=۲x+|x-۲|=\begin{cases} ۳x-۲ & x\geq ۲ \\ x+۲ & x<۲ \end{cases}$$



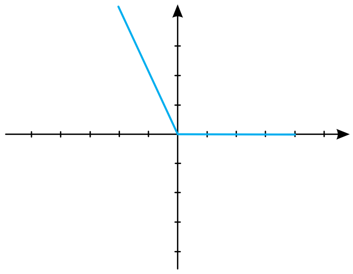
صعودی اکید

$$y=-۲x+|x-۲|=\begin{cases} -x-۲ & x\geq ۲ \\ -۳x+۲ & x<۲ \end{cases}$$



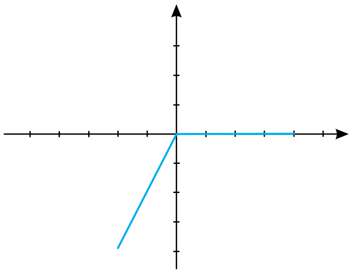
نزولی اکید

$$y=|x|-x=\begin{cases} ۰ & x\geq ۰ \\ -۲x & x<۰ \end{cases}$$



نزولی غیراکید

$$y=x-|x|=\begin{cases} ۰ & x\geq ۰ \\ ۲x & x<۰ \end{cases}$$



صعودی غیراکید

۶- گزینه‌ی ۲ اگر تابع f در بازه‌ای نزولی باشد، مشتق تابع در آن بازه نامثبت است.

$$f'(x)\leq ۰\Rightarrow x^۴-۴x^۲\leq ۰\Rightarrow x^۲(x^۲-۴)\leq ۰$$

x		-۲		۰		۲	
f'(x)	+	۰	−	۰	−	۰	+

بنابراین تابع در بازه‌ی $(-۲,۲)$ اکیداً نزولی است.

۷- گزینه‌ی ۲ نقاطی از تابع، که در آن‌ها مشتق، صفر یا تعریف نشده باشد، نقاط بحرانی است.

$$f'(x)=\frac{۳x^۲(۱-x)^۲+۲(۱-x)x^۳}{(۱-x)^۴}=\frac{(۱-x)(۳x^۲-۳x^۳+۲x^۳)}{(۱-x)^۴}=\frac{-x^۳+۳x^۲}{(۱-x)^۳}=\frac{x^۲(۳-x)}{(۱-x)^۳}$$

بنابراین $x=۰$ و $x=۳$ طول دو نقطه‌ی بحرانی تابع است. توجه کنید که $x=۱$، در دامنه‌ی تابع اصلی قرار ندارد، پس بحرانی نیست.

۸- گزینه‌ی ۳ ابتدا از هر کدام از ضابطه‌ها، مشتق می‌گیریم، سپس نقطه‌ی مرزی $x=۰$ را بررسی می‌کنیم.

$$f'(x)=\begin{cases} ۳x^۲-۳ & x>۰ \\ ۲x+۴ & x<۰ \end{cases}$$

مشتق چپ و راست در نقطه‌ی $x=۰$ برابر نیست، پس تابع در این نقطه مشتق ندارد و بحرانی است. ضمناً داریم:

$$f'(x)=۰\Rightarrow\begin{cases} ۳x^۲-۳=۰\Rightarrow x^۲=۱\Rightarrow x=۱,\ x=-۱\ \text{غ ق ق} \\ ۲x+۴=۰\Rightarrow ۲x=-۴\Rightarrow x=-۲ \end{cases}$$

پس تابع در $x=۰$ و $x=۱$ و $x=-۲$ دارای نقاط بحرانی است.

۹- گزینه‌ی ۳ ابتدا به دامنه‌ی تابع توجه می‌کنیم $(D=\mathbb{R})$، سپس مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=\frac{۸}{۳}x^{\frac{۵}{۳}}-\frac{۸}{۳}x^{\frac{-۱}{۳}}=\frac{۸}{۳}(\sqrt[۳]{x^۵}-\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}})=\frac{۸}{۳}(\frac{x^۲-۱}{\sqrt[۳]{x}})$$

مشتق تابع در ریشه‌های صورت، صفر و در ریشه‌های مخرج تعریف نشده است، پس این نقاط برای تابع نقاط بحرانی هستند. یعنی $x=\pm ۱,۰$ طول ۳ نقطه‌ی بحرانی این تابع هستند. مقدار $f(x)$ به ازای نقاط ۱، ۰ و ۱- به ترتیب ۳-، ۰ و ۳- می‌شود و مساحت مثلث ساخته شده از این نقاط برابر است با: $\frac{۳\times ۲}{۲}=۳$

۱۰- گزینه‌ی ۳ با استفاده از تعریف قدرمطلق، تابع را به‌صورت دوضابطه‌ای نوشته، مشتق می‌گیریم.

$$f(x)=\begin{cases} (x-۲)\sqrt[۳]{x} & x\geq ۲ \\ (۲-x)\sqrt[۳]{x} & x\leq ۲ \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} \sqrt[۳]{x}+\frac{(x-۲)}{۳\sqrt[۳]{x^۲}} & x>۲ \\ -\sqrt[۳]{x}+\frac{(۲-x)}{۳\sqrt[۳]{x^۲}} & x<۲ \end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} \frac{۴x-۲}{۳\sqrt[۳]{x^۲}} & x>۲ \\ \frac{۲-۴x}{۳\sqrt[۳]{x^۲}} & x<۲ \end{cases}$$

مشتق این تابع در نقطه‌ی $x=\frac{۱}{۲}$، برابر صفر و در نقاط $x=۲$ و $x=۰$ ناموجود است. پس ۳ نقطه‌ی بحرانی دارد.

۱۱- گزینه‌ی ۴ عبـارت $\sin x-\cos x$ در بازه‌ی $(0,2\pi)$، در دو نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$ برابر صفر می‌شـود، پـس تابع در این دو نقطه تغییر ضابطه می‌دهد. ضمناً اگر مشتق $\sin x-\cos x$ برابر صفر شود، مشتق $|\sin x-\cos x|$ نیز برابر صفر می‌گردد.

نکتـه: اگر $y=|g(x)|$، ریشه‌های $g(x)$ و $g'(x)$ نقاط بحرانی تابع هستند.

$$(\sin x-\cos x)'=\cos x+\sin x=0\Rightarrow \tan x=-1\Rightarrow x=\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$$

پس تابع در چهار نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$ بحرانی است.

۱۲- گزینه‌ی ۴ تابع را در محدوده‌ی داده شده به‌صورت دو ضابطه‌ای نوشته و مشتق می‌گیریم.

$$f(x)=\begin{cases}x^2-2x & 1\le x<2\\ 0 & 0<x<1\end{cases}\quad,\quad f'(x)=\begin{cases}2x-2 & 1<x<2\\ 0 & 0<x<1\end{cases}$$

توجه کنید که تابع در $x=1$ پیوسـته نیسـت، پس مشـتق ندارد و در این نقطه بحرانی است. ضمناً تمامی نقاط بازه‌ی $(0,1)$ دارای مشتق صفر و بحرانی هستند.

۱۳- گزینه‌ی ۲ مقدار نقاط بحرانی این بازه را با مقدار تابع در ابتدا و انتهای بازه مقایسه می‌کنیم.

$$f'(x)=x^3-x^2-2x=x(x^2-x-2)=0\Rightarrow x=0,-1,2$$

$$f(-1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1=\frac{-5}{12}\quad,\quad f(0)=0\quad,\quad f(2)=\frac{1}{4}\times16-\frac{1}{3}\times8-4=\frac{-8}{3}\quad,\quad f(3)=\frac{1}{4}\times81-\frac{1}{3}\times27-9=\frac{9}{4}$$

با توجه به مقادیر به‌دست آمده، کم‌ترین مقدار $\frac{-8}{3}$ است.

۱۴- گزینه‌ی ۳ ابتدا نقاط بحرانی تابع را در این بازه می‌یابیم:

$$f'(x)=2x^2-6x+4=0\Rightarrow x^2-3x+2=0\Rightarrow x=2,1$$

$$f(1)=\frac{2}{3}-3+4-1=\frac{2}{3}\ ,\ f(2)=\frac{2}{3}\times8-3\times4+4\times2-1=\frac{1}{3}\Rightarrow \text{مطلق min}\ ,\ f(3)=\frac{2}{3}\times27-3\times9+4\times3-1=2\Rightarrow \text{مطلق max}$$

$$\max-\min=2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$$

۱۵- گزینه‌ی ۳ برای یافتن نقاط بحرانی، باید نقاطی از دامنه‌ی تابع $D=\mathbb{R}-\{0\}$ را یافت که مشتق در آن‌ها برابر صفر یا تعریف نشده است.

$$f'(x)=\frac{-4x}{x^4}+\frac{1}{x}=\frac{x^2-4}{x^3}=0\Rightarrow x=\pm2$$

$$f(2)+f(-2)=\frac{1}{2}+\ln2+\frac{1}{2}+\ln2=2\ln2+1$$

۱۶- گزینه‌ی ۳ مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع را در یک دوره‌ی تناوب آن $[0,2\pi]$ به‌دست می‌آوریم.

$$f'(x)=-2\cos x\sin x+\cos x=\cos x(-2\sin x+1)=0$$

$$\begin{cases}\cos x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\\ \sin x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\end{cases}$$

$$f(0)=f(2\pi)=1$$

$$f(\frac{\pi}{6})=f(\frac{5\pi}{6})=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$$

$$f(\frac{\pi}{2})=1\quad,\quad f(\frac{3\pi}{2})=-1$$

بنابراین برد تابع در یک دوره‌ی تناوب آن و در نتیجه برد کلی تابع بازه‌ی $[-1,\frac{5}{4}]$ است.

بیش‌ترین مقدار $b-a$ برابر است با:

$$\frac{5}{4}-(-1)=\frac{9}{4}$$

۱۷- گزینه‌ی ۳ ماکزیمم و مینیمم مطلق، فقط در نقاط بحرانی یا ابتدا یا انتهای بازه اتفاق می‌افتند.

$$f'(x)=-۲\cos x\sin x-\sin x=-\sin x(۲\cos x+۱)=۰$$

$$\begin{cases}\sin x=۰\Rightarrow x=۰,\pi\\ \cos x=\frac{-۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{۲\pi}{۳}\end{cases}$$

$$f(۰)=۱+۱=۲\Rightarrow \max\ ,\ f(\frac{۲\pi}{۳})=\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲}=\frac{-۱}{۴}\Rightarrow \min\ ,\ f(\pi)=۱-۱=۰$$

$$\max+\min=۲-\frac{۱}{۴}=\frac{۷}{۴}$$

۱۸- گزینه‌ی ۱ تابع ذکر شده در سؤال در $\mathbb{R}$ پیوسته است (مخرج ریشه ندارد). تمام نقاط بحرانی آن را پیدا می‌کنیم:

$$y'=\frac{(x^۲-۲x+۵)-(۲x-۲)(x-۱)}{(x^۲-۲x+۵)^۲}=\frac{-x^۲+۲x+۳}{(x^۲-۲x+۵)^۲}=۰\Rightarrow x^۲-۲x-۳=۰\Rightarrow x=-۱\ ,۳$$

$$f(-۱)=\frac{-۲}{۱+۲+۵}=\frac{-۲}{۸}=\frac{-۱}{۴}\Rightarrow \min \quad , \quad f(۳)=\frac{۲}{۹-۶+۵}=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow \max$$

از جایی‌که مینیمم و ماکزیمم فقط در نقاط بحرانی اتفاق می‌افتند، پس این دو نقطه اکسترمم هستند و مجموعشان صفر می‌شود.

۱۹- گزینه‌ی ۲ $f(x)$، در $\mathbb{R}$ تابعی پیوسته و مشتق‌پذیر است، پس حتماً در نقطه‌ای به طول -۱ ، مشتق برابر صفر دارد.

$$f'(x)=ae^{bx}+abxe^{bx}=ae^{bx}(۱+bx)\xrightarrow{x=-۱}f'(-۱)=۰\Rightarrow ae^{-b}(۱-b)=۰\Rightarrow b=۱$$

از طرفی نقطه‌ی $(-۱,\frac{۲}{e})$ در تابع صدق می‌کند، پس داریم:

$$f(-۱)=\frac{۲}{e}\Rightarrow -ae^{-۱}=\frac{۲}{e}\Rightarrow a=-۲\Rightarrow ab=-۲$$

۲۰- گزینه‌ی ۲ برای یافتن برد یک تابع پیوسته در یک بازه باید مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق آن را بیابیم.

$$f'(x)=۱۲x^۲-۱۶x=۴x(۳x-۴)\xrightarrow{f'(x)=۰}x=۰,\frac{۴}{۳}$$

نقطه‌ی $x=\frac{۴}{۳}$ در دامنه‌ی تابع نیست و آن را بررسی نمی‌کنیم.

$$f(-۱)=-۴-۸+۱=-۱۱\Rightarrow \min\ ,\ f(۰)=۱\Rightarrow \max\ ,\ f(۱)=۴-۸+۱=-۳$$

بنابراین برد تابع برابر $[-۱۱,۱]$ است.

پاسخ تشریحی آزمون ٦١

۱- گزینه‌ی ۱ مشتق تابع را محاسبه کرده و آن را تعیین علامت می‌کنیم:

$$y'=۵x^۴-۱۰x\Rightarrow y'=۵x(x^۳-۲)$$

x		۰		$\sqrt[۳]{۲}$	
y'	+	۰	−	۰	+
		max		min	

بنابراین تابع یک ماکزیمم و یک مینیمم نسبی دارد.

۲- گزینه‌ی ۲ تابع f همواره مشتق‌پذیر است، بنابراین مشتق تابع به ازای ۳ و -۵ برابر صفر است، پس:

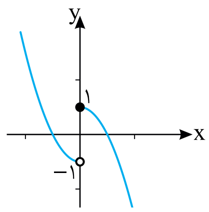
$$f'(x)=۳x^۲+۲ax+b\Rightarrow\begin{cases}f'(۳)=۰\Rightarrow ۲۷+۶a+b=۰\Rightarrow ۶a+b=-۲۷\\ f'(-۵)=۰\Rightarrow ۷۵-۱۰a+b=۰\Rightarrow ۱۰a-b=۷۵\end{cases}\Rightarrow ۱۶a=۴۸\Rightarrow a=۳,b=-۴۵$$

بنابراین مشتق تابع به‌صورت $f'(x)=۳x^۲+۶x-۴۵$ است، با تعیین علامت مشتق داریم:

x		-۵		۳	
y	+	۰	−	۰	+
		max		min	

بنابراین نقطه‌ای با طول ۳ مینیمم نسبی تابع است. مقدار مینیمم برابر است با:

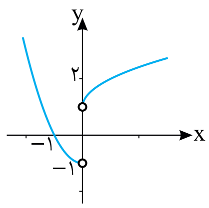
$$f(x)=x^۳+۳x^۲-۴۵x\Rightarrow f(۳)=۲۷+۲۷-۱۳۵=-۸۱$$



۳- گزینه‌ی ۱ نمودار این تابع به‌صورت روبه‌رو است:

با توجه به شکل، نقطه‌ی $(۰,۱)$ ماکزیمم نسبی تابع است.

توجه: با این‌که مشتق تابع در $x=۰$ تغییر علامت نمی‌دهد اما باز هم تابع دارای اکسترمم است.



۴- گزینه‌ی ۳ نمودار تابع را به جز درنقطه‌ی $x=۱$ رسم می‌کنیم:

همان‌طور که در شکل مشخص است، اگر $f(۰)$ را منفی یک یا کم‌تر از منفی یک قرار دهیم، تابع دارای مینیمم نسبی و اگر بزرگ‌تر از یک قرار دهیم، تابع دارای ماکزیمم نسبی است. پس: $-۱<k\le ۱$.

۵- گزینه‌ی ۳ تابع f همواره مشتق‌پذیر است، در نتیجه در نقاط اکسترمم مشتقی برابر صفر دارد. بنابراین:

$$\begin{cases} f'(x)=۴x^۳+۲ax+b \xrightarrow{f'(۱)=۰} ۴+۲a+b=۰ \Rightarrow ۲a+b=-۴ \\ f(x)=x^۴+ax^۲+bx+۱ \xrightarrow{f(۱)=۱} ۱+a+b+۱=۱ \Rightarrow a+b=-۱ \end{cases} \Rightarrow a=-۳\,,\, b=۲ \Rightarrow a-b=-۵$$

۶- گزینه‌ی ۲ تابع مشتق‌پذیر f در نقطه‌ی مینیمم خود دارای مشتقی برابر صفر است.

$$f'(x)=-a\sin ۲x\times ۲+b\cos x \xrightarrow{f'(\frac{\pi}{۶})=۰} -۲a\sin\frac{\pi}{۳}+b\cos\frac{\pi}{۶}=۰ \Rightarrow -۲a\frac{\sqrt{۳}}{۲}+b\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۰ \Rightarrow b=۲a$$

$$f(x)=a\cos ۲x+b\sin x \xrightarrow{f(\frac{\pi}{۶})=-۳} a\cos\frac{\pi}{۳}+b\sin\frac{\pi}{۶}=-۳ \Rightarrow \frac{a}{۲}+\frac{b}{۲}=-۳ \Rightarrow a+b=-۶$$

با توجه به دو معادله‌ی $b=۲a$ و $a+b=-۶$ داریم: $a+۲a=-۶ \Rightarrow a=-۲$

سراسری - ۸۹

۷- گزینه‌ی ۴ تابع داده شده در تمام نقاط دامنه‌اش $(\mathbb{R}^+)$ مشتق‌پذیر است، پس در نقاط اکسترمم نسبی، مشتقی برابر صفر دارد.

$$y'=۲ax+۱-\frac{b}{x}$$

$$\begin{cases} x=۱ \Rightarrow ۰=۲a+۱-b \\ x=۲ \Rightarrow ۰=۴a+۱-\frac{b}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴a+۲-۲b=۰ \\ ۴a+۱-\frac{b}{۲}=۰ \end{cases} \Rightarrow ۱-۲b+\frac{b}{۲}=۰ \Rightarrow \frac{۳b}{۲}=۱ \Rightarrow b=\frac{۲}{۳} \Rightarrow a=\frac{-۱}{۶} \Rightarrow ab=\frac{-۲}{۱۸}=\frac{-۱}{۹}$$

۸- گزینه‌ی ۲ مقدار تابع در $x=۱$ برابر صفر است $(f(۱)=۰)$. در اطراف $x=۱$، $(x-۱)^۲$ همواره مقداری مثبت و $\cos(\pi x)$ مقداری منفی (تقریباً -۱)، پس داریم:

$$f(۱)=۰\,,\; x\to ۱^+ \Rightarrow f(x)<۰\,,\; x\to ۱^- \Rightarrow f(x)<۰$$

بنابراین تابع در $x=۱$ دارای ماکزیمم نسبی است.

۹- گزینه‌ی ۳ تعیین علامت مشتق اول تابع به صورت زیر است:

$$f'(x)=x^۲-۲x-۳=(x-۳)(x+۱)$$

x		-۱		۳	
y'	+	۰	-	۰	+

پس تابع در بازه‌ی $(-۱,۳)$ نزولی است.

ضمناً تعیین علامت مشتق دوم تابع به صورت زیر است:

$$f''(x)=۲x-۲=۲(x-۱)$$

x		۱	
y''	-	۰	+

در نتیجه تابع در بازه‌ی $(۱,+\infty)$ دارای تقعر رو به بالا است. بنابراین در بازه‌ی $(۱,۳)$ نزولی و دارای تقعر رو به بالا است.

سراسری خارج از کشور - ۹۱

۱۰- گزینه‌ی ۴ با توجه به نمودار f' داده شده، هر جا f' منفی باشد تابع نزولی است، مثلاً در بازه‌ی (c,e) نمودار f' زیر محور xها و منفی است، پس تابع نزولی است. مشتق دوم تابع، مشتقِ مشتق تابع است، یعنی هر جا تابعِ مشتق صعودی باشد، مشتق دوم مثبت است و هر جا تابع مشتق نزولی باشد، مشتق دوم منفی است. مثلاً تابع در بازه‌ی (a,b) و (d,e) دارای مشتق دوم مثبت است. پس تابع در بازه‌ی (d,e) نزولی با تقعر رو به بالا است.

۱۱- گزینه‌ی ۴ علامت مشتق دوم، تقعر تابع را مشخص می‌کند:

$$f(x)=(x^2+2x+2)e^{-x}\Rightarrow f'(x)=(2x+2)e^{-x}-(x^2+2x+2)e^{-x}\Rightarrow f'(x)=-x^2e^{-x}\Rightarrow f''(x)=-2xe^{-x}+x^2e^{-x}$$

$$\Rightarrow f''(x)=e^{-x}(x^2-2x)$$

برای آن‌که تقعر تابع رو به پایین باشد، می‌بایست $f''(x)$ منفی باشد. بنابراین:

$$f''(x)<0\Rightarrow e^{-x}(x^2-2x)<0\xrightarrow{e^{-x}>0}x^2-2x<0\Rightarrow 0<x<2$$

سراسری - ۸۹

۱۲- گزینه‌ی ۱ تابع f مشتق‌پذیر است و تعیین علامت مشتق اول آن به‌صورت زیر است:

$$y'=-4x^3+12x^2=4x^2(-x+3)$$

x		0		3	
y'	$+$	0	$+$	0	$-$

بنابراین تابع در بازه‌ی $(-\infty,3)$ صعودی است.

ضمناً تعیین علامت مشتق دوم تابع به‌صورت زیر است:

$$y''=-12x^2+24x=12x(-x+2)$$

x		0		2	
y''	$-$	0	$+$	0	$-$

تقعر تابع در دو بازه‌ی $(2,+\infty)$ و $(-\infty,0)$ رو به پایین است. پس تابع در بازه‌ی $(2,3)$ صعودی و دارای تقعر رو به پایین است.

سراسری - ۹۱

۱۳- گزینه‌ی ۳ مقدار مشتق اول و دوم تابع را در این نقطه محاسبه می‌کنیم:

$$y'=2\cos x-2x\xrightarrow{x=\frac{\pi}{2}}y'=-\pi$$

$$y''=-2\sin x-2\xrightarrow{x=\frac{\pi}{2}}y''=-4$$

مشتق اول و دوم در این نقطه منفی است، پس تابع نزولی و دارای نقاط رو به پایین است.

۱۴- گزینه‌ی ۳ مشتق دوم تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$y=(x-1)\ln x\Rightarrow y'=\ln x+\frac{x-1}{x}\Rightarrow y''=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\Rightarrow y''=\frac{x+1}{x^2}$$

با توجه به دامنه‌ی تابع لگاریتم $(x>0)$، y'' همواره مثبت است و تقعر تابع هرگز رو به پایین نیست.

سراسری خارج از کشور - ۸۹

۱۵- گزینه‌ی ۱ مشتق دوم تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$y=\frac{x}{x^2+3}\Rightarrow y'=\frac{1\times(x^2+3)-2x^2}{(x^2+3)^2}\Rightarrow y'=\frac{-x^2+3}{(x^2+3)^2}\Rightarrow y''=\frac{-2x(x^2+3)^2-2(x^2+3)\times 2x(-x^2+3)}{(x^2+3)^4}$$

$$\Rightarrow y''=\frac{(x^2+3)(-2x^3-6x+4x^3-12x)}{(x^2+3)^4}\Rightarrow y''=\frac{2x^3-18x}{(x^2+3)^3}\Rightarrow y''=\frac{2x(x-3)(x+3)}{(x^2+3)^3}$$

مشتق دوم در نقاط $x=0,\pm 3$ تغییر علامت می‌دهد و این نقاط، نقطه‌ی عطف هستند.

۱۶- گزینه‌ی ۱ خط مماس در نقطه‌ی عطف از منحنی تابع عبور می‌کند.

$$y'=3ax^2+2bx\Rightarrow y''=6ax+2b\xrightarrow{x=1}6a+2b=0\Rightarrow b=-3a$$

تابع از نقطه‌ی $(1,0)$ روی محور طول‌ها عبور می‌کند:

$$x=1\Rightarrow a+b-1=0\Rightarrow a+b=1\xrightarrow{b=-3a}-2a=1\Rightarrow a=-\frac{1}{2}\Rightarrow b=\frac{3}{2}\Rightarrow a-b=-2$$

۱۷- گزینه‌ی ۴ مشتق دوم تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{-2(2-x)x-(2-x)^2}{x^2}=\frac{-4x+2x^2-4-x^2+4x}{x^2}=\frac{x^2-4}{x^2}\Rightarrow f''(x)=\frac{2x\times x^2-2x(x^2-4)}{x^4}=\frac{8x}{x^4}=\frac{8}{x^3}$$

مشتق دوم در $x=0$ تغییر علامت می‌دهد ولی این نقطه در دامنه‌ی تابع موجود نیست، پس تابع نقطه‌ی عطف ندارد.

سراسری خارج از کشور - ۹۰

۱۸- گزینه‌ی ۱ مشتق دوم تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$y'=2x+\frac{8}{2\sqrt{x}}=2x+\frac{4}{\sqrt{x}}\Rightarrow y''=2-\frac{4}{2\sqrt{x^3}}$$

$$y''=0\Rightarrow\frac{2}{\sqrt{x^3}}=2\Rightarrow\sqrt{x^3}=1\Rightarrow x=1\Rightarrow y=1+8=9$$

بنابراین نقطه‌ی $(1,9)$ نقطه‌ی عطف تابع است.

۱۹- گزینه‌ی ۲ تابع را به‌صورت دو ضابطه‌ای نوشته و مشتق اول و دوم آن را محاسبه می‌کنیم:

$$y=\begin{cases}\dfrac{x}{1+x} & x\geq 0\\ \dfrac{x}{1-x} & x<0\end{cases}\Rightarrow y'=\begin{cases}\dfrac{1}{(1+x)^2} & x\geq 0\\ \dfrac{1}{(1-x)^2} & x<0\end{cases}\Rightarrow y''=\begin{cases}\dfrac{-2}{(1+x)^3} & x\geq 0\\ \dfrac{2}{(1-x)^3} & x<0\end{cases}$$

حد چپ و راست مشتق اول در صفر برابر یک است، بنابراین تابع در $x=0$ دارای خط مماس است، ضمناً مشتق دوم در اطراف صفر از منفی به مثبت تغییر علامت می‌دهد و تقعر تابع در اطراف صفر عوض می‌شود، پس $x=0$ نقطه‌ی عطف تابع است.

سراسری – ۹۰

۲۰- گزینه‌ی ۴ مشتق اول و دوم تابع را در $x=0$ محاسبه می‌کنیم:

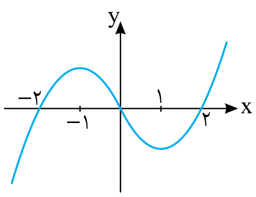
$$y'=\frac{3x^2(x^2+1)-2x(x^3)}{(x^2+1)^2}=\frac{3x^4+3x^2-2x^4}{(x^2+1)^2}=\frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}\Rightarrow y''=\frac{(4x^3+6x)(x^2+1)^2-2\times 2x(x^2+1)(x^4+3x^2)}{(x^2+1)^4}$$

مشتق اول و دوم در $x=0$، هر دو برابر صفر هستند، تنها گزینه‌ی (۴) چنین شرایطی دارد.

سراسری – ۹۱

پاسخ تشریحی آزمون ۶۲

۱- گزینه‌ی ۴ **راه حل اول:** با توجه به ضابطه‌ی تابع، نمودار آن به صورت روبه‌رو است، بنابراین تابع یک ماکزیمم و یک مینیمم نسبی دارد.



راه‌حل دوم:

$$f(x)=\begin{cases}x^2-2x & x\geq 0\\ -x^2-2x & x<0\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2x-2 & x\geq 0\\ -2x-2 & x<0\end{cases}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x=1 \text{ یا } x=-1$$

$$f''(x)=\begin{cases}2 & x\geq 0\\ -2 & x<0\end{cases}\Rightarrow f''(1)>0,\ f''(-1)<0$$

مشتق اول در $x=1$ برابر صفر و مشتق دوم مثبت است، پس این نقطه min است. همچنین مشتق اول در $x=-1$ برابر صفر و مشتق دوم منفی است، پس این نقطه max است.

۲- گزینه‌ی ۳ تابع مورد نظر در تمام نقاط دامنه‌اش پیوسته و مشتق‌پذیر است. داریم:

$$y=\frac{x^2-k}{x^3}\Rightarrow y'=\frac{2x\times x^3-3x^2(x^2-k)}{x^6}\Rightarrow y'=\frac{-x^4+3kx^2}{x^6}\Rightarrow y'=\frac{-x^2+3k}{x^4}$$

تابع مشتق پذیر در نقطه‌ی اکسترمم نسبی خود، مشتق برابر صفر دارد، پس مشتق به ازای $x=k$ برابر صفر است: $-k^2+3k=0\Rightarrow k=0$ یا $k=3$

k نمی‌تواند صفر باشد ($x=0$ در دامنه‌ی تابع نیست)، پس $k=3$.

۳- گزینه‌ی ۳ ابتدا مقدار مشتق تابع را به ازای $x=\frac{2\pi}{5}$ محاسبه می‌کنیم.

$$y'=6\cos 3x-6\cos 2x\xrightarrow{x=\frac{2\pi}{5}}y'=6\cos\frac{6\pi}{5}-6\cos\frac{4\pi}{5}=6\cos(\pi+\frac{\pi}{5})-6\cos(\pi-\frac{\pi}{5})=-6\cos\frac{\pi}{5}+6\cos\frac{\pi}{5}=0$$

حال به محاسبه‌ی مشتق دوم تابع در $x=\frac{2\pi}{5}$ می‌پردازیم:

$$y''=-18\sin 3x+12\sin 2x\xrightarrow{x=\frac{2\pi}{5}}y''=-18\sin\frac{6\pi}{5}+12\sin\frac{4\pi}{5}=-18\sin(\pi+\frac{\pi}{5})+12\sin(\pi-\frac{\pi}{5})=18\sin\frac{\pi}{5}+12\sin\frac{\pi}{5}=30\sin\frac{\pi}{5}>0$$

مشتق اول تابع در $x=\frac{2\pi}{5}$ برابر صفر و مشتق دوم مثبت است، پس تابع در این نقطه دارای مینیمم است.

۴- گزینه‌ی (۳) تابع داده شده در $x=1$ پیوسته است.

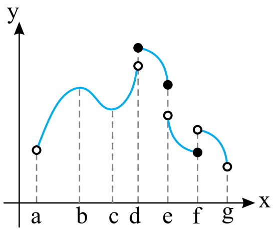
مشتق چپ و راست تابع را در $x=1$ با استفاده از تعریف به‌دست می‌آوریم:

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{|x-1|\sqrt[3]{2-x}}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\sqrt[3]{2-x}=1$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|\sqrt[3]{2-x}}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}-\sqrt[3]{2-x}=-1$$

بنابراین تابع در $x=1$ مشتق ندارد ولی مشتق چپ آن (شیب نیم‌مماس چپ) منفی و مشتق راست آن (شیب نیم‌مماس راست) مثبت است. پس شکل گزینه‌ی (۳) درست است.

۵- گزینه‌ی (۳) نقاط b و d ماکزیمم نسبی و نقاط f و c مینیمم نسبی هستند.



۶- گزینه‌ی (۴) رادیکال را به صورت توان کسری نوشته، سپس مشتق می‌گیریم:

$$y=\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{7}x^2\right)x^{\frac{1}{3}}\Rightarrow y=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-\frac{1}{7}x^{\frac{7}{3}}\Rightarrow y'=x^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}x^{\frac{4}{3}}\Rightarrow y'=x^{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{1}{3}x\right)\Rightarrow y'=\sqrt[3]{x}\left(\frac{3-x}{3}\right)$$

جدول تعیین علامت مشتق به صورت زیر است:

x		0		3	
y'	$-$	$\circ$	$+$	$\circ$	$-$
		min		max	

پس $x=3$ ماکزیمم نسبی است.

۷- گزینه‌ی (۲) مشتق تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=1+\frac{-a}{2-x}$$

با توجه به این‌که f در دامنه‌اش $(x<2)$ تابعی مشتق‌پذیر است، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} f'(1)=0\Rightarrow 1-\frac{a}{1}=0\Rightarrow a=1 \\ f(1)=3\Rightarrow 1+a\ln 1+b=3\Rightarrow b=2 \end{cases}\Rightarrow ab=2$$

۸- گزینه‌ی (۱) مشتق تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$y'=\frac{(4+2x)(x-2a)-(4x+x^2)\times 1}{(x-2a)^2}\Rightarrow y'=\frac{2x^2-4ax+4x-8a-4x-x^2}{(x-2a)^2}=\frac{x^2-4ax-8a}{(x-2a)^2}$$

برای این‌که این تابع مشتق‌پذیر، اکسترمم داشته باشد، باید مشتق تابع، ریشه‌ی غیرمضاعف داشته باشد:

$$\Delta'>0\Rightarrow(-2a)^2-(-8a)>0\Rightarrow 4a^2+8a>0\Rightarrow 4a(a+2)>0\Rightarrow a>0 \text{ یا } a<-2$$

۹- گزینه‌ی (۱) مشتق دوم تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$y'=12x^3-12x^2\Rightarrow y''=36x^2-24x$$

برای آن‌که تقعر تابع رو به پایین باشد، باید y'' منفی باشد:

$$36x^2-24x<0\Rightarrow 3x^2-2x<0\Rightarrow x(3x-2)<0\Rightarrow 0<x<\frac{2}{3}$$

بنابراین تقعر تابع در بازه‌ی $(0,\frac{2}{3})$ رو به پایین است، که طولی برابر $\frac{2}{3}$ دارد.

۱۰- گزینه‌ی (۱) مشتق دوم تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$y'=-4x^3+3mx^2-3x\Rightarrow y''=-12x^2+6mx-3$$

برای آن‌که تقعر منحنی همواره به سمت پایین باشد، می‌بایست همواره y'' نامثبت باشد.

$$-12x^2+6mx-3\le 0\Rightarrow\begin{cases} a<0\Rightarrow -12<0 \\ \Delta'\le 0\Rightarrow 9m^2-36\le 0\Rightarrow m^2\le 4\Rightarrow -2\le m\le 2 \end{cases}$$

توجه: اگر مشتق دوم تابع در یک نقطه برابر صفر شود ولی در هر دو طرف آن نقطه مشتق دوم منفی باشد، تقعر تابع در آن نقطه هم رو به پایین است و آن نقطه، نقطه‌ی عطف نیست.

۱۱- گزینه‌ی ۴ مشتق دوم تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$y'=\ln(3-x)+\frac{-x}{3-x}\Rightarrow y''=\frac{-1}{3-x}+\frac{-3}{(3-x)^2}=\frac{-(3-x)-3}{(3-x)^2}=\frac{x-6}{(3-x)^2}$$

با توجه به دامنه‌ی تابع $(x<3)$، y'' همواره منفی است، پس تقعر تابع در تمام نقاط دامنه‌اش $(-\infty,3)$ رو به پایین است.

۱۲- گزینه‌ی ۱ مشتق دوم تابع را محاسبه می‌کنیم:

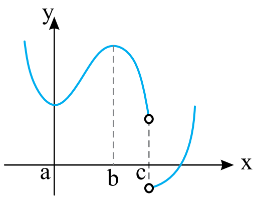
$$y=(x+3)x^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}\Rightarrow y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow y''=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{3}{4}x^{-\frac{3}{2}}=\frac{3}{4\sqrt{x}}-\frac{3}{4\sqrt{x^3}}=\frac{3x-3}{4\sqrt{x^3}}$$

برای آن‌که تقعر تابع رو به پایین باشد، باید y'' منفی باشد.

$$\frac{3x-3}{4\sqrt{x^3}}<0\Rightarrow 3x-3<0\Rightarrow x<1$$

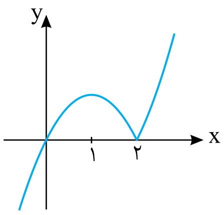
اشتراک محدوده‌ی به‌دست آمده با دامنه‌ی تابع $[0,+\infty)$ بازه‌ی $[0,1)$ است که طول آن برابر یک می‌باشد.

سراسری خارج از کشور – ۹۲



۱۳- گزینه‌ی ۳ جایی که صعودی یا نزولی بودن تابع مشتق عوض شود، مشتقِ مشتق یعنی مشتق دوم تغییر علامت می‌دهد، یعنی جهت تقعر تابع اصلی تغییر می‌کند، با توجه به شکل داده شده، صعودی یا نزولی بودن تابع مشتق در ۳ نقطه‌ی a و b و c عوض می‌شود.

۱۴- گزینه‌ی ۱ **راه حل اول**: با نوشتن تابع به صورت دوضابطه‌ای آن را رسم می‌کنیم.



$$f(x)=x|x-2|=\begin{cases}x^2-2x & x\geq 2\\ -x^2+2x & x<2\end{cases}$$

همان‌طور که از نمودار مشخص است، تقعر تابع فقط در نقطه‌ی $x=2$ عوض می‌شود.

توجه: با توجه به این‌که تابع در $x=2$ خط مماس ندارد این نقطه، نقطه‌ی عطف نیست.

راه‌حل دوم:

$$f(x)=\begin{cases}x^2-2x & x\geq 2\\ -x^2+2x & x<2\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2x-2 & x>2\\ -2x+2 & x<2\end{cases}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}2 & x\geq 2\\ -2 & x<2\end{cases}$$

مشتق دوم (تقعر تابع) فقط در $x=2$ تغییر علامت می‌دهد.

۱۵- گزینه‌ی ۲ مشتق دوم تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$y=x\sqrt{x^2+2}\Rightarrow y'=\sqrt{x^2+2}+x\times\frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}=\frac{x^2+2+x^2}{\sqrt{x^2+2}}=\frac{2x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}$$

$$y''=\frac{4x\sqrt{x^2+2}-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}\times(2x^2+2)}{x^2+2}=\frac{4x(x^2+2)-x(2x^2+2)}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}=\frac{2x^3+6x}{\sqrt{(x^2+2)^3}}=\frac{2x(x^2+3)}{\sqrt{(x^2+2)^3}}$$

برای آن‌که تقعر تابع رو به بالا باشد، می‌بایست مشتق دوم مثبت باشد.

$$y''>0\Rightarrow\frac{2x(x^2+3)}{\sqrt{(x^2+2)^3}}>0\Rightarrow x>0$$

بنابراین تقعر تابع در بازه‌ی $(0,+\infty)$ رو به بالا است.

سراسری – ۹۲

۱۶- گزینه‌ی ۳ خط مماس در نقطه‌ی عطف از تابع عبور می‌کند، برای یافتن نقطه‌ی عطف، مشتق دوم تابع را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$y'=3x^2+\frac{6}{x}\Rightarrow y''=6x-\frac{6}{x^2}\xrightarrow{y''=0}6x=\frac{6}{x^2}\Rightarrow x^3=1\Rightarrow x=1$$

بنابراین طول نقطه‌ی عطف برابر یک است، عرض نقطه‌ی عطف برابر است با:

$$y=1^3+6\ln 1=1$$

بنابراین $(1,1)$ نقطه‌ی عطف تابع است، برای پیدا کردن شیب خط مماس در این نقطه مشتق تابع را در این نقطه محاسبه می‌کنیم:

$$y'=3x^2+\frac{6}{x}\xrightarrow{x=1}y'=9$$

بنابراین معادله‌ی خط مماس در نقطه‌ی $(1,1)$ خط روبه‌رو است:

$$y-1=9(x-1)\Rightarrow y=9x-8$$

۱۷- گزینه‌ی (۲) ابتدا مشتق دوم تابع را پیدا می‌کنیم:

$$y'=2ax-\frac{9}{3\sqrt[3]{x^2}}=2ax-3x^{-\frac{2}{3}}\Rightarrow y''=2a+2x^{-\frac{5}{3}}=2a+\frac{2}{\sqrt[3]{x^5}}$$

مشتق دوم در نقطه‌ی عطف صفر است، ضمناً نقطه‌ی عطف در ضابطه‌ی تابع صدق می‌کند.

$$\begin{cases} f''(-1)=0\Rightarrow 2a+\dfrac{2}{\sqrt[3]{-1}}=0\Rightarrow 2a=2\Rightarrow a=1 \\ f(-1)=2\Rightarrow a-9\sqrt[3]{-1}+b=2\Rightarrow a+b=-7 \end{cases}\Rightarrow b=-8\Rightarrow a-b=9$$

۱۸- گزینه‌ی (۱) مشتق اول و دوم تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} x^3-a & x\geq 1 \\ bx-x^2 & x<1 \end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 3x^2 & x\geq 1 \\ b-2x & x<1 \end{cases}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases} 6x & x\geq 1 \\ -2 & x<1 \end{cases}$$

مشتق دوم به ازای اعداد بزرگ‌تر از یک، مثبت و به ازای اعداد کوچک‌تر از یک، منفی است. یعنی تقعر بعد از یک، رو به بالا و قبل از آن رو به پایین است. بنابراین تنها $x=1$ ممکن است نقطه‌ی عطف تابع باشد. برای آن‌که نقطه‌ای عطف باشد می‌بایست خط مماس در آن نقطه موجود باشد، یعنی تابع می‌بایست در $x=1$ پیوسته بوده و مشتق چپ و راست آن برابر باشد.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\Rightarrow 1-a=b-1\Rightarrow a+b=2 \\ f'_+(1)=f'_-(1)\Rightarrow 3=b-2\Rightarrow b=5 \end{cases}\Rightarrow a=-3\Rightarrow ab=-15$$

۱۹- گزینه‌ی (۴) مشتق دوم تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$y'=4x^3+3ax^2+12x\Rightarrow y''=12x^2+6ax+12=6(2x^2+ax+2)$$

برای آن‌که تابع، نقطه‌ی عطف نداشته باشد، می‌بایست مشتق دوم تغییر علامت ندهد، یعنی معادله‌ی $2x^2+ax+2=0$ نباید ریشه‌ی ساده داشته باشد، پس:

$$\Delta\leq 0\Rightarrow a^2-4\times 2\times 2\leq 0\Rightarrow a^2\leq 16\Rightarrow -4\leq a\leq 4$$

۲۰- گزینه‌ی (۲) مشتق دوم تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$y=(\frac{1}{14}x^2+1)\sqrt[3]{x}=\frac{1}{14}x^{\frac{7}{3}}+x^{\frac{1}{3}}\Rightarrow y'=\frac{1}{6}x^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\Rightarrow y''=\frac{2}{9}x^{\frac{1}{3}}-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}=\frac{2}{9}(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}})\Rightarrow y''=\frac{2}{9}(\frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x^5}})$$

جدول تعیین علامت y'' به صورت زیر است:

x		-1		0		1	
y''	$-$	0	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$

تقعر تابع (مشتق دوم) در نقاط $x=0,1,-1$ تغییر می‌کند، هر سه نقطه در دامنه‌ی تابع هستند و مشتق در نقطه‌ی ۱ و -1 موجود است، پس تابع در این دو نقطه دارای خط مماس است. مشتق اول تابع در نقطه‌ی صفر وجود ندارد ولی داریم:

$$y'=\frac{1}{6}\sqrt[3]{x^4}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{x^2+2}{6\sqrt[3]{x^2}}\xrightarrow{x\to 0}y'\to+\infty$$

مشتق چپ و راست تابع در $x=0$ برابر $+\infty$ است، پس تابع در $x=0$ دارای خط مماس عمودی است و $x=0$ نیز نقطه‌ی عطف است.

پاسخ تشریحی آزمون ۶۳

۱- گزینه‌ی (۲) نمودار داده شده نزولی اکید است، پس مشتق آن همواره منفی است. مشتق یک عبارت درجه‌ی سوم، درجه‌ی ۲ می‌باشد و برای این‌که یک عبارت درجه‌ی ۲ همواره منفی باشد، می‌بایست: $\Delta<0$ و $a<0$ فقط در گزینه‌ی ۲ دلتای مشتق منفی است.

$$y=-x^3+x^2-x+1\Rightarrow y'=-3x^2+2x-1\Rightarrow\Delta=4-12=-8<0$$

۲- گزینه‌ی (۳) نمودار داده شده فقط در یک نقطه مماس افقی دارد، یعنی مشتق تابع فقط یک ریشه‌ی مضاعف دارد:

$$y'=3x^2+2ax+b\xrightarrow{\Delta'=0}a^2-3b=0\Rightarrow a^2=3b$$

از بین گزینه‌های داده شده فقط (a,b) داده شده در گزینه‌ی (۳) در معادله‌ی بالا صدق می‌کند: $(-6)^2=3\times 12$

۳- گزینه‌ی ۴ تابع دارای ماکزیمم نسبی با طول منفی و مینیمم نسبی با طول مثبت است، پس مشتق این تابع دو ریشه‌ی مختلف‌العلامه دارد.

$$y'=۲x^۲+۲ax+b\Rightarrow\begin{cases}\Delta'>۰\Rightarrow a^۲-۲b>۰\\ P<۰\Rightarrow\frac{b}{۲}<۰\Rightarrow b<۰\end{cases}$$

تنها گزینه‌های (۱) و (۴) شرایط را دارا هستند.

ضمناً با توجه به شکل طول نقطه‌ی عطف منفی است، پس:

$$\frac{-a}{۳\times\frac{۲}{۳}}<۰\Rightarrow\frac{-a}{۲}<۰\Rightarrow a>۰$$

تنها گزینه‌ی (۴) در همه‌ی شرایط صدق می‌کند.

۴- گزینه‌ی ۱ مرکز تقارن تابع درجه‌ی سوم همان نقطه‌ی عطف تابع یعنی نقطه‌ی $(\frac{-b}{۳a},f(\frac{-b}{۳a}))$ می‌باشد.

$$\frac{-b}{۳a}=\frac{+۳}{۳}=۱\Rightarrow f(۱)=۱-۳+k=k-۲$$

بنابراین مرکز تقارن تابع نقطه‌ی $(۱,k-۲)$ است که روی خط $y=x-۲$ قرار دارد: $k-۲=۱-۲\Rightarrow k=۱$

۵- گزینه‌ی ۱ تابع در $x=۰$ دارای ماکزیمم نسبی است، پس $f'(۰)=۰$

حال به محاسبه‌ی مقدار مینیمم نسبی تابع می‌پردازیم:

$$f'(x)=-۳x^۲+۶ax+b\xrightarrow{f'(۰)=۰}b=۰$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow-۳x^۲+۶ax=۰\Rightarrow x(-۳x+۶a)=۰\xrightarrow{x\neq۰}x=۲a\Rightarrow f(۲a)=-۸a^۳+۱۲a^۳+۴\Rightarrow f(۲a)=۴a^۳+۴$$

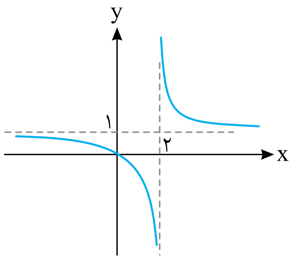
از جایی که مقدار مینیمم نسبی تابع برابر صفر است، پس:

$$۴a^۳+۴=۰\Rightarrow a^۳=-۱\Rightarrow a=-۱$$

۶- گزینه‌ی ۳ تابع هموگرافیک داده شده دارای دو مجانب قائم و افقی $x=۲$ و $y=۱$ است و داریم:

$$ad-bc=۱\times(-۲)-۰\times۱=-۲<۰$$

بنابراین نمودار تابع دارای ۲ شاخه‌ی نزولی است ضمناً تابع از مبدأ مختصات می‌گذرد $(f(۰)=۰)$ پس طبق شکل مقابل نمودار، از ناحیه‌ی سوم عبور نمی‌کند.



۷- گزینه‌ی ۲ تابع هموگرافیک داده شده دارای مجانب قائم $x=\frac{۲}{a-۱}$ و مجانب افقی $y=\frac{a}{a-۱}$ است. مرکز تقارن تابع هموگرافیک محل تقاطع مجانب‌های آن یعنی نقطه‌ی $(\frac{۲}{a-۱},\frac{a}{a-۱})$ است، این نقطه روی نیمساز ربع اول (خط $y=x$) است، پس:

$$\frac{۲}{a-۱}=\frac{a}{a-۱}\Rightarrow a=۲$$

بنابراین تابع به‌صورت $y=\frac{۲x-۲}{x-۲}$ است. این تابع محور xها را در نقطه‌ی $(۱,۰)$ و محور yها را در نقطه‌ی $(۰,۱)$ قطع می‌کند که فاصله‌ی این دو نقطه برابر است با:

$$\sqrt{(۱-۰)^۲+(۰-۱)^۲}=\sqrt{۲}$$

۸- گزینه‌ی ۴ برای این‌که تابع در بازه‌ی $(-\infty,۲)$ یکنوا باشد، می‌بایست ریشه‌ی مخرج $(-a)$ در این بازه قرار نگیرد، پس $-a\geq۲$ یعنی $a\leq-۲$

ضمناً برای این‌که این تابع هموگرافیک صعودی باشد، می‌بایست علامت $ad-bc$ مثبت باشد. $۲\times a-(a-۳)\times۱>۰\Rightarrow۲a-a+۳>۰\Rightarrow a>-۳$

بنابراین داریم: $-۳<a\leq-۲$

۹- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول**: تابع $y=x(۳-x)(x-۱)^۲$ دارای سه ریشه‌ی صفر و یک و سه است که ریشه‌ی یک (ریشه‌ی وسطی) مضاعف است و تابع در $x=۱$ که بین دو ریشه‌ی ساده قرار دارد، بر محور طول‌ها مماس است.

راه‌حل دوم: جدول تعیین علامت تابع به صورت زیر است:

x		۰		۱		۳	
y	−	۰	+	۰	+	۰	−

فقط نمودار داده شده در گزینه‌ی (۳)، دارای چنین جدول تعیین علامتی است.

۱۰- گزینه‌ی ۱ $x=۰$، نقطه‌ی عطف تابع مورد نظر است، پس $f''(۰)=۰$

$$f'(x)=x^۳+۳ax^۲+۲bx\Rightarrow f''(x)=۳x^۲+۶ax+۲b\xrightarrow{f''(۰)=۰}b=۰$$

ضمناً نقطه‌ای با طول ۳ اکسترمم تابع است، پس $f'(۳)=۰$

$$f'(x)=x^۳+۳ax^۲\xrightarrow{f'(۳)=۰}۲۷+۲۷a=۰\Rightarrow a=-۱\Rightarrow a+b=-۱$$

سراسری – ۹۰

۱۱- گزینه‌ی ۳ نمودار داده شـده در مبدأ مختصات بر محور x ها مماس اسـت، پس تابع دارای ریشه‌ی مضاعف صفر است. بین گزینه‌های داده شده، فقط گزینه‌ی (۳) $y=\frac{x^۲}{x^۲+۱}$ دارای ریشه‌ی مضاعف صفر می‌باشد.

۱۲- گزینه‌ی ۴ تابع در $x=۱$ دارای اکسترمم نسبی است و مشتق تابع در یک برابر صفر است:

$$y'=a-\frac{b}{x^۲}\xrightarrow{x=۱}۰=a-b\Rightarrow a=b$$

بنابراین ضابطه‌ی تابع به‌صورت $y=a(x+\frac{۱}{x})$ است. طول اکسترمم دیگر این تابع برابر با -۱ است زیرا:

$$y'=۰\Rightarrow a(۱-\frac{۱}{x^۲})=۰\Rightarrow x^۲=۱\Rightarrow x=\pm۱$$

با توجه به شکل تابع، عرض نقطه‌ی مینیمم نسبی تابع برابر ۴ است، پس تابع از نقطه‌ی $(-۱,۴)$ می‌گذرد:

$$a(-۱+\frac{۱}{-۱})=۴\Rightarrow a=-۲\Rightarrow b=-۲\Rightarrow ۲a-۳b=۲$$

۱۳- گزینه‌ی ۳ طول اکسترمم نسبی تابع مورد نظر، برابر یک است، پس مشتق تابع در نقطه‌ی یک برابر صفر است.

$$y'=\frac{a(x^۲+b)-۲x(ax)}{(x^۲+b)^۲}=\frac{ax^۲+ab-۲ax^۲}{(x^۲+b)^۲}=\frac{-ax^۲+ab}{(x^۲+b)^۲}\xrightarrow{x=۱}\frac{-a+ab}{(b+۱)^۲}=۰\Rightarrow ab=a\xrightarrow{a\neq۰}b=۱$$

ضمناً تابع از نقطه‌ی $(۱,۲)$ می‌گذرد، پس:

$$۲=\frac{a\times۱}{۱+۱}\Rightarrow a=۴\Rightarrow a+b=۵$$

۱۴- گزینه‌ی ۲ مبدأ مختصات ماکزیمم نسبی این تابع است، پس مشتق تابع در صفر برابر صفر است.

$$y'=\frac{(-۲x+a)(x+b)-۱\times(-x^۲+ax)}{(x+b)^۲}\xrightarrow{x=۰}۰=\frac{ab}{b^۲}\xrightarrow{b\neq۰}\frac{a}{b}=۰\Rightarrow a=۰$$

بنابراین ضابطه‌ی تابع $y=\frac{-x^۲}{x+b}$ است.

با تقسیم صورت بر مخرج می‌توان پی‌برد که خط $y=-x+b$ مجانب مایل این تابع است. عرض از مبدأ خط برابر ۲ است، پس $b=۲$.

$$\begin{array}{r|l} -x^۲ & x+b \\ \cline{2-2} \underline{+x^۲+bx} & -x+b \\ bx & \\ \underline{-bx-b^۲} & \\ -b^۲ & \end{array}$$

۱۵- گزینه‌ی ۲ خط $x=۱$ مجانب قائم این تابع اسـت، بنابراین یک ریشـه‌ی مخرج تابع است، پس $b=-۱$ و تابع به صورت $f(x)=\frac{x^۲+a}{x-۱}$ است.

ضمناً تابع در هیچ نقطه‌ای دارای خط مماس افقی نیست پس مشتق هیچ‌گاه صفر نمی‌شود.

$$f'(x)=\frac{۲x(x-۱)-(x^۲+a)}{(x-۱)^۲}=\frac{x^۲-۲x-a}{(x-۱)^۲}$$

برای آن‌که مشتق تابع، ریشه نداشته باشد، می‌بایست دلتای صورت کسر منفی باشد: $\Delta<۰\Rightarrow ۴+۴a<۰\Rightarrow a<-۱$

سراسری خارج از کشور - ۹۰

۱۶- گزینه‌ی ۲ محور x ها مجانب افقی تابع است، پس باید درجه‌ی مخرج از درجه‌ی صورت بیش‌تر باشد، پس $a=۰$. ضمناً خط $y=-۲$ بر نمودار تابع مماس است، پس معادله‌ی $\frac{bx}{x^۲+۴}=-۲$ ریشه‌ی مضاعف دارد:

$$\frac{bx}{x^۲+۴}=-۲\Rightarrow -۲x^۲-۸=bx\Rightarrow ۲x^۲+bx+۸=۰\xrightarrow{\Delta=۰}b^۲-۶۴=۰\Rightarrow b=\pm۸$$

تابع برای x های مثبت، مقداری منفی دارد، پس b باید عددی منفی باشد؛ $b=-۸$

۱۷- گزینه‌ی ۴ تابع از نقطه‌ی $(2,0)$ می‌گذرد، پس:

$$2a+2=0\Rightarrow a=-1$$

نقطه‌ای با طول صفر اکسترمم تابع است، پس مشتق تابع در نقطه‌ای با طول صفر برابر صفر است.

$$y'=\frac{-(x^2-bx+1)-(2x-b)(-x+2)}{(x^2-bx+1)^2}\xrightarrow{x=0}0=\frac{-1+2b}{1}\Rightarrow b=\frac{1}{2}$$

۱۸- گزینه‌ی ۲ خطوط $x=1$ و $x=-1$ مجانب‌های قائم تابع هستند، پس $x=\pm 1$ ریشه‌های مخرج تابع هستند، یعنی مخرج کسر عبارت x^2-1 است یعنی $b=0$ و $c=-1$.
خط مماس در محل تقاطع تابع با محور y ها افقی است، پس مشتق تابع به ازای صفر برابر صفر است.

$$y=\frac{ax+1}{x^2-1}\Rightarrow y'=\frac{a(x^2-1)-2x(ax+1)}{(x^2-1)^2}\xrightarrow{y'(0)=0}-a-0=0\Rightarrow a=0$$

بنابراین $a+b+c=-1$

۱۹- گزینه‌ی ۳ نمودار تابع $y=a\sqrt{x^3}+b\sqrt{x}$ از نقطه‌ی $(1,2)$ می‌گذرد پس: $a+b=2$ ضمناً $(1,2)$، نقطه‌ی عطف این تابع اســت، پس مشــتق دوم تابع به ازای یک برابر صفر است.

$$y'=\frac{3}{2}ax^{\frac{1}{2}}+\frac{b}{2}x^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow y''=\frac{3}{4}ax^{-\frac{1}{2}}-\frac{b}{4}x^{-\frac{3}{2}}\xrightarrow{x=1}0=\frac{3}{4}a-\frac{b}{4}\Rightarrow b=3a$$

با توجه به دو معادله‌ی به‌دست آمده داریم:

$$\begin{cases}b=3a\\ a+b=2\end{cases}\Rightarrow 4a=2\Rightarrow a=\frac{1}{2}\Rightarrow b=\frac{3}{2}$$

سراسری خارج از کشور – ۹۲

۲۰- گزینه‌ی ۳ ابتدا مشتق تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$y'=a\frac{(2x+b)}{\sqrt[3]{(x^2+bx)^2}}$$

با استفاده از نمودار تابع خط مماس در دو نقطه‌ی $x=0$ و $x=1$ عمودی است پس مشتق در این دو نقطه برابر بی‌نهایت است و مخرج کسر به ازای $x=1$ برابر صفر است، پس:

$$\sqrt[3]{(1+b)^2}=0\Rightarrow b=-1$$

برای یافتن نقطه‌ی اکسترمم داریم:

$$y'=a(\frac{2x-1}{\sqrt[3]{(x^2-x)^2}})\xrightarrow{y'=0}x=\frac{1}{2}$$

عرض نقطه‌ی اکسترمم برابر -1 است، پس تابع از نقطه‌ی $(\frac{1}{2},-1)$ می‌گذرد:

$$y=a\sqrt[3]{x^2-x}\xrightarrow{(\frac{1}{2},-1)}-1=a\sqrt[3]{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}\Rightarrow -1=a^3(\frac{1}{4}-\frac{2}{4})\Rightarrow a^3=4\Rightarrow a^3+b^3=4-1=3$$

پاسخ تشریحی آزمون ٦٤

۱- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول**: جدول تغییرات تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$y'=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$$

x		1		3	
y'	+	0	−	0	+
y	↗	max	↘	min	↗

بنابراین تابع در $x=3$ دارای مینیمم نسبی است و مقدار این مینیمم برابر $f(3)=27-54+27=0$ است، پس گزینه‌ی (۲) نمودار این تابع است.

راه‌حل دوم: $y=x^3-6x^2+9x=x(x^2-6x+9)=x(x-3)^2$ تابع داده شــده در نقطه‌ی صفر محور x ها را قطع می‌کند و در نقطه‌ای با طول ۳، بر محور x ها مماس است. فقط نمودار گزینه‌ی (۲) این شرایط را داراست.

۲- گزینه‌ی ۱ نمودار داده شده نزولی اکید است، پس باید مشتق تابع همواره منفی باشد.

$$y'=3ax^2+2bx-4$$

برای این‌که این عبارت درجه دوم همواره منفی باشد، می‌بایست؛

$$\Delta'<0\Rightarrow b^2+12a<0 \quad , \quad a<0$$

فقط گزینه‌ی (۱) در هر دو نامعادله صدق می‌کند.

سراسری خارج از کشور - ۸۹

۳- گزینه‌ی ۴ مجموع مقادیر ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع درجه سوم، دو برابر عرض نقطه‌ی عطف تابع است، طول نقطه‌ی عطف تابع درجه ۳ برابر $\frac{-b}{3a}=\frac{+3}{3}=1$ است، و عرض نقطه‌ی عطف برابر $f(1)$ است:

$$2f(1)=2\Rightarrow 2(1-3\times1-k\times1-2k)=2\Rightarrow -4-6k=2\Rightarrow k=-1$$

بنابراین تابع به صورت $y=x^3-3x^2+x+2$ می‌باشد. از بین گزینه‌های داده شده تابع به ازای $x=2$ برابر صفر است، پس تابع در نقطه‌ای با طول ۲ محور x ها را قطع می‌کند.

۴- گزینه‌ی ۴ خط مماس رسم شده در محل تقاطع تابع با محور y ها در دو طرف نمودار تابع است، پس نقطه‌ای با طول صفر نقطه‌ی عطف تابع است.

$$\frac{-a}{3\times1}=0\Rightarrow a=0$$

شیب خط مماس در نقطه‌ی عطف برابر مشتق تابع در $x=0$ است.

$$y'=3x^2+b\xrightarrow{x=0}y'=b$$

پس شیب خواسته شده برابر b می‌باشد. برای یافتن b، می‌بایست مقدار مینیمم نسبی تابع را به دست آوریم.

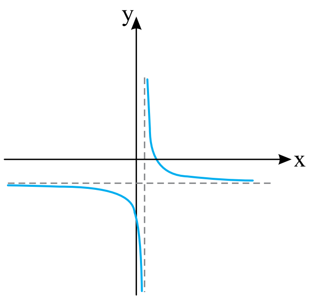
$$y'=3x^2+b\xrightarrow{y'=0}3x^2=-b\Rightarrow x^2=\frac{-b}{3}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{-b}{3}}$$

با توجه به نمودار تابع مقدار مثبت $\left(x=\sqrt{\frac{-b}{3}}\right)$ مربوط به مینیمم نسبی تابع است، مقدار مینیمم نسبی تابع برابر صفر است:

$$f\left(\sqrt{\frac{-b}{3}}\right)=0\Rightarrow\left(\sqrt{\frac{-b}{3}}\right)^3+b\sqrt{\frac{-b}{3}}+2=0\Rightarrow\frac{-b}{3}\sqrt{\frac{-b}{3}}+b\sqrt{\frac{-b}{3}}=-2\Rightarrow\sqrt{\frac{-b}{3}}\times\frac{2b}{3}=-2$$

با توجه به گزینه‌های داده شده برای شیب خط مماس در نقطه‌ی عطف که همان b می‌باشد فقط مقدار $b=-3$ در معادله‌ی به دست آمده صدق می‌کند.

۵- گزینه‌ی ۲ اگر تابع داده شده را به صورت صریح بنویسیم؛ ضابطه‌ی تابع به صورت یک تابع هموگرافیک می‌باشد:



$$4xy-y=2-3x\Rightarrow y(4x-1)=-3x+2\Rightarrow y=\frac{-3x+2}{4x-1}$$

این تابع دارای مجانب افقی $y=\frac{-3}{4}$ و مجانب قائم $x=\frac{1}{4}$ اســـت و از نقطه‌ی $(0,-2)$ می‌گذرد، ضمناً با توجه به علامت $ad-bc=3-8<0$ تابع دارای دو شاخه‌ی نزولی است، پس نمودار آن به‌صورت روبه‌رو می‌باشد.

همان‌طور که مشخص است، این تابع از ناحیه‌ی دوم عبور نمی‌کند.

۶- گزینه‌ی ۴ ابتدا تابع را به صورت یک کسر می‌نویسیم:

$$y=ax-\frac{x^2+a}{2x-1}=\frac{ax(2x-1)-x^2-a}{2x-1}=\frac{(2a-1)x^2-ax-a}{2x-1}$$

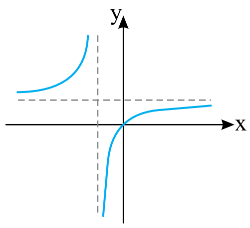
برای آن‌که ضابطه‌ی به دست آمده هموگرافیک باشد، می‌بایست صورت کسر نیز از درجه‌ی اول باشد، پس:

$$2a-1=0\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

بنابراین ضابطه‌ی تابع به صورت زیر است:

$$y=\frac{\frac{-1}{2}x-\frac{1}{2}}{2x-1}\Rightarrow y=\frac{-x-1}{4x-2}$$

مرکز تقارن این تابع $\left(\frac{-d}{c},\frac{a}{c}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{4}\right)$ روی خط $2y=-x$ است.



۷- گزینه‌ی ۱ **راه حل اول:** تابع $y=\frac{x}{x+۱}$ یک تابع هموگرافیک با دو شاخه‌ی صعودی $(ad-bc=۱>۰)$ و دارای مجانب قائم $x=-۱$ و مجانب افقی $y=۱$ اســت، ضمناً این تابع از مبدأ مختصات می‌گذرد، بنابراین نمودار $y=\frac{x}{x+۱}$ به صورت روبه‌رو می‌باشد.

با توجه به قوانین رســم نمودار برای کشــیدن $y=f(|x|)$ از روی $y=f(x)$ کافی اســت سمت چپ محور y ها را پاک کرده و سمت راست را در سمت چپ نیز قرینه کنیم، بنابراین شکل $y=\frac{|x|}{|x|+۱}$ به صورت گزینه‌ی (۱) درمی‌آید.

راه حل دوم: تابع از مبدأ مختصات گذشــته و دارای مجانب افقی اســت، ضمناً با اســتفاده از تعریف مشتق، مشتق‌های چپ و راست تابع در صفر نابرابر است (یک و منفی یک)، پس تابع در $x=۰$ خط مماس ندارد و دارای شکستگی است، این خصوصیات فقط در گزینه‌ی (۱) موجود است.

۸- گزینه‌ی ۲ ابتدا ضابطه‌ی تابع را تجزیه می‌کنیم:

$$y=(x-۱)(x^۲-۱)(x^۳-۱)\Rightarrow y=(x-۱)(x-۱)(x+۱)(x-۱)(x^۲+x+۱)\Rightarrow y=(x-۱)^۳(x+۱)(x^۲+x+۱)$$

عبارت درجه دوم $x^۲+x+۱$ فاقد ریشه است $(\Delta<۰)$، پس تابع دارای ریشه‌ی ساده‌ی -۱ و ریشه‌ی مکرر فرد ۱ است، ضمناً جدول تعیین علامت تابع به صورت زیر است:

x		-۱		۱	
y	+	۰	−	۰	+

۹- گزینه‌ی ۱ مبدأ مختصات، نقطه‌ی عطف این نمودار است، پس مشتق دوم در صفر برابر صفر است.

$$y'=۴ax^۳+۶x^۲+۲bx\Rightarrow y''=۱۲ax^۲+۱۲x+۲b\xrightarrow{x=۰}۰=۲b\Rightarrow b=۰$$

با توجه به نمودار تابع، خط مماس در $x=۳$ و $x=۰$ افقی است، پس مشتق تابع دارای دو ریشه‌ی صفر و سه است:

$$y'=۴ax^۳+۶x^۲=x^۲(۴ax+۶)\xrightarrow{y'(۳)=۰}۱۲a+۶=۰\Rightarrow a=\frac{-۱}{۲}$$

سراسری - ۹۲

۱۰- گزینه‌ی ۴ خـط و تابـع همدیگر را روی محورها قطع می‌کنند، عرض از مبدأ و طول از مبدأ خط برابر یک اســت. پس دو نقطه‌ی $(۱,۰)$ و $(۰,۱)$ روی تابع هستند. اگر تابع را به صورت $f(x)=ax^۴+bx^۳+cx^۲+dx+e$ در نظر بگیریم، داریم:

$$f(۰)=۱\Rightarrow e=۱$$

تابع در $x=۰$ بر خط $y=۱-x$ مماس است، پس مشتق تابع در نقطه‌ی $(۰,۱)$ برابر شیب خط (-۱) است.

$$f'(x)=۴ax^۳+۳bx^۲+۲cx+d\xrightarrow{f'(۰)=-۱}d=-۱$$

خط مماس بر تابع در نقطه‌ی $(۰,۱)$ در دو طرف تابع قرار دارد، پس $(۰,۱)$ نقطه‌ی عطف تابع است و مشتق دوم در این نقطه برابر صفر است.

$$f''(x)=۱۲ax^۲+۶bx+۲c\xrightarrow{f''(۰)=۰}c=۰$$

حال با توجه به این‌که $(۱,۰)$ در معادله‌ی تابع صدق می‌کند و مشتق تابع در این نقطه برابر صفر است، داریم:

$$f(x)=ax^۴+bx^۳-x+۱\xrightarrow{f(۱)=۰}a+b-۱+۱=۰\Rightarrow b=-a$$

$$f'(x)=۴ax^۳+۳bx^۲-۱\xrightarrow{f'(۱)=۰}۴a+۳b-۱=۰\xrightarrow{b=-a}۴a-۳a=۱\Rightarrow a=۱\ ,\ b=-۱$$

در نتیجه ضابطه‌ی تابع $f(x)=x^۴-x^۳-x+۱$ است، بنابراین:

$$f(-۱)=۱-(-۱)-(-۱)+۱=۴$$

۱۱- گزینه‌ی ۲ $y=۰$ مجانب افقی تابع است پس باید درجه‌ی مخرج از صورت بیش‌تر باشد یعنی $a=۰$.

از جایی‌که نمودار تابع محور x ها را قطع نمی‌کند، پس معادله‌ی $y=۰$ جواب ندارد. با توجه به این‌که صورت کســر درجه‌ی اول اســت، این حالت تنها وقتی اتفاق می‌افتد که $b=۰$. حال، به محاسبه‌ی مشتق می‌پردازیم:

$$f(x)=\frac{-۲}{x^۲+cx+۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{-(۲x+c)(-۲)}{(x^۲+cx+۱)^۲}\xrightarrow{f'(\frac{-۱}{۲})=۰}۲\left(۲(\frac{-۱}{۲})+c\right)=۰\Rightarrow c=۱$$

۱۲- گزینه‌ی ۲ $x=2$ مجانب قائم تابع است، پس نقطه‌ی $(2,0)$ محل تلاقی مجانب قائم و مایل تابع است. با توجه به این‌که علاوه بر $(2,0)$، نقطه‌ی $(0,-2)$ نیز روی مجانب مایل تابع است، پس معادله‌ی مجانب مایل برابر است با:

$$y-0=\frac{0+2}{2-0}(x-2)\Rightarrow y=x-2$$

حال با استفاده از تقسیم صورت بر مخرج معادله‌ی مجانب مایل را از روی ضابطه‌ی آن پیدا می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l} ax^2+bx & x-2 \\ \underline{-ax^2+2ax} & ax+(2a+b) \\ (2a+b)x & \\ \underline{-(2a+b)x+4a+2b} & \\ \qquad 4a+2b & \end{array}$$

در نتیجه خط $y=ax+(2a+b)$ همان مجانب مایل تابع یعنی خط $y=x-2$ است، بنابراین:

$$\begin{cases} a=1 \\ 2a+b=-2 \end{cases}\Rightarrow b=-4$$

۱۳- گزینه‌ی ۴ $y=1$ مجانب افقی تابع است، پس ضریب بزرگ‌ترین درجه‌ی صورت تقسیم بر ضریب بزرگ‌ترین درجه‌ی مخرج مساوی یک است، پس $\frac{1}{b}=1$ و در نتیجه $b=1$. ضمناً تابع بر محور طول‌ها مماس است، پس معادله‌ی $y=0$ ریشه‌ی مضاعف دارد.

$$y=0\Rightarrow x^2+ax+1=0\xrightarrow{\Delta=0}a^2-4=0\Rightarrow a=2 \text{ یا } a=-2$$

برای آن‌که این ریشه‌ی مضاعف $(-\frac{a}{2})$ مطابق شکل مقداری منفی باشد باید a عددی مثبت باشد، پس $a=2$.

برای یافتن مقدار c کافی است به این نکته توجه کنیم که $x=0$ مجانب قائم و ریشه‌ی مخرج کسر است، پس $c=0$ و در نتیجه $a+b-c=3$.

۱۴- گزینه‌ی ۲ تابع فقط یک مجانب قائم دارد، پس مخرج کسر فقط یک ریشه‌ی مضاعف دارد.

$$x^2-ax+4=0\xrightarrow{\Delta=0}a^2-16=0\Rightarrow a=\pm 4$$

$y=a$ مجانب افقی تابع است، که با توجه به نمودار a باید مقداری مثبت باشد، پس $a=4$ ضمناً عرض اکسترمم تابع برابر -1 است، پس معادله‌ی $y=-1$ ریشه‌ی مضاعف دارد:

$$\frac{4x^2+bx-4}{x^2-4x+4}=-1\Rightarrow 4x^2+bx-4=-x^2+4x-4\Rightarrow 5x^2+(b-4)x=0\xrightarrow{\Delta=0}b-4=0\Rightarrow b=4$$

توجه: برای یافتن b، می‌توان از صفر بودن مشتق تابع در نقطه‌ی $x=0$ نیز استفاده کرد.

۱۵- گزینه‌ی ۱ با توجه به نمودار $x=-1$ مجانب قائم تابع است، یعنی منفی یک ریشه‌ی مخرج است، پس $b=1$.

با تقسیم صورت بر مخرج، مجانب مایل را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{array}{l|l} 2x^2+ax & x+1 \\ \underline{-2x^2-2x} & 2x+(a-2) \\ (a-2)x & \\ \underline{-(a-2)x-(a-2)} & \\ \qquad 2-a & \end{array}$$

بنابراین $y=2x+(a-2)$ مجانب مایل تابع است، با توجه به نمودار تابع مجانب مایل دارای عرض از مبدأ -1 می‌باشد، پس $a-2=-1$ و در نتیجه $a=1$

۱۶- گزینه‌ی ۱ نقطه‌ای با طول -1 در دامنه‌ی تابع نیست ولی تابع در این نقطه مجانب قائم ندارد. پس -1 هم ریشه‌ی صورت و هم ریشه‌ی مخرج است.

$$(-1)^2-a(-1)-2=0\Rightarrow 1+a-2=0\Rightarrow a=1$$

$$(-1)^2-b(-1)+c=0\Rightarrow 1+b+c=0\Rightarrow b+c=-1 \qquad (I)$$

از طرفی $x=1$ مجانب قائم تابع است، بنابراین عدد یک، ریشه‌ی دیگر مخرج می‌باشد.

$$\begin{cases} 1^2-b(1)+c=0\Rightarrow c-b=-1 \\ (I):\qquad b+c=-1 \end{cases}\Rightarrow b=0 \ , \ c=-1 \Rightarrow a+b+c=0$$

۱۷- گزینه‌ی ۳ تابع در $x\to+\infty$ دارای مجانب افقی $y=0$ است، پس حد تابع در $+\infty$ باید برابر صفر باشد. با استفاده از هم‌ارزی $\sqrt{4x^2+1}\sim|2x|$ در بی‌نهایت داریم:

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}|2x|+ax=\lim_{x\to+\infty}(a+2)x$$

برای آن‌که حد فوق برابر صفر باشد می‌بایست، $a=-2$ باشد.

۱۸- گزینه‌ی ۱ نمودار تابع در $x=-1$ دارای اکسترمم نسبی است، پس مشتق تابع در -1 برابر صفر است.

$$y'=\frac{2x+a}{2\sqrt{x^2+ax+b}}\xrightarrow{y'(-1)=0}-2+a=0\Rightarrow a=2$$

بنابراین تابع به صورت $y=\sqrt{x^2+2x+b}$ است. با توجه به هم‌ارزی $\sqrt{x^2+2x+b}\sim|x+1|$ در بی‌نهایت، مجانب مایل تابع در سمت راست، خط $y=x+1$ است، با توجه به نمودار تابع، عرض از مبدأ این خط با عرض نقطه‌ی اکسترمم برابر است، پس نقطه‌ی اکسترمم تابع، نقطه‌ی $(-1,1)$ است که در معادله‌ی تابع صدق می‌کند.

$$y=\sqrt{x^2+2x+b}\xrightarrow{(-1,1)}1=\sqrt{1-2+b}\Rightarrow b=2\Rightarrow a+b=4$$

۱۹- گزینه‌ی ۱ نقطه‌ای با طول یک انتهای بازه‌ی دامنه است، پس قبل از یک زیررادیکال مثبت و بعد از آن زیررادیکال منفی است، پس زیررادیکال به ازای یک برابر صفر است.

$$b-1^2=0\Rightarrow b=1$$

از طرفی $\frac{\sqrt{2}}{2}$ طول اکسترمم تابع است، پس مشتق به ازای $\frac{\sqrt{2}}{2}$ برابر صفر است.

$$y'=a-\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}\xrightarrow{y'(\frac{\sqrt{2}}{2})=0}0=a-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1-\frac{1}{2}}}\Rightarrow a-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=0\Rightarrow a=1$$

بنابراین تابع به صورت $f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$ است.

c عرض اکسترمم تابع یعنی $f(\frac{\sqrt{2}}{2})$ است.

$$c=f(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\Rightarrow abc=\sqrt{2}$$

۲۰- گزینه‌ی ۲ تابع از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس:

$$y=\sqrt[3]{ax^2+b}+c\xrightarrow{(0,0)}\sqrt[3]{b}+c=0\Rightarrow\sqrt[3]{b}=-c\Rightarrow b=-c^3$$

ضمناً خط مماس بر تابع در نقطه‌ای با طول یک عمودی است، پس تابع در $x=1$ مشتق بی‌نهایت دارد:

$$y'=\frac{2ax}{3\sqrt[3]{(ax^2+b)^2}}\xrightarrow{x=1}3\sqrt[3]{(a\times1+b)^2}=0\Rightarrow a+b=0\Rightarrow a=-b$$

حال با توجه به این‌که $a=-b=c^3$، به محاسبه‌ی مقدار خواسته شده می‌پردازیم:

$$\frac{a+c^3}{b}=\frac{c^3+c^3}{-c^3}=-2$$

پاسخ تشریحی آزمون ٦٥

۱- گزینه‌ی ۳ نقاطی از دامنه‌ی تابع که مشتق صفر یا تعریف نشده است را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=(x+2)x^{\frac{2}{3}}\Rightarrow f'(x)=x^{\frac{2}{3}}+\frac{2(x+2)}{3}x^{-\frac{1}{3}}\Rightarrow f'(x)=\sqrt[3]{x^2}+\frac{2}{3}\sqrt[3]{x^2}+\frac{4}{3\sqrt[3]{x}}\Rightarrow f'(x)=\frac{5x+4}{3\sqrt[3]{x}}$$

بنابراین تابع ۲ نقطه‌ی بحرانی با طول‌های $x=-\frac{4}{5}$ و $x=0$ دارد.

۲- گزینه‌ی ۲ نقاط بحرانی تابع را با استفاده از مشتق پیدا می‌کنیم:

$$y'=x^{۳}-۳x^{۲}-۴x=x(x^{۲}-۳x-۴)=x(x-۴)(x+۱)\xrightarrow{y'=۰}x=۰ \text{ یا } x=۴ \text{ یا } x=-۱\Rightarrow y=۰ \text{ یا } y=-۳۲ \text{ یا } y=\frac{-۳}{۴}$$

بنابراین تابع دارای ۳ نقطه‌ی بحرانی $(۰,۰)$ ، $(۴,-۳۲)$ و $(-۱,-\frac{۳}{۴})$ است که بین آن‌ها نقطه‌ی $(۴,-۳۲)$ کم‌ترین عرض را دارد. پس کم‌ترین مقدار تابع ۳۲- است.

سراسری خارج از کشور - ۹۲

۳- گزینه‌ی ۱ نقاط بحرانی تابع در بازه‌ی $[-۲,۰]$ را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=-۳x^{۲}+۳\xrightarrow{f'=۰}۳x^{۲}=۳\Rightarrow x^{۲}=۱\Rightarrow x=\pm۱$$

بنابراین نقطه‌ای با طول ۱- تنها نقطه‌ی تابع در این بازه اســت. از مقایســه‌ی مقدار تابع به ازای این نقطه با نقاط ابتدا و انتهای بازه، می‌نیمم و ماکزیمم مطلق تابع را پیدا می‌کنیم:

$f(-۲)=-(-۸)-۶+k=k+۲$ ماکزیمم

$f(-۱)=-(-۱)-۳+k=k-۲$ مینیمم

$f(۰)=۰+۰+k=k$

مجموع مقادیر مینیمم و ماکزیمم برابر ۲- است، پس:

$$k+۲+k-۲=-۲\Rightarrow ۲k=-۲\Rightarrow k=-۱$$

۴- گزینه‌ی ۲ علامت مشتق اول تابع باید منفی و علامت مشتق دوم تابع باید مثبت باشد:

$$f'(x)=-۴x^{۳}+۲۴x^{۲}-۳۶x=-۴x(x^{۲}-۶x+۹)=-۴x(x-۳)^{۲}\xrightarrow{f'<۰}x>۰$$

$$f''(x)=-۱۲x^{۲}+۴۸x-۳۶=-۱۲(x^{۲}-۴x+۳)=-۱۲(x-۳)(x-۱)\xrightarrow{f''>۰}۱<x<۳$$

اشتراک دو محدوده‌ی به‌دست آمده بازه‌ی $(۱,۳)$ است.

۵- گزینه‌ی ۱ اگر خط مماس بر منحنی بالای تابع قرار گیرد، یعنی نمودار تابع دارای تقعر رو به پایین است، پس مشتق دوم تابع در آن بازه منفی است:

$$y=x^{۲}\ln|x| \Rightarrow y'=۲x\ln|x|+x^{۲}\times\frac{۱}{x}=x(۲\ln|x|+۱)\Rightarrow y''=(۲\ln|x|+۱)+x(\frac{۲}{x})=۲\ln|x|+۳\xrightarrow{y''<۰}۲\ln|x|+۳<۰\Rightarrow \ln|x|<-\frac{۳}{۲}$$

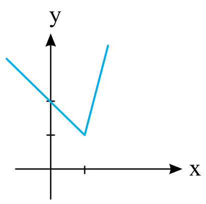
$$\Rightarrow |x|<e^{-\frac{۳}{۲}}\Rightarrow -e^{-\frac{۳}{۲}}<x<e^{-\frac{۳}{۲}}\Rightarrow x\in(-e^{-\frac{۳}{۲}},e^{-\frac{۳}{۲}})-\{۰\}$$

بنابراین حاصل ab برابر است با:

$$ab=-e^{-\frac{۳}{۲}}\times e^{-\frac{۳}{۲}}=-e^{-۳}$$

۶- گزینه‌ی ۲ تابع را به صورت دو ضابطه‌ای نوشته و آن را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=x+۲|x-۱|=\begin{cases}۳x-۲ & x\geq۱\\ -x+۲ & x<۱\end{cases}$$



مشخص است که تابع یک مینیمم نسبی دارد.

۷- گزینه‌ی ۴ تابع مشتق‌پذیر f در نقطه‌ی مینیمم نسبی خود مشتق برابر صفر دارد:

$$\begin{cases}f'(x)=۳x^{۲}-۲ax\xrightarrow{f'(۲)=۰}۱۲-۴a=۰\Rightarrow a=۳\\ (۲,۳)\in f\Rightarrow f(۲)=۳\Rightarrow ۸-۴a+b=۳\end{cases}\Rightarrow b=۷\Rightarrow a+b=۱۰$$

۸- گزینه‌ی ۱ مشتق داده شده را تعیین علامت می‌کنیم:

x		-۲		۰		۲	
$۴-x^{۲}$	$-$	۰	$+$		$+$	۰	$-$
$x^{۲}+۲x$	$+$	۰	$-$	۰	$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	۰	$-$	۰	$+$	۰	$-$
f	$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

بنابراین تابع یک مینیمم و یک ماکزیمم نسبی دارد.

۹- گزینه‌ی ۳ مشتق تابع را محاسبه کرده تعیین علامت می‌کنیم:

$$f'(x)=۲xe^{(۱-۳x)}+x^{۲}(-۳)e^{(۱-۳x)}=e^{(۱-۳x)}(-۳x^{۲}+۲x)=e^{(۱-۳x)}x(-۳x+۲)$$

x		۰		$\frac{۲}{۳}$	
$f'(x)$	$-$	۰	$+$	۰	$-$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

بنابراین تابع یک مینیمم و یک ماکزیمم نسبی دارد.

۱۰- گزینه‌ی ۱ با صفر قرار دادن مشتق تابع، طول نقاط اکسترمم را مشخص می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{۲(x^{۲}+۱)-۲x(۲x)}{(x^{۲}+۱)^{۲}}=\frac{-۲x^{۲}+۲}{(x^{۲}+۱)^{۲}}\xrightarrow{f'=۰}x=\pm ۱$$

بنابراین دو نقطه‌ی $(۱,۱)$ و $(-۱,-۱)$ اکسترمم‌های تابع هستند و $y=x$ خط گذرا از این دو نقطه است.

۱۱- گزینه‌ی ۲ با صفر قرار دادن مشتق تابع، طول نقطه‌ی اکسترمم را می‌یابیم:

$$f'(x)=-۲\cos x\sin x-\sqrt{۳}\cos x\xrightarrow{f'=۰}۲\cos x\sin x=-\sqrt{۳}\cos x\Rightarrow\begin{cases}\cos x=۰\\ \sin x=\frac{-\sqrt{۳}}{۲}\end{cases}\xrightarrow{\text{در بازه‌ی } (-\frac{\pi}{۲},۰)}x=-\frac{\pi}{۳}$$

عرض نقطه‌ی اکسترمم برابر $\frac{۱}{۴}$ است، پس:

$$f(-\frac{\pi}{۳})=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{۱}{۴}-\sqrt{۳}(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})+k=\frac{۱}{۴}\Rightarrow k=\frac{-۳}{۲}$$

۱۲- گزینه‌ی ۴ مشتق دوم تابع در نقطه‌ی عطف برابر صفر است:

$$\begin{cases}y'=۲ax-\frac{b}{x}\Rightarrow y''=۲a+\frac{b}{x^{۲}}\xrightarrow{x=۱}۲a+b=۰\\ (۱,۲)\in f\Rightarrow a-b\ln ۱=۲\Rightarrow a=۲\end{cases}\Rightarrow b=-۴$$

۱۳- گزینه‌ی ۳ مشتق اول و دوم تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$y'=e^{k-x}-xe^{k-x}=e^{k-x}(۱-x)\Rightarrow y''=-e^{k-x}-e^{k-x}(۱-x)=e^{k-x}(-۱-۱+x)=e^{k-x}(x-۲)$$

مشتق دوم تابع به ازای تمام مقادیر k در $x=۲$ برابر صفر است و در آن نقطه تغییر علامت می‌دهد. با توجه به موجود بودن y' در $x=۲$، این نقطه حتماً نقطه‌ی عطف است.

۱۴- گزینه‌ی ۳ مشتق دوم تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$y'=۲\cos ۲x+۴\sin x\Rightarrow y''=-۴\sin ۲x+۴\cos x\xrightarrow{y''=۰}۴\sin ۲x=۴\cos x\Rightarrow ۲\sin x\cos x=\cos x$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos x=۰\\ \sin x=\frac{۱}{۲}\end{cases}\xrightarrow{\text{در بازه‌ی } (۰,\pi)}x=\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۶},\frac{۵\pi}{۶}$$

هر ۳ ریشه‌ی به‌دست آمده ریشه‌های ساده‌ی مشتق دوم هستند و مشتق اول نیز در این نقاط موجود است، پس هر سه‌ی آن‌ها نقطه‌ی عطف هستند.

۱۵- گزینه‌ی ۲ مرکز تقارن منحنی درجه‌ی سوم همان نقطه‌ی عطف است، پس:

$$\begin{cases}y'=۳ax^{۲}-۲bx\Rightarrow y''=۶ax-۲b\xrightarrow{y''(-۱)=۰}-۶a-۲b=۰\\ y(-۱)=۲\Rightarrow -a-b=۲\Rightarrow ۲a+۲b=-۴\end{cases}\Rightarrow -۴a=-۴\Rightarrow a=۱,b=-۳$$

بنابراین تابع به صورت $y=x^{۳}+۳x^{۲}$ است و داریم:

$$y'=۳x^{۲}+۶x=۳x(x+۲)\xrightarrow{y'=۰}x=۰ \text{ یا } x=-۲\Rightarrow y=۰ \text{ یا } y=۴$$

پس نقاط $(۰,۰)$ و $(-۲,۴)$ اکسترمم‌های تابع هستند و طول پاره‌خط واصل بین آن‌ها برابر است با:

$$\sqrt{(-۲)^{۲}+۴^{۲}}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$

۱۶- گزینه‌ی ۳ مشتق اول و دوم تابع را در $x=\frac{\pi}{3}$ پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\cos^2 x-\cos x\Rightarrow f'(x)=2\cos x(-\sin x)+\sin x\Rightarrow f'(x)=-\sin 2x+\sin x\Rightarrow f'(\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$$

$$f''(x)=-2\cos 2x+\cos x\Rightarrow f''(\frac{\pi}{3})=-2(-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

با توجه به این‌که مشتق اول برابر صفر و مشتق دوم مثبت است، پس $x=\frac{\pi}{3}$ مینیمم نسبی است.

۱۷- گزینه‌ی ۱ مشتق تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{2x(x^2-x+1)-(2x-1)(x^2+1)}{(x^2-x+1)^2}=\frac{-2x^2+2x-2x+x^2+1}{(x^2-x+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2-x+1)^2}$$

با توجه به ضابطه‌ی تابع مشتق $f'(1)=0$ ، با تعیین علامت f' داریم:

x		-1		1	
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

بنابراین نقطه‌ای با طول ۱، ماکزیمم نسبی است.

۱۸- گزینه‌ی ۱ نمودار داده شده دارای یک ریشه‌ی ساده و یک ریشه‌ی مکرر فرد است، پس فقط گزینه‌های یک و دو می‌توانند صحیح باشند. از آن‌جایی که $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$ ، پس ضریب بزرگ‌ترین درجه منفی است و گزینه‌ی یک می‌تواند صحیح باشد.

۱۹- گزینه‌ی ۴ با توجه به این‌که $y=0$ مجانب افقی تابع است، پس:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx}{x^2+1}=0\Rightarrow a=0$$

ضمناً نقطه‌ای با عرض ۴، ماکزیمم این تابع است، پس معادله‌ی حاصل از تقاطع خط $y=4$ با تابع، ریشه‌ی مضاعف دارد:

$$4=\frac{bx}{x^2+1}\Rightarrow 4x^2-bx+4=0\xrightarrow{\Delta=0} b^2-64=0\Rightarrow b=\pm 8$$

از آن‌جایی‌که تابع در xهای مثبت مقداری منفی دارد، پس $b=-8$ قابل قبول است.

۲۰- گزینه‌ی ۲ با توجه به این‌که تابع در نقطه‌ی $(0,0)$ تعریف نشده است، $x=0$ یکی از ریشه‌های مخرج است، پس $c=0$.

ضمناً حد تابع در $x=0$ برابر صفر است، پس:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x^3+a}{x^2+bx}=0\Rightarrow \lim_{x\to 0} x^3+a=0\Rightarrow a=0$$

بنابراین تابع به صورت $y=\frac{x^3}{x^2+bx}$ است. با تقسیم صورت بر مخرج، مجانب مایل تابع برابر $y=x-b$ است. با توجه به نمودار، عرض از مبدأ مجانب مایل برابر ۱ است، پس $b=-1$.

۱۳ ماتریس

پاسخ تشریحی آزمون ٦٦

۱- گزینه‌ی ۲ درایه‌ی $a_{۱۲}$، درایه‌ی سطر اول و ستون دوم و درایه‌ی $a_{۲۳}$، درایه‌ی سطر دوم و ستون سوم است.

$$a_{۱۲}+a_{۲۳}=-۲+(-۱)=-۳$$

۲- گزینه‌ی ۱ برای آن که داشته باشیم $۲A-X=I$، باید $X=۲A-I$ باشد:

$$X=۲A-I=۲\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & ۶ \\ ۰ & ۸ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۶ \\ ۰ & ۷ \end{bmatrix}$$

۳- گزینه‌ی ۴ با استفاده از تعریف ضرب ماتریس‌ها می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} x & ۲ \end{bmatrix}_{۱\times ۲}\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۲x & ۵ \end{bmatrix}_{۲\times ۲}\begin{bmatrix} x \\ -۱ \end{bmatrix}_{۲\times ۱}=۸\Rightarrow\begin{bmatrix} ۲x+۴x & ۳x+۱۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ -۱ \end{bmatrix}=۸\Rightarrow\begin{bmatrix} ۶x & ۳x+۱۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ -۱ \end{bmatrix}=۸$$

$$۶x^۲-۳x-۱۰=۸\Rightarrow ۶x^۲-۳x-۱۸=۰\Rightarrow ۲x^۲-x-۶\Rightarrow x=\frac{۱\pm\sqrt{۱+۴۸}}{۴}\Rightarrow x=۲,\frac{-۳}{۲}$$

۴- گزینه‌ی ۳ با استفاده از تعریف ضرب ماتریس‌ها می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & y \\ ۲ & x & ۲ \end{bmatrix}_{۲\times ۳}\times\begin{bmatrix} ۳ & x \\ ۲ & ۰ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}_{۳\times ۲}=\begin{bmatrix} ۱۲ & y-۲ \\ ۱۲ & x-۳ \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} ۶+۶+۴y & ۲x-y \\ ۶+۲x+۸ & ۲x-۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۲ & y-۲ \\ ۱۲ & x-۳ \end{bmatrix}$$

با مساوی قرار دادن درایه‌ی سطر دوم و ستون اول، مقدار x را می‌یابیم: $۱۴+۲x=۱۲\Rightarrow x=-۱$

به ازای $y=۰$، بقیه‌ی درایه‌ها نیز مساوی می‌شوند.

۵- گزینه‌ی ۲ می‌دانیم در حالت کلی تساوی $AB=BA$ برقرار نیست. برای آن که تساوی برقرار باشد، AB و BA را محاسبه می‌کنیم:

$$AB=\begin{bmatrix} m & ۲ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ n & -۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳m+۲n & m-۶ \\ -۶+n & -۵ \end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ n & -۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m & ۲ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳m-۲ & ۷ \\ mn+۶ & ۲n-۳ \end{bmatrix}$$

برای این که داشته باشیم $AB=BA$، باید دستگاه معادلات زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} ۳m+۲n=۳m-۲\Rightarrow ۲n=-۲\Rightarrow n=-۱ \\ m-۶=۷\Rightarrow m=۱۳ \\ -۶+n=mn+۶ \\ ۲n-۳=-۵\Rightarrow n=-۱ \end{cases}$$

بنابراین $m+n=۱۲$.

۶- گزینه‌ی ۳ ماتریس $A^۲$ را می‌توان با ضرب A در خودش به‌دست آورد:

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱+۱ & -۱-۱ \\ -۱-۱ & ۱+۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ -۲ & ۲ \end{bmatrix}$$

حاصل‌ضرب درایه‌های این ماتریس برابر است با: $۲\times(-۲)\times۲\times(-۲)=۱۶$

۷- گزینه‌ی ۱ ابتدا دو ماتریس $A+B$ و $A-B$ را محاسبه کرده، سپس آن‌ها را در هم ضرب می‌کنیم:

$$A+B=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix} \;,\; A-B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$C=(A+B)(A-B)=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۷ & ۱۲ \\ ۲۲ & ۱۵ \end{bmatrix}$$

$$C_{۲۲}+C_{۱۲}=۱۵+۱۲=۲۷$$

توجه: اتحادهای جبری مثل اتحاد مزدوج، در ماتریس‌ها در حالت کلی برقرار نیست.

۸- گزینه‌ی ۴ می‌دانیم $A^{۴}=(A^{۲})^{۲}$، و داریم:

$$A^{۲}=\begin{bmatrix} ۳ & ۳ \\ ۶ & ۶ \end{bmatrix}=۳\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}=۳A\Rightarrow A^{۴}-A=(۳A)^{۲}-A=۹A^{۲}-A=۹(۳A)-A=۲۶A$$

۹- گزینه‌ی ۲ دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ از فرمول $ad-bc$ به‌دست می‌آید:

$$|۳A|=\begin{vmatrix} ۳(m+۱) & ۳m \\ ۳ & ۶ \end{vmatrix}=۱۸(m+۱)-۹m=۹m+۱۸=۹(m+۲)\xrightarrow{|۳A|=۲۷}۹(m+۲)=۲۷\Rightarrow m+۲=۳\Rightarrow m=۱$$

۱۰- گزینه‌ی ۴ درایه‌ی a_{ij}، درایه‌ی سطر i-ام و ستون j-ام است، بنابراین:

$$A=\begin{bmatrix} ۲\times۱-۱ & ۲\times۱-۲ \\ ۲\times۲-۱ & ۲\times۲-۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}\Rightarrow A+I=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۳ & ۳ \end{bmatrix}\Rightarrow |A+I|=۶-۰=۶$$

۱۱- گزینه‌ی ۱ دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ برابر $ad-bc$ می‌باشد، پس:

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}\Rightarrow |A|=-۲-۱۲=-۱۴ \quad,\quad B=\begin{bmatrix} ۲+k & ۳+k \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}\Rightarrow |B|=-۲-k-۱۲-۴k=-۱۴-۵k$$

$$|B|=|A|+۱۰\Rightarrow -۱۴-۵k=-۱۴+۱۰\Rightarrow -۵k=۱۰\Rightarrow k=-۲$$

۱۲- گزینه‌ی ۳ ابتدا ماتریس X و سپس وارون آن را محاسبه می‌کنیم:

$$۲X=\begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ ۴ & ۰ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۵ & -۳ \end{bmatrix}\Rightarrow X=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ \frac{۵}{۲} & -\frac{۳}{۲} \end{bmatrix}\Rightarrow X^{-۱}=\frac{۱}{۰-\frac{۵}{۲}}\begin{bmatrix} -\frac{۳}{۲} & -۱ \\ -\frac{۵}{۲} & ۰ \end{bmatrix}=-\frac{۲}{۵}\begin{bmatrix} -\frac{۳}{۲} & -۱ \\ -\frac{۵}{۲} & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۳}{۵} & \frac{۲}{۵} \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های $X^{-۱}$، برابر $\frac{۳}{۵}+\frac{۲}{۵}+۱+۰=۲$ است.

۱۳- گزینه‌ی ۱ با توجه به تساوی $(A^{-۱})^{-۱}=A$ داریم:

$$A=(A^{-۱})^{-۱}=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}^{-۱}=\frac{۱}{۴-۰}\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ \\ -\frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}\Rightarrow A^{۲}=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۴} & ۰ \\ -\frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۴} \end{bmatrix}$$

جمع درایه‌های قطر اصلی $A^{۲}$ برابر $\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۲}$ است.

۱۴- گزینه‌ی ۴ **راه‌حل اول**: ابتدا ماتریس $۲A^{-۱}$ را می‌یابیم:

$$۲A^{-۱}=\frac{۲}{-۵+۶}\begin{bmatrix} -۵ & -۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱۰ & -۴ \\ ۶ & ۲ \end{bmatrix}\Rightarrow |۲A^{-۱}|=-۲۰+۲۴=۴$$

راه‌حل دوم:

$$|۲A^{-۱}|=۲^{۲}|A^{-۱}|=\frac{۴}{|A|}=\frac{۴}{-۵+۶}=۴$$

۱۵- گزینه‌ی ۳ از معادله‌ی $AX=۲I$ می‌توان نتیجه گرفت $X=۲A^{-۱}$، پس داریم:

$$X=۲A^{-۱}=\frac{۲}{۰-۴}\begin{bmatrix} ۰ & -۲ \\ -۲ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

۱۶- گزینه‌ی ۲ ابتدا ماتریس $A^۴$ را می‌یابیم:

$$A^۴=(A^۲)^۲=\begin{bmatrix}۱&۲\\۰&۱\end{bmatrix}^۲=\begin{bmatrix}۱&۴\\۰&۱\end{bmatrix}\Rightarrow BA^۴=\begin{bmatrix}۴&۱\\۳&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۴\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴&۱۷\\۳&۱۴\end{bmatrix}$$

۱۷- گزینه‌ی ۳ دو طرف معادله را در $A^{-۱}$ ضرب می‌کنیم:

$$A^{-۱}(AX)=A^{-۱}(A+I)\Rightarrow X=I+A^{-۱}$$

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۴-۱}\begin{bmatrix}۲&-۱\\-۱&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۲}{۳}&-\frac{۱}{۳}\\-\frac{۱}{۳}&\frac{۲}{۳}\end{bmatrix}\xrightarrow{X=I+A^{-۱}}X=\begin{bmatrix}\frac{۵}{۳}&-\frac{۱}{۳}\\-\frac{۱}{۳}&\frac{۵}{۳}\end{bmatrix}$$

۱۸- گزینه‌ی ۱ برای این‌که دستگاه معادلات جواب نداشته باشد، باید دترمینان ماتریس ضرایب صفر باشد:

$$m(m+۵)-۲\times۳=۰\Rightarrow m^۲+۵m-۶=۰\Rightarrow m=۱ \text{ یا } m=-۶$$

اگر $m=۱$ باشد، دستگاه فاقد جواب است، ولی اگر $m=-۶$ باشد، دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

۱۹- گزینه‌ی ۲ برای این که دستگاه بی‌شمار جواب داشته باشد، باید داشته باشیم:

$$\frac{۳}{m}=\frac{m+۵}{۲}=\frac{۲}{m+۲}$$

پس داریم:

$$\frac{۳}{m}=\frac{m+۵}{۲}\Rightarrow m^۲+۵m-۶=۰\Rightarrow\begin{cases}m=۱\\m=-۶\end{cases}$$

به ازای $m=۱$ داریم:

$$\frac{۳}{m}=\frac{m+۵}{۲}=۳\ ,\ \frac{۲}{m+۲}=\frac{۲}{۳}$$ (در این حالت دستگاه جواب ندارد.)

به ازای $m=-۶$ داریم:

$$\frac{۳}{m}=\frac{m+۵}{۲}=\frac{۲}{m+۲}=-\frac{۱}{۲}$$

پس دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

۲۰- گزینه‌ی ۲ ماتریس ضرایب این دستگاه $A=\begin{bmatrix}a&-۳\\b&۴\end{bmatrix}$ است:

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=A^{-۱}\begin{bmatrix}۷\\۲\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\frac{۱}{۱۷}\begin{bmatrix}۴&۳\\-b&a\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۷\\۲\end{bmatrix}\Rightarrow x=\frac{۱}{۱۷}(۴\times۷+۳\times۲)\Rightarrow x=\frac{۳۴}{۱۷}\Rightarrow x=۲$$

پاسخ تشریحی آزمون ٦٧

۱- گزینه‌ی ۳ a_{ij}، درایه‌ی سطر i‌ـام و ستون j‌ـام ماتریس است:

$$A=\begin{bmatrix}۱^۱&۱^۲\\۲^۱&۲^۲\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۱&۱\\۲&۴\end{bmatrix}\Rightarrow a_{۱۲}+a_{۲۲}=۱+۴=۵$$

۲- گزینه‌ی ۲ اگر $A+۲B=۳I$، داریم:

$$A=۳I-۲B\Rightarrow A=۳\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}-۲\begin{bmatrix}۱&۳\\۴&-۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳&۰\\۰&۳\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۲&۶\\۸&-۲\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۱&-۶\\-۸&۵\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ماتریس $A=۱-۶-۸+۵=-۸$

۳- گزینه‌ی ۴ **راه‌حل اول:** ابتدا ماتریس $A^۲$ را می‌یابیم:

$$A^۲=\begin{bmatrix}۲&-۱\\۰&۳\end{bmatrix}^۲=\begin{bmatrix}۴&-۵\\۰&۹\end{bmatrix}\quad \text{و}\quad A^۲=\alpha A+\beta I\Rightarrow\begin{bmatrix}۴&-۵\\۰&۹\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\alpha+\beta&-\alpha\\۰&۳\alpha+\beta\end{bmatrix}$$

برای آن که دو ماتریس مساوی باشند، باید درایه‌های آن‌ها نظیر به نظیر مساوی باشند، یعنی:

$$۲\alpha+\beta=۴\ ,\ \begin{cases}-\alpha=-۵\Rightarrow\alpha=۵\\۳\alpha+\beta=۹\end{cases}\Rightarrow۳\times۵+\beta=۹\Rightarrow\beta=-۶$$

بنابراین داریم:

$$\alpha+\beta=۵-۶=-۱$$

راه‌حل دوم:

نکته: هر ماتریس مربعی A در معادله‌ی $A^۲=\alpha A+\beta I$ صدق می‌کند که در آن α برابر جمع درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس و β، قرینه‌ی دترمینان ماتریس است.

$$\begin{cases}\alpha=۲+۳=۵\\ \beta=-|A|=-۶\end{cases}\Rightarrow \alpha+\beta=-۱$$

۴- گزینه‌ی ۲ با توجه به این که $A=۲I$ و این که ماتریس همانی I به توان هر عدد طبیعی برابر خودش می‌شود، می‌توان نوشت:

$$A^۹-A^۷=A^۷(A^۲-I)=(۲I)^۷((۲I)^۲-I)=۱۲۸I(۴I-I)=۱۲۸\times۳\times I^۲=۳۸۴I\xrightarrow{A=۲I}A^۹-A^۷=۱۹۲A$$

۵- گزینه‌ی ۳ ماتریس I، با تمامی ماتریس‌های هم‌مرتبه‌ی خودش جابه‌جایی پذیر است و می‌توان از اتحادهای جبری استفاده کرد:

$$B=۲A-I\Rightarrow B^۳=(۲A-I)^۳\Rightarrow B^۳=۸A^۳-۱۲A^۲+۶A-I\xrightarrow{A^۳=A^۲=A}B^۳=۸A-۱۲A+۶A-I$$

$$\Rightarrow B^۳=۲A-I\xrightarrow{B=۲A-I}B^۳=B$$

توجه: اگر ماتریسی خودتوان باشد، یعنی $A^۲=A$، آن‌گاه به ازای تمام مقادیر طبیعی n داریم: $A^n=A$

۶- گزینه‌ی ۲ ماتریس I با تمامی ماتریس‌های هم‌مرتبه‌ی خودش، جابه‌جایی پذیر است. پس می‌توان از اتحاد مکعب دو جمله‌ای استفاده کرد:

$$(I+A)^۳=A^۳+۳A^۲+۳A+I\xrightarrow{A^۳=A^۲=A}(I+A)^۳=۷A+I\Rightarrow k=۷$$

۷- گزینه‌ی ۱ از جایی‌که A و B لزوماً جابه‌جایی پذیر نیستند، داریم:

$$A^۲+B^۲=(AB)^۲+(BA)^۲=(AB)(AB)+(BA)(BA)=A(BA)B+B(AB)A=(AB)B+(BA)A=AB+BA=A+B$$

۸- گزینه‌ی ۱ با استفاده از رابطه‌ی $A=(A^{-۱})^{-۱}$ ماتریس A را می‌یابیم:

$$A=\begin{bmatrix}-۱&۲\\۲&-۱\end{bmatrix}^{-۱}=\frac{۱}{۱-۴}\begin{bmatrix}-۱&-۲\\-۲&-۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۳}&\frac{۲}{۳}\\\frac{۲}{۳}&\frac{۱}{۳}\end{bmatrix}\Rightarrow(A+I)=\begin{bmatrix}\frac{۴}{۳}&\frac{۲}{۳}\\\frac{۲}{۳}&\frac{۴}{۳}\end{bmatrix}\Rightarrow|(A+I)|=\frac{۱۶}{۹}-\frac{۴}{۹}=\frac{۱۲}{۹}=\frac{۴}{۳}$$

۹- گزینه‌ی ۲ ابتدا ماتریس A را می‌یابیم:

$$A=\begin{bmatrix}۲&-۱\\۰&۳\end{bmatrix}+I\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۳&-۱\\۰&۴\end{bmatrix}\Rightarrow A^۲=\begin{bmatrix}۹&-۷\\۰&۱۶\end{bmatrix}\Rightarrow(A^۲)^{-۱}=\frac{۱}{۱۴۴-۰}\begin{bmatrix}۱۶&۷\\۰&۹\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۹}&\frac{۷}{۱۴۴}\\۰&\frac{۱}{۱۶}\end{bmatrix}$$

بنابراین درایه‌ی سطر دوم و ستون دوم ماتریس فوق $\frac{۱}{۱۶}$ است.

۱۰- گزینه‌ی ۳ دترمینان ماتریس A و B باید برابر باشند:

$$B=\begin{bmatrix}۱&۲\\۳&a\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۲&۲\\۲&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳&۴\\۵&۲+a\end{bmatrix},|B|=|A|\Rightarrow۶+۳a-۲۰=a-۶\Rightarrow۲a=۸\Rightarrow a=۴$$

۱۱- گزینه‌ی ۳ اگر ماتریسی وارون‌پذیر نباشد، دترمینان آن برابر صفر است:

$$\begin{vmatrix}a&۱\\a+۲&۳\end{vmatrix}=۳a-(a+۲)=۲a-۲\xrightarrow{|A|=۰}۲a-۲=۰\Rightarrow a=۱$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۱&۱\\۳&۳\end{bmatrix}\Rightarrow A^۲=\begin{bmatrix}۴&۴\\۱۲&۱۲\end{bmatrix}\Rightarrow A^۲+I=\begin{bmatrix}۵&۴\\۱۲&۱۳\end{bmatrix}\Rightarrow(A^۲+I)^{-۱}=\frac{۱}{۶۵-۴۸}\begin{bmatrix}۱۳&-۴\\-۱۲&۵\end{bmatrix}=\frac{۱}{۱۷}\begin{bmatrix}۱۳&-۴\\-۱۲&۵\end{bmatrix}$$

۱۲- گزینه‌ی ۳ با استفاده از قانون پخشی ضرب به جمع می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}A^{-۱}(A^۲-I)=A^{-۱}A^۲-A^{-۱}I=A-A^{-۱}\\ A^{-۱}=\begin{bmatrix}۱&-۱\\۱&-۲\end{bmatrix}^{-۱}=\frac{۱}{-۲+۱}\begin{bmatrix}-۲&۱\\-۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&-۱\\۱&-۱\end{bmatrix}\end{cases}\Rightarrow A^{-۱}(A^۲-I)=\begin{bmatrix}۱&-۱\\۱&-۲\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۲&-۱\\۱&-۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱&۰\\۰&-۱\end{bmatrix}=-I$$

۱۳- گزینه‌ی ۴ **توجه**: در حالت کلی $(A+B)^{-۱}=A^{-۱}+B^{-۱}$ برقرار نیست:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۲-۰}\begin{bmatrix}۱&۰\\-۱&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲}&۰\\-\frac{۱}{۲}&۱\end{bmatrix}\quad,\quad B^{-۱}=\frac{۱}{۱-۰}\begin{bmatrix}۱&-۲\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&-۲\\۰&۱\end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix}۳&۲\\۱&۲\end{bmatrix}\Rightarrow(A+B)^{-۱}=\frac{۱}{۶-۲}\begin{bmatrix}۲&-۲\\-۱&۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲}&-\frac{۱}{۲}\\-\frac{۱}{۴}&\frac{۳}{۴}\end{bmatrix}$$

$$(A+B)^{-۱}-A^{-۱}-B^{-۱}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲}&-\frac{۱}{۲}\\-\frac{۱}{۴}&\frac{۳}{۴}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۱&-۲\\۰&۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲}&۰\\-\frac{۱}{۲}&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱&\frac{۳}{۲}\\\frac{۱}{۴}&-\frac{۵}{۴}\end{bmatrix}=\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix}-۴&۶\\۱&-۵\end{bmatrix}$$

۱۴- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول**: دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ برابر $ad-bc$ است:

$$|A|=۴\Rightarrow ۲+۲x-۱+x=۴\Rightarrow ۳x=۳\Rightarrow x=۱\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۲&۱\\۰&۲\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix}۲&-۱\\۰&۲\end{bmatrix}\Rightarrow ۳A^{-۱}=\begin{bmatrix}\frac{۳}{۲}&-\frac{۳}{۴}\\۰&\frac{۳}{۲}\end{bmatrix}\Rightarrow|۳A^{-۱}|=\frac{۹}{۴}-۰=\frac{۹}{۴}$$

راه‌حل دوم:

نکته: برای ماتریس $A_{۲\times۲}$ داریم:

$$|A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}\quad,\quad|kA|=k^{۲}|A|\Rightarrow|۳A^{-۱}|=۳^{۲}|A^{-۱}|=\frac{۹}{|A|}=\frac{۹}{۴}$$

۱۵- گزینه‌ی ۳ طرفین تساوی داده شده را از سمت چپ در $A^{-۱}$ ضرب می‌کنیم:

$$AB=kI\Rightarrow A^{-۱}(AB)=kA^{-۱}\times I\Rightarrow(\underbrace{A^{-۱}A}_{I})B=kA^{-۱}\Rightarrow IB=kA^{-۱}\Rightarrow B=kA^{-۱}$$

۱۶- گزینه‌ی ۱ دو طرف معادله‌ی داده شده را از سمت راست در $A^{-۱}$ و از سمت چپ در $B^{-۱}$ ضرب می‌کنیم:

$$A+B=AB\xrightarrow{A^{-۱}\times}A^{-۱}(A+B)=A^{-۱}(AB)\Rightarrow A^{-۱}A+A^{-۱}B=IB\Rightarrow I+A^{-۱}B=B\xrightarrow{\times B^{-۱}}$$

$$B^{-۱}+A^{-۱}BB^{-۱}=BB^{-۱}\Rightarrow B^{-۱}+A^{-۱}=I$$

۱۷- گزینه‌ی ۱ با ضرب دو طرف معادله در $A^{-۱}$ داریم:

$$A^{-۱}(AX)=(A^{-۱})(A^{-۱})\Rightarrow IX=(A^{-۱})^{۲}\Rightarrow X=(A^{-۱})^{۲}$$

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۰+۳}\begin{bmatrix}۰&۱\\-۳&۲\end{bmatrix}\Rightarrow X=(A^{-۱})^{۲}=\frac{۱}{۹}\begin{bmatrix}-۳&۲\\-۶&۱\end{bmatrix}$$

۱۸- گزینه‌ی ۳ برای این‌که دستگاه دو معادله و دو مجهول خطی جواب نداشته باشد، باید دترمینان ماتریس ضرایب برابر صفر باشد:

$$\begin{vmatrix}a&۱\\۱&a\end{vmatrix}=۰\Rightarrow a^{۲}-۱=۰\Rightarrow\begin{cases}a=۱&\text{بی‌شمار جواب دارد}\\a=-۱&\text{جواب ندارد}\end{cases}$$

$$a=-۱\Rightarrow\begin{cases}-x+y=۳\\۲x+۲y=۵\end{cases}\Rightarrow\begin{vmatrix}-۱&۱\\۲&۲\end{vmatrix}=-۲-۲=-۴$$

دترمینان ماتریس ضرایب برابر صفر نیست، پس معادله جواب یکتا دارد.

۱۹- گزینه‌ی ۳ جواب دستگاه معادلات $A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=B$ برابر $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=A^{-۱}B$ است:

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&-۱\\۲&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲\\-۱\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\\۳\end{bmatrix}\Rightarrow x+y=۴$$

۲۰- گزینه‌ی ۱ برای این‌که دستگاه بی‌شمار جواب داشته باشد، باید دترمینان ماتریس ضرایب برابر صفر باشد:

$$\begin{vmatrix}m-۱&۱\\۳&m-۳\end{vmatrix}=۰\Rightarrow(m-۱)(m-۳)-۳=۰\Rightarrow m^{۲}-۴m=۰\Rightarrow\begin{cases}m=۰&\text{بی‌شمار جواب دارد}\\m=۴&\text{جواب ندارد}\end{cases}$$

۱۴

هندسه‌ی مختصاتی و منحنی‌های درجه‌ی دوم (مقاطع مخروطی)

پاسخ تشریحی آزمون ٦٨

۱- گزینه‌ی ۱ تمام نقاط واقع در ناحیه‌ی اول مختصات، دارای طول منفی و عرضی مثبت هستند.

$x=\frac{۱-m}{۱+m}>۰$

m		-۱		۱	
x	$-$	تعریف نشده	$+$	۰	$-$

$\Rightarrow -۱<m<۱$

$y=m^۲+۴>۰$

m	
x	$+$

$\Rightarrow m\in\mathbb{R}$ همواره برقرار است

بنابراین باید $-۱<m<۱$.

۲- گزینه‌ی ۳ نصف فاصله‌ی دو سر قطر برابر شعاع دایره است:

$$R=\frac{AB}{۲}=\frac{\sqrt{(۲+۱)^۲+(-۲-۲)^۲}}{۲}=\frac{\sqrt{۹+۱۶}}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

بنابراین مساحت دایره برابر است با:

$$S=\pi R^۲=\pi\times(\frac{۵}{۲})^۲=\frac{۲۵\pi}{۴}$$

۳- گزینه‌ی ۳ نقطه‌ی M وسط دو نقطه‌ی A و C است، پس:

$$M=\frac{A+C}{۲}\Rightarrow M\left(\frac{۵+۱}{۲},\frac{۷+۱}{۲}\right)\Rightarrow M(۳,۴)$$

فاصله‌ی B از M برابر است با:

$$BM=\sqrt{(۳-۱)^۲+(۴-۲)^۲}=\sqrt{۴+۴}=۲\sqrt{۲}$$

۴- گزینه‌ی ۴ برای آن‌که ABCD متوازی‌الاضلاع باشد، باید جمع مختصات رئوس روبه‌رو برابر باشد بنابر نام‌گذاری انجام شده، باید داشته باشیم:

$$A+C=B+D\Rightarrow D=(x_A+x_C-x_B, y_A+y_C-y_B)\Rightarrow D=(۰+۲-۱,-۲+۱-۳)\Rightarrow D=(۱,-۴)$$

۵- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول**: برای آن‌که A، B و C در یک راستا باشند، می‌بایست شیب خط AC و BC برابر باشد.

$$m_{AC}=m_{BC}\Rightarrow\frac{۱۰-۱}{a-۱}=\frac{۴a-۱}{۶-۱}\Rightarrow(۴a-۱)(a-۱)=۴۵\Rightarrow۴a^۲-۵a+۱=۴۵\Rightarrow۴a^۲-۵a-۴۴=۰$$

حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای a برابر $P=\frac{c}{a}=-۱۱$ می‌باشد.

راه‌حل دوم: مساحت مثلث با رئوس A، B و C باید برابر صفر باشد.

۱	۶	a	۱
۱	۴a	۱۰	۱

$$S=\frac{۱}{۲}(۱\times۴a+۶\times۱۰+a\times۱-۱\times۶-۴a\times a-۱۰\times۱)=۰\Rightarrow۴a+۶۰+a-۶-۴a^۲-۱۰=۰$$

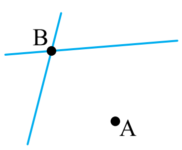
$$\Rightarrow۴a^۲-۵a-۴۴=۰\Rightarrow P=a_۱a_۲=\frac{c}{a}=\frac{-۴۴}{۴}=-۱۱$$

۶- گزینه‌ی ۱ دو خط روی محور طول‌ها، متقاطع هستند، یعنی طول از مبدأ برابر دارند، برای پیدا کردن طول از مبدأ، y را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases}kx-۳ky=۲\xrightarrow{y=۰}kx=۲\Rightarrow x=\frac{۲}{k}\\ ۲x+y=۴\xrightarrow{y=۰}۲x=۴\Rightarrow x=۲\end{cases}\Rightarrow\frac{۲}{k}=۲\Rightarrow k=۱$$

۷- گزینه‌ی ۳ دو ضلع داده شده، موازی نیستند، بنابراین دو ضلع متقاطع از متوازی‌الاضلاع هستند، نقطه‌ی تلاقی آن‌ها که یکی از رئوس متوازی‌الاضلاع است، برابر است با:

$$\begin{cases}۳y+۴x=۸\\ ۲y-۳x=۱۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۹y+۱۲x=۲۴\\ ۸y-۱۲x=۴۴\end{cases}\Rightarrow۱۷y=۶۸\Rightarrow\begin{cases}y=۴\\ x=-۱\end{cases}$$



بنابراین نقطه‌ی $B(-۱,۴)$ یکی از رئوس متوازی‌الاضلاع است. از طرف دیگر از آن‌جایی که مختصات نقطه‌ی $A(۷,۶)$ در هیچ یک از خطوط داده شده صدق نمی‌کند، پس مطابق شکل روبه‌رو A و B دو سر قطر هستند، پس مختصات وسط قطر برابر است با:

$$M=\frac{A+B}{۲}\Rightarrow M\left(\frac{-۱+۷}{۲},\frac{۴+۶}{۲}\right)\Rightarrow M(۳,۵)$$

سراسری - ۹۰

۸- گزینه‌ی ۱ رئوس مثلث محل تلاقی اضلاع هستند.

$$\begin{cases} y=x \\ y=-x \end{cases} \Rightarrow A(۰,۰) \qquad \begin{cases} y=x \\ y=۳ \end{cases} \Rightarrow B(۳,۳) \qquad \begin{cases} y=-x \\ y=۳ \end{cases} \Rightarrow C(-۳,۳)$$

محل تلاقی میانه‌ها، همان مرکز ثقل مثلث است که مختصات آن برابر است با:

$$G=\frac{A+B+C}{۳} \Rightarrow G(\frac{۰+۳-۳}{۳}, \frac{۰+۳+۳}{۳}) \Rightarrow G(۰,۲)$$

۹- گزینه‌ی ۲ شیب خط AB برابر است با:

$$m_{AB}=\frac{a-۱}{۰-۲} \Rightarrow m=\frac{۱-a}{۲}$$

از طرفی چون خط AB با خطی به شیب $۲a$ موازی است، داریم:

$$\frac{۱-a}{۲}=۲a \Rightarrow ۱-a=۴a \Rightarrow a=\frac{۱}{۵}$$

۱۰- گزینه‌ی ۳ شیب خط AB برابر است با:

$$m_{AB}=\frac{۴-۲}{-۲-۰}=\frac{۲}{-۲}=-۱$$

خط AB بر خط $y=\frac{-۲a}{a+۱}x+\frac{a-۱}{a+۱}$ عمود است، بنابراین ضرب شیب این دو خط برابر منفی یک است:

$$(\frac{-۲a}{a+۱})\times(-۱)=-۱ \Rightarrow \frac{-۲a}{a+۱}=۱ \Rightarrow -۲a=a+۱ \Rightarrow a=\frac{-۱}{۳}$$

۱۱- گزینه‌ی ۲ نقطه‌ی A محل تقاطع دو خط AB و AC است:

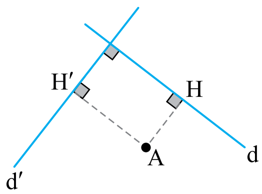
$$\begin{cases} y-۲x=۵ \\ ۲y-x=۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y-۲x=۵ \\ -۴y+۲x=-۶ \end{cases} \Rightarrow -۳y=-۱ \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{۱}{۳} \\ x=\frac{-۷}{۳} \end{cases}$$

ارتفاع AH بر خط BC به معادله‌ی $y=\frac{-۳x}{۲}+۳$ عمود است، یعنی شیب خط AH قرینه و معکوس شیب BC $(\frac{-۳}{۲})$ و برابر $\frac{۲}{۳}$ است. معادله‌ی AH برابر است با:

$$y-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}\left(x-(-\frac{۷}{۳})\right) \Rightarrow y=\frac{۲}{۳}x+\frac{۱۴}{۹}+\frac{۱}{۳} \Rightarrow ۹y=۶x+۱۴+۳ \Rightarrow ۹y-۶x=۱۷$$

سراسری خارج از کشور - ۸۹

۱۲- گزینه‌ی ۲ نقطه‌ی A روی هیچ کدام از دو خط داده شده نیست، پس مطابق شکل روبه‌رو فاصله‌ی نقطه‌ی A از دو خط طول و عرض مستطیل را مشخص می‌کند.



$$\begin{cases} AH=\frac{|۲\times۵+۸-۶|}{\sqrt{۲^۲+۱^۲}}=\frac{۱۲}{\sqrt{۵}} \\ AH'=\frac{|۲\times۸-۵-۷|}{\sqrt{۲^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۴}{\sqrt{۵}} \end{cases} \Rightarrow S=AH\times AH'=\frac{۴۸}{۵}=۹/۶$$

سراسری خارج از کشور - ۹۰

۱۳- گزینه‌ی ۲ مجموعه‌ی نقاطی که فاصله‌ی آن‌ها از خط $۲x-۳y=۵$ برابر $\sqrt{۱۳}$ است از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

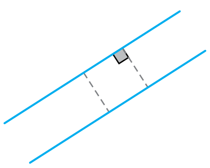
$$\frac{|۲x-۳y-۵|}{\sqrt{۲^۲+(-۳)^۲}}=\sqrt{۱۳} \Rightarrow |۲x-۳y-۵|=۱۳$$

دو نقطه‌ی مورد نظر روی خط $y=x-۱$ قرار دارند، پس:

$$|۲x-۳(x-۱)-۵|=۱۳ \Rightarrow |۲x-۳x-۲|=۱۳ \Rightarrow |-x-۲|=۱۳ \Rightarrow \begin{cases} -x-۲=۱۳ \\ -x-۲=-۱۳ \end{cases} \Rightarrow x=۱۱ \ , \ x=-۱۵$$

سراسری - ۸۹

۱۴- گزینه‌ی ۳ شیب هر دو خط داده شده برابر یک است، بنابراین، این دو خط موازی هستند، فاصله‌ی این دو خط موازی برابر طول ضلع مربع است.



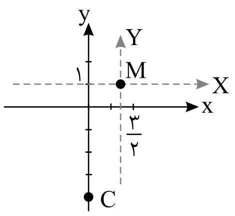
$$\begin{cases} ۲x-۲y-۳=۰ \\ ۲x-۲y+۲=۰ \end{cases} \Rightarrow d=\frac{|۲-(-۳)|}{\sqrt{۲^۲+(-۲)^۲}}=\frac{۵}{\sqrt{۸}} \Rightarrow S=d^۲=\left(\frac{۵}{\sqrt{۸}}\right)^۲=\frac{۲۵}{۸}$$

سراسری - ۹۲

۱۵- گزینه‌ی ۲ فاصله‌ی خط MN از دو خط $y=2x-1$ و $2y-4x=1$ برابر است، بنابراین معادله‌ی آن را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

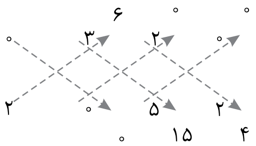
$$\begin{cases}2x-1=y\\2y-4x=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x-2y-2=0\\4x-2y+1=0\end{cases}\Rightarrow \text{MN معادله‌ی}: 4x-2y+\frac{1-2}{2}=0\Rightarrow 4x-2y=\frac{1}{2}\Rightarrow 8x=4y+1$$

۱۶- گزینه‌ی ۱ وسط دو نقطه‌ی $A(2-a,3)$ و $B(a+1,-1)$ نقطه‌ی $M(\frac{2-a+a+1}{2},\frac{3-1}{2})$ یعنی $M(\frac{3}{2},1)$ می‌باشد. مختصات نقطه‌ی $C(0,-4)$ در دستگاه جدید برابر است با:



$$\begin{cases}X+1.5=0\\Y+1=-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X=-1.5\\Y=-5\end{cases}$$

۱۷- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول**: مساحت مثلث با سه رأس یاد شده برابر است با:



$$S=\frac{1}{2}(0+15+4-6-0-0)=\frac{13}{2}=6.5$$

راه‌حل دوم: خط BC خطی با عرض از مبدأ ۲ و طول از مبدأ ۳ است، پس معادله‌ی آن $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ یعنی $2x+3y=6$ است. اندازه‌ی ارتفاع AH، از به دست آوردن فاصله‌ی A از خط BC به دست می‌آید:

$$d=\frac{|2\times2+3\times5-6|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{13}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}$$

ضمناً طول ضلع BC برابر است با:

$$BC=\sqrt{(3-0)^2+(0-2)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$$

بنابراین برای محاسبه‌ی مساحت مثلث داریم:

$$S=\frac{1}{2}BC\times AH=\frac{1}{2}\sqrt{13}\times\sqrt{13}=\frac{13}{2}=6.5$$

سراسری خارج از کشور – ۹۲

۱۸- گزینه‌ی ۴ با حذف کردن z، دستگاه را به یک دستگاه دو معادله و دو مجهول تبدیل می‌کنیم، سپس آن را حل می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}\begin{cases}x+y+z=2\\2x+y-z=-3\end{cases}\Rightarrow 3x+2y=-1\Rightarrow 6x+4y=-2\\ \begin{cases}4x+2y-2z=-6\\3x+2y+2z=5\end{cases}\Rightarrow 7x+4y=-1\end{array}\right\}\Rightarrow x=-1+2\Rightarrow x=1$$

$$3x+2y=-1\xrightarrow{x=1}2y=-1-3\Rightarrow y=-2$$

$$x+y+z=2\xrightarrow[y=-2]{x=1}1-2+z=2\Rightarrow z=3$$

بنابراین حاصل xyz برابر -6 است.

۱۹- گزینه‌ی ۴ از معادله‌ی اول، z و y را برحسب x نوشته و در معادله‌ی دوم جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{4}\Rightarrow y+2=\frac{4}{3}(x-1)\Rightarrow y=\frac{4}{3}x-\frac{10}{3}$$

$$\frac{x-1}{3}=\frac{2-z}{5}\Rightarrow 2-z=\frac{5x-5}{3}\Rightarrow z=\frac{-5}{3}x+\frac{11}{3}$$

$$x+y+z=3\Rightarrow x+\frac{4}{3}x-\frac{10}{3}-\frac{5}{3}x+\frac{11}{3}=3\Rightarrow\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}=3\Rightarrow 2x+1=9\Rightarrow x=4$$

$$y=\frac{4}{3}x-\frac{10}{3}\xrightarrow{x=4}y=2\quad,\quad z=\frac{-5}{3}x+\frac{11}{3}\xrightarrow{x=4}z=-3$$

بنابراین حاصل $x-y-z$ برابر $4-2+3$ یا ۵ می‌باشد.

۲۰- گزینه‌ی ۱ اگر خط بر دایره مماس باشد، معادله‌ی حاصل از تقاطع دادن این دو باید یک ریشه‌ی مضاعف داشته باشد:

$$\begin{cases}y=mx+2\\x^2-2x+y^2=0\end{cases}\Rightarrow x^2-2x+(mx+2)^2=0\Rightarrow x^2-2x+m^2x^2+4mx+4=0\Rightarrow(m^2+1)x^2+(4m-2)x+4=0$$

$$\Delta=0\Rightarrow(4m-2)^2-4\times4(m^2+1)=0\Rightarrow16m^2-16m+4-16m^2-16=0\Rightarrow16m=-12\Rightarrow m=\frac{-3}{4}$$

پاسخ تشریحی آزمون ٦٩

۱- گزینه‌ی ۳ معادله‌ی نیمساز ناحیه‌ی چهارم $y=-x$ است. نقطه‌ای به طول یک روی آن، نقطه‌ی $(۱,-۱)$ است. این نقطه روی هر دو خط قرار دارد، پس:

$$\begin{cases} ax+by=۱ \xrightarrow{(۱,-۱)} a-b=۱ \\ (a+۱)x+۲by=۱ \xrightarrow{(۱,-۱)} a+۱-۲b=۱ \Rightarrow a=۲b \end{cases} \Rightarrow b=۱\,,\, a=۲ \Rightarrow a+b=۳$$

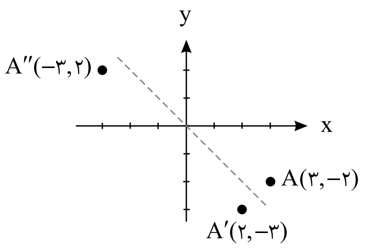
۲- گزینه‌ی ۲ ابتدا محل تلاقی دو خط $y=x+۳$ و $y=۲x+۵$ را پیدا می‌کنیم:

$$x+۳=۲x+۵ \Rightarrow x=-۲\,,\, y=۱$$

نقطه‌ی $(-۲,۱)$ در خط $y=ax+a$ صدق می‌کند، پس:

$$-۲a+a=۱ \Rightarrow -a=۱ \Rightarrow a=-۱$$

۳- گزینه‌ی ۴ مختصات قرینه‌ی نقطه‌ی (a,b) نسبت به خط $y=x$، (b,a)، نسبت به خط $y=-x$، $(-b,-a)$ و نسبت به مبدأ مختصات، $(-a\,,\,-b)$ می‌باشد.



بنابراین مختصات نقطه‌ی $A'(۲,-۳)$ و $A''(-۳,۲)$ می‌باشد و داریم:

$$A'A''=\sqrt{(۲+۳)^۲+(-۳-۲)^۲}=\sqrt{۵۰}=۵\sqrt{۲}$$

۴- گزینه‌ی ۴ طول اضلاع این مثلث برابر است با:

$$AB=\sqrt{(۳-۱)^۲+(-۱-۱)^۲}=\sqrt{۴+۴}=۲\sqrt{۲}$$
$$BC=\sqrt{(۳+۱)^۲+(-۱+۱)^۲}=۴$$
$$AC=\sqrt{(۱+۱)^۲+(۱+۱)^۲}=۲\sqrt{۲}$$

با توجه به این‌که $AB=AC$ پس این مثلث متساوی‌الساقین است و با توجه به این‌که $BC^۲=AB^۲+AC^۲$ پس اضلاع مثلث در رابطه‌ی فیثاغورس صدق می‌کنند و مثلث قائم‌الزاویه نیز هست.

۵- گزینه‌ی ۲ شیب ضلع AB از مثلث برابر $\frac{۲-۰}{-۱-۳}=\frac{-۱}{۲}$ می‌باشد. پس شیب ارتفاع CH که بر AB عمود است برابر $\frac{-۱}{-\frac{۱}{۲}}=۲$ است و معادله‌ی آن با کمک نقطه‌ی $C(۱\,,\,-۲)$ برابر است با:

$$y+۲=۲(x-۱) \Rightarrow y=۲x-۴$$

۶- گزینه‌ی ۴ مختصات نقطه‌ی A از حل دستگاه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} ۲y+۳x=۷ \\ y=۲x \end{cases} \Rightarrow ۴x+۳x=۷ \Rightarrow x=۱,\, y=۲ \Rightarrow A(۱,۲)$$

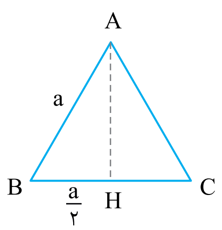
شیب خط AH قرینه و معکوس شیب BC است $(m=-۴)$، پس معادله‌ی AH برابر است با:

$$y-۲=-۴(x-۱) \Rightarrow y=-۴x+۶$$

عرض نقطه‌ی H محل برخورد دو خط AH و BC برابر است با:

$$\begin{cases} y+۴x=۶ \\ x=۴y \end{cases} \Rightarrow y+۱۶y=۶ \Rightarrow ۱۷y=۶ \Rightarrow y=\frac{۶}{۱۷}$$

۷- گزینه‌ی ۳ A روی ضلع $۳x-۴y=۱$ نیست، پس فاصله‌ی A از آن خط برابر ارتفاع مثلث است:



$$AH=d=\frac{|۳\times۱-۴\times۳-۱|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

برای پیدا کردن طول ضلع مثلث از روی ارتفاع با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس داریم:

$$AB^۲=AH^۲+BH^۲ \Rightarrow a^۲=۲^۲+(\frac{a}{۲})^۲ \Rightarrow \frac{۳}{۴}a^۲=۴ \Rightarrow a^۲=\frac{۱۶}{۳} \Rightarrow a=\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

بنابراین:

$$S=\frac{۱}{۲}AH\times BC=\frac{۱}{۲}\times۲\times\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}=\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

۸- گزینه‌ی ۱ مختصات نقطه‌ی M وسط ضلع BC برابر است با:

$$M(\frac{۳-۱}{۲},\frac{۰+۲}{۲})\Rightarrow M(۱,۱)$$

معادله‌ی AM به صورت روبه‌رو است:

$$y-۱=\frac{۱-۱}{۲-۱}(x-۱)\Rightarrow y=۱$$

فاصله‌ی نقطه‌ی $B(۳,۰)$ از خط افقی $y=۱$ برابر یک می‌باشد.

۹- گزینه‌ی ۲ مجموعه‌ی نقاطی که از خط $y-۲x+۱=۰$ فاصله‌ای برابر $\sqrt{۵}$ دارند، عبارت است از:

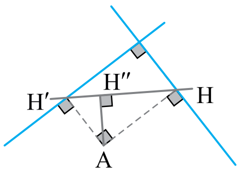
$$\frac{|y-۲x+۱|}{\sqrt{۱+۴}}=\sqrt{۵}\Rightarrow |y-۲x+۱|=۵$$

نقاطی از این معادله که روی نیمساز ربع اول و سوم $(y=x)$ قرار دارند، از معادله‌ی زیر به دست می‌آیند.

$$|x-۲x+۱|=۵\Rightarrow |-x+۱|=۵\Rightarrow x=۶,-۴$$

مجموع طول این نقاط برابر ۲ است.

۱۰- گزینه‌ی ۲ دو ضلع داده شده از مستطیل بر هم عمود هستند و نقطه‌ی $A(۱,۲)$ روی هیچ‌کدام از دو خط نیست. فاصله‌ی نقطه‌ی A از دو خط برابر طول و عرض مستطیل است.



$$AH=\frac{|۲-۲+۱۵|}{\sqrt{۲^۲+۱^۲}}=\frac{۱۵}{\sqrt{۵}}$$

$$AH'=\frac{|۱+۴+۵|}{\sqrt{۱+۲^۲}}=\frac{۱۰}{\sqrt{۵}}$$

طول قطر HH' با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس برابر است با:

$$HH'=\sqrt{AH^۲+AH'^۲}=\sqrt{\frac{۱۰۰}{۵}+\frac{۱۲۵}{۵}}=\sqrt{۴۵}=۳\sqrt{۵}$$

با نوشتن مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ی AHH' از دو راه مختلف داریم:

$$\frac{AH\times AH'}{۲}=\frac{AH''\times HH'}{۲}\Rightarrow \frac{۱۵}{\sqrt{۵}}\times\frac{۱۰}{\sqrt{۵}}=۳\sqrt{۵}\times AH''\Rightarrow ۳۰=۳\sqrt{۵}\times AH''\Rightarrow AH''=\frac{۱۰}{\sqrt{۵}}=۲\sqrt{۵}$$

۱۱- گزینه‌ی ۱ معادله‌ی دو ضلع داده شده‌ی مربع دارای شیب برابر است، پس این دو ضلع، موازی هستند. فاصله‌ی این دو خط موازی برابر ضلع مربع است.

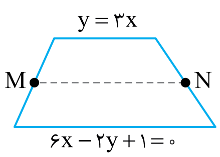
$$\begin{cases}y=۵x-۱۵\\ ۱۰x-۲y=۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۱۰x-۲y-۳۰=۰\\ ۱۰x-۲y-۴=۰\end{cases}$$

$$\text{طول ضلع مربع}=\frac{|-۳۰+۴|}{\sqrt{۱۰^۲+۲^۲}}=\frac{۲۶}{\sqrt{۱۰۴}}=\frac{۲۶}{۲\sqrt{۲۶}}=\frac{\sqrt{۲۶}}{۲}$$

طول قطر مربع $\sqrt{۲}$ برابر طول ضلع مربع است، پس:

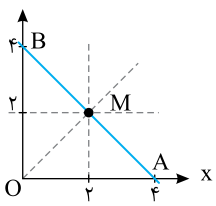
$$\text{طول قطر}=\frac{\sqrt{۲۶}}{۲}\times\sqrt{۲}=\sqrt{\frac{۲۶}{۲}}=\sqrt{۱۳}$$

۱۲- گزینه‌ی ۴ دو خط داده شده دو ضلع موازی ذوزنقه هستند (شیب برابر دارند)، خط MN که اوساط ساق‌ها را به هم وصل می‌کند با دو ضلع موازی ذوزنقه موازی است و وسط آن دو است، پس معادله‌ی آن برابر است با:



$$\begin{matrix}۶x-۲y+۱=۰\\ ۶x-۲y=۰\end{matrix}\Rightarrow ۶x-۲y+\frac{۱+۰}{۲}=۰\Rightarrow ۶x-۲y=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۱۲x-۴y=-۱$$

۱۳- گزینه‌ی ۱ **راه‌حل اول**: مثلث ABO یک مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است، بنابراین محل تلاقی عمودمنصف‌های آن وسط قاعده‌ی مثلث می‌باشد.



$$M(\frac{۴+۰}{۲},\frac{۰+۴}{۲})\Rightarrow M(۲,۲)$$

راه‌حل دوم: عمودمنصف ضلع AO، خط $x=۲$ است و عمودمنصف ضلع OB خط $y=۲$ است، بنابراین محل تلاقی این دو خط که محل همرسی عمودمنصف‌ها است، نقطه‌ی $(۲,۲)$ است.

۱۴- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول**: مساحت مثلث با استفاده از قاعده‌ی گفته شده برابر است با:

۳	−۲	−۶	۳
۱	−۱	۱	۱

$$\Rightarrow S=\left|\frac{۱}{۲}(-۳-۲-۶-(-۲+۶+۳))\right|=\frac{۱}{۲}|-۱۱-۷|=\frac{۱۸}{۲}=۹$$

راه‌حل دوم: دو نقطه‌ی A و C روی خط افقی $y=۱$ است و فاصله‌ی نقطه‌ی $B(-۲,-۱)$ از آن $۲=(-۱)-۱$ است. ضمناً فاصله‌ی A از C برابر $۹=(-۶)-۳$ است. بنابراین مساحت مثلث برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}\times۲\times۹=۹$$

۱۵- گزینه‌ی ۳ مختصات اواسط اضلاع برابر است با:

$$A'(\frac{۲+۱}{۲},\frac{۱-۳}{۲})\Rightarrow A'(\frac{۳}{۲},-۱),\ B'(\frac{۱-۱}{۲},\frac{۲+۱}{۲})\Rightarrow B'(۰,\frac{۳}{۲}),\ C'(\frac{۲-۱}{۲},\frac{۲-۳}{۲})\Rightarrow C'(\frac{۱}{۲},\frac{-۱}{۲})$$

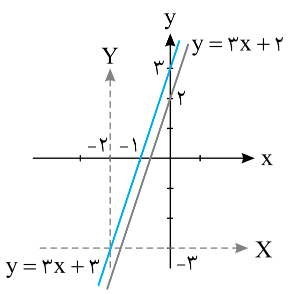
مساحت مثلث $A'B'C'$ برابر است با:

۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۳}{۲}$	۰
$\frac{۳}{۲}$	$\frac{-۱}{۲}$	−۱	$\frac{۳}{۲}$

$$\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}\left|۰-\frac{۱}{۲}+\frac{۹}{۴}-\frac{۳}{۴}+\frac{۳}{۴}-۰\right|=\frac{۱}{۲}\times\frac{۷}{۴}=\frac{۷}{۸}$$

۱۶- گزینه‌ی ۱ **راه‌حل اول**: محورهای مختصات را به هر نقطه‌ای روی خط $y=۳x+۳$ انتقال دهیم معادله‌ی خط $y=۳x+۲$ در دستگاه جدید به صورت $y=۳x-۱$ در می‌آید.

در بین گزینه‌های داده شده فقط گزینه‌ی (۱) روی خط $y=۳x+۳$ قرار دارد.



راه‌حل دوم: معادله‌ی خط را در دستگاه جدید با انتقال مبدأ به هر یک از گزینه‌ها می‌نویسیم فقط معادله‌ی خط با انتقال مبدأ به نقطه‌ی داده شده در گزینه‌ی یک به معادله‌ی $Y=۳X-۱$ است.

$$O'(-۲,-۳)\begin{cases}x=-۲+X\\y=-۳+Y\end{cases}\xrightarrow{y=۳x+۲}-۳+Y=۳(-۲+X)+۲\Rightarrow Y=۳X-۶+۲+۳\Rightarrow Y=۳X-۱$$

۱۷- گزینه‌ی ۴ از دو معادله‌ی پایین z را حذف می‌کنیم:

$$\begin{cases}y-۲z=۳\\۳x-۶z=۲۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۳y-۶z=۹\\۳x-۶z=۲۵\end{cases}\Rightarrow ۳y-۳x=۹-۲۵\Rightarrow ۳(y-x)=-۱۶\Rightarrow x-y=\frac{۱۶}{۳}$$

از طرفی در معادله‌ی اول داریم $x-y=۲$، با توجه به این‌که $۲\neq\frac{۱۶}{۳}$، دستگاه جواب ندارد.

۱۸- گزینه‌ی ۲ x را از دو معادله‌ی اول حذف می‌کنیم:

$$\begin{matrix}x+y=۲\\x-z=۳\end{matrix}\Rightarrow y+z=-۱\Rightarrow y=-۱-z$$

اگر دستگاه بی‌شمار جواب داشته باشد، باید با قرار دادن $y=-۱-z$ در معادله‌ی آخر به یک عبارت بدیهی برسیم.

$$y+z=m\xrightarrow{y=-۱-z}-۱=m$$

۱۹- گزینه‌ی ۴ معادله‌ی خطوط گذرنده از نقطه‌ی $A(۰,۲)$ با شیب دلخواه m برابر است با $y-۲=m(x-۰)$ یعنی $y=mx+۲$.

معادله‌ی حاصل از تقاطع این خط با منحنی باید، ریشه‌ی مضاعف داشته باشد تا خط بر منحنی مماس شود.

$$\begin{cases}y=mx+۲\\۲x^۲+y^۲=۱\end{cases}\Rightarrow ۲x^۲+(mx+۲)^۲=۱\Rightarrow ۲x^۲+m^۲x^۲+۴mx+۴=۱\Rightarrow(m^۲+۲)x^۲+۴mx+۳=۰$$

$$\xrightarrow{\Delta'=۰}(۲m)^۲-۳\times(m^۲+۲)=۰\Rightarrow ۴m^۲-۳m^۲-۶=۰\Rightarrow m^۲=۶\Rightarrow m=\pm\sqrt{۶}$$

بنابراین حاصل‌ضرب شیب‌ها برابر $-۶=\sqrt{۶}\times(-\sqrt{۶})$ است.

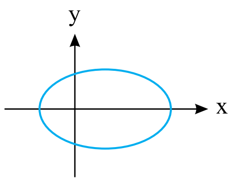
۲۰- گزینه‌ی ۴ **راه‌حل اول:** خط گذرنده از مبدأ مختصات با شیب m به معادله‌ی $y=mx$ است. اگر این خط منحنی $x^2+2y^2-4x=5$ را در دو نقطه قطع کند، می‌بایست معادله‌ی حاصل از تقاطع خط و منحنی، دو ریشه داشته باشد.

$$\begin{cases} y=mx \\ x^2+2y^2-4x=5 \end{cases} \Rightarrow x^2+2m^2x^2-4x=5 \Rightarrow (1+2m^2)x^2-4x-5=0$$

$$\xrightarrow{\Delta'>0} (-2)^2-(-5)(1+2m^2)>0 \Rightarrow 4+5+10m^2>0 \Rightarrow 10m^2>-9$$

این عبارت همواره صحیح است، پس به ازای هر $m\in\mathbb{R}$، خط و منحنی در دو نقطه تقاطع دارند.

راه‌حل دوم: معادله‌ی $F(x,y)=x^2+2y^2-4x-5=0$ معادله‌ی یک بیضی است، با توجه به این‌که $F(0,0)=-5<0$ بنابراین مبدأ مختصات درون بیضی است واضح است که هر خطی که از مبدأ می‌گذرد، آن را در دو نقطه قطع می‌کند.



پاسخ تشریحی آزمون ۷۰

۱- گزینه‌ی ۱ A و B دو سر قطر هستند، بنابراین نقطه‌ی وسط A و B همان مرکز دایره است:

$$O=\frac{A+B}{2}\Rightarrow O\left(\frac{2+4}{2},\frac{-1+5}{2}\right)\Rightarrow O(3,2)$$

از طرفی AB برابر قطر است، پس شعاع نصف AB است:

$$R=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{(4-2)^2+(-1-5)^2}}{2}=\frac{\sqrt{4+36}}{2}=\frac{2\sqrt{10}}{2}=\sqrt{10}$$

بنابراین معادله‌ی دایره برابر است با:

$$(x-3)^2+(y-2)^2=(\sqrt{10})^2 \Rightarrow x^2-6x+9+y^2-4y+4=10 \Rightarrow x^2+y^2-6x-4y+3=0$$

۲- گزینه‌ی ۳ فرم گسترده‌ی دایره به‌صورت $x^2+y^2+ax+by+c=0$ می‌باشد، با توجه به این‌که دو نقطه‌ی $(0,0)$ و $(3,1)$ روی این دایره هستند، داریم:

$$\begin{cases} (0,0):\ c=0 \\ (3,1):\ 9+1+3a+b+c=0 \end{cases} \Rightarrow c=0,\ 3a+b=-10\ \ (I)$$

از طرف دیگر می‌دانیم مرکز این دایره نقطه‌ی $O(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2})$ است که روی خط $y=2x$ قرار دارد. پس:

$$\begin{cases} \frac{-b}{2}=2\times(\frac{-a}{2})\Rightarrow b=2a \\ (I): 3a+b=-10 \end{cases} \Rightarrow a=-2,\ b=-4$$

بنابراین معادله‌ی دایره به این شکل است:

$$x^2+y^2-2x-4y=0 \Rightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=1+4 \Rightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=5$$

بنابراین شعاع دایره برابر $\sqrt{5}$ است.

البته برای پیدا کردن شعاع می‌توانستیم فاصله‌ی هر یک از نقاط $(0,0)$ یا $(3,1)$ را تا مرکز دایره $(2,1)$ نیز محاسبه کنیم:

$$\sqrt{(1-0)^2+(2-0)^2}=\sqrt{5}$$

۳- گزینه‌ی ۲ همه‌ی قطرهای یک دایره از مرکز دایره می‌گذرند، بنابراین دسته خطوط داده شده به ازای همه‌ی مقادیر m باید از یک نقطه‌ی مشخص (همان مرکز دایره) بگذرند. برای پیدا کردن این نقطه دو روش وجود دارد:

راه‌حل اول: m را برابر دو مقدار دلخواه قرار می‌دهیم و با حل دستگاه نقطه‌ی مورد نظر را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} m=-1:\ y+0\times x+1=0\Rightarrow y=-1 \\ m=-2:\ 0\times y-x+1=0\Rightarrow x=1 \end{cases} \Rightarrow O(1,-1)\ \text{مرکز}$$

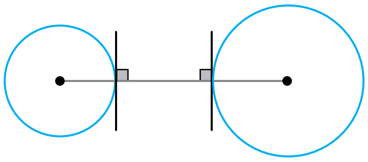
راه‌حل دوم: دسته خطوط داده شده را بر حسب m مرتب می‌کنیم، با مساوی صفر قرار دادن ضریب m و ضریب ثابت، نقطه‌ی مورد نظر پیدا می‌شود.

$$my+2y+mx+x+1=0\Rightarrow m(x+y)+(2y+x+1)=0\Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ 2y+x+1=0 \end{cases} \Rightarrow x=1,\ y=-1\Rightarrow O(1,-1)\ \text{مرکز}$$

شعاع دایره برابر فاصله‌ی نقطه‌ی $O(1,-1)$ تا $A(5,2)$ است:

$$AO=\sqrt{(5-1)^2+(2+1)^2}=\sqrt{25}=5$$

۴- گزینه‌ی ۲ خطی که مرکزهای دو دایره را به هم وصل می‌کند، همواره بر هر دو دایره عمود است.



ابتدا مرکز دو دایره را پیدا می‌کنیم:

$$x^2+2x+y^2-2y=0 \Rightarrow (x+1)^2+(y-1)^2=2 \Rightarrow O(-1,1)$$

$$x^2-2x+y^2+2y=0 \Rightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=2 \Rightarrow O'(1,-1)$$

برای یافتن معادله‌ی خط OO'، با یافتن شیب و استفاده از یکی از نقاط O یا O' معادله را به‌دست می‌آوریم:

$$m_{OO'}=\frac{-1-1}{1+1}=-1 \Rightarrow y-1=-1(x+1) \Rightarrow y=-x \Rightarrow y+x=0$$

۵- گزینه‌ی ۲ فرم گسترده‌ی معادله‌ی دایره به‌صورت $x^2+y^2+ax+by+c=0$ است. با جایگذاری ۳ نقطه‌ی داده شده و حل دستگاه، a، b و c را پیدا می‌کنیم:

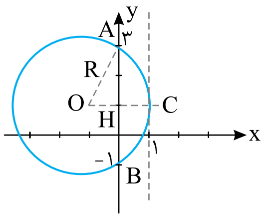
$$\left.\begin{array}{ll}(0,0): & c=0\\ (-2,4): & 4+16-2a+4b+c=0 \xrightarrow{c=0} -2a+4b=-20\\ (2,1): & 4+1+2a+b+c=0 \xrightarrow{c=0} 2a+b=-5\end{array}\right\} \Rightarrow b=-5,\ a=0,\ c=0$$

بنابراین معادله‌ی دایره برابر است با:

$$x^2+y^2-5y=0 \Rightarrow x^2+(y-\frac{5}{2})^2=\frac{25}{4} \Rightarrow R=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$$

سراسری - ۹۱

۶- گزینه‌ی ۲ با توجه به شکل مقابل، داریم:



$$AH=\frac{AB}{2}=\frac{3-(-1)}{2} \Rightarrow AH=2$$

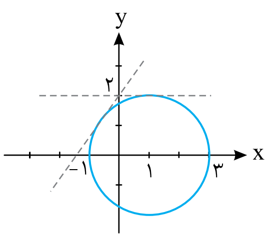
$$AO^2=OH^2+AH^2 \Rightarrow R^2=OH^2+4 \Rightarrow OH=\sqrt{R^2-4}$$

$$\xrightarrow{HC=1} OC=OH+HC=\sqrt{R^2-4}+1$$

با توجه به این‌که دایره بر خط $x=1$ مماس است، OC همان شعاع است، پس:

$$\sqrt{R^2-4}+1=R \Rightarrow \sqrt{R^2-4}=R-1 \Rightarrow R^2-4=R^2-2R+1 \Rightarrow 2R=5 \Rightarrow R=2/5$$

۷- گزینه‌ی ۲ ابتدا مرکز و شعاع دایره را پیدا می‌کنیم:



$$x^2+y^2-2x=3 \Rightarrow (x-1)^2+y^2=4 \Rightarrow O(1,0),\ R=2$$

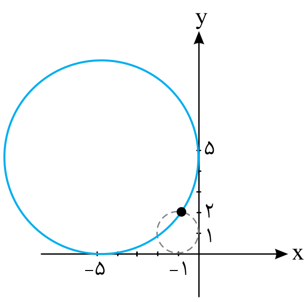
اگر $y-mx-2=0$ بر دایره مماس باشد، می‌بایست فاصله‌ی مرکز دایره از آن خط برابر شعاع باشد، یعنی:

$$\frac{|-m\times1+0-2|}{\sqrt{m^2+1}}=2 \Rightarrow |m+2|=2\sqrt{m^2+1} \Rightarrow m^2+4m+4=4m^2+4$$

$$\Rightarrow 3m^2-4m=0 \Rightarrow m=0 \text{ یا } m=\frac{4}{3}$$

سراسری خارج از کشور - ۹۱

۸- گزینه‌ی ۲ اگر دایره‌ی $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$ بر هر دو محور مختصات مماس باشد، داریم $|\alpha|=|\beta|=R$، از آن‌جا که این دایره از نقطه‌ی $(-1,2)$ در ربع دوم می‌گذرد مرکز آن در ربع دوم است (α منفی و β مثبت است) و داریم: $\beta=R$ و $\alpha=-R$، پس:



$$(x+R)^2+(y-R)^2=R^2 \xrightarrow{(-1,2)} (R-1)^2+(2-R)^2=R^2$$

$$\Rightarrow R^2-2R+1+R^2-4R+4=R^2 \Rightarrow R^2-6R+5=0 \Rightarrow R=1 \text{ یا } R=5$$

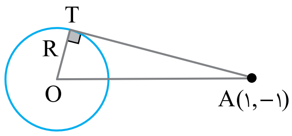
بنابراین قطر دایره‌ی بزرگ‌تر برابر ۱۰ است.

سراسری - ۹۰

۹- گزینه‌ی ۱ خطوط قائم بر دایره، همواره از نقطه‌ی ثابتی می‌گذرند که همان مرکز دایره است. برای آن‌که معادله‌ی داده شده، معادله‌ی دایره باشد، می‌بایست ضرایب x^2 و y^2 یکسان باشند، بنابراین:

$$2=a-1 \Rightarrow a=3$$

۱۰- گزینه‌ی ۴ ابتدا معادله‌ی دایره را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم:



$$x^2+y^2+x-y-1=0 \Rightarrow (x+\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1 \Rightarrow (x+\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{2}$$

بنابراین $O(\frac{-1}{2},\frac{1}{2})$ مرکز دایره و $R=\sqrt{\frac{3}{2}}$ شعاع دایره است.

با توجه به شکل مقابل، طول مماس AT از رابطه‌ی $AO^2=AT^2+OT^2$ به‌دست می‌آید.

برای به‌دست آوردن AO داریم:

$$AO=\sqrt{(\frac{-1}{2}-1)^2+(\frac{1}{2}+1)^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{9}{2}}$$

بنابراین:

$$AT^2=AO^2-R^2=\frac{9}{2}-\frac{3}{2}=3 \Rightarrow AT=\sqrt{3}$$

۱۱- گزینه‌ی ۳ ابتدا مرکز و شعاع دو دایره را پیدا می‌کنیم:

$$x^2+y^2-6x+5=0 \Rightarrow (x-3)^2+y^2=4 \Rightarrow O(3,0), R=2$$

$$x^2+y^2=a^2 \Rightarrow O'(0,0), R'=a$$

اگر دو دایره مماس داخل باشند، فاصله‌ی مرکز آن‌ها از یک‌دیگر برابر قدرمطلق تفاضل شعاع دایره‌ها است، بنابراین:

$$OO'=|R'-R| \Rightarrow 3=|R'-2| \Rightarrow \begin{cases} R'=5 \\ R'=-1 \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۱۲- گزینه‌ی ۴ ابتدا شعاع دو دایره و فاصله‌ی مرکز دو دایره را از هم محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y+2)^2=5 \Rightarrow O_1(1,-2), R_1=\sqrt{5} \\ x^2+y^2+2y=0 \Rightarrow x^2+(y+1)^2=1 \Rightarrow O_2(0,-1), R_2=1 \end{cases} \Rightarrow O_1O_2=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

با توجه به این‌که $\sqrt{5}-1<\sqrt{2}<\sqrt{5}+1$، یعنی $R_1-R_2<O_1O_2<R_1+R_2$، بنابراین دو دایره متقاطع هستند.

توجه: از آن‌جا که $\sqrt{5}>2$ و $\sqrt{2}<2$، نامساوی $\sqrt{2}<\sqrt{5}+1$ واضح است، برای اثبات این‌که $\sqrt{5}-1<\sqrt{2}$ می‌توان به این روش عمل کرد:

$$\sqrt{5}-1 \bigcirc \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{5} \bigcirc \sqrt{2}+1 \Leftrightarrow 5 \bigcirc 2\sqrt{2}+3 \Leftrightarrow 2 \bigcirc 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 1 \bigcirc \sqrt{2}$$

در عبارت آخر مشخص است که سمت راست بزرگ‌تر است $(1<\sqrt{2})$، بنابراین در ابتدا نیز سمت راست بزرگ‌تر بوده است: $\sqrt{5}-1<\sqrt{2}$

۱۳- گزینه‌ی ۲ با توجه به این‌که $MA=\sqrt{2}MB$، بنابراین:

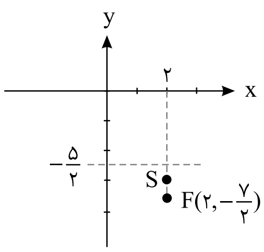
$$MA^2=2MB^2 \Rightarrow (x-1)^2+(y-3)^2=2((x+2)^2+(y-4)^2) \Rightarrow x^2-2x+1+y^2-6y+9=2x^2+8x+8+2y^2-16y+32$$

$$\Rightarrow x^2+10x+y^2-10y=10-40 \Rightarrow (x+5)^2+(y-5)^2=25+25-30 \Rightarrow R^2=20 \Rightarrow R=2\sqrt{5}$$

۱۴- گزینه‌ی ۲ با توجه به شکل مقابل، سهمی قائم رو به پایین است و رأس آن نقطه‌ی $S(2,-3)$ می‌باشد.

فاصله‌ی رأس تا کانون برابر $P=0.5$ است.

پس:



$$(x-2)^2=-4\times 0.5(y+3) \Rightarrow x^2-4x+4=-2y-6 \Rightarrow x^2=4x-2y-10$$

۱۵- گزینه‌ی ۴ سهمی را به فرم استاندارد می‌نویسیم:

$$y^2+28=4x+4y \Rightarrow y^2-4y+4=4x-24 \Rightarrow (y-2)^2=4(x-6)$$

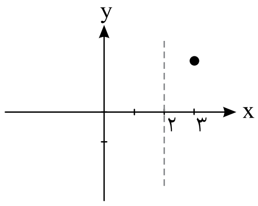
بنابراین رأس سهمی نقطه‌ی $S(6,2)$ و $p=\frac{4}{4}=1$ و سهمی افقی رو به راست است. بنابراین خط هادی آن خط قائم $x=6-1=5$ می‌باشد.

۱۶- گزینه‌ی ۲ فاصله‌ی کانون تا خط هادی برابر $2P$ است، بنابراین $p=1$. سهمی افقی رو به راست است، پس معادله‌ی آن به‌صورت $(y-\beta)^2=4p(x-\alpha)$ است. از طرفی چون معادله‌ی سهمی به‌صورت $y^2-ay=-ax$ داده شده است، داریم:

$$-a=4p \Rightarrow a=-4$$

$$y^2+4y=4x \Rightarrow (y+2)^2=4(x+1)$$

بنابراین مختصات رأس سهمی $S(-1,-2)$ و مختصات کانون آن $F(-1+1,-2)$ است.



۱۷- گزینه‌ی ۱ خط $y=۱$ محور تقارن سهمی است، بنابراین سهمی افقی است و مختصات رأس آن $S(\alpha,۱)$ می‌باشد. نقطه‌ی داده شده از سهمی، در سمت راست خط هادی آن $(x=۲)$ است، بنابراین سهمی رو به راست باز می‌شود و مختصات رأس آن $S(۲+p,۱)$ است، پس داریم:

$$(y-۱)^۲=۴p(x-(۲+p))\xrightarrow{(۳,۲)}(۲-۱)^۲=۴p(۳-۲-p)\Rightarrow ۱=۴p-۴p^۲$$
$$\Rightarrow ۴p^۲-۴p+۱=۰\Rightarrow(۲p-۱)^۲=۰\Rightarrow p=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین فاصله‌ی کانون تا خط هادی برابر $۲p=۱$ می‌باشد.

۱۸- گزینه‌ی ۲ سهمی داده شده، قائم رو به بالا، با مختصات رأس $S(۰,-۲)$ می‌باشد:

$$x^۲=۴p(y+۲)$$

از آن‌جا که نقطه‌ای به مختصات $(۸,۰)$ روی این سهمی است، داریم:

$$۸^۲=۴p(۰+۲)\Rightarrow ۶۴=۸p\Rightarrow p=۸$$

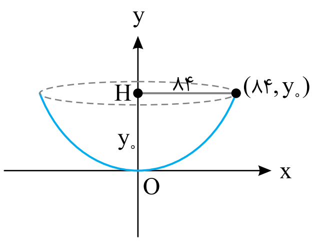
بنابراین عرض کانون این سهمی $-۲+۸=۶$ است.

۱۹- گزینه‌ی ۳ سهمی داده شده یک سهمی قائم رو به بالا است:

$$x^۲-۲x-۴y+۹=۰\Rightarrow(x-۱)^۲=۴y-۹+۱\Rightarrow(x-۱)^۲=۴(y-۲)$$

بنابر ویژگی بازتابندگی سهمی، هر اشعه‌ی نورانی قائم در بازتاب از کانون این سهمی می‌گذرد. از آن‌جا که $S(۱,۲)$، $p=\frac{۴}{۴}=۱$ و سهمی رو به بالا است، پس کانون آن $F(۱+۱,۲)$ یعنی $F(۲,۲)$ می‌باشد.

سراسری خارج از کشور - ۸۹



۲۰- گزینه‌ی ۲ سهمی را قائم رو به بالا با رأس $(۰,۰)$ در نظر می‌گیریم. معادله‌ی آن به‌صورت زیر است:

$$(x-۰)^۲=۴p(y-۰)\xrightarrow{p=۷۲}x^۲=۴\times۷۲\times y$$

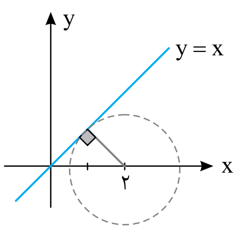
از آن‌جا که نقطه‌ی $A(\frac{۱۶۸}{۲},y_۰)$ روی سهمی است، داریم:

$$۸۴^۲=۴\times۷۲\times y_۰\Rightarrow y_۰=\frac{۴۹}{۲}$$

بنابراین عمق آینه برابر $OH=\frac{۴۹}{۲}=۲۴/۵$ است.

سراسری - ۸۹

پاسخ تشریحی آزمون ۷۱



۱- گزینه‌ی ۱ خط $x-y=۰$ بر دایره مماس است، بنابراین فاصله‌ی نقطه‌ی $O(۲,۰)$ از این خط برابر شعاع دایره است.

$$R=\frac{|۲-۰|}{\sqrt{۱+۱}}=\sqrt{۲}$$

بنابراین معادله‌ی دایره به‌صورت $(x-۲)^۲+y^۲=۲$ می‌باشد.

محل تقاطع این دایره با خط $y=۱$ از حل معادله‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$(x-۲)^۲+۱^۲=۲\Rightarrow(x-۲)^۲=۱\Rightarrow x-۲=\pm۱\Rightarrow x=۱ \text{ یا } x=۳$$

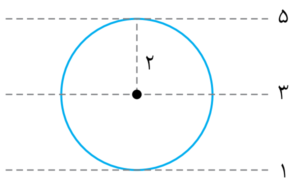
۲- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول:** شعاع دایره‌ی $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ از رابطه‌ی $R=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}$ به‌دست می‌آید، بنابراین برای این‌که شعاع دایره معین باشد، داریم:

$$a^۲+b^۲-۴c>۰\Rightarrow ۴+۱۶-۴(k^۲+۱)>۰\Rightarrow ۴(k^۲+۱)<۲۰\Rightarrow k^۲+۱<۵\Rightarrow k^۲<۴\Rightarrow -۲<k<۲$$

راه‌حل دوم: معادله‌ی دایره را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$x^۲+y^۲-۲x-۴y+k^۲+۱=۰\Rightarrow(x-۱)^۲+(y-۲)^۲=۱+۴-k^۲-۱\Rightarrow(x-۱)^۲+(y-۲)^۲=۴-k^۲\Rightarrow ۴-k^۲>۰\Rightarrow -۲<k<۲$$

۳- گزینه‌ی ۲ دایره‌ی مورد نظر بین دو خط $y=۵$ و $y=۱$ و بر هر دو مماس است، بنابراین شعاع دایره برابر است با:



$$R=\frac{۵-۱}{۲}=۲$$

از طرف دیگر مرکز دایره دقیقاً وسط دو خط داده شده است و روی خط $y=۳$ قرار دارد.

پس اگر $O(\alpha,\beta)$ مرکز دایره باشد، داریم:

$$\begin{cases}\beta=۳\\ \beta=۲\alpha+۳\end{cases}\Rightarrow\alpha=۰\Rightarrow O(۰,۳),\ R=۲\Rightarrow(x-۰)^۲+(y-۳)^۲=۲^۲\Rightarrow x^۲+y^۲-۶y+۵=۰$$

۴- گزینه‌ی ۳ مرکز دایره $O(\alpha,\beta)$ روی قطر دایره است و داریم $\alpha-\beta=۲$، ضمناً فاصله‌ی مرکز دایره از نقاط دایره، ثابت (برابر شعاع) است، پس:

$$\sqrt{(۳-\alpha)^۲+(۰-\beta)^۲}=\sqrt{(۰-\alpha)^۲+(۱-\beta)^۲}\xrightarrow{\alpha=\beta+۲}(۳-\beta-۲)^۲+\beta^۲=(-\beta-۲)^۲+(۱-\beta)^۲\Rightarrow(۱-\beta)^۲+\beta^۲=(\beta+۲)^۲+(۱-\beta)^۲$$

$$\Rightarrow\beta^۲=\beta^۲+۴\beta+۴\Rightarrow۴\beta=-۴\Rightarrow\beta=-۱\xrightarrow{\alpha=\beta+۲}\alpha=۱$$

برای پیدا کردن شعاع، فاصله‌ی مرکز $O(۱,-۱)$ را از یکی از نقاط روی دایره پیدا می‌کنیم:

$$R=\sqrt{(۳-۱)^۲+(۰+۱)^۲}=\sqrt{۴+۱}=\sqrt{۵}$$

سراسری خارج از کشور – ۹۰

۵- گزینه‌ی ۴ اگر دایره‌ی $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲$ بر هر دو محور مماس باشد، داریم $|\alpha|=|\beta|=R$ و اگر دایره (و طبیعتاً مرکز آن) در ربع اول باشند، α و β هر دو مثبت هستند و داریم $\alpha=\beta=R$، پس:

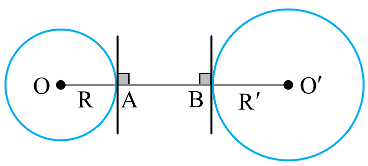
$$(x-R)^۲+(y-R)^۲=R^۲\Rightarrow x^۲-۲Rx+R^۲+y^۲-۲Ry+R^۲=R^۲$$

$$x^۲-۲Rx+y^۲-۲Ry=-R^۲$$

از طرفی معادله‌ی دایره با فرمول $x^۲+ax+y^۲-۴y=b$ داده شده است، پس داریم:

$$\begin{cases}-۲R=a\\ -۲R=-۴\Rightarrow R=۲\ ,\ a=-۴\ ,\ b=-۴\ \Rightarrow a+۲b=-۱۲\\ -R^۲=b\end{cases}$$

۶- گزینه‌ی ۲ خطی که مرکزهای دو دایره را به هم وصل می‌کند دو دایره را در نقاط A و B قطع می‌کند.



از آن‌جا که AB بر هر دو دایره عمود است، بنابراین کوتاه‌ترین فاصله‌ی بین دو دایره است.

$$x^۲+y^۲-۸y+۱۰=۰\Rightarrow x^۲+(y-۴)^۲=۶\Rightarrow O(۰,۴),\ R=\sqrt{۶}$$

$$x^۲+y^۲-۶x+۳=۰\Rightarrow(x-۳)^۲+y^۲=۶\Rightarrow O'(۳,۰),\ R'=\sqrt{۶}$$

$$OO'=\sqrt{(۳-۰)^۲+(۰-۴)^۲}=\sqrt{۲۵}=۵\Rightarrow AB=OO'-R-R'\Rightarrow AB=۵-۲\sqrt{۶}$$

۷- گزینه‌ی ۴ ابتدا مرکز و شعاع دایره‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$x^۲+y^۲-۲x+۴y+b=۰\Rightarrow(x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۵-b\Rightarrow O_۱(۱,-۲),\ R_۱=\sqrt{۵-b}$$

$$x^۲+y^۲+۴x-۴y-۱=۰\Rightarrow(x+۲)^۲+(y-۲)^۲=۹\Rightarrow O_۲(-۲,۲),\ R_۲=۳$$

برای آن‌که دو دایره متقاطع باشند، باید داشته باشیم:

$$|R_۱-R_۲|<O_۱O_۲<R_۱+R_۲$$

$$O_۱O_۲=\sqrt{(۱+۲)^۲+(-۲-۲)^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=۵\Rightarrow|\sqrt{۵-b}-۳|<۵<۳+\sqrt{۵-b}$$

$$\begin{cases}۳+\sqrt{۵-b}>۵\Rightarrow\sqrt{۵-b}>۲\Rightarrow۵-b>۴\Rightarrow b<۱\\ |\sqrt{۵-b}-۳|<۵\Rightarrow-۵<\sqrt{۵-b}-۳<۵\Rightarrow-۲<\sqrt{۵-b}<۸\xrightarrow{\sqrt{۵-b}>۰}\sqrt{۵-b}<۸\Rightarrow۵-b<۶۴\Rightarrow b>-۵۹\end{cases}\Rightarrow-۵۹<b<۱$$

۸- گزینه‌ی ۲ برای آن‌که دو دایره مماس خارج باشند، باید داشته باشیم $O_۱O_۲=R_۱+R_۲$، بنابراین داریم:

$$x^۲+y^۲-۴x-۶y-۳=۰\Rightarrow(x-۲)^۲+(y-۳)^۲=۱۶\Rightarrow O_۱(۲,۳),\ R_۱=۴$$

$$(x+۱)^۲+(y-۷)^۲=k\Rightarrow O_۲(-۱,۷),\ R_۲=\sqrt{k}$$

$$O_۱O_۲=\sqrt{(۲+۱)^۲+(۳-۷)^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=۵\Rightarrow O_ہO_۲=R_۱+R_۲\Rightarrow۵=\sqrt{k}+۴\Rightarrow\sqrt{k}=۱\Rightarrow k=۱$$

۹- گزینه‌ی ۱ با مساوی قرار دادن دو دایره، معادله‌ی وتر مشترک آن‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2=y \\ 2x^2+2y^2=x \end{cases} \Rightarrow 0=y-x \Rightarrow y=x$$

برای یافتن طول این وتر، آن را با یکی از دو دایره تقاطع می‌دهیم، تا دو نقطه‌ی تقاطع به‌دست آید:

$$2x^2+2y^2=x \xrightarrow{y=x} 2x^2+2x^2=x \Rightarrow 4x^2-x=0 \Rightarrow x=0 \text{ یا } x=\frac{1}{4}$$

بنابراین دو نقطه‌ی $A(0,0)$ و $B(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ دو سر وتر مشترک دو دایره است و طول آن برابر است با:

$$AB=\sqrt{(\frac{1}{4}-0)^2+(\frac{1}{4}-0)^2}=\sqrt{\frac{2}{16}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

۱۰- گزینه‌ی ۳ با توجه به عبارت داده شده بر حسب t، رابطه‌ای مستقل از t بین x و y پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} x=1+2\sin t \\ y=3-2\cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1=2\sin t \\ y-3=-2\cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{2}=\sin t \\ \frac{y-3}{-2}=\cos t \end{cases} \xrightarrow{\sin^2 t+\cos^2 t=1} (\frac{x-1}{2})^2+(\frac{y-3}{-2})^2=1 \Rightarrow (x-1)^2+(y-3)^2=4$$

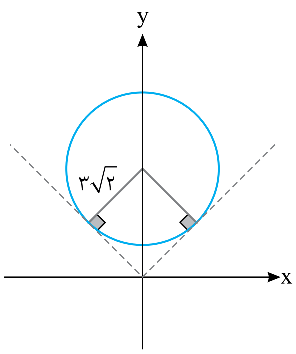
منحنی به‌دست آمده دایره‌ای به مرکز $O(1,3)$ و شعاع ۲ است.

نقطه‌ی $M(-2,-1)$ خارج دایره‌ی به‌دست آمده است. $(f(-2,-1)>0)$

کم‌ترین فاصله‌ی این نقطه از دایره برابر $MO-R$ است.

$$MO-R=\sqrt{(1+2)^2+(3+1)^2}-2=5-2=3$$

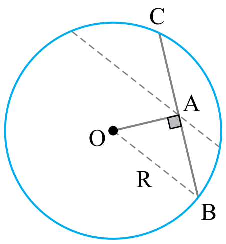
۱۱- گزینه‌ی ۳ مرکز دایره‌ای که بر نیمساز ناحیه‌ی اول و نیمساز ناحیه‌ی دوم مماس است روی محور yها قرار دارد، بنابراین $O(0,\beta)$ مرکز دایره است و شعاع دایره برابر $3\sqrt{2}$ است، پس فاصله‌ی O از خط $y=x$ (یا $y=-x$) برابر $3\sqrt{2}$ است.



$$3\sqrt{2}=\frac{|\beta-0|}{\sqrt{1+1}} \Rightarrow |\beta|=6 \xrightarrow{\beta>0} \beta=6$$

$$\text{معادله‌ی دایره}:(x-0)^2+(y-6)^2=(3\sqrt{2})^2 \Rightarrow x^2+y^2-12y+18=0$$

۱۲- گزینه‌ی ۳ کوتاه‌ترین وتری که از یک نقطه درون دایره می‌گذرد بر شعاع عمود است.



برای یافتن طول آن ابتدا فاصله‌ی آن نقطه از مرکز دایره و شعاع دایره را پیدا می‌کنیم.

$$x^2-4x+y^2-2y=4 \Rightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=4+1+4 \Rightarrow O(2,1), R=3$$

$$OA=\sqrt{(2-1)^2+(1-1)^2}=1$$

با توجه به قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث OAB داریم:

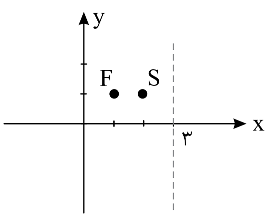
$$AB^2+OA^2=OB^2 \Rightarrow AB^2=3^2-1^2 \Rightarrow AB=\sqrt{8}=2\sqrt{2} \Rightarrow BC=2AB=4\sqrt{2}$$

۱۳- گزینه‌ی ۱ ابتدا معادله‌ی سهمی را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$3y^2-6y=2x \Rightarrow y^2-2y=\frac{2}{3}x \Rightarrow (y-1)^2=\frac{2}{3}(x+\frac{3}{2})$$

بنابراین $4p=\frac{2}{3}$، فاصله‌ی کانون تا خط هادی سهمی برابر $2p$ یعنی $\frac{1}{3}$ است.

۱۴- گزینه‌ی ۴ خط هادی سهمی، خطی عمودی و کانون در سمت چپ آن است، پس سهمی افقی رو به چپ است. فاصله‌ی رأس تا کانون $(2p)$ برابر ۲ است، بنابراین $p=1$ و رأس سهمی نقطه‌ی $S(2,1)$ می‌باشد. معادله‌ی سهمی برابر است با:



$$(y-1)^2=-4\times1\times(x-2)$$

برای یافتن محل تلاقی سهمی با محور yها، خط $x=0$ را با سهمی تقاطع می‌دهیم:

$$(y-1)^2=-4(-2) \Rightarrow (y-1)^2=8 \Rightarrow y-1=\pm2\sqrt{2} \Rightarrow y=\pm2\sqrt{2}+1$$

فاصله‌ی دو نقطه‌ی $A(2\sqrt{2}+1,0)$ و $B(-2\sqrt{2}+1,0)$ برابر با $4\sqrt{2}$ است.

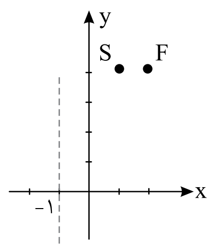
۱۵- گزینه‌ی ۴ فاصله‌ی کانون تا خط هادی $(2p)$ برابر ۲ است، پس $p=1$ و با استاندارد کردن معادله داریم:

$$y^2-2y=-ax-a \Rightarrow (y-1)^2=-a(x+\frac{a-1}{a})$$

با توجه به معادله‌ی سهمی مقدار $-a$ برابر $4p$ یا $-4p$ است، یعنی:

$$\begin{cases} a=4:(y-1)^2=-4(x+\frac{3}{4}) \Rightarrow S(\frac{-3}{4},1) \\ \text{یا} \\ a=-4:(y-1)^2=4(x-\frac{5}{4}) \Rightarrow S(\frac{5}{4},1) \end{cases}$$

۱۶- گزینه‌ی ۱ خط هادی سهمی عمودی و کانون سمت راست آن است، پس سهمی افقی رو به راست است. فاصله‌ی کانون تا خط هادی برابر $2p=2-(-1)$ است، یعنی $p=\frac{3}{2}$ و مختصات رأس برابر $S(2-\frac{3}{2},4)$ یا $S(\frac{1}{2},4)$ است.



$$\text{معادله‌ی سهمی}:(y-4)^2=4\times\frac{3}{2}(x-\frac{1}{2}) \Rightarrow (y-4)^2=6x-3$$

محل تلاقی این سهمی با محور xها، نقطه‌ای با عرض صفر است:

$$(0-4)^2=6x-3 \Rightarrow 16=6x-3 \Rightarrow x=\frac{19}{6}$$

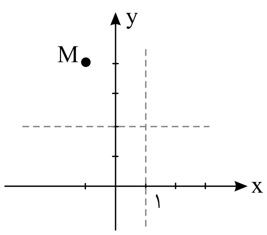
سراسری - ۹۲

۱۷- گزینه‌ی ۲ خط مماس بر سهمی بر خطی به شیب ۲ عمود است، بنابراین شیب خط مماس، برابر $\frac{-1}{2}$ است. شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه برابر مشتق در آن نقطه است، پس از رابطه‌ی داده شده مشتق می‌گیریم:

$$y^2=2x+4 \Rightarrow 2yy'=2 \xrightarrow{y'=\frac{-1}{2}} 2y\times(\frac{-1}{2})=2 \Rightarrow -y=2 \Rightarrow y=-2 \xrightarrow{y^2=2x+4} x=0$$

بنابراین شیب خط مماس در نقطه‌ی $(0,-2)$ برابر $\frac{-1}{2}$ است.

۱۸- گزینه‌ی ۲ خط هادی سهمی عمودی و نقطه‌ی داده شده روی سهمی سمت چپ آن است، پس سهمی افقی رو به چپ است. محور تقارن سهمی $y=2$ است، پس مختصات رأس سهمی $S(1-p,2)$ می‌باشد.



$$\text{معادله‌ی سهمی}:(y-2)^2=-4P(x-(1-p)) \xrightarrow{M(-1,4)} (4-2)^2=-4p(-1-1+p)$$

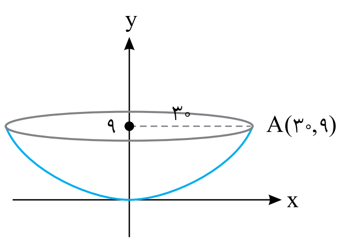
$$\Rightarrow 4=8p-4p^2 \Rightarrow 4p^2-8p+4=0 \Rightarrow p^2-2p+1=0 \Rightarrow p=1$$

فاصله‌ی کانون تا خط هادی برابر $2p$ است، پس طول کانون برابر $1-2p=1-2=-1$ می‌باشد.

۱۹- گزینه‌ی ۳ وتری که در کانون بر محور سهمی عمود است، وتر کانونی نام دارد و طول آن برابر $4p$ می‌باشد.

$$y^2=3x+3y \Rightarrow y^2-3y=3x \Rightarrow (y-\frac{3}{2})^2=3(x+\frac{3}{4}) \Rightarrow 4p=3$$

۲۰- گزینه‌ی ۴ برای سهولت در محاسبه، سهمی را قائم رو به بالا با رأس $S(0,0)$ در نظر می‌گیریم.



معادله‌ی آن به‌صورت $x^2=4py$ می‌باشد. با توجه به این‌که نقطه‌ی $A(30,9)$ روی این سهمی است، داریم:

$$30^2=4p\times9 \Rightarrow p=\frac{30^2}{4\times9} \Rightarrow p=25$$

فاصله‌ی رأس تا کانون سهمی برابر $p=25$ می‌باشد.

سراسری خارج از کشور - ۹۲

پاسخ تشریحی آزمون ۷۲

۱- گزینه‌ی ۱ مرکز بیضی وسط دو کانون است، پس $O(۱,۰)$ مرکز بیضی است. علاوه بر آن داریم:

$$\begin{cases} FF'=۲c \Rightarrow ۲=۲c \Rightarrow c=۱ \\ \text{طول قطر بزرگ}=۲a \Rightarrow ۲\sqrt{۵}=۲a \Rightarrow a=\sqrt{۵} \end{cases} \Rightarrow b^۲=a^۲-c^۲=۵-۱=۴$$

معادله‌ی بیضی قائم با مرکز $O(۱,۰)$، $a^۲=۵$ و $b^۲=۴$ به‌صورت زیر است:

$$\frac{(x-۱)^۲}{۴}+\frac{y^۲}{۵}=۱ \Rightarrow ۵(x^۲-۲x+۱)+۴y^۲=۲۰ \Rightarrow ۵x^۲-۱۰x+۴y^۲=۱۵$$

۲- گزینه‌ی ۳ فاصله‌ی کانون‌های بیضی از هم برابر $۲c$ است، پس $c=\sqrt{۶}$

ضمناً فاصله‌ی AA' برابر $۲a$ است، پس $a=\frac{۳-(-۳)}{۲}=۳$

$$b^۲=a^۲-c^۲=۹-۶=۳ \Rightarrow b=\sqrt{۳}$$

مرکز بیضی وسط دو رأس آن است، یعنی $O(۰,۱)$.

$$\text{معادله‌ی بیضی}: \frac{x^۲}{۹}+\frac{(y-۱)^۲}{۳}=۱ \Rightarrow x^۲+۳(y^۲-۲y+۱)=۹ \Rightarrow x^۲+۳y^۲-۶y=۶$$

۳- گزینه‌ی ۲ ابتدا معادله را به فرم استاندارد می‌نویسیم: (ضریب $x^۲$ و $y^۲$، مثبت و نابرابر هستند، پس معادله مربوط به بیضی است.)

$$۴x^۲+۵y^۲-۸x+۲۰y=۱ \Rightarrow ۴(x^۲-۲x)+۵(y^۲+۴y)=۱ \Rightarrow ۴(x-۱)^۲+۵(y+۲)^۲=۱+۴+۵\times۴ \Rightarrow$$

$$۴(x-۱)^۲+۵(y+۲)^۲=۲۵ \Rightarrow \frac{(x-۱)^۲}{\frac{۲۵}{۴}}+\frac{(y+۲)^۲}{۵}=۱$$

از آنجایی‌که $\frac{۲۵}{۴}>۵$ است بنابراین $a^۲=\frac{۲۵}{۴}$ و $b^۲=۵$. بزرگ‌ترین وتر بیضی، همان قطر بزرگ آن است که طول آن برابر $۲a$ است.

$$a^۲=\frac{۲۵}{۴} \Rightarrow a=\frac{۵}{۲} \Rightarrow ۲a=۵$$

۴- گزینه‌ی ۲ ابتدا معادله‌ی بیضی را به فرم استاندارد می‌نویسیم:

$$۳x^۲+۲y^۲+۶x-۸y=-۵ \Rightarrow ۳(x^۲+۲x)+۲(y^۲-۴y)=-۵ \Rightarrow ۳(x+۱)^۲+۲(y-۲)^۲=۳\times۱+۲\times۴-۵ \Rightarrow$$

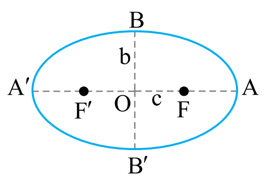
$$۳(x+۱)^۲+۲(y-۲)^۲=۶ \Rightarrow \frac{(x+۱)^۲}{۲}+\frac{(y-۲)^۲}{۳}=۱$$

مخرج $y^۲$ بیش‌تر از مخرج $x^۲$ است، پس بیضی قائم است.

$$\begin{cases} a^۲=۳ \\ b^۲=۲ \end{cases} \xrightarrow{c^۲=a^۲-b^۲} c=\sqrt{۳-۲}=۱$$

مرکز بیضی نقطه‌ی $O(-۱,۲)$ است و کانون‌های این بیضی قائم دو نقطه‌ی $F(-۱,۲+۱)$ و $F'(-۱,۲-۱)$ یا $F(-۱,۳)$ و $F'(-۱,۱)$ هستند.

۵- گزینه‌ی ۲ با توجه به شکل روبه‌رو فاصله‌ی کانون تا نزدیک‌ترین رأس برابر AF است و داریم:



$$AF=AO-FO=a-c \Rightarrow a-c=۲$$

فاصله‌ی F تا رأس غیرکانونی برابر BF یا BF' است و داریم:

$$BF+BF'=۲a \Rightarrow ۲BF=۲a \Rightarrow BF=a \Rightarrow a=۵$$

$$\begin{cases} a=۵ \\ a-c=۲ \end{cases} \Rightarrow c=۳ \Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{۳}{۵}=۰/۶$$

۶- گزینه‌ی ۱ اگر فاصله‌ی کانون‌ها از یک‌دیگر را نصف کنیم، آن‌گاه c نصف می‌شود و اگر قطر بزرگ را دو برابر کنیم، آن‌گاه a دو برابر می‌شود، پس خروج از مرکز بیضی جدید برابر است با:

$$e'=\frac{c'}{a'}=\frac{\frac{c}{۲}}{۲a}=\frac{c}{۴a}=\frac{۱}{۴}e$$

۷- گزینه‌ی ۴ کانون‌های این بیضی دارای عرض برابر هستند. بنابراین بیضی افقی است. فاصله‌ی دو کانون برابر $۲c$ است، پس داریم:

$$۲c=۲-(-۴)=۶\Rightarrow c=۳$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{۳}{۵}\xrightarrow{c=۳}a=۵\Rightarrow b=\sqrt{a^۲-c^۲}=۴$$

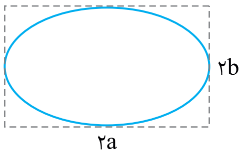
مرکز بیضی وسط دو کانون است، پس $O(\frac{-۴+۲}{۲},-۲)$ مرکز بیضی است. بنابراین، معادله‌ی بیضی برابر است با:

$$\frac{(x+۱)^۲}{۵^۲}+\frac{(y+۲)^۲}{۴^۲}=۱\Rightarrow\frac{(x+۱)^۲}{۲۵}+\frac{(y+۲)^۲}{۱۶}=۱$$

۸- گزینه‌ی ۳ ابتدا معادله‌ی بیضی را به فرم استاندارد می‌نویسیم:

$$x^۲+۴y^۲-۴x=۴\Rightarrow(x-۲)^۲+۴y^۲=۴+۴\Rightarrow\frac{(x-۲)^۲}{۸}+\frac{y^۲}{۲}=۱$$

بنابراین $a^۲=۸$ و $b^۲=۲$ است. مطابق شکل روبه‌رو مساحت مستطیل مورد نظر برابر $S=(۲a)(۲b)$ است.



$$S=۴ab=۴\times۲\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}=۱۶$$

سراسری خارج از کشور - ۹۰

۹- گزینه‌ی ۳ دو سر قطر بزرگ روی یک خط عمودی هستند، بنابراین بیضی قائم است. فاصله‌ی این دو رأس برابر $۲a$ است:

$$۲a=۶-(-۲)\Rightarrow a=۴$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{a=۴}c=۲\Rightarrow b^۲=a^۲-c^۲=۱۶-۴=۱۲\Rightarrow b=۲\sqrt{۳}$$

مرکز بیضی وسط دو رأس بیضی است، یعنی $O(۳,\frac{۶-۲}{۲})$ یا $O(۳,۲)$. معادله‌ی بیضی به‌صورت روبه‌رو است:

$$\frac{(x-۳)^۲}{۱۲}+\frac{(y-۲)^۲}{۱۶}=۱$$

برای یافتن تلاقی این بیضی با محور xها، y را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{(x-۳)^۲}{۱۲}+\frac{(۰-۲)^۲}{۱۶}=۱\Rightarrow\frac{(x-۳)^۲}{۱۲}=۱-\frac{۱}{۴}\Rightarrow(x-۳)^۲=۱۲\times\frac{۳}{۴}\Rightarrow(x-۳)^۲=۹\Rightarrow x-۳=\pm۳\Rightarrow x=۰\text{ و }x=۶$$

سراسری خارج از کشور - ۹۲

۱۰- گزینه‌ی ۳ وتر AB، وتر کانونی بیضی و طول آن برابر $\frac{۲b^۲}{a}$ است. برای به‌دست آوردن a و b داریم:

$$۳x^۲+۴y^۲=۱۲\Rightarrow\frac{x^۲}{۴}+\frac{y^۲}{۳}=۱\Rightarrow a^۲=۴,b^۲=۳\Rightarrow a=۲,b=\sqrt{۳}\Rightarrow AB=\frac{۲b^۲}{a}=\frac{۲\times۳}{۲}=۳$$

سراسری - ۹۰

۱۱- گزینه‌ی ۴ مرکز هذلولی، وسط دو کانون آن قرار دارد، بنابراین $O(۲,\frac{۶-۲}{۲})$ یا $O(۲,۲)$ مرکز این هذلولی قائم است. فاصله‌ی دو کانون هذلولی برابر $۲c$ است، پس:

$$۲c=۶-(-۲)\Rightarrow c=۴$$

فاصله‌ی مرکز هذلولی از رأس آن برابر a است:

$$a=۲-۰\Rightarrow a=۲$$

$$c^۲=a^۲+b^۲\Rightarrow b=\sqrt{c^۲-a^۲}\Rightarrow b=\sqrt{۱۶-۴}\Rightarrow b=\sqrt{۱۲}$$

معادله‌ی هذلولی قائم: $\frac{(y-۲)^۲}{۴}-\frac{(x-۲)^۲}{۱۲}=۱$

$$\Rightarrow۳(y^۲-۴y+۴)-(x^۲-۴x+۴)=۱۲\Rightarrow۳y^۲-x^۲-۱۲y+۴x=۴$$

۱۲- گزینه‌ی ۴ ابتدا معادله‌ی هذلولی را به فرم استاندارد می‌نویسیم:

$$۵x^۲-۲y^۲+۳۰x+۸y+۲۷=۰\Rightarrow۵(x^۲+۶x)-۲(y^۲-۴y)=-۲۷\Rightarrow۵(x+۳)^۲-۲(y-۲)^۲=-۲۷+۴۵-۸$$

$$\Rightarrow۵(x+۳)^۲-۲(y-۲)^۲=۱۰\Rightarrow\frac{(x+۳)^۲}{۲}-\frac{(y-۲)^۲}{۵}=۱$$

کم‌ترین فاصله‌ی نقاط دو شاخه‌ی هذلولی، همان فاصله‌ی بین دو رأس آن است.

$a^۲=۲\Rightarrow a=\sqrt{۲}\Rightarrow$ فاصله‌ی دو رأس $=۲a=۲\sqrt{۲}$

۱۳- گزینه‌ی ۳ ابتدا معادله‌ی هذلولی را به فرم استاندارد می‌نویسیم:

$$۹(x^{۲}-۲x)-۴(y^{۲}+۴y)=۴۰+k \Rightarrow ۹(x-۱)^{۲}-۴(y+۲)^{۲}=۴۰+۹-۱۶+k$$

$$\Rightarrow ۹(x-۱)^{۲}-۴(y+۲)^{۲}=۳۳+k \Rightarrow \frac{(x-۱)^{۲}}{\frac{۳۳+k}{۹}}-\frac{(y+۲)^{۲}}{\frac{۳۳+k}{۴}}=۱$$

محل برخورد مجانب‌های هذلولی، مرکز آن است. فاصله‌ی کانون از مرکز برابر c است:

$$c^{۲}=a^{۲}+b^{۲} \Rightarrow c^{۲}=\frac{۳۳+k}{۹}+\frac{۳۳+k}{۴} \xrightarrow{c=\sqrt{۱۳}} ۱۳=\frac{۱۳\times(۳۳+k)}{۳۶} \Rightarrow ۳۳+k=۳۶ \Rightarrow k=۳$$

۱۴- گزینه‌ی ۳ مرکز هذلولی وسط دو رأس آن است، پس نقطه‌ی $O(\frac{-۲+۴}{۲},۱)$ یا $O(۱,۱)$ مرکز هذلولی است. فاصله‌ی رأس تا مرکز برابر a و فاصله‌ی کانون تا مرکز برابر c است، بنابراین:

$$\begin{matrix} a=۴-۱=۳ \\ c=۶-۱=۵ \end{matrix} \Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{۵}{۳}$$

۱۵- گزینه‌ی ۱ از آن‌جاکه تفاضل فاصله‌ی نقطه‌ای روی نمودار از دو کانون آن برابر $MF-MF'=۲$ است، پس $۲a=۲$ و داریم: $a=۱$

فاصله‌ی دو کانون هذلولی برابر $۲c$ است، پس: $۲c=۱-(-۳) \Rightarrow c=۲$

$$b^{۲}=c^{۲}-a^{۲} \Rightarrow b=\sqrt{۴-۱}=\sqrt{۳}$$

دو کانون هذلولی عرض برابر دارند، پس هذلولی افقی است و شیب مجانب‌های آن برابر $\pm\frac{b}{a}$ است یعنی $\pm\sqrt{۳}$.

۱۶- گزینه‌ی ۴ هذلولی افقی است، بنابراین مرکز و کانون آن دارای عرض برابر هستند، پس $O(\alpha,۷)$ مرکز هذلولی است. از طرفی مرکز هذلولی روی مجانب آن قرار دارد، پس: $۷=۲\alpha+۵ \Rightarrow ۲\alpha=۲ \Rightarrow \alpha=۱$

یعنی $O(۱,۷)$ مرکز هذلولی است. شیب مجانب‌های هذلولی قرینه‌ی یک‌دیگر است. بنابراین مجانب دیگر هذلولی خطی است با شیب ۲- که از نقطه‌ی $O(۱,۷)$ می‌گذرد: $y-۷=-۲(x-۱) \Rightarrow y=-۲x+۹$

۱۷- گزینه‌ی ۱ ابتدا معادله‌ی هذلولی را به فرم استاندارد می‌نویسیم:

$$x^{۲}-۲ax+a^{۲}-\frac{۱}{۲}y^{۲}=a^{۲}+۱ \Rightarrow (x-a)^{۲}-\frac{۱}{۲}y^{۲}=a^{۲}+۱ \Rightarrow \frac{(x-a)^{۲}}{a^{۲}+۱}-\frac{y^{۲}}{۲(a^{۲}+۱)}=۱$$

برای یافتن خروج از مرکز، داریم:

$$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^{۲}}{a^{۲}}}=\sqrt{\frac{a^{۲}+b^{۲}}{a^{۲}}}=\sqrt{۱+\frac{b^{۲}}{a^{۲}}}=\sqrt{۱+\frac{۲(a^{۲}+۱)}{a^{۲}+۱}} \Rightarrow e=\sqrt{۱+۲}=\sqrt{۳}$$

سراسری خارج از کشور – ۹۱

۱۸- گزینه‌ی ۳ محل تلاقی مجانب‌های هذلولی همان مرکز هذلولی است. با مساوی صفر قرار دادن مشتق معادله‌ی داده شده نسبت به x و y، به ترتیب طول و عرض مرکز هذلولی به‌دست می‌آید.

$$f'_{x}=۰ \Rightarrow ۸x+b=۰ \Rightarrow x=\frac{-b}{۸} \xrightarrow{x=-۲} -۲=\frac{-b}{۸} \Rightarrow b=۱۶$$

$$f'_{y}=۰ \Rightarrow ۲ay+۲=۰ \Rightarrow y=\frac{-۱}{a} \xrightarrow{y=۱} ۱=\frac{-۱}{a} \Rightarrow a=-۱$$

با استاندارد کردن معادله‌ی هذلولی، مجانب‌های آن را پیدا می‌کنیم:

$$۴x^{۲}-y^{۲}+۱۶x+۲y+۱۱=۰ \Rightarrow ۴(x+۲)^{۲}-(y-۱)^{۲}=-۱۱+۱۶-۱$$

$$\Rightarrow (x+۲)^{۲}-\frac{(y-۱)^{۲}}{۴}=۱ \Rightarrow \text{مجانب‌ها}: \begin{cases} x+۲+\frac{y-۱}{۲}=۰ \\ x+۲-\frac{y-۱}{۲}=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-۲x-۳ \\ y=۲x+۵ \end{cases}$$

سراسری – ۸۹

۱۹- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول:** با استاندارد کردن معادله‌ی هذلولی، یکی از مجانب‌ها و کانون‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$۴x^{۲}-۸x-y^{۲}-۴y=۴\Rightarrow ۴(x-۱)^{۲}-(y+۲)^{۲}=۴+۴-۴\Rightarrow \frac{(x-۱)^{۲}}{۱}-\frac{(y+۲)^{۲}}{۴}=۱\Rightarrow \text{مجانب}:\frac{x-۱}{۱}-\frac{y+۲}{۲}=۰\Rightarrow y=۲x-۴$$

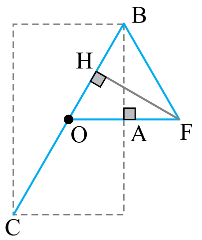
مرکز هذلولی $O(۱,-۲)$ است و داریم:

$$c^{۲}=a^{۲}+b^{۲}=۱+۴\Rightarrow c=\sqrt{۵}$$

پس یکی از کانون‌های این هذلولی افقی نقطه‌ی $F(۱+\sqrt{۵},-۲)$، است.

فاصله‌ی این نقطه از خط $۲x-y-۴=۰$ برابر است با:

$$d=\frac{|۲(۱+\sqrt{۵})+۲-۴|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{۲\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}}=۲$$



راه‌حل دوم: با توجه به شـکل روبه‌رو که همان مســتطیل هذلولی اســت، فاصله‌ی کانون (F) از مجانب هذلولی (خط BC) برابر FH است و داریم:

$$FH\times OB=AB\times OF\Rightarrow FH\times c=b\times c\Rightarrow FH=b$$

بنابراین فاصله‌ی کانون از خط مجانب برابر b است که در راه‌حل اول برابر ۲ به‌دست آمد.

سراسری خارج از کشور - ۸۹

۲۰- گزینه‌ی ۱ فاصله‌ی کانون‌های هذلولی برابر $۲c$ است، پس داریم:

$$۲c=۵-(-۱)\Rightarrow c=۳$$

$$e=\frac{c}{a}\Rightarrow \frac{c}{a}=۱/۵\xrightarrow{c=۳}a=۲\qquad b^{۲}=c^{۲}-a^{۲}\Rightarrow b^{۲}=۹-۴\Rightarrow b=\sqrt{۵}$$

مستطیل مورد نظر که بر هذلولی مماس است و قطرهای آن مجانب‌های هذلولی هستند، دارای اضلاع به طول $۲a$ و $۲b$ است، پس مساحت آن برابر است با:

$$S=(۲a)(۲b)=۴ab=۴\times ۲\times\sqrt{۵}=۸\sqrt{۵}$$

پاسخ تشریحی آزمون ۷۳

۱- گزینه‌ی ۳ مرکز بیضی وسط دو کانون آن است، یعنی $O(۲,۰)$ مرکز بیضی است.

$$\begin{cases}AO=a\Rightarrow a=۵-۲=۳\\ FF'=۲c\Rightarrow ۲c=۲\sqrt{۵}\Rightarrow c=\sqrt{۵}\end{cases}\Rightarrow b^{۲}=a^{۲}-c^{۲}=۹-۵=۴\Rightarrow b=۲$$

معادله‌ی بیضی افقی با $a=۳$، $b=۲$ و مرکز $O(۲,۰)$ برابر است با:

$$\frac{(x-۲)^{۲}}{۹}+\frac{y^{۲}}{۴}=۱\Rightarrow ۴(x^{۲}-۴x+۴)+۹y^{۲}=۳۶\Rightarrow ۴x^{۲}-۱۶x+۹y^{۲}=۲۰$$

۲- گزینه‌ی ۳ ابتدا معادله‌ی بیضی را به فرم استاندارد می‌نویسیم:

$$۱۶x^{۲}+۲۵y^{۲}-۵۰y-۱۶x=۳۷۱\Rightarrow ۱۶(x^{۲}-x)+۲۵(y^{۲}-۲y)=۳۷۱\Rightarrow ۱۶(x-\frac{۱}{۲})^{۲}+۲۵(y-۱)^{۲}=۳۷۱+\frac{۱۶}{۴}+۲۵$$

$$\Rightarrow ۱۶(x-\frac{۱}{۲})^{۲}+۲۵(y-۱)^{۲}=۴۰۰\Rightarrow \frac{(x-\frac{۱}{۲})^{۲}}{۲۵}+\frac{(y-۱)^{۲}}{۱۶}=۱$$

دورترین فاصله‌ی نقاط روی بیضی تا مرکز برابر a است که در این‌جا برابر ۵ است.

۳- گزینه‌ی ۲ ابتدا معادله‌ی بیضی را به فرم استاندارد می‌نویسیم:

$$۴x^{۲}+y^{۲}+۸x-۴y+۴=۰\Rightarrow ۴(x^{۲}+۲x)+y^{۲}-۴y=-۴\Rightarrow ۴(x+۱)^{۲}+(y-۲)^{۲}=-۴+۴+۴\Rightarrow (x+۱)^{۲}+\frac{(y-۲)^{۲}}{۴}=۱$$

بنابراین $a^{۲}=۴$ و $b^{۲}=۱$ است و داریم:

$$c^{۲}=a^{۲}-b^{۲}=۳$$

فاصله‌ی کانون تا رأس دورتر برابر $a+c$ است:

$$a+c=۲+\sqrt{۳}$$

۴- گزینه‌ی ۳ نقطه‌ی B روی معادله‌ی داده شده قرار دارد، پس:

$$B(۱,۲)\Rightarrow ۲+۴+a-۸+۲=۰\Rightarrow a=۰$$

بنابراین معادله‌ی بیضی به‌صورت روبه‌رو است:

$$۲x^{۲}+y^{۲}-۴y+۲=۰\Rightarrow ۲x^{۲}+(y-۲)^{۲}=۴-۲\Rightarrow x^{۲}+\frac{(y-۲)^{۲}}{۲}=۱\Rightarrow a^{۲}=۲,b^{۲}=۱,O(۰,۲)$$

$$c=\sqrt{a^{۲}-b^{۲}}\Rightarrow c=۱$$

بنابراین مختصات کانون‌های این بیضی قائم نقاط $F(۰,۳)$ و $F'(۰,۱)$ هستند.

۵- گزینه‌ی ۱ قطر کوچک بیضی برابر $2b$ است، پس $b=2\sqrt{2}$. فاصله‌ی کانون تا نزدیک‌ترین رأس نیز برابر $a-c$ است، پس:

$$a-c=2\Rightarrow a=2+c \xrightarrow{a^2=b^2+c^2} (2+c)^2=(2\sqrt{2})^2+c^2\Rightarrow 4+c^2+4c=8+c^2\Rightarrow 4c=4\Rightarrow c=1\Rightarrow a=3\Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$$

۶- گزینه‌ی ۱ ابتدا معادله‌ی بیضی را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$4x^2+2y^2=8\Rightarrow \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1\Rightarrow a^2=4, b^2=2$$

مجموع فواصل هر نقطه روی بیضی از دو کانون برابر $2a$ و وتر کانونی برابر $\frac{2b^2}{a}$ است، پس:

$$\frac{2a}{\frac{2b^2}{a}}=\frac{a^2}{b^2}=\frac{4}{2}=2$$

۷- گزینه‌ی ۳ برای یافتن شیب خط مماس، از معادله‌ی بیضی مشتق ضمنی می‌گیریم:

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{2x}{\frac{2(y-1)}{4}}=-\frac{4x}{y-1}\xrightarrow{(\frac{\sqrt{3}}{2},2)} y'=-\frac{2\sqrt{3}}{2-1}=-2\sqrt{3}$$

معادله‌ی خط مماس بر بیضی در این نقطه برابر است با:

$$y-2=-2\sqrt{3}(x-\frac{\sqrt{3}}{2})\Rightarrow y=-2\sqrt{3}x+5$$

۸- گزینه‌ی ۴ نقطه‌ی برخورد بیضی با نیمساز ناحیه‌ی دوم $(y=-x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$x^2+3(-x)^2+4x=0\Rightarrow 4x^2+4x=0\Rightarrow x(x+1)=0\Rightarrow x=0 \text{ یا } x=-1$$

نقطه‌ی $(-1,1)$ روی نیمساز ناحیه‌ی دوم است. مشتق منحنی در این نقطه را پیدا می‌کنیم:

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{2x+4}{6y}\xrightarrow{(-1,1)} y'=-\frac{-2+4}{6}=\frac{-1}{3}$$

بنابراین شیب خط قائم بر بیضی در این نقطه برابر است با:

$$\frac{-1}{\frac{-1}{3}}=3$$

۹- گزینه‌ی ۳ دو سر قطر کوچک بیضی روی یک خط عمودی هستند، پس بیضی افقی است. فاصله‌ی دو سر قطر کوچک بیضی برابر $2b$ است، پس:

$$2b=3-(-1)\Rightarrow b=2$$

مرکز بیضی وسط دو رأس آن است، پس:

$$O(-1,\frac{3-1}{2})=(-1,1)$$

معادله‌ی بیضی برابر است با:

$$\frac{(x+1)^2}{a^2}+\frac{(y-1)^2}{4}=1\xrightarrow{(-4,2)}\frac{(-3)^2}{a^2}+\frac{1}{4}=1\Rightarrow\frac{9}{a^2}=\frac{3}{4}\Rightarrow a^2=12\Rightarrow a=2\sqrt{3}\Rightarrow c^2=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{12-4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

سراسری - ۹۲

۱۰- گزینه‌ی ۳ معادله‌ی بیضی را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$k^2x^2+y^2-4y=-3\Rightarrow k^2x^2+(y-2)^2=4-3\Rightarrow\frac{x^2}{\frac{1}{k^2}}+\frac{(y-2)^2}{1}=1$$

بیضی افقی است، پس $a=\frac{1}{k}$ و $b=1$. طول وتر کانونی بیضی برابر $\frac{2b^2}{a}$ است، پس:

$$\frac{2\times1}{\frac{1}{k}}=\frac{2}{3}\Rightarrow k=\frac{1}{3}\Rightarrow a=3\Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{8}$$

خروج از مرکز بیضی برابر است با:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{8}}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

۱۱- گزینه‌ی ۱ معادله‌ی نقاط خواسته شده یک هذلولی با دو کانون A و B و $2a=4$ است. مرکز هذلولی وسط دو کانون قرار دارد.

$$O=\frac{A+B}{2}\Rightarrow O(0,1)$$

فاصله‌ی دو کانون برابر $2c$ است، پس:

$$2c=3-(-3)\Rightarrow c=3\Rightarrow b^2=c^2-a^2=9-4\Rightarrow b=\sqrt{5}$$

معادله‌ی هذلولی افقی: $\frac{(x-0)^2}{4}-\frac{(y-1)^2}{5}=1\Rightarrow 5x^2-4(y-1)^2=20\Rightarrow 5x^2-4y^2+8y=24$

۱۲- گزینه‌ی ۲ معادله‌ی هذلولی را به فرم استاندارد می‌نویسیم:

$$x^۲-y^۲+۴x-۲y=a\Rightarrow(x+۲)^۲-(y+۱)^۲=a+۴-۱\Rightarrow\frac{(x+۲)^۲}{a+۳}-\frac{(y+۱)^۲}{a+۳}=۱$$

برای آن‌که هذلولی قائم باشد، باید ضریب $x^۲$ منفی و ضریب $y^۲$ مثبت باشد، پس: $a+۳<۰\Rightarrow a<-۳$

۱۳- گزینه‌ی ۲ معادله‌ی هذلولی را به فرم استاندارد می‌نویسیم:

$$-۵x^۲+۲۰x+۴y^۲+۸y=-۴\Rightarrow-۵(x^۲-۴x)+۴(y^۲+۲y)=-۴\Rightarrow-۵(x-۲)^۲+۴(y+۱)^۲=-۴-۲۰+۴\Rightarrow\frac{(x-۲)^۲}{۴}-\frac{(y+۱)^۲}{۵}=۱$$

بنابراین هذلولی افقی با مرکز $O(۲,-۱)$ و $a^۲=۴$ و $b^۲=۵$ می‌باشد: $c^۲=a^۲+b^۲\Rightarrow c=\sqrt{۹}=۳$

پس معادله‌ی کانون‌ها برابر $F(۲+۳,-۱)$ و $F'(۲-۳,-۱)$ یا $F(۵,-۱)$ و $F'(-۱,-۱)$ می‌باشد.

۱۴- گزینه‌ی ۲ در هذلولی قائم چون شیب مجانب‌ها $m=\pm\frac{a}{b}$ است، داریم:

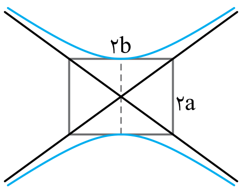
$$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^۲}{a^۲}}=\sqrt{\frac{a^۲+b^۲}{a^۲}}=\sqrt{۱+(\frac{b}{a})^۲}=\sqrt{۱+(\frac{۱}{m})^۲}\xrightarrow{m=۳}e=\sqrt{۱+\frac{۱}{۹}}=\sqrt{\frac{۱۰}{۹}}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۳}$$

۱۵- گزینه‌ی ۴ با به توان دو رساندن x و y رابطه‌ای مستقل از t بین آن‌ها پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases}x=۲^t+۲^{-t}\\y=۲^t-۲^{-t}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^۲=۲^{۲t}+۲^{-۲t}+۲\\y^۲=۲^{۲t}+۲^{-۲t}-۲\end{cases}\Rightarrow x^۲-y^۲=۴\Rightarrow\frac{x^۲}{۴}-\frac{y^۲}{۴}=۱\Rightarrow a=۲,b=۲\Rightarrow c=\sqrt{a^۲+b^۲}=\sqrt{۸}\Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{۸}}{۲}=\sqrt{۲}$$

البته هذلولی به‌دست آمده یک هذلولی متساوی‌الساقین است که خروج از مرکز آن همواره برابر $\sqrt{۲}$ است.

۱۶- گزینه‌ی ۲ با توجه به داده‌های مسأله و شکل روبه‌رو داریم:



$$۲a=۶,۲b=۸\Rightarrow a=۳,b=۴$$

با توجه به رابطه‌ی $c^۲=a^۲+b^۲$ داریم: $c=\sqrt{۹+۱۶}=۵$

$$\text{خروج از مرکز}=\frac{c}{a}=\frac{۵}{۳}$$

۱۷- گزینه‌ی ۴ شیب‌های مجانب‌های هذلولی همواره قرینه‌ی یک‌دیگر هستند. اگر این دو برهم عمود باشند، داریم:

$$m_۱m_۲=-۱\Rightarrow m_۱(-m_۱)=-۱\Rightarrow m_۱^۲=۱\Rightarrow m_۱,m_۲=\pm۱\xrightarrow{m=\pm\frac{b}{a}}\frac{b}{a}=۱\Rightarrow a=b$$

بنابراین هذلولی دارای a و b برابر است اصطلاحاً متساوی‌الساقین است.

برای این کار باید ضریب $x^۲$ و $y^۲$ قرینه‌ی هم باشد: $k=-(k-۱)\Rightarrow۲k=۱\Rightarrow k=\frac{۱}{۲}$

بنابراین معادله‌ی هذلولی به‌صورت زیر است:

$$\frac{۱}{۲}x^۲-\frac{۱}{۲}y^۲-۲y=۰\Rightarrow x^۲-y^۲-۴y=۰\Rightarrow x^۲-(y+۲)^۲=-۴\Rightarrow\frac{(y+۲)^۲}{۴}-\frac{x^۲}{۴}=۱$$

بنابراین در این هذلولی $a^۲=۴$، پس $a=۲$ و طول قطر هذلولی ($۲a$) برابر ۴ است.

۱۸- گزینه‌ی ۳ مرکز هذلولی محل تقاطع دو مجانب آن است:

$$\begin{cases}۲y-x+۱=۰\\۲y+x-۱=۰\end{cases}\Rightarrow y=۰,x=۱\Rightarrow O(۱,۰)$$

این هذلولی از نقطه‌ی $(۳,۰)$ می‌گذرد که با مرکز دایره روی یک خط افقی است، پس هذلولی افقی است و نقطه‌ی $A(۳,۰)$ رأس آن است. فاصله‌ی رأس از مرکز برابر a است، پس $a=۳-۱=۲$. از طرف دیگر شیب مجانب‌های یک هذلولی افقی برابر $\pm\frac{b}{a}$ است، پس: $\frac{b}{a}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow b=\frac{a}{۲}\xrightarrow{a=۲}b=۱$

$$\text{معادله‌ی هذلولی افقی}:\frac{(x-۱)^۲}{۴}-\frac{y^۲}{۱}=۱\Rightarrow(x-۱)^۲-۴y^۲=۴\Rightarrow x^۲-۲x-۴y^۲=۳$$

۱۹- گزینه‌ی ۱ محور کانونی هذلولی موازی محور طول‌ها است، پس هذلولی افقی است و مرکز هذلولی با رأس آن عرضی برابر دارد، پس $O(\alpha,-۱)$ مرکز هذلولی است. از طرف دیگر، این مرکز روی خط مجانب هذلولی است و داریم: $y+۲x=۳\xrightarrow{(\alpha,-۱)}-۱+۲\alpha=۳\Rightarrow۲\alpha=۴\Rightarrow\alpha=۲$

پس مرکز هذلولی نقطه‌ی $O(۲,-۱)$ است، مجانب دیگر هذلولی از این نقطه می‌گذرد و شیب آن قرینه‌ی شیب مجانب دیگر است، پس معادله‌ی مجانب برابر است با: $y+۱=۲(x-۲)\Rightarrow y=۲x-۵$

۲۰- گزینه‌ی ۱ ابتدا معادله‌ی هذلولی را به فرم استاندارد می‌نویسیم:

$$x^2-2x-3y^2=2\Rightarrow (x-1)^2-3y^2=3\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{3}-y^2=1\Rightarrow a^2=3, b^2=1\Rightarrow a=\sqrt{3}, b=1$$

اندازه‌ی وتر کانونی هذلولی برابر $\frac{2b^2}{a}$ می‌باشد، پس:

$$\text{وتر کانونی}=\frac{2\times 1^2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

سراسری - ۹۱

پاسخ تشریحی آزمون ۷۴

۱- گزینه‌ی ۲ مختصات این نقاط را به صورت $(a,-a)$ در نظر می‌گیریم. فاصله‌ی این نقاط از خط $2x-y-1=0$ برابر است با:

$$d=\frac{|2a-(-a)-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|3a-1|}{\sqrt{5}}$$

پس داریم:

$$\frac{|3a-1|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}\Rightarrow |3a-1|=5\Rightarrow \begin{cases}3a-1=5\\3a-1=-5\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}a=2\\a=-\frac{4}{3}\end{cases}$$

مجموع طول این نقاط $2+(-\frac{4}{3})=\frac{2}{3}$ است.

۲- گزینه‌ی ۲ از معادلات اول و دوم داریم:

$$y+z=7\Rightarrow y=7-z$$

$$2x-z=a\Rightarrow x=\frac{a+z}{2}$$

با قرار دادن x و y در معادله‌ی سوم داریم:

$$bx+2y=5\Rightarrow b(\frac{a+z}{2})+2(7-z)=5\Rightarrow ab+bz+28-4z=10\Rightarrow (b-4)z+ab+18=0$$

برای این که معادله بیش از یک جواب داشته باشد، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}b-4=0\\ab+18=0\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}b=4\\a=-\frac{9}{2}\end{cases}\Rightarrow a+b=-\frac{1}{2}$$

۳- گزینه‌ی ۱ اگر ضریب x^2 و y^2 برابر یک باشد، مرکز دایره نقطه‌ی $(-\frac{\text{ضریب } x}{2},-\frac{\text{ضریب } y}{2})$ خواهد بود، پس داریم:

$$x^2+y^2+(\frac{a-1}{2})x+(\frac{4-a}{2})y+1=0$$

$$\text{مرکز دایره}: (-\frac{a-1}{4},-\frac{4-a}{4})$$

برای این‌که مرکز در ناحیه‌ی سوم باشد، داریم:

$$\begin{cases}-\frac{a-1}{4}<0\Rightarrow a-1>0\Rightarrow a>1\\-\frac{4-a}{4}<0\Rightarrow 4-a>0\Rightarrow a<4\end{cases}\Rightarrow 1<a<4$$

۴- گزینه‌ی ۲ چون خطوط قائم بر دایره از نقطه‌ی $(1,-2)$ می‌گذرند، پس این نقطه مرکز دایره است. دایره بر خط $y=1-x$ مماس است. پس شعاع دایره برابر فاصله‌ی مرکز تا این خط است:

$$y=1-x\Rightarrow x+y-1=0$$

$$R=\frac{|1-2-1|}{\sqrt{1+1}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

۵- گزینه‌ی ۳ چون مرکز دایره روی قطر به معادله‌ی $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ قرار دارد، مختصات مرکز را به صورت $(\alpha,-\frac{1}{2}\alpha+\frac{3}{2})$ در نظر می‌گیریم و داریم:

$$R=OA=OB\Rightarrow \sqrt{(\alpha+1)^2+(-\frac{1}{2}\alpha+\frac{3}{2}-0)^2}=\sqrt{(\alpha-0)^2+(-\frac{1}{2}\alpha+\frac{3}{2}+1)^2}\Rightarrow (\alpha+1)^2+(-\frac{1}{2}\alpha+\frac{3}{2})^2=\alpha^2+(-\frac{1}{2}\alpha+\frac{5}{2})^2$$

$$\Rightarrow \alpha^2+2\alpha+1+\frac{1}{4}\alpha^2+\frac{9}{4}-\frac{3}{2}\alpha=\alpha^2+\frac{1}{4}\alpha^2+\frac{25}{4}-\frac{5}{2}\alpha\Rightarrow 3\alpha=3\Rightarrow \alpha=1$$

پس مرکز دایره نقطه‌ی $(1,1)$ است و شعاع آن برابر است با:

$$R=\sqrt{(1+1)^2+(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2})^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$$

۶- گزینه‌ی ۳ شعاع هر دایره را از رابطه‌ی $R=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^{۲}+b^{۲}-۴c}$ محاسبه می‌کنیم:

$$R_۱=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۳۶-۳۶}=\frac{۴}{۲}=۲$$

$$R_۲=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۶۴-۴k}=\sqrt{۲۰-k}$$

مرکز دو دایره را نیز محاسبه می‌کنیم: $O_۱=(۲,-۳)\ ,\ O_۲=(۲,۴)$

برای این‌که دو دایره مماس خارج باشند، داریم:

$$O_۱O_۲=R_۱+R_۲\Rightarrow\sqrt{(۲-۲)^{۲}+(۴+۳)^{۲}}=۲+\sqrt{۲۰-k}\Rightarrow ۲+\sqrt{۲۰-k}=۷\Rightarrow\sqrt{۲۰-k}=۵\Rightarrow ۲۰-k=۲۵\Rightarrow k=-۵$$

۷- گزینه‌ی ۳ معادله‌ی دایره را به صورت $x^{۲}+y^{۲}+ax+by+c=۰$ در نظر می‌گیریم. نقاط را در معادله‌ی دایره قرار می‌دهیم:

$$۰+۰+۰+۰+c=۰\Rightarrow c=۰$$

$$۴+۱۶-۲a+۴b+c=۰\xrightarrow{c=۰}a=۲b+۱۰$$

$$۴+k^{۲}+۲a+kb+c=۰\xrightarrow{c=۰}k^{۲}+kb+۲a+۴=۰\quad(I)$$

شعاع دایره $\frac{۵}{۲}$ است، پس داریم:

$$R=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^{۲}+b^{۲}-۴c}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}=۵\Rightarrow a^{۲}+b^{۲}=۲۵$$

مقادیر a و b را از حل دستگاه مقابل می‌یابیم:

$$\begin{cases}a=۲b+۱۰\\ a^{۲}+b^{۲}=۲۵\end{cases}\Rightarrow(۲b+۱۰)^{۲}+b^{۲}=۲۵\Rightarrow b^{۲}+۸b+۱۵=۰\Rightarrow\begin{cases}b=-۵\Rightarrow a=۰\\ b=-۳\Rightarrow a=۴\end{cases}$$

با قرار دادن مقادیر a و b در معادله‌ی (I) داریم:

$$k^{۲}-۵k+۴=۰\Rightarrow k=۱,۴$$

$$k^{۲}-۳k+۱۲=۰\quad \text{غ‌ق‌ق}\ (\Delta<۰)$$

۸- گزینه‌ی ۴ رأس و کانون سهمی روی یک خط عمودی $(x=۱)$ و رأس بالاتر از کانون است. پس سهمی قائم و رو به پایین است. فاصله‌ی رأس تا کانون برابر $۴-۱=۳$ است، پس $p=۳$.

معادله‌ی سهمی: $(x-۱)^{۲}=-۴\times۳(y-۴)\Rightarrow(x-۱)^{۲}=-۱۲y+۴۸$

با قرار دادن $y=۰$ محل تقاطع سهمی با محور طول‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$(x-۱)^{۲}=۴۸\Rightarrow x-۱=\pm\sqrt{۴۸}\Rightarrow x=۱\pm۴\sqrt{۳}$$

فاصله‌ی دو نقطه‌ی پیدا شده برابر $(۱+۴\sqrt{۳})-(۱-۴\sqrt{۳})=۸\sqrt{۳}$ است.

۹- گزینه‌ی ۳ معادله‌ی سهمی را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$y^{۲}+\frac{k}{۲}y+۲x-۲=۰\Rightarrow y^{۲}+\frac{k}{۲}y+\frac{k^{۲}}{۱۶}+۲x-۲-\frac{k^{۲}}{۱۶}=۰\Rightarrow(y+\frac{k}{۴})^{۲}=-۲x+۲+\frac{k^{۲}}{۱۶}\Rightarrow(y+\frac{k}{۴})^{۲}=-۲(x-(۱+\frac{k^{۲}}{۳۲}))$$

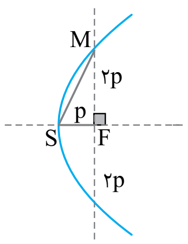
پس مختصات رأس سهمی $(\frac{k^{۲}}{۳۲}+۱,-\frac{k}{۴})$ است. همچنین $۴p=۲$ و در نتیجه $p=\frac{۱}{۲}$. پس دهانه‌ی سهمی به چپ باز شده است و مختصات کانون $\frac{۱}{۲}$ عقب‌تر از رأس است:

$$F=(\frac{k^{۲}}{۳۲}+۱-\frac{۱}{۲},-\frac{k}{۴})=(\frac{k^{۲}}{۳۲}+\frac{۱}{۲},-\frac{k}{۴})$$

چون کانون روی خط $y=x-\frac{۱}{۲}$ است، پس داریم:

$$-\frac{k}{۴}=\frac{k^{۲}}{۳۲}+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\Rightarrow k^{۲}=-۸k\Rightarrow\begin{cases}k=۰\\ k=-۸\end{cases}$$

۱۰- گزینه‌ی ۲ می‌دانیم طول وتر کانونی در سهمی برابر $۴p$ است. پس مطابق شکل داریم:



$$SM=\sqrt{(۲p)^{۲}+p^{۲}}=\sqrt{۵p^{۲}}\Rightarrow SM=\sqrt{۵}p$$

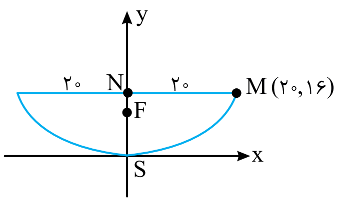
با توجه به معادله‌ی سهمی داریم:

$$p=۲$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت:

$$SM=۲\sqrt{۵}$$

۱۱- گزینه‌ی ۳ اگر رأس سهمی را در مبدأ مختصات در نظر بگیریم، طبق شکل مقابل داریم:



$$x^{۲}=۴py\Rightarrow ۲۰^{۲}=۴p(۱۶)\Rightarrow p=\frac{۲۵}{۴}=۶/۲۵$$

پس داریم:

$$SF=۶/۲۵\Rightarrow NF=۱۶-۶/۲۵=۹/۷۵$$

۱۲- گزینه‌ی ۳ در یک بیضی مجموع فواصل هر نقطه روی آن از کانون‌ها برابر $۲a$ است، پس داریم:

$$۲a=k\Rightarrow a=\frac{k}{۲}$$

طول قطر کوچک بیضی $۲b$ است، پس داریم:

$$۲b=k-۴\Rightarrow b=\frac{k}{۲}-۲$$

فاصله‌ی کانونی بیضی FF' است که برابر $۲c$ است، پس داریم:

$$۲c=\frac{k\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow c=\frac{k\sqrt{۳}}{۴}$$

بنابراین طبق رابطه‌ی $a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}$ داریم:

$$(\frac{k}{۲})^{۲}=(\frac{k}{۲}-۲)^{۲}+(\frac{k\sqrt{۳}}{۴})^{۲}\Rightarrow \frac{k^{۲}}{۴}=\frac{k^{۲}}{۴}+۴-۲k+\frac{۳}{۱۶}k^{۲}\Rightarrow ۶۴-۳۲k+۳k^{۲}=۰\Rightarrow (k-۸)(k-\frac{۸}{۳})=۰\Rightarrow \begin{cases} k=۸ \\ k=\frac{۸}{۳} \quad \text{غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

(به ازای $k=\frac{۸}{۳}$ طول قطر کوچک منفی می‌شود.)

۱۳- گزینه‌ی ۲ مکان هندسی ایجاد شده، یک بیضی است که کانون‌های آن $F(۲,۱)$ و $F'(-۴,۱)$ هستند که چون عرض کانون‌ها یکسان است، پس بیضی افقی است. مرکز بیضی نقطه‌ی O است:

$$x_{O}=\frac{x_{F}+x_{F'}}{۲}=\frac{-۴+۲}{۲}=-۱\quad ,\quad y_{O}=y_{F}=y_{F'}=۱$$

پس داریم:

$$c=OF=۳$$

از طرفی داریم:

$$۲a=۱۰\Rightarrow a=۵\Rightarrow a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}\Rightarrow ۲۵=۹+b^{۲}\Rightarrow b=۴$$

پس معادله‌ی بیضی به صورت روبه‌رو است:

$$\frac{(x+۱)^{۲}}{۲۵}+\frac{(y-۱)^{۲}}{۱۶}=۱$$

۱۴- گزینه‌ی ۴ با توجه به مختصات دو سر قطر کوچک، واضح است که بیضی افقی است و مرکز بیضی نقطه‌ی $O(-۱,۱)$ است و $b=۲$. پس معادله‌ی بیضی به صورت $\frac{(x+۱)^{۲}}{a^{۲}}+\frac{(y-۱)^{۲}}{۴}=۱$ است. نقطه‌ی $(-۴,۲)$ روی بیضی است، پس مختصات آن در معادله‌ی بیضی صدق می‌کند:

$$\frac{۹}{a^{۲}}+\frac{۱}{۴}=۱\Rightarrow a^{۲}=۱۲\Rightarrow \frac{(x+۱)^{۲}}{۱۲}+\frac{(y-۱)^{۲}}{۴}=۱$$

نقطه‌ی $(۲,۰)$ در معادله‌ی بیضی صدق می‌کند:

$$\frac{(۲+۱)^{۲}}{۱۲}+\frac{(۰-۱)^{۲}}{۴}=\frac{۹}{۱۲}+\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۴}=۱$$

۱۵- گزینه‌ی ۲ c واسطه‌ی هندسی بین a و b است. پس داریم:

$$c^{۲}=ab$$

از طرفی داریم:

$$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}\Rightarrow a^{۲}=b^{۲}+ab$$

طرفین را بر $a^{۲}$ تقسیم می‌کنیم و داریم:

$$۱=(\frac{b}{a})^{۲}+\frac{b}{a}$$

اگر فرض کنیم $\frac{b}{a}=t>۰$، خواهیم داشت:

$$t^{۲}+t-۱=۰\Rightarrow t=\frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲}\Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$$

از طرفی می‌دانیم خروج از مرکز بیضی از رابطه‌ی روبه‌رو به‌دست می‌آید:

$$e=\sqrt{۱-(\frac{b}{a})^{۲}}$$

پس می‌توان نوشت:

$$e=\sqrt{۱-(\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲})^{۲}}=\sqrt{۱-\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}}=\sqrt{\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}}$$

۱۶- گزینه‌ی ۴ فاصله‌ی دو رأس برابر $۲a$ است:

$$۲a=۶\Rightarrow a=۳$$

فاصله‌ی دو کانون $۲c$ است:

$$۲c=۸\Rightarrow c=۴$$

پس داریم:

$$c^{۲}=a^{۲}+b^{۲}\Rightarrow ۱۶=۹+b^{۲}\Rightarrow b^{۲}=۷$$

طول وتر کانونی برابر $\frac{۲b^{۲}}{a}$ است، پس داریم:

طول وتر کانونی: $MN=\frac{۲\times ۷}{۳}=\frac{۱۴}{۳}$

۱۷- گزینه‌ی ۳ اختلاف فاصله‌ی هر نقطه از هذلولی از دو کانون برابر $۲a$ است، پس داریم:

$$۲a=۶\Rightarrow a=۳$$

فاصله‌ی هر کانون از رأس دورتر $۲a+c$ است، پس داریم:

$$۲a+c=۶+\sqrt{۱۵}\Rightarrow ۶+c=۶+\sqrt{۱۵}\Rightarrow c=\sqrt{۱۵}$$

$$c^{۲}=b^{۲}+a^{۲}\Rightarrow ۱۵=b^{۲}+۹\Rightarrow b^{۲}=۶\Rightarrow b=\sqrt{۶}$$

مساحت مستطیل برابر $۴ab$ است، پس داریم:

$$S=۴\times ۳\times\sqrt{۶}=۱۲\sqrt{۶}$$

۱۸- گزینه‌ی ۴ معادله‌ی هذلولی را به حالت استاندارد درمی‌آوریم:

$$۳(x^{۲}+۲x+۱)-۴(y^{۲}-۲y+۱)-۳+۴=۱۳\Rightarrow ۳(x+۱)^{۲}-۴(y-۱)^{۲}=۱۲\Rightarrow \frac{(x+۱)^{۲}}{۴}-\frac{(y-۱)^{۲}}{۳}=۱$$

پس داریم:

$$a^{۲}=۴\ ,\ \ b^{۲}=۳$$

$$c^{۲}=a^{۲}+b^{۲}=۴+۳\Rightarrow c=\sqrt{۷}$$

پس فاصله‌ی دو کانون برابر است با:

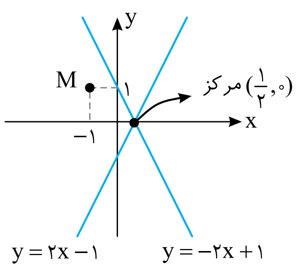
$$۲c=۲\sqrt{۷}$$

۱۹- گزینه‌ی ۳ شیب مجانب‌های هذلولی افقی $\pm\frac{b}{a}$ و خروج از مرکز آن $e=\sqrt{۱+(\frac{b}{a})^{۲}}$ است، پس داریم:

معادله‌ی خط مجانب: $y=-\frac{۲}{۳}x+\frac{۱}{۳}\Rightarrow$ شیب مجانب $=-\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{b}{a}=+\frac{۲}{۳}$

$$e=\sqrt{۱+(\frac{۲}{۳})^{۲}}=\sqrt{۱+\frac{۴}{۹}}=\frac{\sqrt{۱۳}}{۳}$$

۲۰- گزینه‌ی ۱ با توجه به شکل مقابل، هذلولی افقی است و شیب مجانب‌ها $\pm\frac{b}{a}$ است:



$$\pm\frac{b}{a}=\pm ۲\Rightarrow b=۲a$$

بنابراین معادله‌ی هذلولی به صورت زیر است:

$$\frac{(x-\frac{۱}{۲})^{۲}}{a^{۲}}-\frac{(y-۰)^{۲}}{(۲a)^{۲}}=۱$$

چون نقطه‌ی $(-۱,۱)$ روی هذلولی است، پس داریم:

$$\frac{(-۱-\frac{۱}{۲})^{۲}}{a^{۲}}-\frac{(۱-۰)^{۲}}{۴a^{۲}}=۱\Rightarrow\frac{۹}{۴a^{۲}}-\frac{۱}{۴a^{۲}}=۱\Rightarrow a^{۲}=۲\Rightarrow b^{۲}=۸$$

بنابراین داریم:

$$c^{۲}=a^{۲}+b^{۲}=۲+۸=۱۰\Rightarrow c=\sqrt{۱۰}$$

پس خروج از مرکز برابر است با:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{۱۰}}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۵}$$

آزمون‌های مرحله‌ای

۱۵ انتگرال

پاسخ تشریحی آزمون‌های فصل پانزدهم

پاسخ تشریحی آزمون ۷۵

۱- گزینه‌ی ۲ ابتدا عبارت $(x^2-1)^2$ را به توان ۲ رسانده، سپس از قانون $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$ استفاده می‌کنیم.

$$\int (x^4-2x^2+1)dx=\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+x+c$$

۲- گزینه‌ی ۲ رادیکال‌ها را با استفاده از تساوی $\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}$ به فرم زیر نوشته، آن‌گاه:

$$F(x)=\int (3x^{\frac{1}{2}}-7x^{\frac{5}{2}}+1)dx=3\times\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}-7\times\frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7}+x+c=2x\sqrt{x}-2x^3\sqrt{x}+x+c\xrightarrow{F(0)=1}c=1\Rightarrow F(1)=2-2+1+1=2$$

۳- گزینه‌ی ۴ تابع مقابل انتگرال را به توان ۲ می‌رسانیم، آن‌گاه:

$$F(x)=\int (x^2-2x\sqrt{x}+x)dx=\frac{x^3}{3}-2\times\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{x^2}{2}+c\Rightarrow F(1)-F(0)=(\frac{1}{3}-\frac{4}{5}+\frac{1}{2}+c)-(0-0+0+c)=\frac{1}{30}$$

۴- گزینه‌ی ۴ انتگرال $F'(x)$ را محاسبه نموده، $f(x)$ می‌نامیم:

$$F(x)=x^3+\frac{1}{x}+c\xrightarrow{F(1)=0}c=-2\Rightarrow F(-1)=-4$$

۵- گزینه‌ی ۳ انتگرال را محاسبه و آن را ساده می‌کنیم:

$$\int (x^{-2}-x^{-3})dx=\frac{x^{-1}}{-1}-\frac{x^{-2}}{-2}+c=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+c=\frac{-2x+1}{2x^2}+c\Rightarrow f(x)=-2x+1$$

سراسری خارج از کشور - ۸۹

۶- گزینه‌ی ۱ انتگرال را محاسبه می‌کنیم، سپس برای $f(x)$ داریم:

$$\int (5x^2-3x)x^{-\frac{1}{2}}dx=\int (5x^{\frac{3}{2}}-3x^{\frac{1}{2}})dx=5\times\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}-3\times\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+c=2x^2\sqrt{x}-2x\sqrt{x}+c=2x\sqrt{x}(x-1)+c\Rightarrow f(x)=x-1$$

سراسری - ۹۱

۷- گزینه‌ی ۱ عبارت $\frac{(1-\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}}$ را ساده کرده، سپس انتگرال می‌گیریم:

$$\int \frac{1-2\sqrt{x}+x}{2\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2}\int (x^{-\frac{1}{2}}-2+x^{\frac{1}{2}})dx=\frac{1}{2}(\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{1}-2x+\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3})+c=\sqrt{x}-x+\frac{1}{3}x\sqrt{x}+c=\sqrt{x}(1-\sqrt{x}+\frac{1}{3}x)+c$$

$$\Rightarrow f(x)=1-\sqrt{x}+\frac{1}{3}x$$

سراسری - ۸۹

۸- گزینه‌ی ۱ شیب خط مماس یعنی مشتق تابع، پس:

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{x}+c\xrightarrow{(\frac{1}{2},0)}0=-2+c\Rightarrow c=2\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{x}+2\Rightarrow f(x)=\frac{2x-1}{x}$$

می‌دانیم در تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$، مختصات مرکز تقارن به صورت $(-\frac{d}{c},\frac{a}{c})$ است. پس، مرکز تقارن تابع نقطه‌ی $(0,2)$ است.

۹- گزینهٔ ۱ با استفاده از $\int (ax+b)^n dx=\frac{1}{a}\times\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}+c$ داریم:

$$\int \sqrt[3]{(3x-2)^2}\,dx=\int (3x-2)^{\frac{2}{3}}dx=\frac{1}{3}\times\frac{3(3x-2)^{\frac{5}{3}}}{5}+c\Rightarrow A=\frac{1}{5}$$

۱۰- گزینهٔ ۲ می‌دانیم $x^2-2x=(x-1)^2-1$ پس:

$$\int\frac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2}dx=\int(1-(x-1)^{-2})dx=x-\frac{(x-1)^{-1}}{-1}+c=\frac{x}{1}+\frac{1}{x-1}+c=\frac{x^2-x+1}{x-1}+c\Rightarrow f(x)=-x+1$$

۱۱- گزینهٔ ۳ می‌دانیم $\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+c$ پس:

$$\int\frac{\sqrt{x}+1}{x}dx=\int(x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{x})dx=\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{1}+\ln|x|+c=2\sqrt{x}+\ln|x|+c$$

۱۲- گزینهٔ ۴ با توجه به روابط زیر خواهیم داشت:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)\Rightarrow 8x^3+1=(2x+1)(4x^2-2x+1)\ ,\ \int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+c$$

$$\int\frac{4x^2-2x+1}{8x^3+1}dx=\int\frac{1}{2x+1}dx=\frac{1}{2}\ln|2x+1|+c$$

۱۳- گزینهٔ ۴ با توجه به روابط $\int e^x dx=e^x+c$ و $\int e^{-x}dx=-e^{-x}+c$ خواهیم داشت:

$$\int e^{-x}(e^x+1)^2dx=\int e^{-x}(e^{2x}+2e^x+1)dx=\int(e^x+2+e^{-x})dx=e^x+2x-e^{-x}+c$$

۱۴- گزینهٔ ۳ با توجه به قانون $\int e^x dx=e^x+c$ و $\int e^{-x}dx=-e^{-x}+c$ خواهیم داشت:

$$F(x)=\int(e^{2x}+1)e^{-x}dx\Rightarrow F(x)=\int(e^x+e^{-x})dx\Rightarrow F(x)=e^x-e^{-x}+c$$

$$F(\ln 2)-F(0)=(e^{\ln 2}-e^{-\ln 2}+c)-(e^0-e^0+c)=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

یادآوری: در مبحث لگاریتم و تابع نمایی خوانده‌ایم که:

$$e^{\ln A}=A\Rightarrow e^{\ln 2}=2,\ e^{-\ln 2}=e^{\ln(2)^{-1}}=2^{-1}=\frac{1}{2}$$

۱۵- گزینهٔ ۳ می‌دانیم $(e^{ax})'=ae^{ax}$، پس $\int e^{ax}dx=\frac{1}{a}e^{ax}+c$، در نتیجه:

$$F(x)=\int e^{2x}dx\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+c\Rightarrow F(\ln 2)-F(0)=(\frac{1}{2}e^{2\ln 2}+c)-(\frac{1}{2}e^0+c)=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

۱۶- گزینهٔ ۴ در تعریف انتگرال نامعین خوانده‌ایم:

$$\int F(x)dx=G(x)+c\Leftrightarrow(G(x)+c)'=F(x)$$

$$F(x)=\int(x^3+\ln x)dx\Rightarrow F'(x)=x^3+\ln x\Rightarrow F''(x)=3x^2+\frac{1}{x}\Rightarrow F''(1)=4$$

۱۷- گزینهٔ ۲ می‌دانیم مشتق $\cos x$ برابر است با $-\sin x$ در نتیجه انتگرال $\sin x$ برابر است با $-\cos x$ بنابراین:

$$\int(3x-2\sin x)dx=3\times\frac{x^2}{2}-2(-\cos x)+c=\frac{3}{2}x^2+2\cos x+c$$

۱۸- گزینهٔ ۱ بر اساس قوانین $\int\sin ax\,dx=-\frac{1}{a}\cos x+c$ و $\int\cos ax\,dx=\frac{1}{a}\sin ax+c$ داریم:

$$F(x)=\int(\sin 2x+\cos\frac{x}{2})dx\Rightarrow F(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x+2\sin\frac{x}{2}+c\xrightarrow{F(0)=\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}+0+c=\frac{1}{2}\Rightarrow c=1$$

$$F(\pi)=-\frac{1}{2}\cos 2\pi+2\sin\frac{\pi}{2}+1=-\frac{1}{2}(1)+2(1)+1=\frac{5}{2}$$

۱۹- گزینه‌ی ۴ در روابط مثلثاتی داریم:
$$2\sin x\cos x=\sin 2x,\ \sin^2 x+\cos^2 x=1$$
در نتیجه می‌توان نوشت:
$$F(x)=\int(\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x)dx\Rightarrow F(x)=\int(1+\sin 2x)dx$$
$$F(x)=x-\frac{1}{2}\cos 2x+c\xrightarrow{f(0)=\frac{3}{2}}0-\frac{1}{2}+c=\frac{3}{2}\Rightarrow c=2\Rightarrow F(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}(-1)+2=\frac{\pi}{2}+\frac{5}{2}$$

۲۰- گزینه‌ی ۳ می‌دانیم مشتق $\tan x$ برابر است با $1+\tan^2 x$ در نتیجه انتگرال $1+\tan^2 x$ برابر $\tan x$ خواهد بود. پس:
$$\int(2+\tan^2 x)dx=\int(1+1+\tan^2 x)dx=x+\tan x+c$$

پاسخ تشریحی آزمون ۷۶

۱- گزینه‌ی ۲ ابتدا $\sqrt{x}$ را در پرانتز ضرب می‌کنیم:
$$\int\sqrt{x}(5x+3)dx=\int(5x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{1}{2}})dx=5\times\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}+3\times\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+c=2x^{\frac{3}{2}}(x+1)+c=2x\sqrt{x}(x+1)+c$$

۲- گزینه‌ی ۱ تابع کسری را ساده می‌کنیم:
$$\int\frac{x-2}{x^3}dx=\int(x^{-2}-2x^{-3})\,dx=\frac{x^{-1}}{-1}-2\times\frac{x^{-2}}{-2}+c=\frac{-1}{x}+\frac{1}{x^2}+c=\frac{-x+1}{x^2}+c\Rightarrow A=-1\ ,\ \ B=1\Rightarrow A+B=0$$

۳- گزینه‌ی ۳ ضریب زاویه‌ی مماس بر منحنی برابر است با جذر طول آن نقطه یعنی $f'(x)=\sqrt{x}$ پس:
$$f(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+c\xrightarrow{(0,0)}c=0\Rightarrow f(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Rightarrow f(9)=\frac{2}{3}\times9\times3=18\Rightarrow(9,18)\in f$$

۴- گزینه‌ی ۲ عبارت $\frac{x^2+2}{x^2}$ را به صورت $1+\frac{2}{x^2}$ می‌نویسیم، آن‌گاه:
$$\int(1+\frac{2}{x^2})dx=x-\frac{2}{x}+c=\frac{x^2-2}{x}+c$$

۵- گزینه‌ی ۴ عبارت $\frac{5x^2+6x}{2\sqrt{x}}$ را ساده می‌کنیم:
$$\int\frac{1}{2}(5x^2+6x)x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{2}\int(5x^{\frac{3}{2}}+6x^{\frac{1}{2}})dx=\frac{1}{2}(5\times\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}+6\times\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3})+c=x^2\sqrt{x}+2x\sqrt{x}+c$$
$$=\sqrt{x}(x^2+2x)+c\Rightarrow f(x)=x^2+2x\Rightarrow f'(x)=2x+2\Rightarrow f'(1)=4$$

۶- گزینه‌ی ۱ مانند تست ۵ عمل می‌کنیم:
$$\int\frac{1}{3}(4x-4)x^{-\frac{2}{3}}dx=\int\frac{1}{3}(4x^{\frac{1}{3}}-4x^{-\frac{2}{3}})\,dx=\frac{1}{3}(4\times\frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4}-4\times\frac{3x^{\frac{1}{3}}}{1})+c\Rightarrow x\sqrt[3]{x}-4\sqrt[3]{x}+c=\sqrt[3]{x}(x-4)+c\Rightarrow f(x)=x-4$$

۷- گزینه‌ی ۱ می‌دانیم انتگرال $F''(x)$ برابر $F'(x)$ و انتگرال $F'(x)$ برابر $F(x)$ است پس:
$$F''(x)=12x^2-12x\Rightarrow F'(x)=4x^3-6x^2+c\xrightarrow{F'(0)=2}c=2$$
$$F'(x)=4x^3-6x^2+2\Rightarrow F(x)=x^4-2x^3+2x+c\xrightarrow{F(1)=2}1-2+2+c=2\Rightarrow c=1\Rightarrow F(x)=x^4-2x^3+2x+1\Rightarrow F(0)=1$$

۸- گزینه‌ی ۱ ابتدا عبارت $((x^2-\frac{1}{x^2})^2+4)^{\frac{1}{2}}$ را به صورت زیر ساده می‌کنیم:
$$((x^4+\frac{1}{x^4}-2)+4)^{\frac{1}{2}}=(x^4+\frac{1}{x^4}+2)^{\frac{1}{2}}=x^2+\frac{1}{x^2}\Rightarrow\int((x^2-\frac{1}{x^2})^2+4)^{\frac{1}{2}}dx=\int(x^2+\frac{1}{x^2})dx=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}+c=\frac{x^4-3}{3x}+c\Rightarrow f(x)=x^4-3$$

۹- گزینه‌ی ۴ برای یافتن $G(2)$ مجبوریم انتگرال را محاسبه کنیم ولی برای یافتن $G'(1)$ می‌دانیم بنا به تعریف انتگرال $G'(x)=x-\frac{1}{x}$ پس:
$$G(x)=\int(x-\frac{1}{x})dx\Rightarrow G(x)=\frac{x^2}{2}-\ln|x|+c\xrightarrow{G(1)=2}\frac{1}{2}-\ln1+c=2\Rightarrow c=\frac{3}{2}\Rightarrow G(2)=2-\ln2+\frac{3}{2}\Rightarrow G(2)=\frac{7}{2}-\ln2$$
$$G(x)=\int(x-\frac{1}{x})dx\Rightarrow G'(x)=x-\frac{1}{x}\Rightarrow G'(1)=0\Rightarrow G(2)+G'(1)=\frac{7}{2}-\ln2$$

۱۰- گزینه‌ی ۳ می‌دانیم $\int (ax+b)^n dx=\frac{1}{a}\times\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}+c$ ، پس:

$$F(x)=\int (x+1)^{\frac{1}{2}}dx\Rightarrow F(x)=\frac{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3}+c\Rightarrow F(x)=\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}+c\Rightarrow F(3)-F(0)=(\frac{2}{3}\times4\times2+c)-(\frac{2}{3}\times1\times1+c)=\frac{14}{3}$$

۱۱- گزینه‌ی ۳ باید $4x^2-4x+1$ را به صورت $(2x-1)^2$ نوشته، آن‌گاه از قانون بیان شده در تست ۱۰ استفاده نمود.

$$F(x)=\int ((2x-1)^2)^2dx=\int (2x-1)^4dx=\frac{1}{2}\times\frac{(2x-1)^5}{5}+c\Rightarrow F(1)-F(0)=(\frac{1}{10}\times1+c)-(\frac{1}{10}(-1)+c)=\frac{1}{5}$$

۱۲- گزینه‌ی ۲ در مبحث مشتق خوانده‌ایم که مشتق عبارت $\frac{1}{n+1}u^{n+1}$ برابر است با $u'u^n$، پس انتگرال $u'u^n$ هم می‌شود $\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$.

$$F(x)=\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}=\int\frac{1}{2}\times\underbrace{2x}_{u'}\underbrace{(x^2-1)}_{u}^{-\frac{2}{3}}dx=\frac{1}{2}\times\frac{3(x^2-1)^{\frac{1}{3}}}{1}+c\Rightarrow F(x)=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2-1}+c\xrightarrow{F(1)=0}c=0\Rightarrow F(3)=\frac{3}{2}\times2=3$$

۱۳- گزینه‌ی ۳ مشتق x^2 برابر است با $2x$ و مشتق $\ln(x+1)$ برابر است با $\frac{1}{x+1}$ بنابراین:

$$f'(x)=2x+\frac{1}{x+1}\Rightarrow f(x)=x^2+\ln(x+1)+c\xrightarrow{f(0)=0}c=0\Rightarrow f(1)=1+\ln2$$

۱۴- گزینه‌ی ۲ باید عبارت $\frac{x^2-2}{x+1}$ را به صورت زیر ساده کنیم:

$$\frac{x^2-2}{x+1}=\frac{x^2-1-1}{x+1}=\frac{x^2-1}{x+1}-\frac{1}{x+1}=x-1-\frac{1}{x+1}\Rightarrow F(x)=\int\frac{x^2-2}{x+1}dx\Rightarrow F(x)=\int(x-1-\frac{1}{x+1})dx$$

$$\Rightarrow F(x)=\frac{x^2}{2}-x-\ln(x+1)+c\xrightarrow{F(0)=0}c=0\Rightarrow F(2)=\frac{4}{2}-2-\ln3\Rightarrow F(2)=-\ln3$$

۱۵- گزینه‌ی ۳ بر اساس صورت تست :

$$\frac{dy}{dx}=2xy\Rightarrow\frac{dy}{y}=2xdx\Rightarrow\int\frac{dy}{y}=\int 2xdx\Rightarrow\ln|y|=x^2+c\xrightarrow{(1,1)}c=-1\Rightarrow\ln y=x^2-1\Rightarrow y=e^{x^2-1}\xrightarrow{x=0}y=e^{-1}$$

۱۶- گزینه‌ی ۲ بنا به تعریف انتگرال خواهیم داشت:

$$F(x)=\int e^{\sin 2x}dx\Rightarrow F'(x)=e^{\sin 2x}\Rightarrow F''(x)=2\cos 2xe^{\sin 2x}\Rightarrow F''(0)=2\times1\times e^{0}=2$$

۱۷- گزینه‌ی ۱ می‌دانیم مشتق $\tan x$ برابر $1+\tan^2 x$ و مشتق $\cot x$ برابر $-(1+\cot^2 x)$ است پس:

$$\int(\tan x+\cot x)^2dx=\int(\tan^2 x+\cot^2 x+2\tan x\cot x)dx=\int(1+\tan^2 x+1+\cot^2 x)dx=\tan x-\cot x+c$$

۱۸- گزینه‌ی ۴ با توجه به اتحاد مثلثاتی $\sin ax\cos ax=\frac{1}{2}\sin 2ax$ داریم:

$$\sin x\cos x\cos 2x=\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x=\frac{1}{4}\sin 4x\Rightarrow\int\sin x\cos x\cos 2xdx=\int\frac{1}{4}\sin 4xdx=-\frac{1}{16}\cos 4x+c$$

$$\xrightarrow{F(\frac{\pi}{8})=0}-\frac{1}{16}\times(0)+c=0\Rightarrow c=0\Rightarrow F(\frac{\pi}{12})=-\frac{1}{16}\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{32}$$

۱۹- گزینه‌ی ۱ عبارت $\sin^2 x+3\cos^2 x$ را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin^2 x+3\cos^2 x=\sin^2 x+\cos^2 x+2\cos^2 x=1+1+\cos 2x\Rightarrow\int(\sin^2 x+3\cos^2 x)dx=\int(2+\cos 2x)dx=2x+\frac{1}{2}\sin 2x+c$$

۲۰- گزینه‌ی ۱ عبارت $(\sin x+\cos x-1)(\sin x+\cos x+1)$ را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$(\underbrace{\sin x+\cos x}_{a}-\underbrace{1}_{b})(\underbrace{\sin x+\cos x}_{a}+\underbrace{1}_{b})\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}}(\sin x+\cos x)^2-1=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x-1=\sin 2x$$

$$\int(\sin x+\cos x-1)(\sin x+\cos x+1)dx=\int\sin 2xdx=-\frac{1}{2}\cos 2x+c$$

پاسخ تشریحی آزمون انتگرال ۷۷

۱- گزینه‌ی (۲) می‌دانیم $x\sqrt{x}=x^{\frac{۳}{۲}}$، پس:

$$\int_{۰}^{۱}(x\sqrt{x}+۲)dx=\frac{۲x^{\frac{۵}{۲}}}{۵}+۲x\Big|_{۰}^{۱}=(\frac{۲}{۵}+۲)-(۰+۰)=\frac{۱۲}{۵}$$

۲- گزینه‌ی (۱) عبارت زیر رادیکال را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$(۱-\sqrt{x})^{۲}+۴\sqrt{x}=۱+x-۲\sqrt{x}+۴\sqrt{x}=۱+x+۲\sqrt{x}=(۱+\sqrt{x})^{۲}$$

$$\Rightarrow\int_{۱}^{۴}\sqrt{(۱-\sqrt{x})^{۲}+۴\sqrt{x}}\,dx=\int_{۱}^{۴}(۱+\sqrt{x})dx=x+\frac{۲}{۳}x\sqrt{x}\Big|_{۱}^{۴}=(۴+\frac{۱۶}{۳})-(۱+\frac{۲}{۳})=\frac{۲۳}{۳}$$

۳- گزینه‌ی (۲) بهتر است عبارت $x^{۲}-۲x+۱$ را به‌صورت $(x-۱)^{۲}$ نوشته، سپس انتگرال بگیریم.

$$\int_{۱}^{k}(x-۱)^{۲}dx=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{(x-۱)^{۳}}{۳}\Big|_{۱}^{k}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{(k-۱)^{۳}}{۳}-\frac{(۱-۱)^{۳}}{۳}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow(k-۱)^{۳}=۱\Rightarrow k=۲$$

۴- گزینه‌ی (۳) کسر را گویا کرده، سپس انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{۰}^{\frac{۹}{۴}}\frac{dx}{\sqrt{x+۴}+\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{x+۴}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+۴}-\sqrt{x}}=\frac{۱}{۴}\int_{۰}^{\frac{۹}{۴}}(\sqrt{x+۴}-\sqrt{x})dx=\frac{۱}{۴}(\frac{۲}{۳}(x+۴)\sqrt{x+۴}-\frac{۲}{۳}x\sqrt{x})\Big|_{۰}^{\frac{۹}{۴}}=\frac{۱}{۴}(\frac{۲}{۳}\times\frac{۲۵}{۴}\times\frac{۵}{۲}-\frac{۲}{۳}\times\frac{۹}{۴}\times\frac{۳}{۲})$$

$$-\frac{۱}{۴}(\frac{۲}{۳}\times۴\times۲-۰)=\frac{۱}{۴}(\frac{۱۲۵}{۱۲}-\frac{۹}{۴}-\frac{۱۶}{۳})=\frac{۱۷}{۲۴}$$

۵- گزینه‌ی (۴) کار خاصی لازم نداریم، فقط باید انتگرال‌گیری را شروع کنیم:

$$\frac{kx^{۳}}{۳}+۲x\Big|_{۰}^{۳}=۱\Rightarrow\frac{۲۷k}{۳}+۶=۱\Rightarrow k=-\frac{۵}{۹}$$

۶- گزینه‌ی (۴) عبارت $\frac{e^{۲x}-۲}{e^{x}}$ را به‌صورت $e^{x}-۲e^{-x}$ می‌نویسیم، آن‌گاه داریم:

$$\int_{۰}^{۱}(e^{x}-۲e^{-x})dx=e^{x}+۲e^{-x}\Big|_{۰}^{۱}=(e+۲e^{-۱})-(e^{۰}+۲e^{۰})=e+۲e^{-۱}-۳$$

۷- گزینه‌ی (۳) در تست‌های قبل هم دیده‌ایم $((\ln(x+۱))'=\frac{۱}{x+۱})$، پس:

$$\int_{۰}^{۱}\frac{dx}{x+۱}=\ln(x+۱)\Big|_{۰}^{۱}=\ln ۲-\ln ۱=\ln ۲$$

۸- گزینه‌ی (۱) با توجه به اتحاد مثلثاتی $\cos ۲x=\cos^{۲}x-\sin^{۲}x$ کسر را ساده می‌کنیم:

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\sin x+\cos x}dx=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}(\cos x-\sin x)dx=\sin x+\cos x\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}=(۱+۰)-(۰+۱)=۰$$

۹- گزینه‌ی (۲) با توجه به اتحاد مثلثاتی $۱-\cos ۲\alpha=۲\sin^{۲}\alpha$ داریم:

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{\frac{۲\sin^{۲}۲x}{۲}}\,dx=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}|\sin ۲x|dx\xrightarrow[\text{سینوس مثبت است}]{\text{در نواحی اول و دوم}}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\sin ۲x\,dx=-\frac{۱}{۲}\cos ۲x\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}=-\frac{۱}{۲}(\cos\pi-\cos ۰)=۱$$

۱۰- گزینه‌ی (۳) با توجه به تساوی‌های $۱+\cos ۲x=۲\cos^{۲}x$ و $(\tan x)'=۱+\tan^{۲}x=\frac{۱}{\cos^{۲}x}$ داریم:

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۳}}\frac{۱}{۲\cos^{۲}x}dx=\frac{۱}{۲}\tan x\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۳}}=\frac{۱}{۲}(\tan\frac{\pi}{۳}-\tan ۰)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۱۱- گزینه‌ی (۲) در خواص انتگرال‌ها داریم:

$$\int_{a}^{b}f(x)\,dx+\int_{a}^{b}g(x)\,dx=\int_{a}^{b}(f(x)+g(x))\,dx$$

$$A+B=\int_{۰}^{۲}x\sin^{۲}x\,dx+\int_{۰}^{۲}x\cos^{۲}x\,dx=\int_{۰}^{۲}x(\sin^{۲}x+\cos^{۲}x)dx=\int_{۰}^{۲}x\,dx=\frac{x^{۲}}{۲}\Big|_{۰}^{۲}=۲$$

۱۲- گزینه‌ی ۴ انتگرال‌های دو طرف تساوی را محاسبه می‌کنیم:

$$x-x^2\Big|_0^2=\frac{kx^2}{2}+2x\Big|_0^2\Rightarrow 2-4=2k+4\Rightarrow k=-3$$

۱۳- گزینه‌ی ۲ ابتدا باید کسر را ساده کنیم سپس انتگرال بگیریم:

$$\frac{\cos^2 x}{1+\sin x}=\frac{1-\sin^2 x}{1+\sin x}\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}}\frac{\cos^2 x}{1+\sin x}=1-\sin x\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)dx=x+\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$$

۱۴- گزینه‌ی ۴ با توجه به روابط $\int_a^a f(x)\,dx=0$, $(\int_a^x f(t)\,dt)'=f(x)$ داریم:

$$G(x)=\int_1^x\frac{dt}{1+t^2}\Rightarrow\begin{cases}G(1)=0\\ G'(x)=\frac{1}{1+x^2}\Rightarrow G'(1)=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow G(1)-G'(1)=-\frac{1}{2}$$

۱۵- گزینه‌ی ۳ مشتق $\frac{x}{f(x)}$ به ازای $x=2$ یعنی:

$$\frac{f(x)-f'(x)\times x}{f^2(x)}\xrightarrow{x=2}\frac{f(2)-2f'(2)}{(f(2))^2}\qquad(1)$$

حال مقادیر مجهول را محاسبه کرده و در کسر جایگذاری می‌کنیم:

$$f(x)=\int_1^x(t^2-1)\,dt\Rightarrow\begin{cases}f'(x)=x^2-1\Rightarrow f'(2)=3\\ f(2)=\int_1^2(t^2-1)\,dt=\frac{t^3}{3}-t\Big|_1^2\Rightarrow f(2)=(\frac{8}{3}-2)-(\frac{1}{3}-1)=\frac{4}{3}\end{cases}\xrightarrow{(1)}\frac{\frac{4}{3}-2\times3}{\frac{16}{9}}=\frac{-\frac{14}{3}}{\frac{16}{9}}=\frac{-14\times3}{16}=-\frac{21}{8}$$

۱۶- گزینه‌ی ۳ برای یافتن معادله‌ی خط مماس باید مختصات نقطه‌ی تماس و شیب خط مماس را مشخص کنیم.

$$x=2\Rightarrow f(2)=\int_2^2\sqrt{t^2+5}\,dt\Rightarrow f(2)=0\Rightarrow A(2,0)$$

$$f(x)=\int_2^x\sqrt{t^2+5}\,dt\Rightarrow f'(x)=\sqrt{x^2+5}\Rightarrow f'(2)=3\ (\text{شیب خط مماس})$$

خط مماس: $y-0=3(x-2)\Rightarrow y=3x-6$

حال خط مماس را با خط $y=x$ قطع می‌کنیم و داریم: $3x-6=x\Rightarrow x=3$

۱۷- گزینه‌ی ۳ می‌دانیم مشتق $f(u)$ برابر است با $u'f'(u)$ پس:

$$y=f(x^2)\Rightarrow y'=2xf'(x^2)\xrightarrow{x=1}2f'(1)$$

$$f(x)=\int_1^x\frac{\cos\pi t}{t^2+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{\cos\pi x}{x^2+1}\Rightarrow f'(1)=\frac{-1}{2}\Rightarrow y'=2(\frac{-1}{2})=-1$$

۱۸- گزینه‌ی ۳ می‌دانیم مشتق $(gof)(x)$ برابر است با $f'(x)\times g'(f(x))$، پس:

$$(gof)'(2)=f'(2)\times g'(f(2))\qquad(1)$$

$$f(x)=\int_2^x\frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}\Rightarrow\begin{cases}f(2)=0\\ f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\Rightarrow f'(2)=\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow(gof)'(2)=\frac{1}{3}g'(0)\xrightarrow{g'(x)=e^x}\frac{1}{3}e^0=\frac{1}{3}$$

۱۹- گزینه‌ی ۴ با توجه به قوانین $(f(u))'=u'f'(u)$ و $(\int_a^x f(t)dt)'=f(x)$ داریم:

$$f(\frac{4}{x})=\int_2^x t\sqrt{t+5}\,dt\xrightarrow{\text{مشتق‌گیری}}-\frac{4}{x^2}f'(\frac{4}{x})=x\sqrt{x+5}\xrightarrow{x=4}-\frac{4}{16}f'(1)=4\times3\Rightarrow f'(1)=-48$$

۲۰- گزینه‌ی ۳ می‌دانیم مشتق $(fof)(x)$ برابر است با $f'(x)\times f'(f(x))$، پس:

$$(fof)'(x)\xrightarrow{x=2}f'(2)\times f'(f(2))$$

$$f(x)=\int_2^x\frac{t+2}{t+3}dt\Rightarrow\begin{cases}f(2)=0\\ f'(x)=\frac{x+2}{x+3}\Rightarrow f'(2)=\frac{4}{5}\ ,\ f'(0)=\frac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow(fof)'(x)=\frac{4}{5}\times f'(0)=\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{15}$$

پاسخ تشریحی آزمون ۷۸

۱- گزینهٔ ۲ با توجه به این‌که $(e^x)'=e^x$ و $(e^{-x})'=-e^{-x}$، انتگرال را محاسبه می‌کنیم:

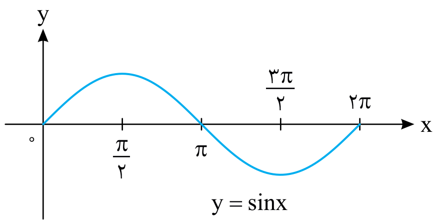
$$\int_{-۱}^{k}(e^x-e^{-x})dx=۰\Rightarrow e^x+e^{-x}\Big|_{-۱}^{k}=۰\Rightarrow(e^k+e^{-k})-(e^{-۱}+e^{۱})=۰$$

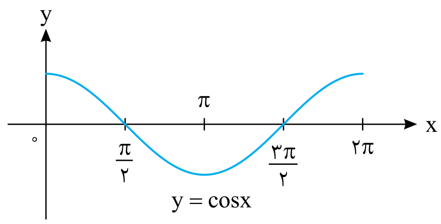
اکنون با توجه به گزینه‌ها $k=۱$ قابل قبول است.

۲- گزینهٔ ۲ با توجه به این‌که $(\ln x)'=\frac{۱}{x}$، ابتدا انتگرال‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\int_{۱}^{e^۶}\frac{dx}{x}=\int_{۰}^{k}(۲x+۱)dx\Rightarrow \ln x\Big|_{۱}^{e^۶}=x^۲+x\Big|_{۰}^{k}\Rightarrow \ln e^۶-\ln ۱=k^۲+k\Rightarrow k^۲+k-۶=۰\Rightarrow\begin{cases}k=-۳\\k=۲\end{cases}$$

۳- گزینهٔ ۴ بـا توجه به این‌که سـطح محصـور بین نمودار تابع $y=\sin x$ یا $y=\cos x$ و محور x هـا در هر یک از فواصل $(۰,\frac{\pi}{۲})$، $(\frac{\pi}{۲},\pi)$، $(\pi,\frac{۳\pi}{۲})$ و... برابر یک می‌باشد.





$$A=\int_{\frac{\pi}{۲}}^{۲\pi}\sin x\,dx=-۱$$

گزینهٔ (۱): $\int_{۰}^{\frac{۳\pi}{۲}}\cos x\,dx=-۱$ و گزینهٔ (۲): $\int_{\frac{\pi}{۲}}^{۲\pi}\cos x\,dx=-۱$ ، گزینهٔ (۳): $\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi}\cos x\,dx=-۱$ ، گزینهٔ (۴): $\int_{\pi}^{\frac{۵\pi}{۲}}\cos x\,dx=۱$

۴- گزینهٔ ۴ با توجه به اتحادهای مثلثاتی داریم:

$$\sin ۴x=۲\sin ۲x\cos ۲x$$
$$۲\cos^۲ x-۱=\cos ۲x$$

پس اکنون خواهیم داشت:

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}\frac{\sin ۴x}{۲\cos^۲ x-۱}dx=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}۲\sin ۲x\,dx=-\cos ۲x\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}=-\cos\frac{\pi}{۲}+\cos ۰=۱$$

۵- گزینهٔ ۳ در مبحث لگاریتم می‌دانیم $e^{\ln A}=A$، پس $e^{\ln\sqrt{۲x+۱}}=\sqrt{۲x+۱}$، در نتیجه:

$$\int_{۰}^{۱}e^{\ln\sqrt{۲x+۱}}dx=\int_{۰}^{۱}\sqrt{۲x+۱}\,dx=\int_{۰}^{۱}(۲x+۱)^{\frac{۱}{۲}}dx=\frac{۱}{۲}\times\frac{۲(۲x+۱)^{\frac{۳}{۲}}}{۳}\Big|_{۰}^{۱}=\frac{۱}{۳}(۲x+۱)\sqrt{۲x+۱}\Big|_{۰}^{۱}=\frac{۱}{۳}(۳\sqrt{۳}-۱)=\sqrt{۳}-\frac{۱}{۳}$$

۶- گزینهٔ ۳ با توجه به اتحاد مزدوج، عبارت مقابل انتگرال را ساده می‌کنیم.

$$\int\frac{(۱-\sqrt{۳x})(۱+\sqrt{۳x})}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{۱-۳x}{\sqrt{x}}dx=\int(x^{-\frac{۱}{۲}}-۳x^{\frac{۱}{۲}})dx=\frac{۲x^{\frac{۱}{۲}}}{۱}-۳\times\frac{۲x^{\frac{۳}{۲}}}{۳}+c=\sqrt{x}(۲-۲x)+c$$

بنابراین $f(x)=۲-۲x$ می‌باشد.

$$\int_{۱}^{۲}f(x)\,dx=\int_{۱}^{۲}(۲-۲x)\,dx=۲x-x^۲\Big|_{۱}^{۲}=(۴-۴)-(۲-۱)=-۱$$

۷- گزینهٔ ۳ با توجه به قانون $\int\sin ax\,dx=-\frac{۱}{a}\cos ax+c$ خواهیم داشت:

$$\int_{۰}^{k\pi}\sin\frac{x}{k}dx=۶\Rightarrow -k\cos\frac{x}{k}\Big|_{۰}^{k\pi}=۶\Rightarrow -k(\cos\frac{k\pi}{k}-\cos ۰)=۶\Rightarrow ۲k=۶\Rightarrow k=۳$$

۸- گزینهٔ ۳ از مبحث مشتق می‌دانیم $(\sin u)'=u'\cos u$، پس $(\sin x^۲)'=۲x\cos x^۲$، در نتیجه:

$$\int_{۰}^{\frac{\sqrt{\pi}}{۲}}x\cos x^۲\,dx=\frac{۱}{۲}\sin x^۲\Big|_{۰}^{\frac{\sqrt{\pi}}{۲}}=\frac{۱}{۲}(\sin\frac{\pi}{۴}-\sin ۰)=\frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

۹- گزینه‌ی ۳ مقدار انتگرال‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\int_0^1 x^3\,dx=\int_1^k \sqrt[3]{x}\,dx \Rightarrow \frac{x^4}{4}\Big|_0^1=\frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4}\Big|_1^k \Rightarrow \frac{1}{4}=\frac{3}{4}k^{\frac{4}{3}}-\frac{3}{4} \Rightarrow k^{\frac{4}{3}}=\frac{4}{3} \Rightarrow k^4=\frac{64}{27}$$

۱۰- گزینه‌ی ۲ در مبحث مشتق داریم $\left(\ln(x^2+1)\right)'=\frac{2x}{x^2+1}$، بنابراین انتگرال عبارت $\frac{x}{x^2+1}$ می‌شود $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$، در نتیجه:

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1=\frac{1}{2}(\ln 2-\ln 1)=\frac{1}{2}\ln 2$$

۱۱- گزینه‌ی ۴ مشتق $x^2f(x)$ برابر است با $2xf(x)+x^2f'(x)$، اکنون به جای x ها مقدار یک قرار می‌دهیم:

$$y'(1)=2f(1)+f'(1)$$

با توجه به $f(x)=\int_1^x \frac{dt}{(1+t^2)^2}$ مقادیر $f(1)$ و $f'(1)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$f(x)=\int_1^x \frac{dt}{(1+t^2)^2} \Rightarrow \begin{cases} f(1)=0 \\ f'(x)=\dfrac{1}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f'(1)=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

اکنون $y'(1)$ برابر است با $2\times 0+\frac{1}{4}$ یعنی $\frac{1}{4}$.

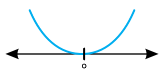
۱۲- گزینه‌ی ۱ اگر از طرفین $g(2x)=\int_0^x f(t)\,dt$ مشتق بگیریم خواهیم داشت $2g'(2x)=f(x)$، در نتیجه $g'(2x)=\frac{1}{2}f(x)$. پس مقدار $g'(4)-g'(-2)$ برابر است با $\frac{1}{2}\left(f(2)-f(-1)\right)$ و با توجه به نمودار داده شده داریم $f(-1)=4$ و $f(2)=6$ پس جواب مسأله برابر ۱ است.

۱۳- گزینه‌ی ۲ از طرفین مشتق می‌گیریم و به جای x ها صفر می‌گذاریم:

$$F'(x)=(x^2-1)\,e^{x+1} \Rightarrow F'(0)=-e$$

۱۴- گزینه‌ی ۴ اگر $f(x)=\int_1^x (t^2-t^3)\,dt$، آن‌گاه $f'(x)=x^2-x^3$. اگر فرض کنیم $f'(x)=g(x)$ پس باید نمودار g را در همسایگی $x=0$ مشخص کنیم:

$$\begin{cases} g'(x)=2x-3x^2 \Rightarrow g'(0)=0 \\ g''(x)=2-6x \Rightarrow g''(0)=2>0 \end{cases} \xrightarrow[\text{در همسایگی صفر}]{\text{رسم نمودار}}$$



۱۵- گزینه‌ی ۳ می‌دانیم اگر $f(x)=\int_1^x \frac{1}{t^2+1}\,dt$، آن‌گاه $f(1)=0$ و از طرفی $f'(x)=\frac{1}{x^2+1}$، پس $f'(1)=\frac{1}{2}$.

اکنون برای محاسبه‌ی شیب مماس بر نمودار $xf(x)$ باید مشتق آن را محاسبه کرد $\left(f(x)+xf'(x)\right)$ سپس به جای x ها یک قرار دهیم $\left(f(1)+f'(1)\right)$

در نتیجه جواب تست می‌شود $0+\frac{1}{2}$ یعنی $\frac{1}{2}$.

۱۶- گزینه‌ی ۱ اگر $f(x)=\int_1^x \frac{dt}{1-t^2}$، آن‌گاه $f'(x)=\frac{1}{1-x^2}$ و اگر فرض کنیم $G(x)=f(\cos x)$، آن‌گاه $G'(x)=-\sin x\, f'(\cos x)$،

بنابراین:

$$G'(x)=-\sin x\times\frac{1}{1-\cos^2 x} \Rightarrow G'(x)=\frac{-1}{\sin x}$$

اکنون مجدداً مشتق می‌گیریم تا مشتق مرتبه‌ی دوم $f(\cos x)$ به‌دست آید:

$$G''(x)=\frac{\cos x}{\sin^2 x} \xrightarrow{x=\frac{\pi}{3}} G''\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}$$

۱۷- گزینه‌ی ۴ ابتدا از طرفین مشتق می‌گیریم:

$$f(\sqrt{x})\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=2x\cos \pi x-\pi x^2\sin \pi x$$

چون مقدار $f(2)$ را می‌خواهیم، در طرفین تساوی فوق به جای x ها، مقدار ۴ قرار می‌دهیم:

$$f(2)\times\frac{1}{4}=8-0 \Rightarrow f(2)=32$$

۱۸- گزینه‌ی ۲ اگر $G(x)=\int_{۱}^{x} e^{-t^{۲}}dt$، آن‌گاه $G'(x)=e^{-x^{۲}}$ پس:

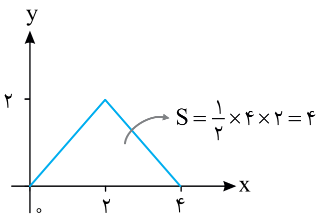
$$G'(\sqrt{۳})-G'(\sqrt{۲})=e^{-۳}-e^{-۲}$$

۱۹- گزینه‌ی ۴ اگر $f(x)=\int_{۰}^{x} t|t^{۲}-۱|dt$، آن‌گاه $f'(x)=x|x^{۲}-۱|$ پس تعداد نقاط بحرانی برابر ۳ می‌باشد $(x=۰,\pm ۱)$.

۲۰- گزینه‌ی ۴ اگر $f(x)=\int_{۱}^{x}\frac{dt}{t^{۲}-۱}$، آن‌گاه $f'(x)=\frac{۱}{x^{۲}-۱}$ و $f''(x)=\frac{-۲x}{(x^{۲}-۱)^{۲}}$، پس $f''(۲)=\frac{-۴}{۹}$.

پاسخ تشریحی آزمون ۷۹

۱- گزینه‌ی ۴ با توجه به رسم دقیق نمودار در صورت سؤال، داریم:



$$\int_{۰}^{۴}(۲-|x-۲|)dx=S=۴$$

۲- گزینه‌ی ۳ باید قدر مطلق و جزء صحیح را حذف کنیم، پس:

$$\int_{-۱}^{۲} f(x)dx=\int_{-۱}^{۲}(|x|-[x])dx=\int_{-۱}^{۰}(-x+۱)dx+\int_{۰}^{۱}(x-۰)dx+\int_{۱}^{۲}(x-۱)dx=(-\frac{x^{۲}}{۲}+x)\Big|_{-۱}^{۰}+(\frac{x^{۲}}{۲})\Big|_{۰}^{۱}+(\frac{x^{۲}}{۲}-x)\Big|_{۱}^{۲}$$

$$=((۰+۰)-(-\frac{۱}{۲}-۱))+(\frac{۱}{۲}-۰)+((\frac{۴}{۲}-۲)-(\frac{۱}{۲}-۱))=\frac{۵}{۲}$$

۳- گزینه‌ی ۴ مساحت مورد نظر برابر است با:

$$S=|\int_{-۲}^{۰}xdx|+|\int_{۰}^{۳}x^{۲}dx|\Rightarrow S=|\frac{x^{۲}}{۲}\Big|_{-۲}^{۰}|+|\frac{x^{۳}}{۳}\Big|_{۰}^{۳}|=|\frac{۰}{۲}-\frac{۴}{۲}|+|\frac{۲۷}{۳}-\frac{۰}{۳}|=۱۱$$

۴- گزینه‌ی ۲ اگر $۱<x<۲$، عبارت $۲-\frac{۴}{x}$ مقداری منفی است و اگر $۲<x<۴$، عبارت $۲-\frac{۴}{x}$ مقداری مثبت است. بنابراین:

$$\int_{۱}^{۴}|۲-\frac{۴}{x}|dx=\int_{۱}^{۲}(-۲+\frac{۴}{x})dx+\int_{۲}^{۴}(۲-\frac{۴}{x})dx=(-۲x+۴\ln x)\Big|_{۱}^{۲}+(۲x-۴\ln x)\Big|_{۲}^{۴}$$

$$=((-۴+۴\ln ۲)-(-۲+۴\ln ۱))+((۸-۴\ln ۴)-(۴-۴\ln ۲))=۲$$

۵- گزینه‌ی ۴ در این تابع $-\frac{\pi}{۶}<x<\frac{\pi}{۶}$ است، پس برای محاسبه‌ی $[x]$ داریم:

$$-\frac{\pi}{۶}<x<۰\Rightarrow [x]=-۱\quad,\quad ۰<x<\frac{\pi}{۶}\Rightarrow [x]=۰$$

اکنون داریم:

$$\int_{-\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۶}}[x]\cos x\,dx=\int_{-\frac{\pi}{۶}}^{۰}(-۱)\cos xdx+\int_{۰}^{\frac{\pi}{۶}}۰\times\cos xdx=-\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{۶}}^{۰}+۰=-(\sin ۰-\sin(-\frac{\pi}{۶}))=-\frac{۱}{۲}$$

۶- گزینه‌ی ۱ ابتدا باید جزء صحیح و قدرمطلق را حذف کنیم:

$$\int_{-۱}^{۱}x|x|\times[x]dx=\int_{-۱}^{۰}x(-x)(-۱)dx+\int_{۰}^{۱}x(x)(۰)dx=\int_{-۱}^{۰}x^{۲}dx+\int_{۰}^{۱}۰\times dx=(\frac{x^{۳}}{۳})\Big|_{-۱}^{۰}+۰=\frac{۱}{۳}$$

۷- گزینه‌ی ۲ با توجه به اتحادهای مثلثاتی می‌دانیم $(\sin x-\cos x)^{۲}=۱-\sin ۲x$ و اگر $۰<x<\frac{\pi}{۴}$ باشد $\sin x-\cos x$ مقداری منفی و اگر $\frac{\pi}{۴}<x<\frac{\pi}{۲}$ باشد، $\sin x-\cos x$ مقداری مثبت است، پس:

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{۱-\sin ۲x}dx=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}|\sin x-\cos x|dx=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}(-\sin x+\cos x)dx+\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}}(\sin x-\cos x)dx$$

$$=(\cos x+\sin x)\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}+(-\cos x-\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}}=\sqrt{۲}-۱-۱+\sqrt{۲}=۲\sqrt{۲}-۲$$

۸- گزینه‌ی ۲ در این سؤال $\frac{1}{3}<x<1$ می‌باشد، پس $1<\frac{1}{x}<3$ خواهد بود بنابراین برای حذف جزء صحیح به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} 1<\frac{1}{x}<2 \Rightarrow [\frac{1}{x}]=1 \ , \ \frac{1}{2}<x<1 \\ 2<\frac{1}{x}<3 \rightarrow [\frac{1}{x}]=2 \ , \ \frac{1}{3}<x<\frac{1}{2} \end{cases}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\int_{\frac{1}{3}}^{1}[\frac{1}{x}]\frac{dx}{x}=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}2\times\frac{dx}{x}+\int_{\frac{1}{2}}^{1}1\times\frac{dx}{x}=2\ln x\Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}+\ln x\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\ln\frac{9}{2}$$

۹- گزینه‌ی ۲ در این سؤال $0<x<1$، بنابراین $0<\pi x<\pi$، در نتیجه $-1<\cos \pi x<1$، پس برای حذف جزء صحیح به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} 0<x<\frac{1}{2}\Rightarrow 0<\pi x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow 0<\cos \pi x<1\Rightarrow[\cos \pi x]=0 \\ \frac{1}{2}<x<1\Rightarrow\frac{\pi}{2}<\pi x<\pi\Rightarrow -1<\cos \pi x<0\Rightarrow[\cos \pi x]=-1 \end{cases}$$

اکنون خواهیم داشت:

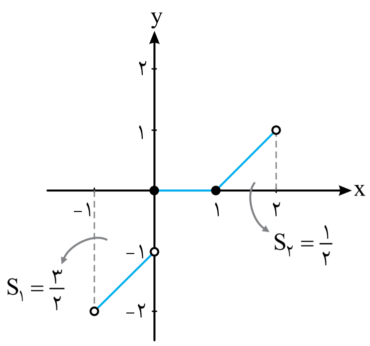
$$\int_{0}^{1}[\cos \pi x]\sin \pi x dx=\int_{0}^{\frac{1}{2}}0\times\sin \pi x dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-1)\times\sin \pi x dx=0+(\frac{1}{\pi}\cos \pi x)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{1}{\pi}(\cos \pi-\cos\frac{\pi}{2})=\frac{-1}{\pi}$$

۱۰- گزینه‌ی ۳ می‌دانیم مساحت مقداری مثبت است ولی حاصل هر انتگرال معینی یک عدد حقیقی می‌باشد، بنابراین بهتر است با رسم شکل، سؤال را جواب دهیم:

$$-1<x<0\Rightarrow f(x)=-1(-x+1)=x-1$$

$$0<x<1\Rightarrow f(x)=0(x-1)=0$$

$$1<x<2\Rightarrow f(x)=1(x-1)=x-1$$



اکنون بنا به شکل رسم شده:

الف) سطح محصور خواسته شده برابر است با ۲

ب) مقدار انتگرال معین خواسته شده برابر است با -1

در نتیجه جواب مسأله یعنی اختلاف سطح و مقدار انتگرال معین برابر ۳ می‌باشد.

۱۱- گزینه‌ی ۳ ریشه‌ی معادله‌ی $x^2-x=0$ در بازه‌ی $(0,2)$ برابر یک می‌باشد، پس:

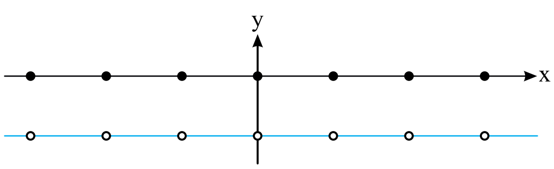
$$\int_{0}^{2}|x^2-x|dx=\int_{0}^{1}(x-x^2)dx+\int_{1}^{2}(x^2-x)dx=(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3})\Big|_{0}^{1}+(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2})\Big|_{1}^{2}=(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+((\frac{8}{3}-\frac{4}{2})-(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}))=1$$

اکنون حاصل $|\int_{1}^{2}(x^2-x)dx|$ را محاسبه می‌کنیم:

$$|\int_{1}^{2}(x^2-x)dx|=|\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\Big|_{1}^{2}|=|(\frac{8}{3}-\frac{4}{2})-(\frac{1}{3}-\frac{1}{2})|=\frac{5}{6}$$

در نتیجه حاصل عبارت خواسته شده برابر است با $1-\frac{5}{6}$ یعنی $\frac{1}{6}$

۱۲- گزینه‌ی ۲ نمودار تابع $f(x)=[x]+[-x]$ به صورت شکل زیر است:



بنابراین اگر $n\in\mathbb{N}$ باشد، $\int_{-n}^{n}([x]+[-x])dx$ برابر $-2n$ می‌باشد. در نتیجه در این سؤال $-2n=-8$ می‌باشد، پس $n=4$.

۱۳- گزینه‌ی ۲ مساحت مورد نظر دو برابر مساحت $y=e^{-2x}$ در بازه‌ی $(0,2)$ می‌باشد پس:

$$S=2|\int_{0}^{2}e^{-2x}dx|=|(-e^{-2x})\Big|_{0}^{2}|=|-e^{-4}+e^{0}|=1-e^{-4}$$

۱۴- گزینه‌ی ۴ ابتدا طول‌های نقاط تلاقی دو تابع یعنی معادله‌ی $x^2=2x$ را حل می‌کنیم $(x=0,2)$. اکنون سطح خواسته شده برابر است با:

$$S=|\int_{0}^{2}(x^2-2x)dx|=|(\frac{x^3}{3}-x^2)\Big|_{0}^{2}|=|\frac{8}{3}-4|=\frac{4}{3}$$

۱۵- گزینه‌ی ۲ نقطه‌ی تلاقی دو تابع یعنی ریشه‌ی مثبت معادله‌ی $۴-x^۲=۳$ را محاسبه می‌کنیم $(x=۱)$. اکنون سطح مورد نظر برابر است با:

$$S=\left|\int_۰^۱(۴-x^۲-۳)dx\right|=\left|(x-\frac{x^۳}{۳})\Big|_۰^۱\right|=\left|۱-\frac{۱}{۳}\right|=\frac{۲}{۳}$$

۱۶- گزینه‌ی ۳ مختصات نقطه‌ی تلاقی دو منحنی، یعنی ریشه‌ی مثبت معادله‌ی $x^۲=۸-x^۲$ را محاسبه می‌کنیم. $(x=۲)$ در نتیجه مختصات نقطه‌ی تلاقی $(۲,۴)$ می‌باشد، در نتیجه سطح مورد نظر برابر است با:

$$S=\left|\int_۰^۲(۸-x^۲-۴)dx\right|=\left|(۴x-\frac{x^۳}{۳})\Big|_۰^۲\right|=\left|۸-\frac{۸}{۳}\right|=\frac{۱۶}{۳}$$

۱۷- گزینه‌ی ۴ معادله‌ی $f(x)=\frac{x^۲-۱}{x}=۰$ در بازه‌ی $(۲,۴)$ جواب ندارد، پس:

$$S=\left|\int_۲^۴\frac{x^۲-۱}{x}dx\right|=\left|\int_۲^۴(x-\frac{۱}{x})dx\right|=\left|(\frac{x^۲}{۲}-\ln x)\Big|_۲^۴\right|=\left|(\frac{۱۶}{۲}-\ln ۴)-(\frac{۴}{۲}-\ln ۲)\right|=۶-\ln ۲$$

۱۸- گزینه‌ی ۱ ابتدا $S(\alpha)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$S(\alpha)=\int_۰^{\alpha}e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_۰^{\alpha}=-e^{-\alpha}+e^۰=۱-e^{-\alpha}$$

می‌دانیم $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=۰$ ، بنابراین:

$$\lim_{\alpha\to+\infty}S(\alpha)=\lim_{\alpha\to+\infty}(۱-e^{-\alpha})=۱-۰=۱$$

۱۹- گزینه‌ی ۲ چون اولین ریشه‌ی مثبت $\sin x-\cos x=۰$ برابر $\frac{\pi}{۴}$ می‌باشد، پس:

$$\left|\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}(\sin x-\cos x)dx\right|+\left|\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\alpha}(\sin x-\cos x)dx\right|=۲\sqrt{۲}-۱\Rightarrow\left|(-\cos x-\sin x)\Big|_۰^{\frac{\pi}{۴}}\right|+\left|(-\cos x-\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{۴}}^{۰}\right|=۲\sqrt{۲}-۱$$

$$\left|(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲})-(-۱-۰)\right|+\left|(-\cos\alpha-\sin\alpha)-(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲})\right|=۲\sqrt{۲}-۱\Rightarrow\sqrt{۲}-۱-(\cos\alpha+\sin\alpha)+\sqrt{۲}=۲\sqrt{۲}-۱\Rightarrow\cos\alpha+\sin\alpha=۰$$

$$\Rightarrow\tan\alpha=-۱$$

بنابراین کوچک‌ترین مقدار مثبت α برابر $\frac{۳\pi}{۴}$ است.

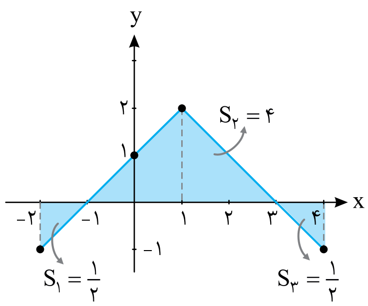
۲۰- گزینه‌ی ۴ چون سطح محصور بین نمودار تابع و محور x ها را بیان کرده است، پس باید ریشه‌های معادله‌ی $kx^۲(۳-x)=۰$ را محاسبه کنیم. $(x=۰,۳)$ اکنون داریم:

$$k\int_۰^۳x^۲(۳-x)dx=۲۷\Rightarrow k(x^۳-\frac{x^۴}{۴})\Big|_۰^۳=۲۷\Rightarrow k(۲۷-\frac{۸۱}{۴})=۲۷\Rightarrow\frac{۲۷}{۴}k=۲۷\Rightarrow k=۴$$

پاسخ تشریحی آزمون ۸۰

۱- گزینه‌ی ۳ ابتدا نمودار را کامل می‌کنیم:

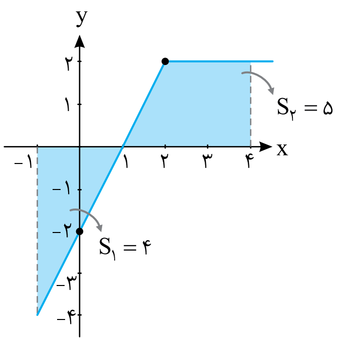
$$f(-۲)=-۱\quad,\quad f(۰)=۱\quad,\quad f(۱)=۲\quad,\quad f(۴)=-۱$$



حال داریم:

$$\int_{-۲}^{۴}f(x)dx=(-S_۱)+(S_۲)+(-S_۳)=۳$$

۲- گزینه‌ی ۲ ابتدا نمودار را کامل می‌کنیم:



$$f(-۱)=-۴\ ,\ f(۰)=-۲\ ,\ f(۱)=۰\ ,\ f(۲)=۲\ ,\ f(۴)=۲$$

حالا داریم:

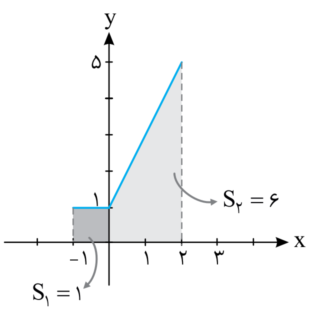
$$\int_{-۱}^{۴} f(x)dx=(-S_۱)+(S_۲)=۱$$

سراسری خارج از کشور - ۸۹

۳- گزینه‌ی ۳ می‌دانیم اگر $۰<x<۱$، آن‌گاه $[x]=۰$ و اگر $۱<x<۲$، آن‌گاه $[x]=۱$، بنابراین:

$$\int_۰^۲ \frac{[x]}{x}dx=\int_۰^۱ \frac{۰}{x}dx+\int_۱^۲ \frac{۱}{x}dx=۰+\ln x\Big|_۱^۲=\ln۲-\ln۱=\ln۲$$

۴- گزینه‌ی ۴ می‌توانیم نمودار تابع $f(x)=|x|+|x+۱|$ را رسم کنیم:



اکنون با توجه به نمودار داریم:

$$\int_{-۱}^{۲} f(x)dx=S_۱+S_۲=۷$$

سراسری خارج از کشور - ۹۱

۵- گزینه‌ی ۱ ریشه‌ی معادله‌ی $۲\cos x-۱=۰$ در بازه‌ی $(۰,\frac{\pi}{۲})$ برابر است با $\frac{\pi}{۳}$ بنابراین:

$$\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}|۲\cos x-۱|dx=\int_۰^{\frac{\pi}{۳}}(۲\cos x-۱)dx+\int_{\frac{\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۲}}(-۲\cos x+۱)dx$$

$$=(۲\sin x-x)\Big|_۰^{\frac{\pi}{۳}}+(-۲\sin x+x)\Big|_{\frac{\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۲}}=((\sqrt{۳}-\frac{\pi}{۳})-(۰-۰))+((-۲+\frac{\pi}{۲})-(-\sqrt{۳}+\frac{\pi}{۳}))=۲\sqrt{۳}-۲-\frac{\pi}{۶}$$

۶- گزینه‌ی ۳ ابتدا باید قدر مطلق را حذف کنیم، پس:

$$\begin{cases} ۰<x<۱\Rightarrow|۱-x|=۱-x\Rightarrow|۱-x|\sqrt{x}=x^{\frac{۱}{۲}}-x^{\frac{۳}{۲}} \\ ۱<x<۴\Rightarrow|۱-x|=x-۱\Rightarrow|۱-x|\sqrt{x}=x^{\frac{۳}{۲}}-x^{\frac{۱}{۲}} \end{cases}$$

$$\int_۰^۴|۱-x|\sqrt{x}dx=\int_۰^۱(x^{\frac{۱}{۲}}-x^{\frac{۳}{۲}})dx+\int_۱^۴(x^{\frac{۳}{۲}}-x^{\frac{۱}{۲}})dx=(\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}-\frac{۲}{۵}x^{\frac{۵}{۲}})\Big|_۰^۱+(\frac{۲}{۵}x^{\frac{۵}{۲}}-\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}})\Big|_۱^۴=۸$$

۷- گزینه‌ی ۲ $\cos x$ در بازه‌ی $(۰,\frac{\pi}{۲})$ مقداری مثبت و در بازه‌ی $(\frac{\pi}{۲},\pi)$ مقداری منفی می‌باشد، پس:

$$\int_۰^{\pi}|\cos x|\sin x dx=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\cos x\sin x dx-\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi}\cos x\sin x dx$$

از طرفی می‌دانیم $\sin x\cos x=\frac{۱}{۲}\sin ۲x$، در نتیجه:

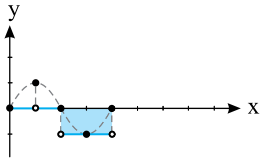
$$\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۱}{۲}\sin ۲x dx-\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi}\frac{۱}{۲}\sin ۲x dx=(-\frac{۱}{۴}\cos ۲x)\Big|_۰^{\frac{\pi}{۲}}+(\frac{۱}{۴}\cos ۲x)\Big|_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi}=\frac{-۱}{۴}(\cos\pi-\cos ۰)+\frac{۱}{۴}(\cos ۲\pi-\cos\pi)$$

$$=-\frac{۱}{۴}(-۱-۱)+\frac{۱}{۴}(۱-(-۱))=۱$$

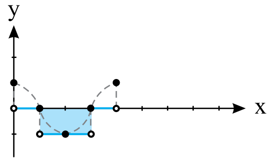
۸- گزینه‌ی ۴ با توجه به اتحادهای مثلثاتی داریم $۱+\cos ۲x=۲\cos^{۲} x$، پس:

$$\int_{۰}^{\pi}\sqrt{\frac{۱}{۲}(۱+\cos ۲x)}dx=\int_{۰}^{\pi}\sqrt{\cos^{۲} x}dx=\int_{۰}^{\pi}|\cos x|dx=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\cos xdx+\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi}(-\cos x)dx=\sin x\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi}=۱-(-۱)=۲$$

۹- گزینه‌ی ۱ بهتر است این تست را با رسم نمودار حل کنیم:



$y=[\sin x]$



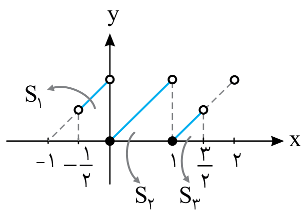
$y=[\cos x]$

$$\begin{cases} A=\int_{۰}^{۲\pi}[\sin x]dx=-\pi \\ B=\int_{۰}^{۲\pi}[\cos x]dx=-\pi \end{cases}\Rightarrow A+B=-۲\pi$$

۱۰- گزینه‌ی ۳ ابتدا باید جزء صحیح را حذف کنیم، پس:

$$۰<x<۱\Rightarrow ۰<\sqrt{x}<۱\Rightarrow[\sqrt{x}]=۰$$
$$۱<x<۴\Rightarrow ۱<\sqrt{x}<۲\Rightarrow[\sqrt{x}]=۱$$
$$\int_{۰}^{۴}[\sqrt{x}]dx=\int_{۰}^{۱}۰dx+\int_{۱}^{۴}۱dx=۰+۳=۳$$

۱۱- گزینه‌ی ۲ برای حل این تست توصیه می‌شود که نمودار تابع را رسم کنیم:



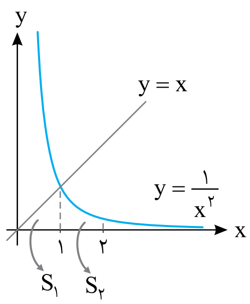
در این نمودار مقدار $S_۲$ برابر $\frac{۱}{۲}$ است، از طرفی جمع $S_۱$ و $S_۳$ نیز برابر $\frac{۱}{۲}$ می‌شود، پس جواب مسأله برابر یک است.

۱۲- گزینه‌ی ۱ همان‌طوری که می‌دانیم برای حذف قدر مطلق، باید ابتدا ریشه‌های داخل قدر مطلق را حساب کنیم. (در این مسأله $x=۰,۱$)، پس:

$$۰<x<۱\Rightarrow|x^{۲}-x|=-x^{۲}+x$$
$$۱<x<۲\Rightarrow|x^{۲}-x|=x^{۲}-x$$

$$\int_{۰}^{۲}|x^{۲}-x|dx=\int_{۰}^{۱}(-x^{۲}+x)dx+\int_{۱}^{۲}(x^{۲}-x)dx=(-\frac{x^{۳}}{۳}+\frac{x^{۲}}{۲})\Big|_{۰}^{۱}+(\frac{x^{۳}}{۳}-\frac{x^{۲}}{۲})\Big|_{۱}^{۲}=-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}+\frac{۸}{۳}-\frac{۴}{۲}-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}=۱$$

۱۳- گزینه‌ی ۲ سطح مورد نظر، متشکل از دو سطح است.



الف) سطح بین نمودار تابع $y=x$ و محور x ها و دو خط $x=۰$ و $x=۱$ $(S_۱)$

ب) سطح بین نمودار تابع $y=\frac{۱}{x^{۲}}$ و محور x ها و دو خط $x=۱$ و $x=۲$ $(S_۲)$

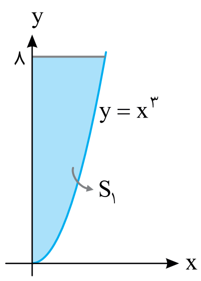
بنابراین:

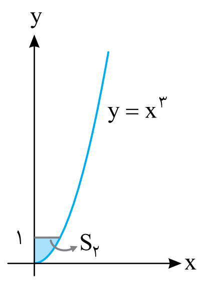
$$\begin{cases} S_۱=\int_{۰}^{۱}xdx=\frac{۱}{۲} \\ S_۲=\int_{۱}^{۲}\frac{۱}{x^{۲}}dx=\frac{۱}{۲} \end{cases}\Rightarrow S_۱+S_۲=۱$$

۱۴- گزینه‌ی ۴ برای یافتن سطح مورد نظر، ابتدا طول‌های نقاط تلاقی دو تابع را مشخص می‌کنیم $(x=۰,۱)$ پس:

$$S=|\int_{۰}^{۱}(x^{۳}-x)dx|=|\frac{x^{۴}}{۴}-\frac{x^{۲}}{۲}\Big|_{۰}^{۱}|=\frac{۱}{۴}$$

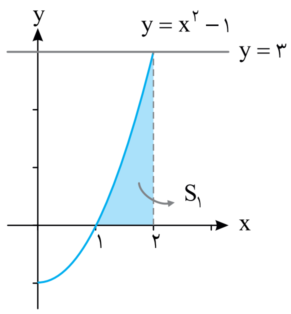
۱۵- گزینه‌ی ۴ با توجه به نمودارهای رسم شده مساحت مورد نظر برابر است با $S_۱-S_۲$.





بنابراین:

$$\begin{cases} S_۱=|\int_{۰}^{۲}(x^{۳}-۸)dx|=|\frac{x^{۴}}{۴}-۸x\Big|_{۰}^{۲}|=۱۲ \\ S_۲=\int_{۰}^{۱}(x^{۳}-۱)dx=|\frac{x^{۴}}{۴}-x\Big|_{۰}^{۱}|=\frac{۳}{۴} \end{cases}\Rightarrow S=S_۱-S_۲=\frac{۴۵}{۴}$$



۱۶- گزینه‌ی ۳ با توجه به شکل رسم شده، سطح مورد نظر برابر است با مساحت مستطیلی به ابعاد ۲ و ۳ منهای $S_۱$، بنابراین:

$$S_۱=\left|\int_۱^۲(x^۲-۱)dx\right|=\left|\frac{x^۳}{۳}-x\Big|_۱^۲\right|=\frac{۴}{۳}$$

$$\text{مساحت قسمت رنگی}=۲\times۳-\frac{۴}{۳}=\frac{۱۴}{۳}$$

۱۷- گزینه‌ی ۴ ابتدا نقطه‌ی تلاقی نمودار تابع $y=\sqrt{x}-۲$ و محور x ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\sqrt{x}-۲=۰\Rightarrow x=۴$$

پس مساحت مورد نظر برابر است با:

$$S=\left|\int_۰^۴(\sqrt{x}-۲)dx\right|+\left|\int_۴^۹(\sqrt{x}-۲)dx\right|\Rightarrow S=\left|\frac{۲}{۳}x\sqrt{x}-۲x\Big|_۰^۴\right|+\left|\frac{۲}{۳}x\sqrt{x}-۲x\Big|_۴^۹\right|=\frac{۱۶}{۳}$$

۱۸- گزینه‌ی ۲ نمودار تابع $y=e^x$ محور xها را قطع نمی‌کند، پس:

$$S=\left|\int_۰^{\ln ۳}e^x dx\right|=\left|e^x\Big|_۰^{\ln ۳}\right|=e^{\ln ۳}-e^۰=۳-۱=۲$$

۱۹- گزینه‌ی ۱ در حل این مسأله بهتر است $۳x^۲+۶x+۳$ را به صورت $۳(x+۱)^۲$ بنویسیم، آن‌گاه:

$$۲۶=\int_۰^{\alpha}۳(x+۱)^۲dx=(x+۱)^۳\Big|_۰^{\alpha}=۲۶\Rightarrow(\alpha+۱)^۳-۱=۲۶\Rightarrow(\alpha+۱)^۳=۲۷\Rightarrow\alpha=۲$$

۲۰- گزینه‌ی ۳ می‌دانیم سطح محصور بین نمودار تابع $y=\sin x$ و محور x ها در فاصله‌ی $[۰,\frac{\pi}{۲}]$ برابر است با ۱، $(\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\sin x=۱)$ پس مساحت مورد نظر برابر با مساحت مستطیلی به ابعاد ۱ و $(\frac{\pi}{۲}-۱)$ می باشد:

$$S=۱\times\frac{\pi}{۲}-۱=\frac{\pi}{۲}-۱$$

پاسخ تشریحی آزمون ۸۱

۱- گزینه‌ی ۱ عبارت $(۱-\sqrt{x})^۲+۴\sqrt{x}$ را ساده می‌کنیم و به صورت $(۱+\sqrt{x})^۲$ می‌نویسیم:

$$\int\sqrt{(۱-\sqrt{x})^۲+۴\sqrt{x}}\,dx=\int(۱+\sqrt{x})dx=x+\frac{۲}{۳}x\sqrt{x}+c=x(۱+\frac{۲}{۳}\sqrt{x})+c\Rightarrow f(x)=۱+\frac{۲}{۳}\sqrt{x}$$

۲- گزینه‌ی ۱ عبارت $\frac{۱-x}{x\sqrt{x}}$ را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{۱-x}{x\sqrt{x}}=(۱-x)x^{-\frac{۳}{۲}}=x^{-\frac{۳}{۲}}-x^{-\frac{۱}{۲}}$$

اکنون خواهیم داشت:

$$\int\frac{۱-x}{x\sqrt{x}}dx=\int(x^{-\frac{۳}{۲}}-x^{-\frac{۱}{۲}})dx=\frac{۲x^{-\frac{۱}{۲}}}{-۱}-\frac{۲x^{\frac{۱}{۲}}}{۱}+c=\frac{-۲}{\sqrt{x}}-۲\sqrt{x}+c=\frac{-۲-۲x}{\sqrt{x}}+c\Rightarrow f(x)=-۱-x$$

سراسری خارج از کشور - ۹۱

۳- گزینه‌ی ۱ با توجه به تعریف انتگرال می‌دانیم که باید مشتق $A(x^۲+۲)^B$ برابر $x\sqrt{x^۲+۲}$ باشد، بنابراین:

$$A\times B\times ۲x(x^۲+۲)^{B-۱}=x\sqrt{x^۲+۲}$$

اکنون باید $B-۱=\frac{۱}{۲}$ و $۲AB=۱$، پس $B=\frac{۳}{۲}$ و $A=\frac{۱}{۳}$، در نتیجه $A+B=\frac{۱۱}{۶}$.

۴- گزینه‌ی ۱ با توجه به رابطه‌ی مثلثاتی $\cos a\cos b-\sin a\sin b=\cos(a+b)$ عبارت $\cos 3x\cos x-\sin 3x\sin x$ برابر $\cos 4x$ می‌باشد و انتگرال $\cos 4x$ نیز برابر $\frac{1}{4}\sin 4x+c$ است.

۵- گزینه‌ی ۲ در روابط مثلثاتی داریم $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)$، پس اکنون داریم:

$$\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx=\int(\cos x+\sin x)dx=\sin x-\cos x+c$$

سراسری - ۹۱

۶- گزینه‌ی ۳ ابتدا تابع مقابل انتگرال را به توان ۲ رسانده سپس از قانون $\int e^{ax+b}dx=\frac{1}{a}e^{ax+b}+c$ استفاده می‌کنیم:

$$F(x)=\int(e^{2x}-2e^x+1)dx\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-2e^x+x+c\xrightarrow{F(0)=\frac{1}{2}}\frac{1}{2}-2+0+c=\frac{1}{2}\Rightarrow c=2$$

$$F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-2e^x+x+2\Rightarrow F(\ln 2)=\frac{1}{2}e^{2\ln 2}-2e^{\ln 2}+\ln 2+2=2-4+2+\ln 2=\ln 2$$

۷- گزینه‌ی ۴ عبارت مقابل انتگرال را ساده می‌کنیم:

$$(1+x^2)(1-2x^2)=1-2x^2+x^2-2x^4=1-x^2-2x^4\Rightarrow\frac{(1+x^2)(1-2x^2)}{x^2}=\frac{1-x^2-2x^4}{x^2}=x^{-2}-1-2x^2$$

اکنون خواهیم داشت:

$$F(x)=\int(x^{-2}-1-2x^2)\,dx=-\frac{1}{x}-x-\frac{2}{3}x^3+c$$

با توجه به فرض $F(1)=-\frac{4}{3}$ داریم $-1-1-\frac{2}{3}+c=-\frac{4}{3}$، بنابراین $c=\frac{4}{3}$. اکنون مقدار $F(-1)$ برابر است با:

$$F(-1)=1+1+\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=4$$

۸- گزینه‌ی ۱ بهتر است عبارت $\frac{x^2}{x+1}$ را به صورت زیر ساده کنیم:

$$\frac{x^2}{x+1}=\frac{x^2-1+1}{x+1}=\frac{x^2-1}{x+1}+\frac{1}{x+1}=x-1+\frac{1}{x+1}$$

اکنون می‌توانیم انتگرال را حساب کنیم:

$$\int_0^1\frac{x^2}{x+1}dx=\int_0^1(x-1+\frac{1}{x+1})dx=\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)\Big|_0^1=\frac{1}{2}-1+\ln 2=\ln 2-\frac{1}{2}$$

۹- گزینه‌ی ۳ می‌دانیم شیب خط مماس بر تابع f در هر نقطه یعنی $f'(x)$ بنابراین $y'(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$، اکنون برای یافتن $f(x)$ از طرفین تساوی داده شده انتگرال می‌گیریم (به خاطر داریم که $\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$):

$$f'(x)=\cos^2 x-\sin^2 x\Rightarrow f'(x)=\cos 2x\xrightarrow{\text{انتگرال می‌گیریم}}f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+c$$

و چون تابع f محور yها را در نقطه‌ای به عرض $\frac{1}{2}$ قطع کرده است پس $f(0)=\frac{1}{2}$، بنابراین $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(0)+c$ در نتیجه $c=\frac{1}{2}$. اکنون داریم:

$$f(\frac{\pi}{12})=\frac{1}{2}\sin 2\times\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

۱۰- گزینه‌ی ۲ در مبحث مشتق دیده‌ایم که مشتق $\tan x$ برابر است با $1+\tan^2 x$ یا $\frac{1}{\cos^2 x}$، بنابراین انتگرال $\frac{1}{\cos^2 x}$ برابر $\tan x$ خواهد بود، پس:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos^2 x}=\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\tan\frac{\pi}{3}-\tan 0=\sqrt{3}$$

۱۱- گزینه‌ی ۲ داریم $f'(x)=g'(x)e^{g(x)}$ و همچنین $g'(x)$ برابر است با:

$$g'(x)=\frac{1}{1+\sin\sqrt{x^2}}\times 2x=\frac{2x}{1+\sin x}\Rightarrow g'(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$$

بنابراین $f'(\frac{\pi}{2})$ برابر است با:

$$f'(\frac{\pi}{2})=g'(\frac{\pi}{2})e^{g(\frac{\pi}{2})}\Rightarrow f'(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}e^0\Rightarrow f'(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$$

(دلیل این‌که $g(\frac{\pi}{2})$ برابر صفر است، این می‌باشد که $\int_a^a f(t)dt=0$)

۱۲- گزینه‌ی ۲ برای یافتن معادله‌ی خط مماس بر $g(x)=f(۲x)$ در نقطه‌ی $x=۱$ باید مقادیر $g(۱)$ و $g'(۱)$ را حساب کنیم، پس:

$$g(۱)=f(۲)=\int_{۲}^{۲}\frac{t}{t+۲}dt=۰\Rightarrow g(۱)=۰$$

$$g'(x)=۲f'(۲x)\Rightarrow g'(۱)=۲f'(۲)$$

اکنون با توجه به $f(x)=\int_{۲}^{x}\frac{t}{t+۲}dt$ مقدار $f'(۲)$ را حساب می‌کنیم:

$$f(x)=\int_{۲}^{x}\frac{t}{t+۲}dt\Rightarrow f'(x)=\frac{x}{x+۲}\times ۱\Rightarrow f'(۲)=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین نقطه‌ی تماس $A(۱,۰)$ و شیب خط مماس برابر است با ۱. در نتیجه معادله‌ی خط مماس عبارت است از:

$$y-۰=۱(x-۱)\Rightarrow y=x-۱\xrightarrow{x=۰}y=-۱$$

۱۳- گزینه‌ی ۳ مشتق $f.g$ به ازای $x=۱$ برابر است با $f'(۱)g(۱)+g'(۱)f(۱)$. اکنون باید مقادیر مورد نیاز را حساب کنیم:

$$f(x)=\int_{۱}^{x}\frac{dt}{t^۲+t}\Rightarrow\begin{cases}f(۱)=۰\\ f'(x)=\dfrac{۱}{x^۲+x}\Rightarrow f'(۱)=\dfrac{۱}{۲}\end{cases}$$

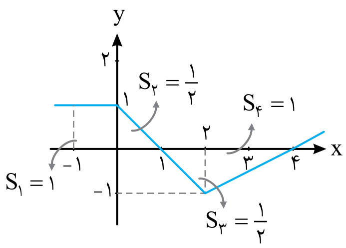
حال برای محاسبه‌ی $g(۱)$ به صورت فوق نمی‌توان عمل کرد، بنابراین مجبوریم انتگرال را محاسبه کنیم. یعنی:

$$g(۱)=\int_{۰}^{۱}\sqrt{t}\,dt=\frac{۲}{۳}t\sqrt{t}\Big|_{۰}^{۱}=\frac{۲}{۳}$$

$$g(x)=\int_{۰}^{x}\sqrt{t}\,dt\Rightarrow g'(x)=\sqrt{x}\Rightarrow g'(۱)=۱$$

بنابراین حاصل عبارت خواسته شده برابر است با $\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۳}+۱\times ۰$، پس جواب $\frac{۱}{۳}$ خواهد بود.

۱۴- گزینه‌ی ۴ با توجه به رابطه‌ی بین مساحت و انتگرال معین داریم:



$$\int_{-۱}^{۴}f(x)dx=S_۱+S_۲+(-S_۳)+(-S_۴)=۰$$

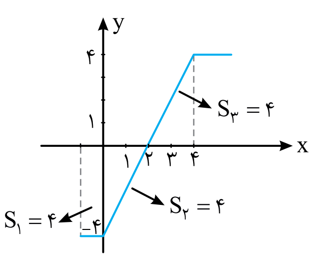
۱۵- گزینه‌ی ۴ ابتدا باید حدود $\frac{۱}{x}$ را محاسبه کنیم:

$$\frac{۱}{۲}<x<۲\Rightarrow\frac{۱}{۲}<\frac{۱}{x}<۲$$

حال برای به‌دست آوردن جزء صحیح $\frac{۱}{x}$ بازه‌ی x را تقسیم‌بندی می‌کنیم:

$$\int_{\frac{۱}{۲}}^{۲}x[\frac{۱}{x}]\,dx=\int_{\frac{۱}{۲}}^{۱}x(۱)dx+\int_{۱}^{۲}x(۰)\,dx=\frac{x^۲}{۲}\Big|_{\frac{۱}{۲}}^{۱}+۰=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۸}=\frac{۳}{۸}$$

۱۶- گزینه‌ی ۴ نمودار تابع $f(x)=|x|-|x-۴|$ را رسم کرده، با توجه به رابطه‌ی بین مساحت و انتگرال معین جواب انتگرال معین را محاسبه می‌کنیم.



$$\int_{-۱}^{۴}f(x)dx=(-S_۱)+(-S_۲)+(S_۳)=-۴-۴+۴=-۴$$

۱۷- گزینه‌ی ۱ سطح مورد نظر، سطح بین نمودار توابع $y=۸-x^۲$ و $y=۴$ می‌باشد، بنابراین ابتدا معادله‌ی $۸-x^۲=۴$ را حل کرده تا طول‌های نقاط تلاقی یعنی $x=\pm ۲$ به‌دست آید. اکنون داریم:

$$S=\left|\int_{-۲}^{۲}(۸-x^۲-۴)dx\right|=\left|(۴x-\frac{x^۳}{۳})\Big|_{-۲}^{۲}\right|=\left|(۸-\frac{۸}{۳})-(-۸+\frac{۸}{۳})\right|=\frac{۳۲}{۳}$$

۱۸- گزینه‌ی ۴ سطح مورد نظر برابر است با:

$$S=\left|\int_{\frac{۱}{۲}}^{۲}\left(\frac{۱}{x}-\frac{۵}{۲}+x\right)dx\right| \Rightarrow S=\left|\left(\ln x-\frac{۵}{۲}x+\frac{x^{۲}}{۲}\right)\Big|_{\frac{۱}{۲}}^{۲}\right|=\left|(\ln ۲-۵+۲)-\left(\ln\frac{۱}{۲}-\frac{۵}{۴}+\frac{۱}{۸}\right)\right|=\frac{۱۵}{۸}-۲\ln ۲$$

۱۹- گزینه‌ی ۴ در واقع $\int_{۱}^{۲}\frac{k}{x^{۲}}dx=۲$ را باید حل کنیم:

$$-\frac{k}{x}\Big|_{۱}^{۲}=۲ \Rightarrow k\left(-\frac{۱}{۲}+۱\right)=۲ \Rightarrow k=۴$$

۲۰- گزینه‌ی ۲ در این سؤال توجه داریم که باید معادله‌ی زیر را حل کنیم:

$$\left|\int_{-۱}^{۰}(x^{۳}+۲x)dx\right|+\int_{۰}^{k}(x^{۳}+۲x)dx=۹/۲۵$$

زیرا نمودار تابع $y=x^{۳}+۲x$ در فاصله‌ی $(-۱,k)$ محور x ها را در نقطه‌ی $x=۰$ قطع می‌کند. بنابراین:

$$\left|\left(\frac{x^{۴}}{۴}+x^{۲}\right)\Big|_{-۱}^{۰}\right|+\left(\frac{x^{۴}}{۴}+x^{۲}\right)\Big|_{۰}^{k}=۹/۲۵ \Rightarrow \frac{۵}{۴}+\frac{k^{۴}}{۴}+k^{۲}=۹/۲۵ \Rightarrow k^{۴}+۴k^{۲}-۳۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} k^{۲}=۴ \Rightarrow k=۲ \\ k^{۲}=-۸ \quad \text{غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

۱۶

آمار

پاسخ تشریحی آزمون ۸۲

۱- گزینه‌ی ۴ می‌دانیم مساحت مربع، مجذور طول ضلع است، پس:

$$a=8+E \Rightarrow S=(8+E)^2 \Rightarrow S=64+16E+E^2$$

با توجه به کوچک بودن E^2 از آن صرف‌نظر می‌کنیم بنابراین خطای محاسبه‌ی مساحت برابر $16E$ است و با توجه به این‌که خطای اندازه‌گیری a از $\frac{1}{4}$ واحد کم‌تر است، خطای اندازه‌گیری مساحت $(16E)$ از $16\times\frac{1}{4}=4$ کم‌تر است.

۲- گزینه‌ی ۳ اگر مدل‌سازی ضلع را $a=2+E$ فرض کنیم داریم:

$$v=a^3=(2+E)^3=8+12E+6E^2+E^3$$

از $6E^2+E^3$ به دلیل کوچک بودن صرف‌نظر می‌کنیم، پس خطای اندازه‌گیری حجم مکعب برابر $12E$ می‌باشد. برای آن‌که این خطا کم‌تر از یک سانتی‌متر مکعب باشد، خطای اندازه‌گیری ضلع باید کم‌تر از $\frac{1}{12}\simeq 0/08$ سانتی‌متر یا ۰/۸ میلی‌متر باشد.

۳- گزینه‌ی ۴ در طرح سؤال، نباید از پرسش هدایت‌کننده استفاده کرد. سراسری - ۹۱

۴- گزینه‌ی ۳ در سرشماری، تمام افراد جامعه مورد مطالعه قرار می‌گیرند. سراسری - ۸۹

۵- گزینه‌ی ۳ شماره‌ی مورد نظر برابر است با:

$$[150\times 0/256]+1=[38/4]+1=39$$

۶- گزینه‌ی ۱ گروه خونی افراد قابل اندازه‌گیری نیست و در آن ترتیب طبیعی وجود ندارد. سراسری - ۹۰

۷- گزینه‌ی ۱ میزان تحصیلات، قابل اندازه‌گیری نیست و در آن ترتیب طبیعی وجود دارد.

۸- گزینه‌ی ۱ قطر تنه‌ی درختان قابل اندازه‌گیری است و هر مقداری را می‌تواند اختیار کند.

۹- گزینه‌ی ۱ با نسبت دادن مرکز دسته به هر یک از داده‌های دسته، یکسان‌سازی داده‌ها تأثیر کم‌تری در روند مطالعه می‌گذارند.

۱۰- گزینه‌ی ۴ تعداد کل داده‌ها برابر ۵۵ است و دو دسته‌ی ۵۰ و ۵۱ کیلو، روی‌هم ۱۱ عضو دارند. پس درصد خواسته شده برابر است با:

$$\frac{55-11}{55}=\frac{44}{55}=\frac{4}{5}=0/8\times 100=80$$

۱۱- گزینه‌ی ۴ دامنه‌ی تغییرات داده‌ها برابر $86-65=21$ است. با توجه به این‌که داده‌ها در ۷ طبقه دسته‌بندی می‌شوند، طول هر دسته برابر $\frac{21}{7}=3$ است، بنابراین دسته‌ی پنجم به‌صورت $(65+3\times5, 65+3\times4]$ یعنی $[77, 80)$ است. مرکز این دسته عدد $77+\frac{3}{2}=78/5$ است.

۱۲- گزینه‌ی ۴ دامنه‌ی تغییرات این داده‌ها برابر $75-39=36$ است. اگر آن‌ها را در ۹ طبقه دسته‌بندی کنیم، طول هر دسته برابر $\frac{36}{9}=4$ است. و داریم:

کران بالا در دسته‌ی ششم $=39+6\times4=39+24=63$

۱۳- گزینه‌ی ۲ طول هر دسته برابر $26-23=3$ است. با توجه به این‌که داده‌ها در ۱۲ طبقه دسته‌بندی شده‌اند، دامنه‌ی تغییرات برابر $3\times12=36$ است. بنابراین داده‌ها در فاصله‌ی ۲۳ تا ۵۹ قرار دارند. اگر این داده‌ها در ۹ طبقه دسته‌بندی شوند، طول هر دسته برابر $\frac{36}{9}=4$ است و دسته‌ی پنجم به‌صورت $(23+5\times4, 23+4\times4]$ یا $[39, 43)$ است. مرکز این دسته عدد $39+\frac{4}{2}=41$ است.

۱۴- گزینه‌ی ۳ مرکز دسته‌ی $(18/5-21/5]$ عدد $\frac{18/5+21/5}{2}=20$ است. پس با توجه به جدول فراوانی تجمعی، تعداد $25-13=12$ داده در این دسته قرار دارد و داریم:

$$\frac{12}{40}=\frac{3}{10}=\%30$$

۱۵- گزینه‌ی ۳ با توجه به نمودار، طول دسته‌ها برابر $۳=۱۰/۵-۱۳/۵$ است. مرکز دسته‌ی دوم برابر ۱۶/۵ است پس حدود این دسته $[۱۶/۵-۱/۵,۱۶/۵+۱/۵)$ یا $[۱۵,۱۸)$ است.

توجه: در نمودار چندبر فراوانی دو دسته‌ی فرضی با فراوانی صفر در ابتدا و انتها در نظر می‌گیریم سپس در نمودار داده شده، دسته‌هایی با مرکز ۱۰/۵ و ۲۵/۵ فرضی هستند و جزء دسته‌ها محسوب نمی‌شوند.

۱۶- گزینه‌ی ۱ مجموع زوایای دسته‌ها روی نمودار دایره‌ای برابر ۳۶۰° است. پس داریم:

$$۲۷+۴۵+۹۹+\alpha+۵۴+۱۸=۳۶۰\Rightarrow ۲۴۳+\alpha=۳۶۰\Rightarrow \alpha=۱۱۷$$

بنابراین تعداد کارمندان با کد ۴ برابر است با:

$$\frac{۱۱۷}{۳۶۰}\times ۱۶۰=۵۲$$

۱۷- گزینه‌ی ۲ با توجه به جدول داده شده، داریم:

سطح مهارت	۱	۲	۳	۴	۵	۶
درصد فراوانی نسبی	۱۰	۱۵	۳۰	۲۵	۱۲	۸

بیش‌ترین درصد فراوانی نسبی مربوط به دسته‌ی سوم است و زاویه‌ی مربوط به آن در نمودار دایره‌ای برابر است با:

$$\frac{۳۰}{۱۰۰}\times ۳۶۰=۱۰۸^\circ$$

۱۸- گزینه‌ی ۲ تعداد کل برابر است با:

$$۱+۲/۵+۳+۴+۴/۵+۵=۲۰$$

بنابراین زاویه‌ی متناظر با استان A برابر است با:

$$\frac{۴}{۲۰}\times ۳۶۰=۴\times ۱۸=۷۲^\circ$$

۱۹- گزینه‌ی ۲ تعداد داده‌های بین ۲۱ تا ۲۴ برابر است با:

$$۵۱-۴۲=۹$$

بنابراین تعداد داده‌ها با مرکز دسته‌ی $\frac{۲۱+۲۴}{۲}=۲۲/۵$ برابر ۹ است و نقطه‌ی $(۲۲/۵,۹)$ روی نمودار چندبر فراوانی است.

۲۰- گزینه‌ی ۳ مطابق نمودار داده شده، ۲۵ داده در کل وجود دارد که ۹ تای آن‌ها در فاصله‌ی $[۳۴,۴۵)$ است، پس:

$$\frac{۹}{۲۵}=\frac{۳۶}{۱۰۰}=٪۳۶$$

پاسخ تشریحی آزمون ۸۳

۱- گزینه‌ی ۴ مدل‌سازی قطر به‌صورت $d=۱۰+E$ می‌باشد. برای محاسبه‌ی خطای مساحت دایره داریم:

$$S=\pi r^۲=\pi(\frac{d}{۲})^۲=\frac{\pi d^۲}{۴}=\frac{\pi(۱۰+E)^۲}{۴}=\frac{\pi(۱۰۰+۲۰E+E^۲)}{۴}=۲۵\pi+۵\pi E+\frac{\pi}{۴}E^۲$$

با توجه به کوچک بودن E از $\frac{\pi}{۴}E^۲$ صرف‌نظر می‌کنیم، پس خطای اندازه‌گیری مساحت $۵\pi E$ است که از $۵\pi\times\frac{۱}{۶\pi}$ یعنی $\frac{۵}{۶}$ کم‌تر است.

۲- گزینه‌ی ۴ ابزار اندازه‌گیری در تعیین طول ضلع مربع در ابتدا ابزاری با دقت سانتی‌متر بوده است. برای مدل‌سازی طول براساس میلی‌متر، احتیاج به اندازه‌گیری مجدد با ابزار مناسب است.

۳- گزینه‌ی ۲ جمع‌آوری داده‌ها باید به‌صورت تصادفی باشد. سراسری خارج از کشور – ۹۰

۴- گزینه‌ی ۴ در سرشماری تمام افراد جامعه مورد مطالعه قرار می‌گیرند.

۵- گزینه‌ی ۴ شماره‌ی نمونه‌ی مورد نظر برابر است با:

$$[۱۵۰\times ۰/۳۶۲]+۱=[۵۴/۳]+۱=۵۵$$

۶- گزینه‌ی ۳ نوع آلایندگی هوا، قابل اندازه‌گیری نبوده و دارای ترتیب نیست. سراسری خارج از کشور – ۹۱

۷- گزینه‌ی ۱ تعداد دانش‌آموزان، قابل اندازه‌گیری است و فقط می‌تواند اعداد طبیعی باشد.

۸- گزینه‌ی ۴ تعداد اتومبیل‌ها با ۳ یا ۴ سرنشین برابر $۲۲۰+۲۶۰=۴۸۰$ است و تعداد کل اتومبیل‌ها ۸۰۰ است، پس مقدار خواسته شده برابر است با:

$$\frac{۴۸۰}{۸۰۰}=۰/۶=٪۶۰$$

۹- گزینه‌ی ۲ مرکز دسته‌ی $[۵۲,۵۶)$ عدد ۵۴ است، پس ۲۲/۵ درصد داده‌ها در بازه‌ی $[۵۲,۵۶)$ با فراوانی ۳۶ قرار دارند و داریم:

$$\frac{۲۲/۵}{۱۰۰}=\frac{۳۶}{n}\Rightarrow n=\frac{۳۶۰۰}{۲۲/۵}\Rightarrow n=۱۶۰$$

۱۰- گزینه‌ی ۴ طول هر دسته برابر $۷۷-۷۴=۳$ است و داریم:

کران پایین دسته‌ی اول $=۷۴-۳\times۳=۶۵$

کران بالای دسته‌ی پانزدهم $=۷۷+۱۱\times۳=۱۱۰$

بنابراین داده‌ها در محدوده‌ی $[۶۵,۱۱۰)$ قرار دارند و دامنه‌ی تغییرات آن‌ها برابر ۴۵ اســت. اگر این داده‌ها در ۹ طبقه دســته‌بندی شــوند طول هر دسته برابر $\frac{۴۵}{۹}=۵$ است و حدود دسته‌ی آخر به‌صورت $[۱۱۰-۵,۱۱۰)$ یا $[۱۰۵,۱۱۰)$ است.

۱۱- گزینه‌ی ۳ طــول هر دســته برابر $۲۹-۲۶=۳$ اســت، پس کران پاییــن طبقه‌ی اول برابــر $۲۶-۳\times۳=۱۷$ و کران بالای طبقه‌ی هشــتم برابر $۲۹+۳\times۴=۴۱$ است. یعنی داده‌ها از ۱۷ تا ۴۱ هستند و دامنه‌ی تغییرات برابر $۴۱-۱۷=۲۴$ است. اگر این داده‌ها را در ۶ طبقه دسته‌بندی کنیم، طول هر دسته برابر $\frac{۲۴}{۶}=۴$ می‌شود و حدود طبقه‌ی پنجم به‌صورت $[۱۷+۴\times۴,۱۷+۵\times۴)$ یا $[۳۳,۳۷)$ است. مرکز این دسته عدد $۳۳+\frac{۴}{۲}=۳۵$ می‌باشد.

۱۲- گزینه‌ی ۳ طول هر دســته برابر $۲۵-۲۲=۳$ است. حدود دسته‌ی وســط (یعنی دسته‌ی پنجم) به‌صورت $[۲۲+۴\times۳,۲۵+۴\times۳)$ یا $[۳۴,۳۷)$ است. فراوانی نسبی این دسته برابر ۰/۲ است، پس $۰/۲\times۱۲۰=۲۴$ داده در این دسته قرار دارند. ضمناً $\frac{۴۵}{۱۰۰}\times۱۲۰=۵۴$ داده‌ی کم‌تر از ۳۴ داریم، یعنی تعداد $۵۴+۲۴=۷۸$ داده کم‌تر از ۳۷ موجود است.

۱۳- گزینه‌ی ۳ اگر فراوانی مطلق دسته‌ی وسط قبل از افزوده شدن داده‌های جدید را برابر f و تعداد افزایش داده‌ها را برابر x در نظر بگیریم، داریم:

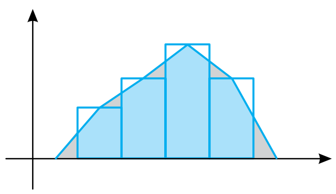
$$\frac{f}{n}=\frac{f+x}{n+۲۰}\Rightarrow\frac{f}{۸۰}=\frac{f+x}{۱۰۰}\Rightarrow ۸f+۸x=۱۰f\Rightarrow ۲f=۸x\Rightarrow\frac{x}{f}=\frac{۱}{۴}$$

۱۴- گزینه‌ی ۳ طول هر دسته در این طبقه‌بندی برابر $۲۷-۲۴=۳$ است. پس حدود دسته‌ی وسط $[۳۰-۱/۵,۳۰+۱/۵)$ یا $[۲۸/۵,۳۱/۵)$ است، این دسته طبق نمودار دارای فراوانی ۱۲ بوده که با اضافه شدن داده‌ی ۲۹، دارای فراوانی مطلقی برابر ۱۳ است، پس درصد فراوانی نسبی در این دسته برابر است با:

$$\frac{۱۳}{۵۰+۲}=\frac{۱۳}{۵۲}=\frac{۱}{۴}=٪۲۵$$

۱۵- گزینه‌ی ۳ مســاحت سطح زیر نمودار چندبر فراوانی و مســاحت نمودار مستطیلی با هم برابر است پس:

$$\frac{S}{S'}=۱$$



سراسری خارج از کشور – ۸۹

۱۶- گزینه‌ی ۲ درصد فراوانی نسبی داده‌های فاصله‌ی ۴۴ تا ۴۷ برابر $۶۷-۵۵=۱۲$ است، پس تعداد آن‌ها برابر است با:

$$\frac{۱۲}{۱۰۰}\times۷۵=۱۲\times\frac{۳}{۴}=۹$$

۱۷- گزینه‌ی ۲ مجموع درصدهای فراوانی نسبی برابر ۱۰۰ است، پس:

$$۱۷+۲۰/۵+۲۲+x+۱۸=۱۰۰\Rightarrow ۷۷/۵+x=۱۰۰\Rightarrow x=۲۲/۵$$

بنابراین درصد فراوانی نسبی دسته‌ی $[۲۵,۲۸)$ با مرکز ۲۶/۵ برابر ۲۲/۵ درصد است و زاویه‌ی مربوط به این دسته در نمودار دایره‌ای برابر است با:

$$\frac{۲۲/۵}{۱۰۰}\times۳۶۰=۸۱^\circ$$

۱۸- گزینه‌ی ۴ ۲۲۵ داده در دسته‌های ۱ تا ۵ قرار دارند، پس $۲۵۰-۲۲۵=۲۵$ داده در دسته‌ی ششم واقع است. پس داریم:

زاویه‌ی مربوط به دسته‌ی ۶ $=\frac{۲۵}{۲۵۰}\times۳۶۰=۳۶^\circ$

زاویه‌ی مربوط به دسته‌ی ۵ $=۰/۲\times۳۶۰=۷۲^\circ$

پس زاویه‌ی خواسته شده برابر $۳۶^\circ+۷۲^\circ=۱۰۸^\circ$ است.

۱۹- گزینه‌ی ۲ با توجه به جدول داده شده داریم:

سن	۰−۱۰	۱۰−۲۰	۲۰−۳۰	۳۰−۴۰	۴۰−۱۲۰
درصد فراوانی نسبی	۱۷	۱۹	۱۵	۱۹	۳۰

بنابراین زاویه‌ی مربوط به گروه سنی ۲۰ تا ۳۰ سال برابر است با:

$$\frac{۱۵}{۱۰۰}\times۳۶۰=۵۴^\circ$$

۲۰- گزینه‌ی ۱ با توجه به نمودار داده شده، تعداد کل داده‌ها برابر ۲۵ و داده‌های در فاصله‌ی $[۴۰,۴۷)$ برابر ۶ است، پس:

$$\frac{۶}{۲۵}=\frac{۲۴}{۱۰۰}=٪۲۴$$

پاسخ تشریحی آزمون ۸۴

۱- گزینه‌ی ۱ داده‌های هر دسته را مساوی مرکز دسته در نظر می‌گیریم، میانگین برابر است با:

$$\bar{x}=\frac{۳\times۱۵+۴\times۱۹+۵\times۲۳+۲\times۲۷+۱\times۳۱}{۳+۴+۵+۲+۱}=\frac{۴۵+۷۶+۱۱۵+۵۴+۳۱}{۱۵}=\frac{۳۲۱}{۱۵}=\frac{۱۰۷\times۲}{۵\times۲}=\frac{۲۱۴}{۱۰}=۲۱/۴$$

سراسری خارج - ۹۲

۲- گزینه‌ی ۲ از تمام داده‌ها ۱۲۰ واحد کم می‌کنیم، میانگین داده‌های جدید برابر است با:

$$\bar{y}=\frac{۵(-۱۰)+۸(-۴)+۱۵\times۲+۱۲\times۸+۱۰\times۱۴}{۵+۸+۱۵+۱۲+۱۰}=\frac{-۸۲+۲۶۶}{۵۰}=\frac{۱۸۴}{۵۰}=۳/۶۸$$

بنابراین میانگین داده‌های اصلی برابر است با: $\bar{x}=۱۲۰+\bar{y}=۱۲۳/۶۸$

سراسری - ۹۱

۳- گزینه‌ی ۲ عدد ۸۰ را از تمامی داده‌ها کم می‌کنیم، میانگین داده‌های حاصل عبارت است از:

$$\bar{y}=\frac{۲(-۵)+(-۴)+۲(-۳)+۰+۰+۲\times۱+۲+۴+۷+۱۱+۱۲+۳\times۱۳+۱۴+۱۹}{۱۸}=\frac{-۲۰+۱۱۰}{۱۸}=\frac{۹۰}{۱۸}=۵$$

بنابراین میانگین داده‌های اصلی برابر است با: $\bar{x}=۸۰+\bar{y}=۸۵$

۴- گزینه‌ی ۱ فراوانی تجمعی دسته‌ی آخر برابر ۸۰ است، پس تعدادکل داده‌ها ۸۰ تا است. فراوانی مطلق دسته‌ها به‌صورت زیر است:

مرکز دسته	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
فراوانی مطلق	۸	۱۶	۲۰	۲۴	۱۲

از تمامی داده‌ها ۹ واحد کم می‌کنیم. میانگین داده‌های جدید برابر است با:

$$\bar{y}=\frac{۸(-۲)+۱۶(-۱)+۲۰\times(۰)+۲۴\times۱+۱۲\times۲}{۸۰}=\frac{-۳۲+۴۸}{۸۰}=\frac{۱۶}{۸۰}=۰/۲$$

بنابراین میانگین داده‌های اصلی برابر است با: $\bar{x}=۹+\bar{y}=۹/۲$

سراسری - ۹۲

۵- گزینه‌ی ۲ برای محاسبه‌ی میانگین صحیح باید به مجموع داده‌ها به مقدار $۱۸۰=۱۰۲۴-۱۲۰۴$ واحد کم کنیم. یعنی:

$$\bar{x}=\frac{۴۵\times۱۱۲۴-۱۸۰}{۴۵}=۱۱۲۴-\frac{۱۸۰}{۴۵}=۱۱۲۴-۴=۱۱۲۰$$

۶- گزینه‌ی ۴ داده‌های هر دسته را مساوی مرکز دسته در نظر می‌گیریم و از تمامی داده‌ها ۱۸ واحد کم می‌کنیم. میانگین داده‌های جدید باید برابر ۰/۴ باشد، پس:

$$۰/۴=\frac{۳\times(-۷)+۴(-۳)+۷\times۱+x\times۵+۱\times۹}{۳+۴+۷+x+۱}\Rightarrow ۰/۴=\frac{-۳۳+۱۶+۵x}{۱۵+x}\Rightarrow ۶+۰/۴x=-۱۷+۵x\Rightarrow ۲۳=۴/۶x\Rightarrow x=۵$$

بنابراین فراوانی مطلق بازه‌ی $[۲۱,۲۵)$ برابر ۵ است و زاویه‌ی مربوط به آن در نمودار دایره‌ای برابر است با:

$$\frac{۵}{۱۵+۵}\times۳۶۰=\frac{۵}{۲۰}\times۳۶۰=\frac{۱}{۴}\times۳۶۰=۹۰^\circ$$

سراسری - ۹۰

۷- گزینه‌ی ۲ ابتدا میانگین داده‌ها را به روش سریع محاسبه می‌کنیم. از تمامی داده‌ها ۱۰۰ واحد کم می‌کنیم، میانگین این داده‌ها برابر است با:

$$\bar{y}=\frac{-۲۰-۱۹-۱۵-۸-۶-۴-۳+۰+۰+۳+۴+۸}{۱۲}=\frac{-۷۵+۱۵}{۱۲}=-۵$$

پس میانگین داده‌های اصلی برابر $\bar{x}=۱۰۰-۵=۹۵$ است. اگر تمامی داده‌ها ۳ برابر شوند و از آن‌ها ۴۰ واحد کم شود، میانگین نیز همین‌طور خواهد شد، یعنی:

$$\bar{x}'=۳\bar{x}-۴۰=۳\times۹۵-۴۰=۲۸۵-۴۰=۲۴۵$$

۸- گزینه‌ی ۲ اگر به تمامی داده‌ها ۱/۵ واحد اضافه شود، به میانگین نیز ۱/۵ واحد اضافه می‌شود. پس میانگین داده‌ها برابر ۸/۵ است. پس داریم:

$$۸/۵=\frac{۴\times۳+۵\times۷+a\times۱۱+۳\times۱۵}{۴+۵+a+۳}\Rightarrow ۸/۵=\frac{۱۲+۳۵+۱۱a+۴۵}{۱۲+a}\Rightarrow ۱۰۲+۸/۵a=۹۲+۱۱a\Rightarrow ۲/۵a=۱۰\Rightarrow a=۴$$

بنابراین فراوانی دسته‌ی سوم برابر ۴ است.

سراسری - ۸۹

۹- گزینه‌ی ۱ فراوانی مطلق دسته‌ی اول قبل از اضافه شدن داده‌ها برابر است با:

$$f_1=۰/۱۱۲۵\times۸۰=۹$$

۱۰ داده‌ی اضافه شده بزرگ‌تر از میانه هستند، پس به بعد از دسته‌ی وسط اضافه می‌شوند و در دسته‌ی اول قرار نمی‌گیرند، فراوانی نسبی جدید دسته‌ی اول برابر است با:

$$f'_1=\frac{۹}{۸۰+۱۰}=\frac{۹}{۹۰}=۰/۱$$

۱۰- گزینه‌ی ۳ می‌دانیم در نمودار جعبه‌ای داده‌های بین چارک اول و سوم داخل جعبه و داده‌های دیگر بیرون جعبه هستند، از آن‌جا که در کل ۳۶ داده وجود دارد، ۹ داده کوچک‌تر از چارک اول با میانگین ۲۲ و ۹ داده بزرگ‌تر از چارک سوم با میانگین ۳۰ داریم. اگر میانگین ۱۸ داده‌ی داخل جعبه برابر a باشد، با توجه به این‌که میانگین کل داده‌ها برابر ۲۷/۵ است، داریم:

$$\frac{9\times22+9\times30+18\times a}{36}=27/5\Rightarrow18(a+26)=36\times27/5\Rightarrow a+26=55\Rightarrow a=29$$

۱۱- گزینه‌ی ۳ ابتدا میانگین داده‌ها را به روش سریع پیدا می‌کنیم:

$$\bar{x}=18+\frac{4(-6)+3(-3)+9\times0+7\times3+2\times6}{4+3+9+7+2}=18+\frac{0}{25}=18$$

با استفاده از دستور محاسبه‌ی واریانس داریم:

$$\sigma^2=\frac{4(-6)^2+3(-3)^2+9\times0^2+7\times3^2+2\times6^2}{25}=\frac{144+27+63+72}{25}=\frac{306}{25}\times\frac{4}{4}=\frac{1224}{100}=12/24$$

سراسری خارج از کشور – ۹۰

۱۲- گزینه‌ی ۳ فقط داده‌ی ۱۳، بیش از یک بار تکرار شده، پس مد ۱۳ می‌باشد، میانگین بقیه‌ی داده‌ها برابر است با:

$$\bar{x}=\frac{14+19+12+17+18}{5}=16$$

با استفاده از فرمول محاسبه‌ی انحراف معیار داریم:

$$\sigma=\sqrt{\frac{(14-16)^2+(19-16)^2+(12-16)^2+(17-16)^2+(18-16)^2}{5}}=\sqrt{\frac{4+9+16+1+4}{5}}=\sqrt{\frac{34}{5}}=\sqrt{6/8}\simeq2/6$$

۱۳- گزینه‌ی ۳ از تمامی داده‌ها ۱۶ واحد کم می‌کنیم. مجموع اعداد به‌دست آمده باید برابر صفر باشد:

$$5\times(-4)+7(-2)+10\times0+a(2)+3\times4=0\Rightarrow-20-14+2a+12=0\Rightarrow2a=22\Rightarrow a=11$$

بنابراین واریانس داده‌ها برابر است با:

$$\sigma^2=\frac{5(-4)^2+7(-2)^2+10\times0^2+11\times(2)^2+3\times(4)^2}{5+7+10+11+3}=\frac{80+28+44+48}{36}=\frac{200}{36}=\frac{25}{9}\simeq5/55$$

۱۴- گزینه‌ی ۴ اگر واریانس داده‌های آماری برابر صفر باشد، تمامی داده‌ها مساوی هستند. از جایی‌که میانگین، با اضافه شدن ۲۴ ، ۱۶ و ۲۶ تغییر نمی‌کند، پس میانگین داده‌های قبلی برابر میانگین این ۳ داده است.

$$\bar{x}=\frac{26+16+24}{3}=\frac{66}{3}=22$$

پس تمامی ۱۱ داده برابر ۲۲ بوده‌اند. انحراف معیار ۱۴ داده برابر است با:

$$\sigma=\sqrt{\frac{11\times0^2+(24-22)^2+(26-22)^2+(16-22)^2}{14}}=\sqrt{\frac{4+16+36}{14}}=\sqrt{\frac{56}{14}}=\sqrt{4}=2$$

۱۵- گزینه‌ی ۴ میانگین نمرات مهارت کاری هر دو فرد برابر ۲۵ است. واریانس نمرات دو نفر را پیدا می‌کنیم:

$$\sigma_A=\frac{(22-25)^2+(23-25)^2+(24-25)^2+(27-25)^2+(29-25)^2}{5}=\frac{9+4+1+4+16}{5}=\frac{34}{5}=6/8$$

$$\sigma_B=\frac{(21-25)^2+(24-25)^2+(25-25)^2+(27-25)^2+(28-25)^2}{5}=\frac{16+1+0+4+9}{5}=\frac{30}{5}=6$$

واریانس نمرات مهارت فرد B کم‌تر است، پس دقت عمل وی بیش‌تر است.

۱۶- گزینه‌ی ۴ داده‌ها را به‌صورت صعودی مرتب می‌کنیم:

$$7,9,10,11,12,12,13,16,17,17,18,20,21$$

میانه‌ی این ۱۳ داده ۱۳ می‌باشد. چارک اول وسط ۱۰ و ۱۱ و چارک دوم وسط ۱۸ و ۱۷ است. پس داده‌های $11,12,12,13,16,17,17$ داخل جعبه قرار دارند. میانگین این ۷ داده برابر ۱۴ است و واریانس آن‌ها برابر است با:

$$\sigma^2=\frac{(11-14)^2+(12-14)^2+(12-14)^2+(13-14)^2+(16-14)^2+(17-14)^2+(17-14)^2}{7}=\frac{9+4+4+1+4+9+9}{7}=\frac{40}{7}\simeq5/71$$

۱۷- گزینه‌ی ۲ میانگین داده‌ها برابر است با:

$$\bar{x}=10+\frac{3(-2)+2(-1)+12\times0+6\times1+1\times2}{3+2+12+6+1}=10+\frac{0}{24}=10$$

واریانس این داده‌ها نیز برابر است با:

$$\sigma^2=\frac{3(-2)^2+2(-1)^2+12\times0^2+6\times1^2+1\times2^2}{24}=\frac{24}{24}=1$$

پس ضریب تغییرات برابر است با:

$$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{\sqrt{1}}{10}=0/1$$

سراسری خارج از کشور – ۸۹

۱۸- گزینه‌ی ۳ میانگین داده‌ها برابر است با:

$$\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{۷۲}{۱۲}=۶$$

واریانس این داده‌ها برابر است با:

$$\sigma^۲=\frac{\sum x_i^۲}{n}-\bar{x}^۲=\frac{۴۸۰}{۱۲}-۶^۲=۴۰-۳۶=۴$$

بنابراین برای ضریب تغییرات داریم:

$$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{\sqrt{۴}}{۶}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

۱۹- گزینه‌ی ۴ اگر طول اضلاع را x_i بنامیم، میانگین محیط مربع‌ها ۴ برابر میانگین طول اضلاع است، پس:

$$\bar{x}=\frac{۸۴}{۴}=۲۱$$

با توجه به این‌که میانگین مساحت مربع‌ها برابر $\frac{\sum x_i^۲}{n}$ است، برای واریانس داریم:

$$\sigma^۲=\frac{\sum x_i^۲}{n}-\bar{x}^۲=۴۹۰-۲۱^۲=۴۹۰-۴۴۱=۴۹$$

پس ضریب تغییرات طول اضلاع برابر است با:

$$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{\sqrt{۴۹}}{۲۱}=\frac{۷}{۲۱}=\frac{۱}{۳}\simeq ۰/۳۳$$

سراسری خارج از کشور - ۹۲

۲۰- گزینه‌ی ۳ اگر هر داده‌ی جدید را x' و داده‌های قدیم را x بنامیم داریم: $x'=۲x+۳$ پس داریم:

$$\frac{CV'}{CV}=\frac{\frac{\sigma'}{\bar{x}'}}{\frac{\sigma}{\bar{x}}}=\frac{\frac{۲\sigma}{۲\bar{x}+۳}}{\frac{\sigma}{\bar{x}}}=\frac{۲\sigma\times\bar{x}}{\sigma\times(۲\bar{x}+۳)}=\frac{۲\times۱۲}{(۲\times۱۲+۳)}=\frac{۲۴}{۲۷}=\frac{۸}{۹}$$

سراسری - ۹۲

پاسخ تشریحی آزمون ۸۵

۱- گزینه‌ی ۲ مرکز دسته‌ها به ترتیب برابر است با: $۱۰,۱۲,۱۴,۱۶,۱۸$

اگر ۱۴ واحد از تمامی داده‌ها کم کنیم، میانگین داده‌های جدید برابر است با:

$$\bar{y}=\frac{۸(-۴)+۱۱(-۲)+۱۶(۰)+۱۴\times۲+۱۱\times۴}{۸+۱۱+۱۶+۱۴+۱۱}=\frac{-۵۴+۷۲}{۶۰}=\frac{۱۸}{۶۰}=۰/۳$$

بنابراین میانگین داده‌های اصلی برابر است با:

$$\bar{x}=۱۴+\bar{y}=۱۴/۳$$

۲- گزینه‌ی ۱ از تمامی مرکز دسته‌ها ۲۰ واحد کم می‌کنیم، فراوانی مطلق دسته‌های جدید برابر است با:

مرکز دسته‌ی جدید	-۸	-۴	۰	۴	۸
فراوانی مطلق	۸	۱۲	۷	۸	۵

میانگین این داده‌ها برابر است با:

$$\bar{y}=\frac{۸(-۸)+۱۲(-۴)+۷\times۰+۸\times۴+۵\times۸}{۴۰}=\frac{-۱۱۲+۷۲}{۴۰}=-۱$$

پس میانگین داده‌های اصلی برابر است با:

$$\bar{x}=۲۰+\bar{y}=۲۰-۱=۱۹$$

۳- گزینه‌ی ۴ مجموع درصد فراوانی نسبی تمامی دسته‌ها برابر ۱۰۰ است، پس:

$$۱۵+۳۰+۲۵+\alpha=۱۰۰\Rightarrow\alpha=۳۰$$

میانگین داده‌ها را می‌توان به روش زیر محاسبه کرد:

$$۱۲\times(۰/۱۵)+۱۵\times(۰/۳)+۱۸\times(۰/۲۵)+۲۱\times(۰/۳)=۱/۸+۴/۵+۴/۵+۶/۳=۱۷/۱$$

سراسری خارج از کشور - ۹۱

۴- گزینه‌ی ۳ اگر درصد نمره‌ی ادبیات داوطلب را x بنامیم، برای آن‌که میانگین داوطلب بزرگ‌تر یا مساوی ۷۵ باشد، داریم:

$$\frac{۴\times x+۲\times۹۰+۳\times۸۱+۸\times۷۰}{۴+۲+۳+۸}\geq۷۵\Rightarrow۴x+۹۸۳\geq۱۷\times۷۵\Rightarrow۴x\geq۲۹۲\Rightarrow x\geq۷۳$$

پس حداقل درصد ادبیات مورد قبول برابر ۷۳ است.

۵- گزینه‌ی ۱ از کلیه‌ی داده‌ها ۱۲ واحد کم کرده و بر ۲ تقسیم می‌کنیم:

$$a=\frac{x-12}{2}$$

a	-۲	-۱	۰	۱	۲
f	۲	۵	۵	۹	۳

میانگین داده‌های جدید همان $\bar{a}$ خواسته شده است.

$$\bar{a}=\frac{2(-2)+5(-1)+5(0)+9\times1+3\times2}{24}=\frac{-9+15}{24}=\frac{1}{4}=0/25$$

۶- گزینه‌ی ۱ از تمامی داده‌ها ۶۰ واحد کم می‌کنیم تا با اعداد کوچک‌تری میانگین را محاسبه کنیم:

$$\bar{y}=\frac{-2-2-1+0+1+4+5+11+12+12+15+17}{12}=\frac{72}{12}=6$$

بنابراین میانگین داده‌های اصلی برابر است با:

$$\bar{x}=60+\bar{y}=66$$

اگر به تمام داده‌ها ۴ واحد اضافه کرده و سپس بر ۵ تقسیم کنیم میانگین نیز چنین خواهد شد:

$$\bar{a}=\frac{\bar{x}+4}{5}=\frac{66+4}{5}=\frac{70}{5}=14$$

۷- گزینه‌ی ۳ میانگین داده‌ها برابر ۱۳/۱ است، پس:

$$13/1=\frac{16+9+17+13+10+a+10+17+11+16}{10}\Rightarrow131=119+a\Rightarrow a=12$$

حال اگر داده‌ها را به ترتیب صعودی منظم کنیم داریم:

۹ ,۱۰ ,۱۰ ,۱۱ ,۱۲, ۱۳, ۱۶, ۱۶, ۱۷, ۱۷

بنابراین میانه وسط دو عدد ۱۲ و ۱۳ یعنی ۱۲/۵ است.

۸- گزینه‌ی ۲ **راه حل اول**: مد، داده‌ی با بیش‌ترین تکرار است. از آن‌جایی که تمامی داده‌ها به‌جز x یک بار تکرار شده‌اند، پس احتمالاً x مد است، پس میانگین نیز هست و داریم:

$$\frac{90+100+85+80+75+110+x}{7}=x\Rightarrow7x=540+x\Rightarrow6x=540\Rightarrow x=90$$

راه حل دوم: داده‌ها را (به‌جز x) به‌صورت صعودی مرتب می‌کنیم:

۷۵, ۸۰, ۸۵, ۹۰, ۱۰۰, ۱۱۰

با امتحان کردن گزینه‌ها، فقط $x=90$ می‌تواند هم‌زمان مد و میانه باشد.

۹- گزینه‌ی ۳ از ۲۴ داده‌ای که داریم، ۶ داده‌ی کوچک‌تر و ۶ داده‌ی بزرگ‌تر را حذف می‌کنیم، بقیه‌ی داده‌ها که بین چارک اول و سوم هستند، داخل جعبه قرار دارند، این داده‌ها عبارت هستند از:

۴۷, ۵۰ , ۵۰ , ۵۱ , ۵۱ , ۵۳, ۵۴, ۵۶, ۵۹, ۶۱ , ۶۲, ۶۳

میانگین این داده‌ها با کم کردن ۵۵ واحد از هر کدام برابر است با:

$$\bar{y}=\frac{-8-5-5-4-4-2-1+1+4+6+7+8}{12}=\frac{-3}{12}=\frac{-1}{4}=-0/25$$

پس میانگین خواسته شده برابر است با:

$$\bar{x}=55+\bar{y}=55-0/25=54/75$$

۱۰- گزینه‌ی ۳ از ۳۱ داده، ۱۵ داده کم‌تر از میانه و ۱۵ داده بزرگ‌تر از میانه است. از ۱۵ داده‌ی کم‌تر از میانه، ۷ تا کم‌تر از چارک اول و از ۱۵ داده‌ی بزرگ‌تر از میانه، ۷ تا بزرگ‌تر از چارک سوم هستند، ۱۷ داده‌ی باقی‌مانده داخل و روی جعبه هستند، پس میانگین کل داده‌ها برابر است با:

$$\bar{x}=\frac{7\times12+17\times15+7\times21}{31}=\frac{486}{31}\simeq15/67$$

۱۱- گزینه‌ی ۱ میانگین داده‌ها برابر است با:

$$\bar{x}=10+\frac{3(-4)+2(-2)+a\times0+6(2)+1\times4}{3+2+a+6+1}=10+\frac{0}{12+a}=10$$

با توجه به این‌که واریانس برابر ۶ است، داریم:

$$6=\frac{3(-4)^2+2(-2)^2+a\times0^2+6\times2^2+1\times4^2}{12+a}\Rightarrow72+6a=48+8+24+16\Rightarrow6a=24\Rightarrow a=4$$

۱۲- گزینه‌ی ۲ میانگین هر دو گروه یکسان و برابر میانگین ۲۵ داده است، پس داریم:

$$\begin{cases}12=\dfrac{\sum x_i^2}{15}-\bar{x}^2\Rightarrow\sum x_i^2=15(12+\bar{x}^2)\\ 7/6=\dfrac{\sum y_i^2}{10}-\bar{x}^2\Rightarrow\sum y_i^2=10(7/6+\bar{x}^2)\end{cases}\Rightarrow\sigma^2=\frac{\sum(x_i^2+y_i^2)}{25}-\bar{x}^2=\frac{15(12+\bar{x}^2)+10(7/6+\bar{x}^2)}{25}-\bar{x}^2$$

$$=\frac{180+76+25\bar{x}^2}{25}-\bar{x}^2=\frac{256}{25}+\bar{x}^2-\bar{x}^2=\frac{256}{25}\Rightarrow\sigma=\sqrt{\frac{256}{25}}=\frac{16}{5}=3/2$$

۱۳- گزینه‌ی ۱ میانگین داده‌های پایین‌تر از چارک اول و میانگین داده‌های بزرگ‌تر از چارک سوم برابر است، پس همه‌ی داده‌ها مساوی هستند و انحراف معیار داده‌ها مساوی صفر است.

۱۴- گزینه‌ی ۳ میانه‌ی این ۱۵ داده، داده‌ی هشتم یعنی ۳۴ است. داده‌ی ۴۵ دو بار تکرار شده (بیش از هر داده‌ی دیگری تکرار شده) پس مد است. داده‌های بین میانه و مد ۴ داده‌ی ۴۴ , ۳۹ , ۳۷ و ۳۶ هستند و داریم:

$$\bar{x}=۳۰+\frac{۶+۷+۹+۱۴}{۴}=۳۰+\frac{۳۶}{۴}=۳۹$$

$$\sigma^۲=\frac{(۳۶-۳۹)^۲+(۳۷-۳۹)^۲+(۳۹-۳۹)^۲+(۴۴-۳۹)^۲}{۴}=\frac{۹+۴+۰+۲۵}{۴}=\frac{۳۸}{۴}=۹/۵$$

۱۵- گزینه‌ی ۳ اگر طول اضلاع را x بنامیم داریم:

$$\sigma^۲=\frac{\sum x_i^۲}{n}-\bar{x}^۲\Rightarrow ۵=\frac{\sum x_i^۲}{n}-۱۴۴\Rightarrow\frac{\sum x_i^۲}{n}=۱۴۹$$

از آن‌جا که $\frac{\sum x_i^۲}{n}$ برابر میانگین مساحت مربع‌ها است، جواب سؤال برابر ۱۴۹ است.

۱۶- گزینه‌ی ۳ میانه‌ی این ۱۲ داده بین داده‌ی ششم و هفتم است. پس ۳ داده‌ی اول کوچک‌تر از چارک اول و ۳ داده‌ی آخر بزرگ‌تر از چارک سوم هستند، با حذف آن‌ها ۶ داده‌ی ۱۱ ,۹ ,۸ ,۸ ,۶ ,۶ باقی می‌مانند و داریم:

$$\begin{cases}\bar{x}=\frac{۲\times۶+۲\times۸+۹+۱۱}{۶}=\frac{۴۸}{۶}=۸\\ \sigma^۲=\frac{۲^۲+۲^۲+۰^۲+۰^۲+۱^۲+۳^۲}{۶}=\frac{۱۸}{۶}=۳\end{cases}\Rightarrow CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{\sqrt{۳}}{۸}\simeq۰/۲۱$$

۱۷- گزینه‌ی ۲ همواره مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین برابر صفر است، پس میانگین برابر ۱۲ است و داریم:

$$\sigma^۲=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^۲}{n}=\frac{۴۵۰}{۵۰}=۹\Rightarrow CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{\sqrt{۹}}{۱۲}=\frac{۳}{۱۲}=۰/۲۵$$

۱۸- گزینه‌ی ۳ میانگین این داده‌ها برابر $\frac{۴۸}{۸}=۶$ است و داریم:

$$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}\Rightarrow\sigma=۶\times۰/۵\Rightarrow\sigma=۳\Rightarrow\sigma^۲=۹\Rightarrow\frac{\sum x_i^۲}{۸}-۶^۲=۹\Rightarrow\frac{\sum x_i^۲}{۸}=۴۵\Rightarrow\sum x_i^۲=۳۶۰$$

۱۹- گزینه‌ی ۴ اگر داده‌های جدید را x' و داده‌های قدیم را x بنامیم داریم:

$$x'=۲x+\frac{۱}{۴}\bar{x}\Rightarrow\bar{x}'=۲\bar{x}+\frac{۱}{۴}\bar{x}\Rightarrow\bar{x}'=\frac{۹}{۴}\bar{x}$$

$$\frac{CV'}{CV}=\frac{\frac{\sigma'}{\bar{x}'}}{\frac{\sigma}{\bar{x}}}=\frac{\frac{۲\sigma}{\frac{۹}{۴}\bar{x}}}{\frac{\sigma}{\bar{x}}}=\frac{۲}{\frac{۹}{۴}}=\frac{۸}{۹}\Rightarrow CV'=\frac{۸}{۹}\times۱/۳۵=\frac{۱۰/۸}{۹}=۱/۲$$

۲۰- گزینه‌ی ۳ داده‌های قدیم را x و داده‌های جدید را x' می‌نامیم. $(x'=۵+x)$

$$\begin{cases}CV=۰/۰۸\Rightarrow\frac{\sigma}{\bar{x}}=۰/۰۸\Rightarrow\sigma=۰/۰۸\bar{x}\\ CV'=۰/۰۷۵=\frac{\sigma'}{\bar{x}'}=۰/۰۷۵\Rightarrow\frac{\sigma}{۵+\bar{x}}=۰/۰۷۵\Rightarrow\sigma=(۵+\bar{x})۰/۰۷۵\end{cases}\Rightarrow۰/۰۸\bar{x}=۰/۰۷۵\bar{x}+۰/۳۷۵\Rightarrow۰/۰۰۵\bar{x}=۰/۳۷۵\Rightarrow\bar{x}=۷۵$$

پاسخ تشریحی آزمون ۸۶

۱- گزینه‌ی ۳ با توجه به رابطه‌ی حجم کره بر حسب شعاع داریم:

$$V=\frac{۴}{۳}\pi R^۳=\frac{۴}{۳}\pi(۲+E)^۳=\frac{۴}{۳}\pi(۸+۱۲E+۶E^۲E^۳)$$

با توجه به کوچک بودن E می‌توان از $۶E^۲$ و $E^۳$ صرف‌نظر کرد، پس:

$$V\simeq\frac{۴}{۳}\pi(۸+۱۲E)=\frac{۳۲\pi}{۳}+۱۶\pi E$$

بنابراین خطای اندازه‌گیری حجم $۱۶\pi E$ می‌باشد.

۲- گزینه‌ی ۳ کران پایین دســته‌ی اول همان کوچک‌ترین داده (۱۷/۲) و کران بالای دســته‌ی اول برابر کران پایین دســته‌ی دوم (۱۷/۸) اســت. بنابراین طول دسته‌ی اول برابر ۱۷/۲−۱۷/۸ است، پس طول هر دسته برابر ۰/۶ است.

با توجه به این‌که بزرگ‌ترین داده برابر ۲۲/۶ است، پس دسته‌ی آخر به‌صورت [۲۲,۲۲/۶] می‌باشد که مرکز آن ۲۲/۳ است.

۳- گزینه‌ی ۲ زاویه‌ی هر حالت در نمودار دایره‌ای از فرمول $\theta=\frac{f_i}{n}\times ۳۶۰^\circ$ به‌دست می‌آید، پس:

$$۲۷=\frac{f_i}{n}\times ۳۶۰^\circ \Rightarrow \frac{f_i}{n}=\frac{۲۷^\circ}{۳۶۰^\circ}=\frac{۳}{۴۰}=\frac{۳\times ۲۵}{۱۰۰۰}=۰/۰۷۵$$

بنابراین درصد فراوانی نسبی برابر ۷/۵ است.

۴- گزینه‌ی ۲ دامنه‌ی تغییرات داده‌ها برابر ۲۱=۳۱−۵۲ و تعداد دســته‌ها برابر ۷ اســت، پس طول هر دســته برابر $\frac{۲۱}{۷}=۳$ می‌باشـد و دســته‌ها به‌صورت زیر هستند:

$$[۳۱,۳۴)-[۳۴,۳۷)-[۳۷,۴۰)-[۴۰,۴۳)-[۴۳,۴۶)-[۴۶,۴۹)-[۴۹,۵۲]$$

با توجه به صورت سؤال فراوانی نسبی دسته‌ی وسط [۴۰,۴۳) برابر است با:

$$\frac{f_i}{n}=۱-(۰/۳۷+۰/۴۸)=۱-۰/۸۵=۰/۱۵\Rightarrow \frac{f_i}{۸۰}=۰/۱۵\Rightarrow f_i=۰/۱۵\times ۸۰=۱۲$$

۵- گزینه‌ی ۴ فرض کنیم فراوانی مطلق دسته‌ی وسط برابر x بوده و n داده از ۲۰ داده‌ی اضافه شده به دسته‌ی وسط اضافه شود. فراوانی نسبی دسته‌ی وسط ۲ برابر می‌شود، پس:

$$\frac{x+n}{۷۰}=\frac{x}{۵۰}\times ۲\Rightarrow ۵۰x+۵۰n=۱۴۰x\Rightarrow ۹۰x=۵۰n\Rightarrow \frac{n}{x}=\frac{۹}{۵}$$

با توجه به رابطه‌ی به‌دست آمده، نسبت فراوانی مطلق دسته‌ی وسط در حالت جدید، نسبت به حالت ابتدایی برابر است با:

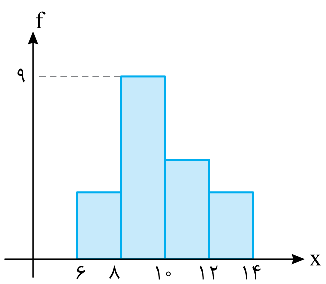
$$\frac{x+n}{x}=۱+\frac{n}{x}=۱+\frac{۹}{۵}=\frac{۱۴}{۵}=۲/۸$$

۶- گزینه‌ی ۴ مرکز دسته‌ی [۱۳/۵,۱۶/۵) برابر ۱۵ است و فراوانی این دسته برابر ۹=۱۶−۲۵ می‌باشد. با توجه به این‌که تعداد کل داده‌ها برابر فراوانی تجمعی دسته‌ی آخر یعنی ۳۶ می‌باشد، زاویه‌ی مربوط به دسته‌ی [۱۳/۵,۱۶/۵) در نمودار دایره‌ای برابر است با:

$$\frac{۹}{۳۶}\times ۳۶۰=۹۰^\circ$$

۷- گزینه‌ی ۴ مســاحت زیر نمودار چندبر فراوانی با مساحت زیر نمودار مستطیلی برابر است. با توجه به این‌که مساحت زیر نمودار مستطیلی برابر حاصل‌ضرب مجموع فراوانی دسته‌ها در طول دسته‌ها است، پس فراوانی کل برابر است با $\frac{۵۰}{۲}=۲۵$، بنابراین بیش‌ترین درصد فراوانی نسبی برابر است با:

$$\frac{۹}{۲۵}\times ۱۰۰=۳۶$$



۸- گزینه‌ی ۲ از تمامی داده‌ها ۹۰ واحد کم می‌کنیم، میانگین داده‌های جدید برابر است با:

$$\bar{y}=\frac{-۵-۵-۳-۲-۲+۴+۴+۴+۷+۷+۱۰+۱۰+۱۰}{۱۳}=\frac{-۱۷+۵۶}{۱۳}=\frac{۳۹}{۱۳}=۳$$

بنابراین میانگین نمرات اصلی برابر است با:

$$\bar{x}=۹۰+\bar{y}=۹۳$$

۹- گزینه‌ی ۳ مد (داده با بیش‌ترین تکرار) عدد ۳۲ و میانه‌ی این ۲۵ داده، داده‌ی سیزدهم (۲۴) است. داده‌های بین این دو مقدار عبارت‌اند از:

۲۴, ۲۸, ۲۹, ۳۰, ۳۱

میانگین این داده‌ها به روش سریع برابر است با:

$$\bar{x}=۳۰+\frac{(-۶)+(-۲)+(-۱)+۰+۱}{۵}=۳۰+\frac{-۸}{۵}=۳۰-۱/۶=۲۸/۴$$

۱۰- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول**: مد، داده‌ی با بیش‌ترین تکرار اســت. تمامی داده‌ها یک بار تکرار شــده‌اند، پس احتمالاً x برابر یکی از داده‌های دیگر بوده و مد است (داده‌ای با ۲ بار تکرار)، بنابراین x میانگین نیز هست، پس:

$$\frac{۶۳+۷۰+۶۶+۵۰+۷۷+۶۵+۶۴+x}{۸}=x\Rightarrow ۴۵۵+x=۸x\Rightarrow ۷x=۴۵۵\Rightarrow x=۶۵$$

راه‌حل دوم: به جز x بقیه‌ی داده‌ها را به‌صورت صعودی مرتب می‌کنیم:

۵۰, ۶۳, ۶۴, ۶۵, ۶۶, ۷۰, ۷۷

میانه‌ی این هفت داده ۶۵ است، با امتحان کردن گزینه‌ها به این نتیجه می‌رسیم که x هم باید ۶۵ باشد تا میانه ، مد و میانگین برابر شوند.

۱۱- گزینه‌ی ۴ مجموع فراوانی نسبی دسته‌ها برابر یک است، پس:

$$۰/۱+۰/۲۵+۰/۲+\alpha=۱\Rightarrow \alpha=۰/۴۵$$

حال به محاسبه‌ی میانگین و واریانس می‌پردازیم:

$$\bar{x}=۰/۱\times۸+۰/۲۵\times۱۲+۰/۲\times۱۶+۰/۴۵\times۲۰=۰/۸+۳+۳/۲+۹=۱۶$$

$$\Rightarrow \sigma^۲=۰/۱\times(-۸)^۲+۰/۲۵\times(-۴)^۲+۰/۲\times۰^۲+۰/۴۵\times(۴)^۲=۶/۴+۴+۰+۷/۲=۱۷/۶$$

۱۲- گزینه‌ی ۳ با توجه به فرمول محاسبه‌ی میانگین و انحراف معیار داریم:

$$\frac{\sum x_i}{۴}=۶\Rightarrow \sum x_i=۲۴ \quad , \quad \frac{\sum (x_i-۶)^۲}{۴}=۴$$

$$\text{جمع داده‌های جدید}=۲۴+۵+۷=۳۶\Rightarrow \bar{y}=\frac{۳۶}{۶}=۶$$

$$\sigma^۲=\frac{\sum (y_i-۶)^۲}{۶}=\frac{\sum (x_i-۶)^۲+(۷-۶)^۲+(۵-۶)^۲}{۶}=\frac{\sum (x_i-۶)^۲}{۶}+\frac{۲}{۶}=\frac{۱۶}{۶}+\frac{۲}{۶}=۳\Rightarrow \delta=\sqrt{۳}$$

۱۳- گزینه‌ی ۳ داده‌ها را به‌صورت صعودی مرتب می‌کنیم:

$$۵,۶,۷,۷,۸,۱۰,۱۱,۱۳,۱۳$$

میانه (داده‌ی وسط) برابر ۸ است. داده‌های کم‌تر از میانه را حذف می‌کنیم. میانگین سایر داده‌ها برابر است با:

$$\bar{x}=\frac{۸+۱۰+۱۱+۱۳+۱۳}{۵}=\frac{۵۵}{۵}=۱۱$$

بنابراین واریانس این داده‌ها برابر است با:

$$\sigma^۲=\frac{(-۳)^۲+(-۱)^۲+(۰)^۲+۲^۲+۲^۲}{۵}=\frac{۱۸}{۵}=۳/۶$$

۱۴- گزینه‌ی ۱ داده‌های آماری را به‌صورت صعودی مرتب می‌کنیم:

$$۹,۱۱,۱۱,۱۲,۱۴,۱۴,۱۵,۱۵,۱۶,۱۷,۱۸$$

میانه‌ی این ۱۱ عدد، ۱۴ و چارک اول برابر ۱۱ و چارک سوم برابر ۱۶ است. بنابراین داده‌های ۱۲,۱۴,۱۴,۱۵,۱۵، داخل جعبه قرار دارند، میانگین این داده‌ها برابر است با:

$$\bar{x}=\frac{۱۲+۲\times۱۴+۲\times۱۵}{۵}=\frac{۷۰}{۵}=۱۴$$

پس انحراف معیار این داده‌ها برابر است با:

$$\sigma=\sqrt{\frac{(-۲)^۲+۲\times۰^۲+۲\times۱^۲}{۵}}=\sqrt{\frac{۶}{۵}}=\sqrt{۱/۲}\simeq۱/۱$$

۱۵- گزینه‌ی ۱ قیمت‌های امسال، نسبت به سال گذشته ۱/۲ برابر شده است، پس واریانس داده‌ها $(۱/۲)^۲$ برابر می‌شود، پس:

$$\sigma^۲=(۱/۲)^۲\times۵۰۰۰=۱/۴۴\times۵۰۰۰=۷۲۰۰$$

۱۶- گزینه‌ی ۲ میانگین نمرات مهارت فنی دو کارگر A و B به ترتیب برابر است با:

$$\bar{x}_A=۱۵+\frac{۰-۱+۰+۱+۲+۴}{۶}=۱۵+۱=۱۶$$

$$\bar{x}_B=۱۵+\frac{۱-۱+۲-۱+۲+۳}{۶}=۱۵+۱=۱۶$$

بنابراین میانگین نمرات دو کارگر برابر است و واریانس نمرات دو کارگر برابر است با:

$$\sigma_A^۲=\frac{(-۱)^۲+(-۲)^۲+(-۱)^۲+۰^۲+۱^۲+۳^۲}{۶}=\frac{۱+۴+۱+۱+۹}{۶}=\frac{۱۶}{۶}$$

$$\sigma_B^۲=\frac{۰^۲+(-۲)^۲+۱^۲+(-۲)^۲+۱^۲+۲^۲}{۶}=\frac{۴+۱+۴+۱+۴}{۶}=\frac{۱۴}{۶}$$

واریانس نمرات کارگر B کم‌تر از کارگر A است، پس دقت عمل کارگر B بیش‌تر از کارگر A است.

۱۷- گزینه‌ی ۳ میانگین این داده‌ها به روش سریع برابر است با:

$$\bar{x}=۱۲+\frac{-۳-۱-۱+۰+۰+۱+۲+۲}{۸}=۱۲+\frac{۰}{۸}=۱۲$$

پس واریانس این داده‌ها برابر است با:

$$\sigma^۲=\frac{(-۳)^۲+(-۱)^۲+(-۱)^۲+۰^۲+۰^۲+۱^۲+۲^۲+۲^۲}{۸}=\frac{۲۰}{۸}=\frac{۵}{۲}=۲/۵$$

بنابراین ضریب تغییرات داده‌ها برابر است با:

$$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{\sqrt{۲/۵}}{۱۲}\simeq۰/۱۳$$

۱۸- گزینه‌ی ۲ با افزودن مقدار ثابتی به هر داده، انحراف معیار تغییری نمی‌کند ولی میانگین به همان مقدار افزایش پیدا می‌کند:

$$(CV)'=\frac{\sigma'}{\bar{x}'}=\frac{\sigma}{\bar{x}+5\bar{x}}=\frac{\sigma}{6\bar{x}}=\frac{CV}{6}=\frac{0/2}{6}=\frac{1}{30}$$

۱۹- گزینه‌ی ۱ میانگین داده‌ها برابر است با:

$$\bar{x}=44+\frac{4(-3)+7(-1)+5(1)+3\times3+1\times5}{4+7+5+3+1}=44+\frac{-12-7+5+9+5}{20}=44$$

انحراف معیار داده‌ها برابر است با:

$$\sigma=\sqrt{\frac{4(-3)^2+7(-1)^2+5\times1^2+3\times3^2+1\times5^2}{20}}=\sqrt{\frac{36+7+5+27+25}{20}}=\sqrt{\frac{100}{20}}=\sqrt{5}\Rightarrow CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{\sqrt{5}}{44}\simeq0/05$$

۲۰- گزینه‌ی ۴ ضریب تغییرات برابر انحراف معیار تقسیم بر میانگین است:

$$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}\Rightarrow0/2=\frac{\sigma}{15}\Rightarrow\sigma=3\Rightarrow\sigma^2=9$$

یکی از فرمول‌های محاسبه‌ی واریانس $\sigma^2=\frac{\sum x_i^2}{n}-\bar{x}^2$ است، پس:

$$9=\frac{\sum x_i^2}{n}-15^2\Rightarrow\frac{\sum x_i^2}{n}=225+9=234$$

$\frac{\sum x_i^2}{n}$ همان میانگین مساحت مربع‌ها می‌باشد.

آزمون‌های مرحله‌ای

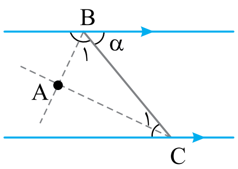
۱۷ هندسه

پاسخ تشریحی آزمون‌های فصل هفدهم

پاسخ تشریحی آزمون ۸۷

۱- گزینه‌ی ۱ اگر زاویه‌ی کوچک‌تر را α در نظر بگیریم، زوایای دیگر ۳α و ۵α هستند و داریم: $\alpha+۳\alpha+۵\alpha=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۹\alpha=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha=۲۰^\circ$

بنابراین متمم زاویه‌ی کوچک‌تر $۹۰^\circ-۲۰^\circ=۷۰^\circ$ است.

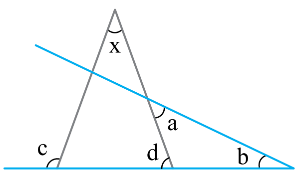


۲- گزینه‌ی ۱ نقطه‌ی A محل تقاطع دو نیمساز است. با استفاده از قضیه‌ی خطوط موازی و مورب می‌دانیم: $B_۱=۱۸۰^\circ-\alpha\,,\hat C_۱=\alpha$

در مثلث ABC داریم:

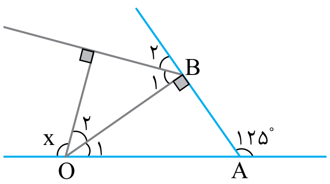
$$\hat A+\frac{\hat B_۱}{۲}+\frac{\hat C_۱}{۲}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat A+\frac{۱۸۰^\circ-\alpha}{۲}+\frac{\alpha}{۲}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat A+۹۰^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat A=۹۰^\circ$$

۳- گزینه‌ی ۳ مثلث BCD متساوی‌الساقین است، پس: $C\hat BD=۱۸۰^\circ-۲(B\hat CD)=۱۸۰^\circ-۲\times۶۶^\circ=۱۸۰^\circ-۱۳۲^\circ=۴۸^\circ$



۴- گزینه‌ی ۱ زاویه‌های c و d، زاویه‌های خارجی هستند، پس:

$$\begin{cases} d=a+b \\ c=d+x \end{cases} \Rightarrow c=a+b+x \Rightarrow x=c-a-b$$

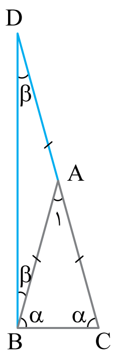


۵- گزینه‌ی ۱ A زاویه‌ی خارجی مثلث ABO می‌باشد:

$$\hat A=\hat O_۱+\hat B \Rightarrow \hat O_۱=۱۲۵^\circ-۹۰^\circ=۳۵^\circ$$

از طرف چون زاویه‌های $B_۲$ و $O_۲$ هر دو متمم $\hat B_۱$ هستند، پس حتماً با هم برابرند، یعنی $\hat O_۲=\hat B_۲=۴۰^\circ$ و داریم:

$$x=۱۸۰^\circ-\hat O_۱-\hat O_۲=۱۸۰^\circ-۳۵^\circ-۴۰^\circ=۱۸۰^\circ-۷۵^\circ=۱۰۵^\circ$$



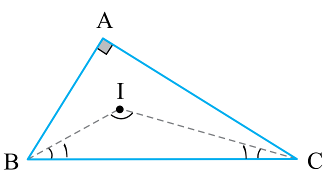
۶- گزینه‌ی ۱ دو مثلث ABC و ABD متساوی‌الساقین هستند. مجموع زوایا در مثلث BCD، ۱۸۰° است، پس:

$$\beta+\beta+\alpha+\alpha=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha+\beta=۹۰^\circ$$

پس مثلث BCD قائم‌الزاویه است.

۷- گزینه‌ی ۴ دو مثلث ACD و ABE به حالت دو ضلع و زاویه‌ی بین، همنهشت هستند:

$$\begin{cases} AD=BE \\ \hat B=\hat D \\ AB=CD \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{ACD}\cong\overset{\Delta}{ABE} \Rightarrow AC=AE$$

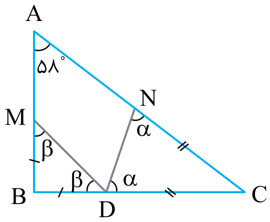


۸- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول:** از آن‌جایی که $\hat A$ زاویه‌ی قائمه است، پس $\hat B+\hat C=۹۰^\circ$ و با توجه به این‌که BI و CI نیمساز هستند، داریم:

$$\hat B_۱+\hat C_۱=۴۵^\circ$$

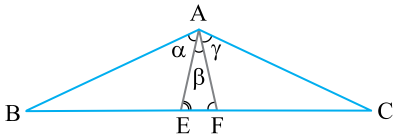
$$\hat I+\hat B_۱+\hat C_۱=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat I=۱۸۰^\circ-۴۵^\circ=۱۳۵^\circ$$

راه‌حل دوم: زاویه‌ی حاصل از برخورد دو نیمساز داخلی برابر $۹۰^\circ+\frac{\hat A}{۲}$ است: $I=۹۰^\circ+\frac{\hat A}{۲}=۹۰^\circ+۴۵^\circ=۱۳۵^\circ$



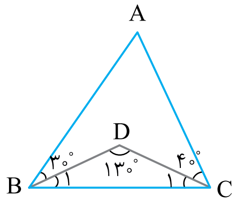
۹- گزینه‌ی ۳ با توجه به شکل مقابل و این‌که می‌دانیم مجموع زوایای یک مثلث برابر ۱۸۰° است، داریم:

$$\overset{\Delta}{ABC}: ۵۸^\circ+۱۸۰^\circ-۲\alpha+۱۸۰^\circ-۲\beta=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha+\beta=۱۱۹^\circ \Rightarrow M\hat{D}N=۱۸۰^\circ-(\alpha+\beta)$$
$$=۱۸۰^\circ-۱۱۹^\circ=۶۱^\circ$$



۱۰- گزینه‌ی ۳ با توجه به متساوی‌الساقین بودن دو مثلث AEC و ABF، داریم:

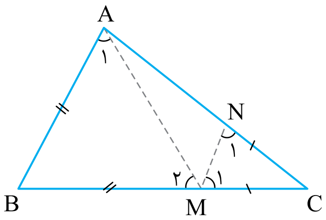
$$\begin{cases}\hat{E}=\beta+\gamma\\ \hat{F}=\alpha+\beta\\ \beta+\hat{E}+\hat{F}=۱۸۰^\circ\end{cases} \Rightarrow \beta+\alpha+\beta+\beta+\gamma=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\beta+\underbrace{\alpha+\beta+\gamma}_{۱۳۰^\circ}=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\beta=۱۸۰^\circ-۱۳۰^\circ \Rightarrow \beta=۲۵^\circ$$



۱۱- گزینه‌ی ۳ در مثلث BCD داریم $\hat{D}=۱۳۰^\circ$، پس:

$$\hat{B}_۱+\hat{C}_۱+۱۳۰^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{B}_۱+\hat{C}_۱=۵۰^\circ$$

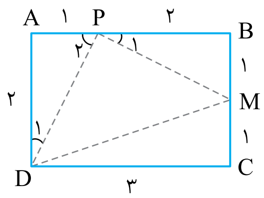
$$\overset{\Delta}{ABC}: \hat{B}+\hat{C}+\hat{A}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{B}_۱+۳۰^\circ+\hat{C}_۱+۴۰^\circ+\hat{A}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A}+۷۰^\circ+۵۰^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A}=۶۰^\circ$$



۱۲- گزینه‌ی ۲ با توجه به اضلاع مساوی، می‌دانیم $\hat{M}_۱=\hat{N}_۱$, $\hat{M}_۲=\hat{A}_۱$؛ داریم:

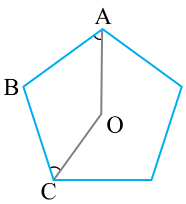
$$\begin{cases}\overset{\Delta}{ABM}: \hat{B}=۱۸۰^\circ-۲\hat{M}_۲\\ \overset{\Delta}{CMN}: \hat{C}=۱۸۰^\circ-۲\hat{M}_۱\\ \overset{\Delta}{ABC}: \hat{A}=۱۸۰^\circ-(\hat{B}+\hat{C})\end{cases} \Rightarrow \hat{A}=۱۸۰^\circ-(۳۶۰^\circ-۲(\hat{M}_۱+\hat{M}_۲))=-۱۸۰^\circ+۲(۱۸۰^\circ-۴۳^\circ)=۱۸۰^\circ-۸۶^\circ=۹۴^\circ$$

سراسری خارج از کشور - ۹۲



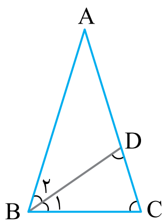
۱۳- گزینه‌ی ۲ با توجه به شکل روبه‌رو، دو مثلث APD و BPM به حالت «ض ز ض» همنهشت هستند، پس $\hat{D}_۱=\hat{P}_۱$. ضمناً از آن‌جایی‌که PD=PM، مثلث PMD متساوی‌الساقین است و داریم:

$$\begin{cases}\hat{D}_۱+\hat{P}_۲=۹۰^\circ\\ \hat{D}_۱=\hat{P}_۱\end{cases} \Rightarrow \hat{P}_۱+\hat{P}_۲=۹۰^\circ \Rightarrow D\hat{P}M=۹۰^\circ \Rightarrow P\hat{M}D=\frac{۱۸۰^\circ-D\hat{P}M}{۲}=\frac{۱۸۰^\circ-۹۰^\circ}{۲}=۴۵^\circ$$



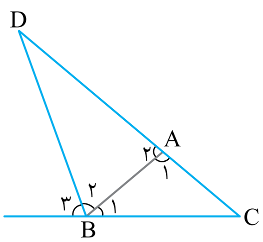
۱۴- گزینه‌ی ۴ در پنج‌ضلعی منتظم اندازه‌ی هر زاویه‌ی داخلی برابر $\frac{۱۸۰^\circ(۵-۲)}{۵}=۱۰۸^\circ$ است، اگر AO و CO نیمساز باشند، داریم $\hat{A}=\hat{C}=\frac{۱۰۸^\circ}{۲}=۵۴^\circ$. در چهارضلعی ABCO می‌توان نوشت:

$$\hat{A}+\hat{C}+\hat{B}+\hat{O}=۳۶۰^\circ \Rightarrow ۵۴^\circ+۵۴^\circ+۱۰۸^\circ+\hat{O}=۳۶۰^\circ \Rightarrow \hat{O}=۳۶۰^\circ-۲۱۶^\circ=۱۴۴^\circ$$



۱۵- گزینه‌ی ۱ نیمساز BD و قاعده‌ی BC با هم برابر هستند، پس $\hat{C}=\hat{D}$. ضمناً با توجه به این‌که مثلث ABC متساوی‌الساقین است، داریم $۲\hat{B}_۱=\hat{C}$.

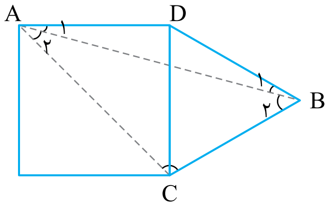
$$\overset{\Delta}{BDC}: \hat{B}_۱+\hat{D}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \frac{۱}{۲}\hat{C}+\hat{C}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{C}=\frac{۳۶۰^\circ}{۵}=۷۲^\circ \Rightarrow \hat{A}=۱۸۰^\circ-۲\hat{C}=۳۶^\circ$$



۱۶- گزینه‌ی ۲ زاویه‌ی ۱۰۰° حتماً زاویه‌ی رأس است. پس می‌توان شکل مقابل را رسم کرد:

$$\hat{C}=\frac{۱۸۰^\circ-\hat{A}_۱}{۲}=۴۰^\circ \xrightarrow{\text{زاویه‌ی خارجی}} \hat{B}_۲+\hat{B}_۳=\hat{A}_۱+\hat{C} \Rightarrow ۲\hat{B}_۲=۱۴۰^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \hat{B}_۲=۷۰^\circ\\ \hat{A}_۲=۱۸۰^\circ-\hat{A}_۱=۸۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{D}=۱۸۰^\circ-(\hat{B}_۲+\hat{A}_۲)=۱۸۰^\circ-(۷۰^\circ+۸۰^\circ)=۳۰^\circ$$



۱۷- گزینه‌ی ۲ مثلث ABD متساوی‌الساقین است و $\hat{D}=۹۰^\circ+۶۰^\circ=۱۵۰^\circ$ پس:

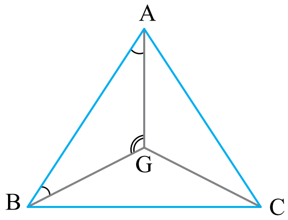
$$\hat{A}_۱=\frac{۱۸۰^\circ-۱۵۰^\circ}{۲}=۱۵^\circ$$

از آن‌جایی که AC (قطر مربع) نیمساز است، پس $\hat{A}_۱+\hat{A}_۲=۴۵^\circ$ و درنتیجه $\hat{A}_۲=۳۰^\circ$. همچنین زاویه‌ی C برابر است با:

$$\hat{C}=\frac{۹۰^\circ}{۲}+۶۰^\circ=۴۵^\circ+۶۰^\circ=۱۰۵^\circ$$

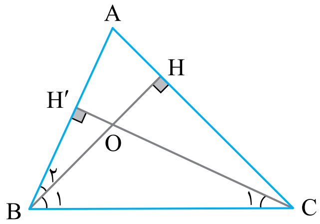
بنابراین با توجه به این‌که $\hat{C}$ بزرگ‌ترین و $\hat{A}_۲$ کوچک‌ترین زاویه‌ی مثلث ABC هستند، داریم:

$$\frac{\hat{C}}{\hat{A}_۲}=\frac{۱۰۵^\circ}{۳۰^\circ}=\frac{۷}{۲}$$



۱۸- گزینه‌ی ۴ هر مثلث متساوی‌الاضلاع را مطابق شکل روبه‌رو می‌توان به سه مثلث همنهشت تقسیم کرد. با توجه به این‌که نقطه‌ی G محل تلاقی نیمسازها می‌باشد، پس زوایای مثلث ABG برابر است با:

$$\hat{B}=\hat{A}=۳۰^\circ\ ,\ \hat{G}=۱۲۰^\circ$$



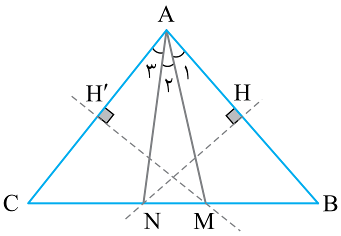
۱۹- گزینه‌ی ۴ مجموع زوایای هر مثلث برابر ۱۸۰° است، پس:

$$\overset{\Delta}{ABH}:۹۰^\circ+۷۰^\circ+\hat{B}_۲=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{B}_۲=۲۰^\circ$$

$$\overset{\Delta}{BCH'}:۹۰^\circ+۶۵^\circ+\hat{C}_۱=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{C}_۱=۲۵^\circ$$

$$\overset{\Delta}{BOC}:\hat{O}+\hat{B}_۱+\hat{C}_۱=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{O}+۶۵^\circ-۲۰^\circ+۲۵^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{O}=۱۱۰^\circ$$

سراسری - ۹۲



۲۰- گزینه‌ی ۱ در شکل مقابل MH′ و NH عمودمنصف‌های دو ساق هستند. هر نقطه روی عمودمنصف از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است، پس: $AN=NB\Rightarrow$ $\overset{\Delta}{ANB}$ متساوی‌الساقین

از آن‌جایی که ABC متساوی‌الساقین و $\hat{A}=۸۰^\circ$ است، پس: $\hat{B}=\frac{۱۸۰^\circ-۸۰^\circ}{۲}=۵۰^\circ$

پس در مثلث متساوی‌الساقین ANB داریم: $\hat{N}=۱۸۰^\circ-(۵۰^\circ+۵۰^\circ)=۸۰^\circ$

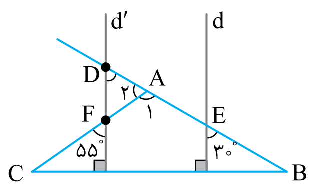
به طریق مشابه داریم $\hat{M}=۸۰^\circ$. پس در مثلث $\overset{\Delta}{AMN}$:

$$\hat{A}_۲+\hat{M}+\hat{N}=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{A}_۲=۱۸۰^\circ-۱۶۰^\circ=۲۰^\circ$$

پاسخ تشریحی آزمون ۸۸

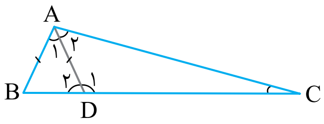
۱- گزینه‌ی ۴

$$\begin{cases}\hat{A}+\hat{B}=۹۰^\circ\\ \hat{A}=\frac{۴}{۹}(۱۸۰^\circ-\hat{B})\end{cases}\Rightarrow\hat{A}=\frac{۴}{۹}(۱۸۰^\circ-(۹۰^\circ-\hat{A}))\Rightarrow\hat{A}=۴۰^\circ+\frac{۴}{۹}\hat{A}\Rightarrow\frac{۵}{۹}\hat{A}=۴۰^\circ\Rightarrow\hat{A}=\frac{۳۶۰^\circ}{۵}=۷۲^\circ$$



۲- گزینه‌ی ۲ دو خط d و d′ با هم موازی هستند و خط BD با هر دو متقاطع است. طبق قضیه‌ی موازی مورب دو زاویه‌ی E و D برابر هستند و در مثلث AFD داریم:

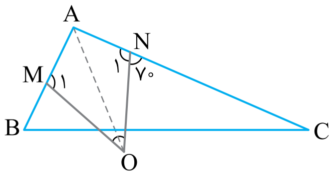
$$\hat{D}+\hat{A}_۲+\hat{F}=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{A}_۲=۱۸۰^\circ-۳۰^\circ-۵۵^\circ=۹۵^\circ\Rightarrow\hat{A}_۱=۱۸۰^\circ-\hat{A}_۲=۱۸۰^\circ-۹۵^\circ=۸۵^\circ$$



۳- گزینه‌ی ۱ مثلث ABD متساوی‌الساقین است و داریم:

$$\hat{B}=\hat{D}_{۲}=۱۸۰-\hat{D}_{۱}=۱۸۰^\circ-۱۱۵^\circ=۶۵^\circ\Rightarrow\hat{A}_{۱}=۱۸۰^\circ-۲\times۶۵^\circ=۵۰^\circ$$

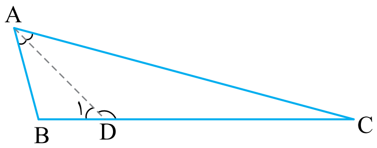
$$\Rightarrow\hat{A}_{۲}=۵۰^\circ\Rightarrow\hat{C}=۱۸۰^\circ-\hat{D}_{۱}-\hat{A}_{۲}=۱۸۰^\circ-۵۰^\circ-۱۱۵^\circ\Rightarrow\hat{C}=۱۵^\circ$$



۴- گزینه‌ی ۱ دو مثلث ANO و AMO در حالت «ض ض ض» برابر هستند، پس: $M_{۱}=N_{۱}=۱۱۰^\circ$. برای چهارضلعی AMON داریم:

$$\hat{A}+\hat{O}+\hat{M}_{۱}+\hat{N}_{۱}=۳۶۰^\circ\Rightarrow\hat{A}+\hat{O}=۱۴۰^\circ\xrightarrow{\hat{O}=\hat{C}}\hat{A}+\hat{C}=۱۴۰^\circ\Rightarrow ۱۸۰-\hat{B}=۱۴۰^\circ$$

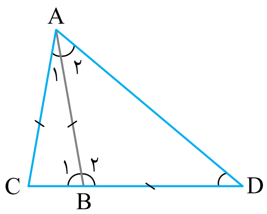
$$\Rightarrow B=۴۰^\circ$$



۵- گزینه‌ی ۲ $\hat{D}_{۱}$، زاویه‌ی خارجی مثلث $A\hat{D}C$ است، پس $D_{۱}=\frac{\hat{A}}{۲}+\hat{C}$.

ضمناً در مثلث ABC داریم:

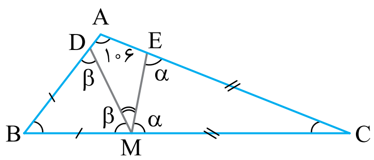
$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{A}+۹۰^\circ+\hat{C}+\hat{C}=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{A}+۲\hat{C}=۹۰^\circ\Rightarrow\frac{\hat{A}}{۲}+\hat{C}=۴۵^\circ\Rightarrow D_{۱}=۴۵^\circ$$



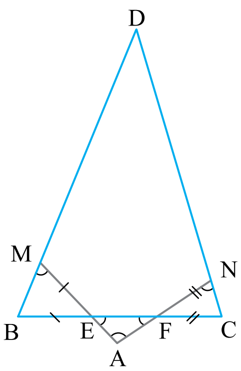
۶- گزینه‌ی ۴ با توجه به متساوی‌الساقین بودن مثلث ABD، $\hat{A}_{۲}=\hat{D}=۴۰^\circ$، پس:

$$\begin{cases} B_{۲}=۱۸۰^\circ-۲\times۴۰^\circ=۱۰۰^\circ\xrightarrow{\text{زاویه خارجی}}\hat{A}_{۱}+\hat{C}=۱۰۰^\circ \\ \overset{\triangle}{ABC}\ \text{متساوی‌الساقین}\Rightarrow\hat{C}=\hat{B}_{۱}=۱۸۰-\hat{B}_{۲}\Rightarrow\hat{C}=۸۰^\circ \end{cases}\Rightarrow\hat{A}_{۱}=۲۰^\circ$$

۷- گزینه‌ی ۱ با توجه به شکل مقابل داریم:



$$\begin{cases} \overset{\triangle}{BDM}:\hat{B}=۱۸۰^\circ-۲\beta \\ \overset{\triangle}{CME}:\hat{C}=۱۸۰^\circ-۲\alpha \\ \overset{\triangle}{ABC}:\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ-۱۰۶^\circ=۷۴^\circ \end{cases}\Rightarrow ۳۶۰^\circ-۲(\alpha+\beta)=۷۴^\circ\Rightarrow ۲(\alpha+\beta)=۲۸۶^\circ\Rightarrow\alpha+\beta=۱۴۳^\circ\Rightarrow\hat{M}=۱۸۰-(\alpha+\beta)=۳۷^\circ$$

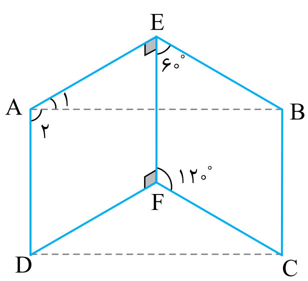


۸- گزینه‌ی ۴ دو مثلث CFN و BEM متساوی‌الساقین هستند، پس $\hat{B}=\hat{M}$ و $\hat{C}=\hat{N}$ و داریم:

$$\overset{\triangle}{AEF}:\hat{A}+\hat{E}+\hat{F}=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{E}+\hat{F}=۸۰^\circ\Rightarrow ۱۸۰^\circ-۲\hat{B}+۱۸۰^\circ-۲\hat{C}=۸۰$$

$$\Rightarrow ۲\hat{B}+۲\hat{C}=۲۸۰^\circ\Rightarrow\hat{B}+\hat{C}=۱۴۰^\circ$$

$$\overset{\triangle}{BCD}:\hat{D}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{D}=۱۸۰^\circ-۱۴۰^\circ=۴۰^\circ$$



۹- گزینه‌ی ۲ با توجه به این‌که $AE=EF=EB$، پس مثلث AEB متساوی‌الساقین است.

همچنین با توجه به این‌که $E=۶۰+۹۰=۱۵۰^\circ$ است، پس داریم:

$$\hat{A}_{۱}=\frac{۱۸۰-\hat{E}}{۲}=\frac{۱۸۰^\circ-۱۵۰^\circ}{۲}=۱۵^\circ\Rightarrow\hat{A}_{۲}=۹۰^\circ-\hat{A}_{۱}=۹۰^\circ-۱۵^\circ=۷۵^\circ\Rightarrow\hat{D}=۱۸۰^\circ-\hat{A}_{۲}=۱۰۵^\circ$$

پس متوازی‌الاضلاع ABCD، دو زاویه‌ی ۷۵° و دو زاویه‌ی ۱۰۵° دارد.

۱۰- گزینه‌ی ۲ می‌دانیم زاویه‌ی حاصل از تقاطع دو نیمساز داخلی B و C برابر $\hat{N}=۹۰+\frac{\hat{A}}{۲}$ و زاویه‌ی حاصل از تقاطع دو نیمساز خارجی B و C برابر $\hat{M}=۹۰-\frac{\hat{A}}{۲}$ است، پس:

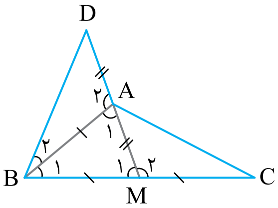
$$\begin{cases}\hat{N}=۹۰+\frac{\hat{A}}{۲}=۹۰^\circ+۱۵^\circ=۱۰۵^\circ\\ \hat{M}=۹۰-\frac{\hat{A}}{۲}=۹۰^\circ-۱۵^\circ=۷۵^\circ\end{cases}\Rightarrow ۲\hat{M}+\hat{N}=۱۵۰^\circ+۱۰۵^\circ=۲۵۵^\circ$$

۱۱- گزینه‌ی ۳ از آن‌جایی‌که $AB=BM$ پس $\hat{A}_۱=\hat{M}_۱$ پس $\hat{A}_۲=\hat{M}_۲$.

$$\begin{cases}\hat{A}_۲=\hat{M}_۲\\ AD=AM\\ AB=MC\end{cases}\xrightarrow{\text{ض ز ض}}\overset{\Delta}{ABD}\cong\overset{\Delta}{AMC}\Rightarrow\begin{cases}\hat{B}_۲=\hat{C}\\ \hat{C}+\hat{D}=۶۱^\circ\end{cases}\Rightarrow \hat{B}_۲+\hat{D}=۶۱^\circ$$

در مثلث ABD، $\hat{A}_۱$ زاویه‌ی خارجی مثلث است، پس:

$$\hat{A}_۱=\hat{B}_۲+\hat{D}\Rightarrow\hat{A}_۱=۶۱^\circ\Rightarrow\hat{M}_۱=۶۱^\circ\Rightarrow\hat{B}_۱=۱۸۰^\circ-(\hat{A}_۱+\hat{M}_۱)=۱۸۰^\circ-۲\times۶۱^\circ=۱۸۰^\circ-۱۲۲^\circ=۵۸^\circ$$



سراسری - ۸۹

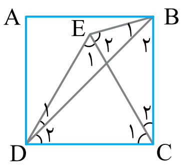
۱۲- گزینه‌ی ۲ از آن جا که $C_۲=۹۰^\circ-۶۰^\circ=۳۰^\circ$ در مثلث متساوی‌الساقین EBC داریم

$$۲\hat{E}_۲+\hat{C}_۲=۱۸۰\Rightarrow\hat{E}_۲=۷۵^\circ\Rightarrow\hat{B}_۱+\hat{B}_۲=۷۵^\circ$$

ضمناً در مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین BCD داریم: $\hat{B}_۲=۴۵$، پس $B_۱=۷۵^\circ-۴۵^\circ=۳۰^\circ$.

همچنین از آن‌جاکه $\hat{D}_۲=۴۵^\circ$ است داریم: $\hat{D}_۱+\hat{D}_۲=۶۰^\circ\Rightarrow\hat{D}_۱=۱۵^\circ$

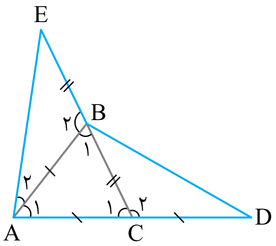
پس نسبت خواسته شده برابر است با: $\frac{\hat{B}_۱}{\hat{D}_۱}=\frac{۳۰^\circ}{۱۵^\circ}=۲$



۱۳- گزینه‌ی ۴ از آن جا که $\hat{B}_۱=\hat{C}_۱$ پس $\hat{B}_۲=\hat{C}_۲$ و با توجه به تساوی‌اضلاع $AB=CD$ و $EB=BC$ به حالت «ض ز ض» دو مثلث ABE و BCD برابر هستند و داریم: $\hat{D}=\hat{A}_۲$.

پس مجموع دو زاویه‌ی D و E برابر است با:

$$\hat{D}+\hat{E}=\hat{E}+\hat{A}_۲=\hat{B}_۱=\frac{۱۸۰^\circ-\hat{A}_۱}{۲}=\frac{۱۸۰^\circ-۵۲^\circ}{۲}=\frac{۱۲۸^\circ}{۲}=۶۴^\circ$$



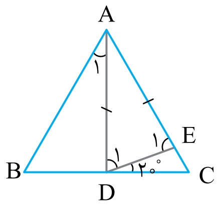
سراسری خارج از کشور - ۸۹

۱۴- گزینه‌ی ۳ $A\hat{E}D$ زاویه‌ی خارجی مثلث متساوی‌الساقین EDC است، پس: $\hat{D}_۱=\hat{E}_۱=۲۰^\circ+\hat{C}$

ضمناً زاویه‌ی ADC زاویه‌ی خارجی مثلث ABD است و داریم:

$$\hat{D}_۱+۲۰^\circ=\hat{A}_۱+\hat{B}\Rightarrow۲۰^\circ+\hat{C}+۲۰^\circ=\hat{A}_۱+\hat{B}\Rightarrow\hat{A}_۱+\hat{B}=۴۰^\circ+\hat{C}$$

با توجه به این‌که $\overset{\Delta}{ABC}$ متساوی‌الساقین است، پس $\hat{B}=\hat{C}$ و داریم: $\hat{A}_۱+\hat{B}=۴۰^\circ+\hat{B}\Rightarrow\hat{A}_۱=۴۰^\circ$

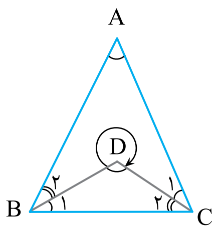


۱۵- گزینه‌ی ۲ در مثلث متساوی‌الساقین ABC داریم:

$$\begin{cases}\hat{B}_۱+\hat{B}_۲=\hat{C}_۱+\hat{C}_۲\\ \hat{B}_۱=\hat{C}_۱\end{cases}\Rightarrow\hat{B}_۲=\hat{C}_۲$$

$$\overset{\Delta}{ABC}:\hat{A}+\hat{B}_۱+\hat{B}_۲+\hat{C}_۱+\hat{C}_۲=۱۸۰^\circ\Rightarrow۲\hat{B}_۱+۲\hat{C}_۲=۱۸۰^\circ-۵۰^\circ\Rightarrow\hat{B}_۱+\hat{C}_۲=۶۵^\circ$$

$$\Rightarrow\hat{D}=۱۸۰^\circ-(\hat{B}_۱+\hat{C}_۲)=۱۸۰^\circ-۶۵^\circ=۱۱۵^\circ\Rightarrow x=۳۶۰^\circ-۱۱۵^\circ=۲۴۵^\circ$$

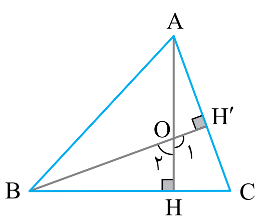


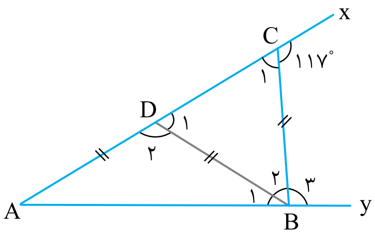
۱۶- گزینه‌ی ۳ در مثلث ABC داریم:

$$\hat{C}=۱۸۰^\circ-\hat{A}-\hat{B}\Rightarrow\hat{C}=۱۸۰^\circ-۱۱۰^\circ=۷۰^\circ$$

ضمناً جمع زوایا در چهارضلعی $HOH'C$ برابر ۳۶۰° است، پس:

$$\hat{C}+\hat{H}+\hat{H}'+\hat{O}_۱=۳۶۰^\circ\Rightarrow\hat{O}_۱=۳۶۰^\circ-۹۰^\circ-۹۰^\circ-۷۰^\circ\Rightarrow\hat{O}_۱=۱۱۰^\circ$$





۱۷- گزینه‌ی ۲ با توجه به متساوی‌الساقین بودن دو مثلث BCD و ABD داریم:

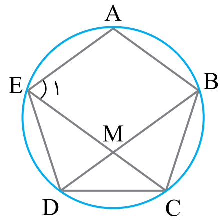
$$\hat{D}_۱=\hat{C}_۱=۱۸۰^\circ-۱۱۷^\circ=۶۳^\circ$$

$$\overset{\Delta}{BDC}:\hat{B}_۲+\hat{D}_۱+\hat{C}_۱=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{B}_۲=۱۸۰^\circ-۲\times۶۳^\circ=۵۴^\circ$$

همچنین از آن‌جا که $\hat{D}_۲=\hat{C}_۲=۱۱۷^\circ$، پس:

$$\overset{\Delta}{ABD}:\hat{D}_۲+\hat{B}_۱+\hat{A}=۱۸۰^\circ\Rightarrow۱۱۷^\circ+۲\hat{B}_۱=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{B}_۱=۳۱/۵$$

$$\hat{B}_۳=۱۸۰^\circ-\hat{B}_۱-\hat{B}_۲=۱۸۰^\circ-۵۴^\circ-۳۱/۵^\circ=۹۴/۵^\circ$$



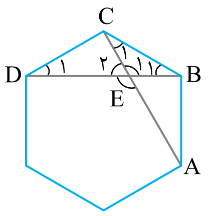
۱۸- گزینه‌ی ۳ در پنج‌ضلعی منتظم می‌دانیم هر زاویه‌ی داخلی برابر است با:

$$\hat{A}=\frac{۱۸۰(۵-۲)}{۵}=۱۰۸^\circ$$

همان‌طور که با توجه به دایره‌ی محیطی مشخص است $E_۱$ رو به ۲ کمان مساوی $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{BC}$ است و A رو به سه کمان مساوی $\overset{\frown}{BC}$ و $\overset{\frown}{CD}$ و $\overset{\frown}{DE}$ می‌باشد، پس داریم:

$$\hat{E}_۱=\frac{۲}{۳}\hat{A}=\frac{۲}{۳}\times۱۰۸^\circ=۷۲^\circ$$

پس با توجه به این‌که $\hat{A}+\hat{E}_۱=۱۸۰^\circ$، پس طبق عکس قضیه‌ی موازی مورّب $AB\|EC$ و به طریق مشابه $AE\|BD$ بنابراین ABME یک متوازی‌الاضلاع است و با توجه به این‌که $AE=AB$، لوزی است.

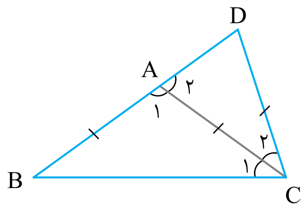


۱۹- گزینه‌ی ۴ در یک n ضلعی منتظم هر زاویه‌ی داخلی برابر $\frac{۱۸۰(n-۲)}{n}$ است، پس در شش‌ضلعی منتظم روبه‌رو:

$$\hat{C}=\frac{۱۸۰\times۴}{۶}=۱۲۰^\circ\xrightarrow{\overset{\Delta}{BCD}}\begin{cases}\hat{B}_۱+\hat{D}_۱+۱۲۰^\circ=۱۸۰^\circ\\\hat{B}_۱=\hat{D}_۱\end{cases}\Rightarrow\hat{B}_۱=۳۰^\circ$$

به طریق مشابه می‌توان نتیجه گرفت $\hat{C}_۱=۳۰^\circ$، پس:

$$\overset{\Delta}{BEC}:\hat{E}_۱+\hat{B}_۱+\hat{C}_۱=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{E}_۱=۱۸۰^\circ-۶۰^\circ=۱۲۰^\circ$$



۲۰- گزینه‌ی ۳ با توجه به صورت سؤال مثلث‌های ADC و ABC متساوی‌الساقین هستند و داریم:

$$\begin{cases}\overset{\Delta}{ABC}:A_۱+\hat{B}+\hat{C}_۱=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{A}_۱+۲\hat{C}_۱=۱۸۰^\circ\\\begin{cases}\hat{A}_۱+\hat{A}_۲=۱۸۰^\circ\\\hat{A}_۲=\hat{D}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\hat{A}_۱+\hat{D}=۱۸۰^\circ\\BD=BC\Rightarrow\hat{D}=\hat{C}_۱+\hat{C}_۲\end{cases}\Rightarrow\hat{A}_۱+\hat{C}_۱+\hat{C}_۲=۱۸۰^\circ\end{cases}\Rightarrow\hat{C}_۱=\hat{C}_۲$$

ضمناً در مثلث BCD داریم: $\hat{B}+\hat{C}_۱+\hat{C}_۲+\hat{D}=۱۸۰\Rightarrow\hat{C}_۱+\hat{C}_۱+\hat{C}_۱+۲\hat{C}_۱=۱۸۰^\circ\Rightarrow۵\hat{C}_۱=۱۸۰^\circ$

$$\Rightarrow\hat{C}_۱=۳۶^\circ\xrightarrow{\hat{A}_۱+۲\hat{C}_۱=۱۸۰^\circ}\hat{A}_۱+۷۲^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{A}_۱=۱۰۸^\circ$$

سراسری خارج از کشور - ۹۲

پاسخ تشریحی آزمون ۸۹

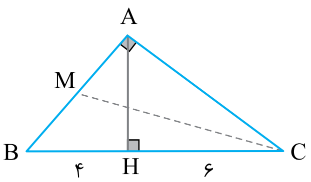
۱- گزینه‌ی ۲ مربعی که قطر آن برابر a باشد، ضلعی برابر $\frac{a}{\sqrt{۲}}$ دارد و مساحت آن برابر است با:

$$S_۱=\frac{a^۲}{۲}$$

در مثلث متساوی‌الاضلاع، ارتفاع $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ برابر طول ضلع است. پس مساحت مثلث برابر است با:

$$S_۲=\frac{a\times\frac{۲}{\sqrt{۳}}a}{۲}=\frac{a^۲}{\sqrt{۳}}$$

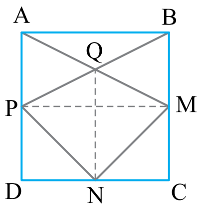
بنابراین نسبت مساحت‌ها برابر $\frac{S_۱}{S_۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است.



۲- گزینه‌ی ۳ در هــر مثلث می‌دانیم، میانه‌ی وارد بر ضلع کوچک‌تر، بزرگ‌ترین اســت. پس طول میانه‌ی CM را به‌دست می‌آوریم:

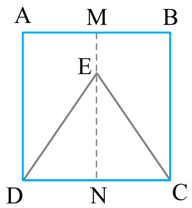
$$\begin{cases} AB^۲=BH\times BC\Rightarrow AB=\sqrt{۴\times ۱۰}=\sqrt{۴۰}=۲\sqrt{۱۰}\Rightarrow AM=\frac{AB}{۲}=\sqrt{۱۰} \\ AC^۲=CH\times BC\Rightarrow AC=\sqrt{۶\times ۱۰}=\sqrt{۶۰} \end{cases}\Rightarrow$$

$$\overset{\Delta}{AMC}:AM^۲+AC^۲=MC^۲\Rightarrow MC=\sqrt{۱۰+۶۰}=\sqrt{۷۰}$$



۳- گزینه‌ی ۳ فرض می‌کنیم ضلع مربع برابر ۲a باشد، مساحت چهارضلعی MNPQ برابر است با:

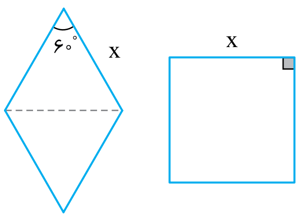
$$S_{MNPQ}=S_{\overset{\Delta}{QMP}}+S_{\overset{\Delta}{PMN}}=\frac{\frac{۱}{۲}a\times ۲a}{۲}+\frac{a\times ۲a}{۲}=\frac{۳a^۲}{۲}\Rightarrow\frac{S_{MNPQ}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{۳a^۲}{۲}}{(۲a)^۲}=\frac{۳}{۸}$$



۴- گزینه‌ی ۱ از نقطه‌ی E به دو ضلع AB و DC عمود می‌کنیم.

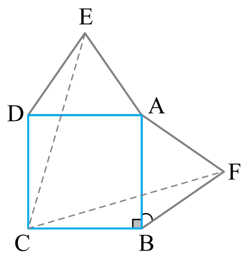
در مثلث متساوی‌الاضلاع اندازه‌ی ارتفاع EN، $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ برابر طول ضلع است، پس:

$$EM=MN-EN=a-\frac{\sqrt{۳}}{۲}a=a(۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲})$$



۵- گزینه‌ی ۴ محیط مربع و لوزی برابر است پس طول ضلع هر دو مساوی است. نسبت مساحت مربع به لوزی برابر است با:

$$\frac{S_۱}{S_۲}=\frac{x^۲}{۲\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲}=\frac{۲}{\sqrt{۳}}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$



۶- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول**: مســاحت ناحیه‌ی مورد نظر، برابر مساحت کل منهای مساحت دو مثلث CBF و CDE است، پس:

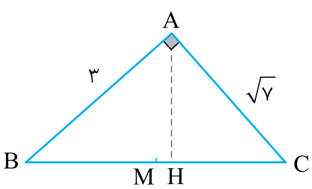
$$S_{\overset{\Delta}{BCF}}=\frac{۱}{۲}BC\times BF\times\sin(C\hat{B}F)=\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۲\times\sin(۹۰+۶۰)=۴\times\frac{۱}{۴}=۱$$

$$\Rightarrow S=(۲^۲+۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times ۴)-۲\times ۱=۴+۲\sqrt{۳}-۲=۲+۲\sqrt{۳}$$

راه‌حل دوم: از مساحت مثلث $\overset{\Delta}{CEF}$، مساحت مثلث $\overset{\Delta}{AEF}$ را کم می‌کنیم:

$$CF^۲=BC^۲+BF^۲-۲BC\times BF\cos ۱۵۰^\circ\Rightarrow CF^۲=۸+۴\sqrt{۳}$$

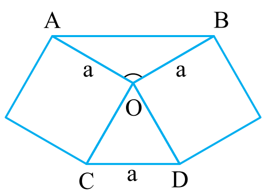
$$S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۸+۴\sqrt{۳})-۱=۲\sqrt{۳}+۳-۱=۲\sqrt{۳}+۲$$



۷- گزینه‌ی ۱ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC می‌دانیم:

$$\begin{cases} AB^۲+AC^۲=BC^۲\Rightarrow BC=\sqrt{۷+۹}=۴\Rightarrow CM=\frac{BC}{۲}=۲ \\ AC^۲=CH\times BC\Rightarrow ۷=CH\times ۴\Rightarrow CH=\frac{۷}{۴} \end{cases}\Rightarrow MH=CM-CH=۲-\frac{۷}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

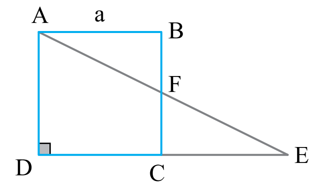
(سراسری - ۸۹)



۸- گزینه‌ی ۳ در شکل مقابل طول ضلع متساوی‌الاضلاع را برابر a در نظر می‌گیریم.

از آن‌جا که زاویه‌ی O برابر $(۶۰^\circ+۹۰^\circ+۹۰^\circ)-۳۶۰^\circ$ یعنی ۱۲۰° است، پس:

$$S_{\overset{\Delta}{ABO}}=\frac{۱}{۲}\times a\times a\times\sin ۱۲۰^\circ=\frac{۱}{۲}a^۲\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲\Rightarrow\frac{S_{\overset{\Delta}{ABO}}}{S_{\overset{\Delta}{ODC}}}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲}{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲}=۱$$

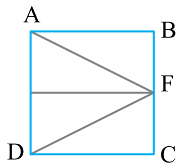


۹- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول:** دو مثلث ABF و CEF همنهشت هستند، پس $BF=CF$.

یعنی $BF=\frac{BC}{۲}$

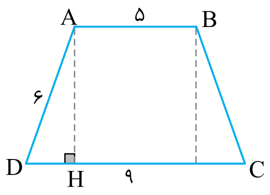
اگر ضلع مربع را a بنامیم داریم:

$$\frac{S_{ABF}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{۱}{۲}\times a\times\frac{a}{۲}}{a^{۲}}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{S_{AFCD}}{S_{ABCD}}=\frac{۳}{۴}$$



راه‌حل دوم: نقطه‌ی F وسط ضلع BC است، پس ۴ مثلث همنهشت هستند و نسبت خواسته شده برابر $\frac{۳}{۴}$ است.

سراسری - ۹۲

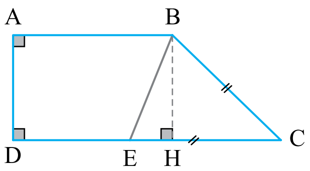


۱۰- گزینه‌ی ۴ در شکل مقابل AH ارتفاع وارد بر CD رسم شده است و داریم:

$$DH=\frac{CD-AB}{۲}=\frac{۹-۵}{۲}=۲$$

$$\overset{\Delta}{ADH}:AD^{۲}=DH^{۲}+AH^{۲}\Rightarrow AH=\sqrt{۳۶-۴}=\sqrt{۳۲}=۴\sqrt{۲}$$

$$S=\frac{۱}{۲}AH(AB+CD)=\frac{۱}{۲}\times ۴\sqrt{۲}(۵+۹)=۲۸\sqrt{۲}$$

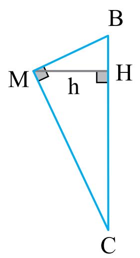


۱۱- گزینه‌ی ۴ در مثلث متساوی‌الساقین، می‌دانیم مجموع فواصل هر نقطه روی قاعده از دو ساق، برابر ارتفاع وارد بر ساق است. پس مقدار خواسته شده برابر BH است که با AD برابر است.

سراسری خارج از کشور - ۸۹

۱۲- گزینه‌ی ۴ با به‌کار بردن قضیه‌ی فیثاغورس در هر مثلث می‌دانیم طول اضلاع مثلث nام برابر $\sqrt{n}$ و ۱ است، پس:

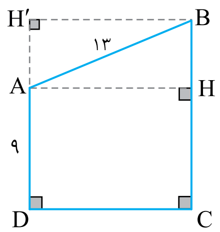
$$S_a=\frac{\sqrt{۹}\times ۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$$



۱۳- گزینه‌ی ۲ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی MBC می‌دانیم:

$$h^{۲}=BH\times HC\Rightarrow h^{۲}=۲\times ۸\Rightarrow h=۴$$

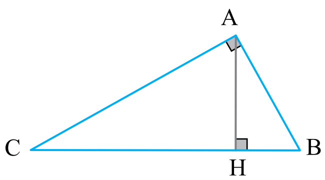
$$S_{\overset{\Delta}{MBC}}=\frac{h\times BC}{۲}=\frac{۴\times(۲+۸)}{۲}=۲۰$$



۱۴- گزینه‌ی ۲ در شکل زیر چهارضلعی AHCD مستطیل است، پس:

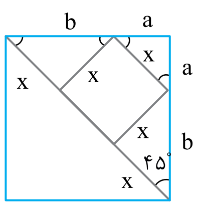
$$HC=AD=۹\Rightarrow BH=۱۴-۹=۵\Rightarrow AH=\sqrt{۱۳^{۲}-۵^{۲}}=\sqrt{۱۴۴}=۱۲\Rightarrow BH'=۱۲$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABD}}=\frac{BH'\times AD}{۲}=\frac{۱۲\times ۹}{۲}=۵۴$$



۱۵- گزینه‌ی ۴ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC می‌دانیم:

$$\begin{cases}AH^{۲}=BH\times CH\\ AC^{۲}=CH\times BC\end{cases}\Rightarrow\left(\frac{AH}{AC}\right)^{۲}=\frac{BH}{BC}\Rightarrow\frac{BC}{BH}=\left(\frac{۳}{۲}\right)^{۲}=\frac{۹}{۴}=۲/۲۵$$

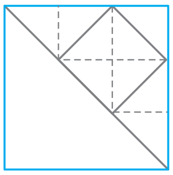


۱۶- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول:** اگر ضلع مربع کوچک را x بنامیم، مطابق شکل داریم:

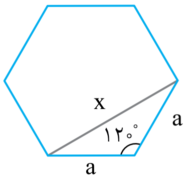
$$\begin{cases}a\sqrt{۲}=x\Rightarrow a=\frac{x}{\sqrt{۲}}\\ x\sqrt{۲}=b\end{cases}\Rightarrow a+b=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}x$$

بنابراین نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{S_{۱}}{S_{۲}}=\frac{(a+b)^{۲}}{\frac{۱}{۲}a^{۲}}=\frac{\left(\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}x\right)^{۲}}{\frac{۱}{۲}\times\frac{x^{۲}}{۲}}=\frac{\frac{۹}{۲}x^{۲}}{\frac{x^{۲}}{۴}}=۱۸$$



راه‌حل دوم: مطابق شکل روبه‌رو مساحت هر مثلث کوچک $\frac{1}{9}$ مساحت مثلث بزرگ و $\frac{1}{18}$ کل مربع است.

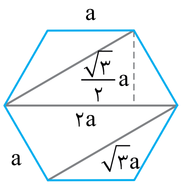


۱۷- گزینه‌ی ۳ از آن‌جا که زاویه‌ی داخلی هر شش‌ضلعی منتظم برابر 120° است، پس طول قطر کوچک برابر است با:

$$x^2=a^2+a^2-2a^2\cos 120^\circ \Rightarrow x=\sqrt{3}a$$

نسبت مساحت شش‌ضلعی‌ها برابر است با:

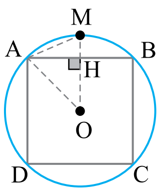
$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{6\times\frac{\sqrt{3}}{4}x^2}{6\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}=(\frac{x}{a})^2=3$$



۱۸- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول**: در شش‌ضلعی منتظم به ضلع a، طول قطر کوچک برابر $\sqrt{3}a$ و طول قطر بزرگ برابر $2a$ می‌باشد، پس نسبت مساحت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}a(a+2a)}{\sqrt{3}a\times a}=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2}{\sqrt{3}a^2}=\frac{3}{4}$$

راه‌حل دوم: مساحت ذوزنقه، نصف مساحت کل شش‌ضلعی یعنی $\frac{1}{2}\times 6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times a^2=\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$ و مساحت مستطیل برابر $\sqrt{3}a^2$ است پس نسبت این دو مساحت برابر $\frac{3}{4}$ است.



۱۹- گزینه‌ی ۲ در شکل مقابل $AH=\frac{AB}{2}=1$، ضمناً OH نیز برابر AH است، پس:

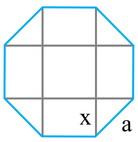
$$OA^2=OH^2+AH^2\Rightarrow OA=\sqrt{2}$$

بنابراین شعاع دایره برابر $\sqrt{2}$ است، پس:

$$OM=\sqrt{2}\Rightarrow OH+HM=\sqrt{2}\Rightarrow HM=\sqrt{2}-1$$

$$\overset{\Delta}{AMH}: AM^2=AH^2+HM^2\Rightarrow AM^2=1+(\sqrt{2}-1)^2\Rightarrow AM=\sqrt{4-2\sqrt{2}}$$

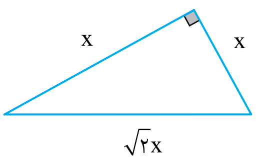
سراسری خارج از کشور - ۹۱



۲۰- گزینه‌ی ۲ اگر طول ضلع هشت‌ضلعی را a بنامیم داریم $a^2=4$، پس $a=2$.
مساحت کل هشت‌ضلعی شامل یک مربع به ضلع a، ۴ مستطیل به اضلاع a و x و ۴ مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین به اضلاع x و x و a است. از آن‌جا که $x=\frac{a}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$، پس:

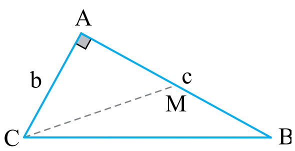
$$S=a^2+4ax+4\times\frac{1}{2}x^2=4+4\times 2\times\sqrt{2}+2\times 2=8+8\sqrt{2}=8(1+\sqrt{2})$$

پاسخ تشریحی آزمون ۹۰



۱- گزینه‌ی ۳ اگر یکی از ساق‌ها برابر x باشد، وتر برابر $x\sqrt{2}$ است:
پس داریم:

$$2x+\sqrt{2}x=2\Rightarrow x=\frac{2}{2+\sqrt{2}}=2-\sqrt{2}\Rightarrow S=\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}(2-\sqrt{2})^2=\frac{1}{2}(6-4\sqrt{2})=3-2\sqrt{2}$$



۲- گزینه‌ی ۱ با توجه به فرض سؤال می‌دانیم:

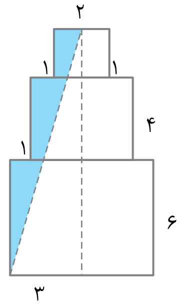
$$b^2=\frac{1}{2}bc\Rightarrow b=\frac{c}{2}$$

در مثلث ACM، با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس داریم:

$$CM^2=AC^2+AM^2\Rightarrow CM^2=b^2+(\frac{c}{2})^2\Rightarrow CM=\sqrt{2\times\frac{c^2}{4}}=\frac{c}{\sqrt{2}}\Rightarrow\frac{CM}{c}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

سراسری خارج از کشور - ۹۲

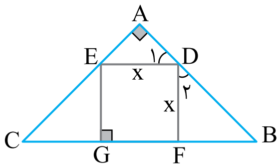
۳- گزینه‌ی ۱ اضلاع مربع‌ها به ترتیب برابر ۲، ۴ و ۶ است. برای محاسبه‌ی مساحت ناحیه‌ی سایه‌زده کافی است مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ی بزرگ را از نصف مجموع مساحت مربع‌ها کم کنیم:



$$S=\frac{۱}{۲}(۲^{۲}+۴^{۲}+۶^{۲})-\frac{۱}{۲}\times ۳\times(۲+۴+۶)=\frac{۱}{۲}\times ۵۶-\frac{۱}{۲}\times ۳۶=\frac{۱}{۲}\times ۲۰=۱۰$$

۴- گزینه‌ی ۱ **راه‌حل اول:** مثلث ABC قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است.

برای آن‌که مربع بیش‌ترین مساحت را داشته باشد، بنابر تقارن باید مطابق شکل روبه‌رو باشد.

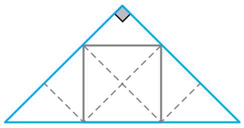


با توجه به این‌که $\hat{D}_{۱}=\hat{D}_{۲}=۴۵^{\circ}$، پس مثلث‌های ADE و DFB نیز متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه هستند و داریم:

$$\begin{cases} AD\times\sqrt{۲}=ED\Rightarrow AD=\frac{x\sqrt{۲}}{۲} \\ DB=\sqrt{۲}\times DF\Rightarrow DB=x\sqrt{۲} \end{cases}\Rightarrow AB=\frac{x\sqrt{۲}}{۲}+x\sqrt{۲}\Rightarrow AB=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}x$$

$$\frac{S_{DEFG}}{S_{ABC}}=\frac{x^{۲}}{\frac{۱}{۲}\times(\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}x)^{۲}}=\frac{۲}{\frac{۹}{۲}}=\frac{۴}{۹}$$

راه‌حل دوم: اگر هر ۳ ضلع مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین را به ۳ قسمت مساوی تقسیم کرده و مطابق شکل روبه‌رو به هم متصل کنیم مربع مورد نظر به‌دست می‌آید. تمامی مثلث‌های کوچک برابر هستند و مربع شامل ۴ مثلث و مثلث بزرگ شامل ۹ مثلث است، پس نسبت مورد نظر برابر $\frac{۴}{۹}$ است.



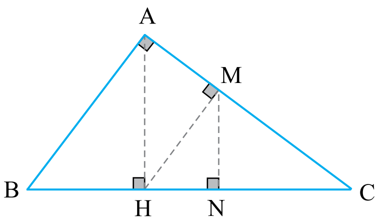
۵- گزینه‌ی ۳ بنا به فرض مسأله داریم:

$$\frac{MA}{MB}=\frac{۲}{۳}\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}\frac{MA}{AB}=\frac{۲}{۵}$$

می‌دانیم اگر دو شکل با نسبت k متشابه باشند، نسبت مساحت آن‌ها برابر $k^{۲}$ است. چون دو مثلث AMN و ABC متشابه هستند، خواهیم داشت:

$$S_{AMN}=(\frac{۲}{۵})^{۲}S_{ABC}\Rightarrow S_{AMN}=\frac{۴}{۲۵}S_{ABC}=\frac{۱۶}{۱۰۰}S_{ABC}\Rightarrow S_{MNCB}=S_{ABC}-S_{AMN}=S_{ABC}-\frac{۱۶}{۱۰۰}S_{ABC}=\frac{۸۴}{۱۰۰}S_{ABC}$$

۶- گزینه‌ی ۳ در شکل، همه‌ی مثلث‌ها قائم‌الزاویه هستند، پس:



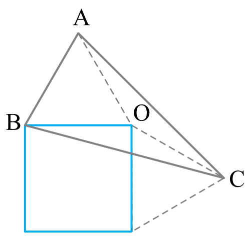
$$\overset{\Delta}{ABC}:AH^{۲}=BH\times HC\Rightarrow AH=\sqrt{۹\times ۱۶}=۱۲$$

$$\overset{\Delta}{ABC}:AC^{۲}=CH\times BC\Rightarrow AC=\sqrt{۱۶\times ۲۵}=۲۰$$

$$\overset{\Delta}{AHC}:HM\times AC=AH\times HC\Rightarrow MH=\frac{۱۲\times ۱۶}{۲۰}=۹/۶$$

$$\overset{\Delta}{MHC}:NH\times HC=MH^{۲}\Rightarrow NH=\frac{(۹/۶)^{۲}}{۱۶}\Rightarrow x=(۲/۴)^{۲}=۵/۷۶$$

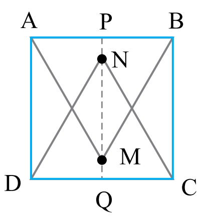
۷- گزینه‌ی ۳ مثلث ABC شامل ۳ مثلث OAB و OBC و OAC می‌باشد.



مثلث OAB متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲ و دو مثلث OBC و OAC دو مثلث متساوی‌الساقین، با ساق‌های ۲ و زاویه‌ی رأس ۱۵۰° هستند.

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=S_{\overset{\Delta}{OAB}}+۲S_{\overset{\Delta}{OBC}}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times ۲^{۲}+۲\times\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۲\times\sin ۱۵۰^{\circ}=\sqrt{۳}+۲$$

۸- گزینه‌ی ۴ ضلع مربع را a می‌نامیم، PM و NQ ارتفاع مثلث‌های متساوی‌الاضلاع هستند، پس:



$$PM=NQ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a\Rightarrow MQ=PQ-PM=a-\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

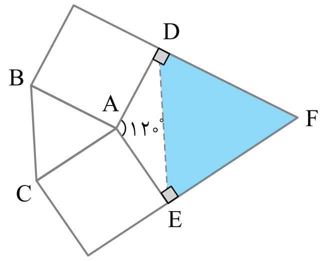
$$MN=NQ-MQ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a-(a-\frac{\sqrt{۳}}{۲}a)=(\sqrt{۳}-۱)a$$

اگر قطر مربع را d فرض کنیم آن‌گاه $a=\frac{d}{\sqrt{۲}}$ پس:

$$MN=\frac{\sqrt{۳}-۱}{\sqrt{۲}}d=\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۲}d$$

۹- گزینه‌ی ۳ در چهارضلعی ADFE، داریم:

$$\begin{cases}\hat{A}=۱۲۰^\circ\\ \hat{D}=\hat{E}=۹۰^\circ\end{cases}\Rightarrow \hat{F}=۶۰^\circ$$



با توجه به این‌که مثلث DEF متساوی‌الساقین با زاویه‌ی رأس ۶۰° است، پس مثلث DEF متساوی‌الاضلاع است.

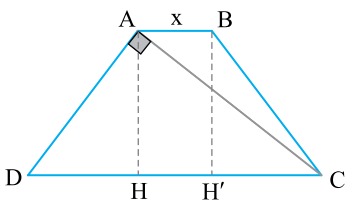
اگر ضلع مثلث ABC را a بنامیم، با توجه به قضیه‌ی کسینوس‌ها در مثلث ADE داریم:

$$DE=\sqrt{a^۲+a^۲-۲a^۲\cos ۱۲۰^\circ}=\sqrt{۳}a$$

بنابراین نسبت مساحت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{DEF}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\sqrt{۳}a)^۲}{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲}=۳$$

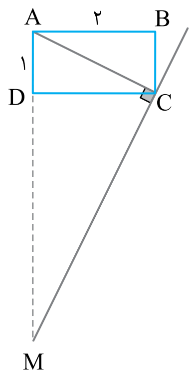
۱۰- گزینه‌ی ۱ اگر قاعده‌ی کوچک را x بنامیم، داریم: $DH=\frac{۱۰-x}{۲}$، پس:



$$\overset{\Delta}{ADC}:AC^۲=CH\times CD\Rightarrow ۸^۲=۱۰\times(۱۰-\frac{۱۰-x}{۲})\Rightarrow ۶۴=۱۰(۵+\frac{x}{۲})\Rightarrow ۱۴=۵x\Rightarrow x=۲/۸$$

۱۱- گزینه‌ی ۳ مثلث ACM قائم‌الزاویه است و داریم:

$$AC^۲=AD\times AM\Rightarrow AD^۲+DC^۲=AD\times AM\Rightarrow AM=۱+۴=۵$$

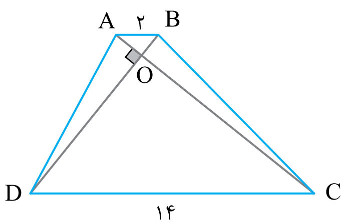


سراسری خارج از کشور ـ ۹۰

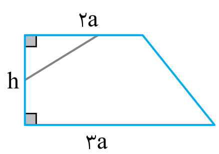
۱۲- گزینه‌ی ۳ دو مثلث OAB و ODC متساوی‌الساقین هستند، پس:

$$۲OA^۲=۲^۲\Rightarrow OA=\sqrt{۲}\ ,\ ۲OD^۲=۱۴^۲\Rightarrow OD=۷\sqrt{۲}$$

$$\overset{\Delta}{AOD}:OA^۲+OD^۲=AD^۲\Rightarrow AD=\sqrt{۲+۹۸}=۱۰$$



۱۳- گزینه‌ی ۱ اگر قاعده‌ی کوچک برابر ۲a باشد، قاعده‌ی بزرگ برابر ۳a است، پس:



$$\frac{S_{\text{مثلث}}}{S_{\text{ذوزنقه}}}=\frac{\frac{۱}{۲}a\times\frac{h}{۲}}{\frac{۱}{۲}h(۲a+۳a)}=\frac{\frac{ah}{۴}}{\frac{۵ah}{۲}}=\frac{۲}{۲۰}=\frac{۱}{۱۰}$$

۱۴- گزینه‌ی ۳ اگر طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع را ۴x در نظر بگیریم، مساحت هر یک از ۳ مثلث کوچک برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}\times x\times ۳x\sin ۶۰=\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}x^۲$$

پس مساحت ناحیه‌ی سایه‌زده برابر است با:

$$S'=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۴x)^۲-۳\times\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}x^۲=\frac{۷\sqrt{۳}}{۴}x^۲$$

بنابراین نسبت خواسته شده برابر است با:

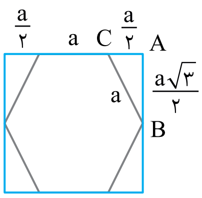
$$\frac{\frac{۷\sqrt{۳}}{۴}x^۲}{\frac{\sqrt{۳}}{۴}۱۶x^۲}=\frac{۷}{۱۶}$$

۱۵- گزینه‌ی ۴ در هر مرحله ضلع مربع $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ برابر می‌شود، پس نسبت محیط‌ها برابر است با:

$$\frac{P}{P'}=\frac{۴(a\times(\frac{۱}{\sqrt{۲}})^۳)}{۴a}=\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

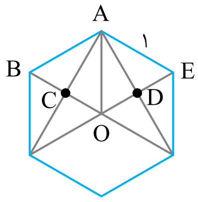
۱۶- گزینه‌ی ۳ مساحت یک شش‌ضلعی منتظم با طول ضلع a برابر $\frac{۶\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ و طول قطر کوچک برابر $\sqrt{۳}a$ می‌باشد، پس:

$$\frac{\frac{۶\sqrt{۳}}{۴}\times۶^۲}{\sqrt{۳}\times۶}=\frac{۳۶}{۴}=۹$$



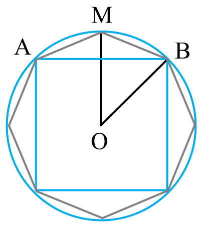
۱۷- گزینه‌ی ۴ زاویه‌های مثلث ABC برابر ۳۰°، ۶۰° و ۹۰° است، پس طول اضلاع آن برابر a و $\frac{a}{۲}$ و $\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ می‌باشد. نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{P}{P'}=\frac{۶a}{۲(a+\frac{a}{۲}\times۲)+۲(۲\times\frac{a\sqrt{۳}}{۲})}=\frac{۶a}{۴a+۲\sqrt{۳}a}=\frac{۶}{۴+۲\sqrt{۳}}=\frac{۳}{۲+\sqrt{۳}}\times\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲-\sqrt{۳}}=۳(۲-\sqrt{۳})$$



۱۸- گزینه‌ی ۴ در شش‌ضلعی منتظم می‌دانیم:

$$S_{\overset{\Delta}{AOC}}=\frac{۱}{۲}S_{\overset{\Delta}{AOB}}=\frac{۱}{۲}\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times۱^۲=\frac{\sqrt{۳}}{۸}\Rightarrow S_{ACOD}=۲S_{\overset{\Delta}{AOC}}=۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۸}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

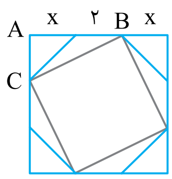


۱۹- گزینه‌ی ۲ بنابر تقارن زاویه‌ی O برابر است با:

$$\hat{O}=\frac{۳۶۰}{۸}=۴۵^\circ$$

در مثلث OBM با استفاده از قضیه‌ی کسینوس‌ها داریم:

$$MB^۲=OM^۲+OB^۲-۲OM\times OB\times\cos\hat{O}\Rightarrow MB=\sqrt{۴+۴-۲\times۲\times۲\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\sqrt{۸-۴\sqrt{۲}}=۲\sqrt{۲-\sqrt{۲}}$$



۲۰- گزینه‌ی ۲ با توجه به شکل داریم $x\sqrt{۲}=۲$، پس $x=\sqrt{۲}$ و داریم:

$$\overset{\Delta}{ABC}:BC^۲=AC^۲+AB^۲\Rightarrow BC^۲=x^۲+(۲+x)^۲\xrightarrow{x=\sqrt{۲}}$$

$$BC^۲=(۲+\sqrt{۲})^۲+(\sqrt{۲})^۲\Rightarrow BC^۲=۶+۴\sqrt{۲}+۲\xrightarrow{S=BC^۲}S=۸+۴\sqrt{۲}=۴(۲+\sqrt{۲})$$

پاسخ تشریحی آزمون ۹۱

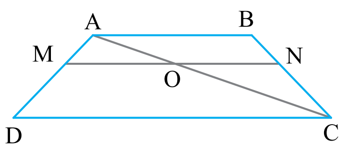
۱- گزینه‌ی ۲ با توجه به قضیه‌ی تالس می‌دانیم:

$$\frac{۲x}{۶-x}=\frac{۴x-۳}{۶-۲x}\Rightarrow ۲x(۶-۲x)=(۶-x)(۴x-۳)\Rightarrow -۴x^۲+۱۲x=-۴x^۲+۳x-۱۸+۲۴x\Rightarrow ۱۵x=۱۸\Rightarrow x=\frac{۶}{۵}=۱/۲$$

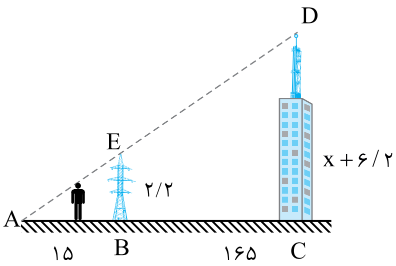
۲- گزینه‌ی ۳ سه خط RC، QB و PA بر AC عمودند، پس موازی هستند.

$$\begin{cases}\overset{\Delta}{APC}:PA\|QB\xrightarrow{\text{تالس}}\frac{BC}{AC}=\frac{QB}{PA}\\ \overset{\Delta}{ARC}:QB\|RC\xrightarrow{\text{تالس}}\frac{AB}{AC}=\frac{QB}{RC}\end{cases}\xrightarrow{+}\frac{BC}{AC}+\frac{AB}{AC}=\frac{QB}{PA}+\frac{QB}{RC}\Rightarrow ۱=\frac{QB}{۱۲}+\frac{QB}{۴}\Rightarrow ۱۲=۴QB\Rightarrow QB=۳$$

۳- گزینه‌ی ۳ قطر AC را رسم می‌کنیم، رابطه‌ی تالس را در دو مثلث ACD و ABC می‌نویسیم:

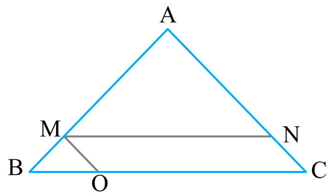


$$\begin{cases}\overset{\Delta}{ACD}:\frac{MO}{CD}=\frac{AM}{AD}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow MO=۶\times\frac{۱}{۳}=۲\\ \overset{\Delta}{ABC}:\frac{ON}{AB}=\frac{CN}{BC}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow ON=\frac{۲}{۳}\times۳=۲\end{cases}\Rightarrow MN=ON+OM=۴$$



۴- گزینه‌ی (۲) در شکل مقابل $BE||CD$، پس:

$$\frac{BE}{CD}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{۲/۲}{x+۶/۲}=\frac{۱۵}{۱۸۰}\Rightarrow x+۶/۲=۱۲\times۲/۲\Rightarrow x=۲۰/۲$$



۵- گزینه‌ی (۱) در مثلث ABC، $MN||BC$، پس طبق قضیه‌ی تالس داریم:

$$\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}\Rightarrow\frac{MN}{BC}=\frac{۳}{۲+۳}=\frac{۳}{۵}$$

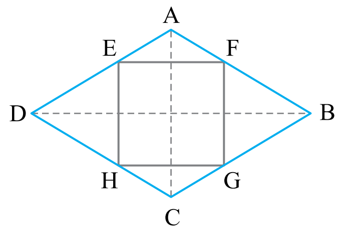
همچنین $OM||AC$، پس طبق تالس:

$$\frac{OM}{AC}=\frac{MB}{AB}\Rightarrow\frac{OM}{AC}=\frac{۲}{۳+۲}=\frac{۲}{۵}$$

نسبت مساحت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{S_{OMNC}}{S_{ABC}}=\frac{OM\times MN\times\sin\hat{M}}{\frac{۱}{۲}AC\times BC\times\sin\hat{C}}=۲\times\frac{OM}{AC}\times\frac{MN}{BC}=۲\times\frac{۲}{۵}\times\frac{۳}{۵}=\frac{۱۲}{۲۵}=۴۸٪$$

سراسری خارج از کشور – ۸۹



۶- گزینه‌ی (۲) با توجه به عکس قضیه‌ی تالس و با توجه به این که $\frac{AE}{AD}=\frac{AF}{AB}=\frac{۱}{۲}$ و $\frac{CG}{CB}=\frac{CH}{CD}=\frac{۱}{۲}$، پس $EF||DB$ و $DB||HG$، بنابراین $EF||HG$، به همین ترتیب $EH||FG$. پس چهارضلعی حاصل متوازی‌الاضلاع است. از جایی که اقطار لوزی بر هم عمودند، پس اضلاع متوازی‌الاضلاع بر هم عمودند و $EFGH$ مستطیل است.

۷- گزینه‌ی (۳) با توجه به قضیه‌ی تالس در مثلث ABC داریم:

$$\frac{AN}{AC}=\frac{AM}{AB}=\frac{۳}{۷+۳}=\frac{۳}{۱۰}$$

پس $\frac{NC}{AC}=\frac{۷}{۱۰}$، ضمناً از جایی که در مثلث AMC، $ON||AM$، طبق قضیه‌ی تالس داریم:

$$\frac{ON}{AM}=\frac{NC}{AC}=\frac{۷}{۱۰}$$

بنابراین نسبت مساحت‌های خواسته شده برابر است با:

$$\frac{S_{OMN}}{S_{AMN}}=\frac{\frac{۱}{۲}\times ON\times MN\times\sin\hat{N}}{\frac{۱}{۲}\times AM\times MN\times\sin\hat{M}}=\frac{ON}{AM}=\frac{۷}{۱۰}=۷۰٪$$

توجه کنید طبق عکس قضیه‌ی موازی مورب، دو زاویه‌ی M و N برابر هستند.

سراسری – ۹۰

۸- گزینه‌ی (۴) دوبار از قضیه‌ی تالس استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases}\overset{\Delta}{ABC}:FE||BC\xrightarrow{\text{تالس}}\frac{AF}{AC}=\frac{AE}{AB}\\ \overset{\Delta}{ABF}:DE||BF\xrightarrow{\text{تالس}}\frac{AD}{AF}=\frac{AE}{AB}\end{cases}\Rightarrow\frac{AD}{AF}=\frac{AF}{AC}\Rightarrow\frac{۳}{۳+۶}=\frac{AF}{AC}\Rightarrow\frac{AF}{AC}=\frac{۱}{۳}$$

بنابراین طبق قضیه‌ی تالس $\frac{EF}{BC}=\frac{۱}{۳}$، یعنی $BC=۳EF$.

۹- گزینه‌ی (۴) با توجه به اعداد داده شده داریم:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{۴}{۹}$$

در نتیجه طبق عکس قضیه‌ی تالس داریم: $DE||BC$. بنابراین دو مثلث BDC و BEC ارتفاع‌های برابری دارند $(DH=EH')$. با توجه به یکی بودن قاعده‌ی دو مثلث (BC) داریم:

$$S_{\overset{\Delta}{BDC}}=S_{\overset{\Delta}{BEC}}\xrightarrow{-S_{\overset{\Delta}{BOC}}}S_{\overset{\Delta}{BOD}}=S_{\overset{\Delta}{COE}}\Rightarrow\frac{S_{\overset{\Delta}{OBD}}}{S_{\overset{\Delta}{OCE}}}=۱$$

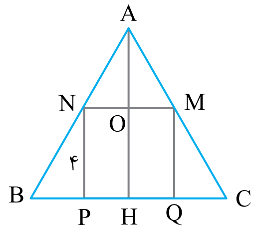
۱۰- گزینه‌ی ۱ ابتدا x را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{۹}{x-۲}=\frac{۱۲}{x}\Rightarrow ۹x=۱۲x-۲۴\Rightarrow x=۸$$

می‌دانیم نسبت مساحت‌ها، برابر مربع نسبت تشابه است، پس:

$$\frac{S_۲}{S_۱}=(\frac{۹}{۶})^۲=(\frac{۳}{۲})^۲=\frac{۹}{۴}$$

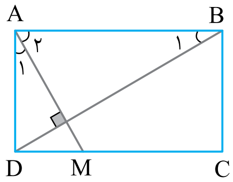
۱۱- گزینه‌ی ۲ ضلع مربع برابر ۴ است:



$$\overset{\Delta}{ANM}\sim\overset{\Delta}{ABC}\Rightarrow\frac{AO}{AH}=\frac{NM}{BC}\Rightarrow\frac{AO}{AO+۴}=\frac{۴}{۱۲}\Rightarrow ۳AO=AO+۴\Rightarrow AO=۲$$

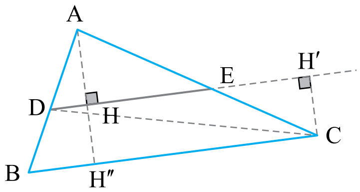
$$S_{\overset{\Delta}{AMN}}=\frac{۱}{۲}\times AO\times MN=\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۴=۴$$

۱۲- گزینه‌ی ۳ زوایای $A_۱$ و $B_۱$ متمم زاویه‌ی $A_۲$ هستند، پس $\hat{A}_۱=\hat{B}_۱$. بنابراین دو مثلث ABD و DAM متشابه هستند و داریم:



$$\frac{AD}{DM}=\frac{AB}{AD}=\frac{۲}{۱}\Rightarrow DM=\frac{۱}{۲}AD=\frac{۱}{۴}DC\Rightarrow\frac{DM}{DC}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{DM}{DC-DM}=\frac{۱}{۴-۱}\Rightarrow\frac{DM}{MC}=\frac{۱}{۳}$$

۱۳- گزینه‌ی ۲ دو مثلث ADE و ABC متشابه هستند، پس:

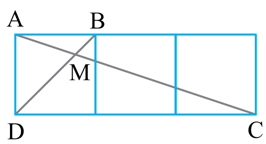


$$\frac{AD}{AB}=\frac{AH}{AH''}\Rightarrow\frac{AH}{AH''}=\frac{۳}{۷}\Rightarrow\frac{AH}{AH''-AH}=\frac{۳}{۷-۳}$$

$$\Rightarrow\frac{AH}{HH''}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{AH}{CH'}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{AH\times DE}{CH'\times DE}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{S_{\overset{\Delta}{ADE}}}{S_{\overset{\Delta}{CDE}}}=\frac{۳}{۴}=۷۵\%$$

سراسری - ۸۹

۱۴- گزینه‌ی ۲ می‌دانیم $AB\|CD$، پس دو مثلث ABM و CDM متشابه هستند:



$$\begin{cases}\frac{AM}{MC}=\frac{AB}{CD}\Rightarrow\frac{AM}{AC-AM}=\frac{AB}{CD}\Rightarrow\frac{AM}{\sqrt{۱۰}-AM}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow ۴AM=\sqrt{۱۰}\Rightarrow AM=\frac{\sqrt{۱۰}}{۴}\\ AC^۲=۳^۲+۱^۲\Rightarrow AC=\sqrt{۱۰}\end{cases}$$

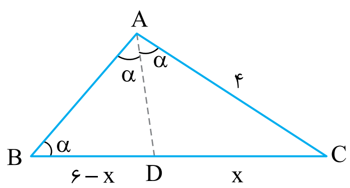
۱۵- گزینه‌ی ۲ محیط مثلث دوم برابر $۱۲=۵+۴+۳$ است. از آن‌جا که نسبت تشابه برابر $\frac{۳}{۵}$ یا $\frac{۳}{۴}$ است، محیط مثلث اول برابر $۱۲\times\frac{۳}{۵}$ یا $۱۲\times\frac{۳}{۴}$ است، بنابراین بیش‌ترین محیط برابر ۹ است.

سراسری - ۹۰

۱۶- گزینه‌ی ۴ دو مثلث MDC و ABC متشابه هستند ($\hat{A}=\hat{D}$ و $\hat{C}=\hat{C}$)، پس:

$$\frac{DC}{AC}=\frac{MC}{BC}\Rightarrow\frac{۷}{۱۴+۲}=\frac{۱۴}{۷+BD}\Rightarrow ۷+BD=۲\times۱۶\Rightarrow BD=۲۵$$

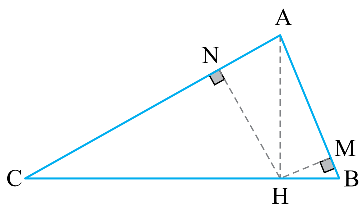
۱۷- گزینه‌ی ۲ نیمساز داخلی زاویه‌ی A را رسم می‌کنیم. مثلث‌های ABC و ADC متشابه هستند ($\hat{A}=\hat{B}$ و $\hat{C}=\hat{C}$)، پس:



$$\frac{CD}{AC}=\frac{AC}{BC}\Rightarrow\frac{x}{۴}=\frac{۴}{۶}\Rightarrow x=\frac{۸}{۳}$$

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AC}{BC}\xrightarrow{\hat{A}=\hat{B}}\frac{BD}{AB}=\frac{AC}{BC}\Rightarrow\frac{۶-\frac{۸}{۳}}{AB}=\frac{۴}{۶}\Rightarrow ۲AB=۱۸-۸\Rightarrow AB=۵$$

۱۸- گزینه‌ی ۱ می‌دانیم مساحت مثلث ABC، ۵ برابر مساحت مثلث ABH است، پس مساحت مثلث AHC، ۴ برابر مساحت مثلث ABH می‌باشد. از آن‌جا که دو مثلث ABH و ACH متشابه هستند، نسبت تشابه، جذر نسبت مساحت‌ها یعنی برابر $\sqrt{۴}=۲$ است. پس نسبت ارتفاع‌ها نیز برابر ۲ است و داریم:



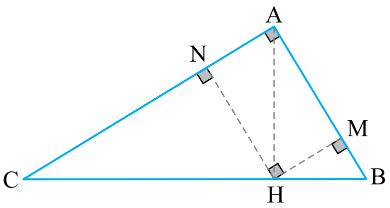
$$\frac{HM}{HN}=\frac{۱}{۲}$$

سراسری - ۹۰

۱۹- گزینه‌ی ۲ اگر نسبت تشابه دو مثلث را k در نظر بگیریم، نسبت مساحت‌ها برابر $k^{۲}$ است و داریم:

$$k^{۲}=\frac{۲}{۳}k\Rightarrow k=\frac{۲}{۳}$$

بنابراین نسبت مساحت مثلث بزرگ‌تر به کوچک‌تر برابر $(\frac{۳}{۲})^{۲}$ یا ۲/۲۵ است.

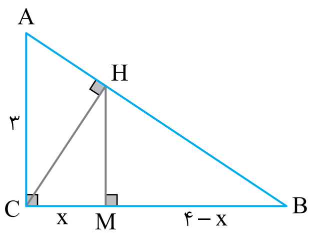


۲۰- گزینه‌ی ۲ دو مثلث ABH و ACH متشابه هستند، نسبت ارتفاع آن‌ها همان نسبت تشابه دو مثلث یعنی جذر نسبت مساحت‌ها می‌باشد (فرض کنید مساحت مثلث ABH برابر ۱ است):

$$\frac{HM}{HN}=\sqrt{\frac{S_{\overset{\Delta}{ABH}}}{S_{\overset{\Delta}{AHC}}}}=\sqrt{\frac{۱}{۶/۷۶-۱}}=\sqrt{\frac{۱}{۵/۷۶}}=\sqrt{\frac{۱۰۰}{۵۷۶}}=\sqrt{\frac{۲۵}{۱۴۴}}=\frac{۵}{۱۲}$$

سراسری - ۹۱

پاسخ تشریحی آزمون ۹۲

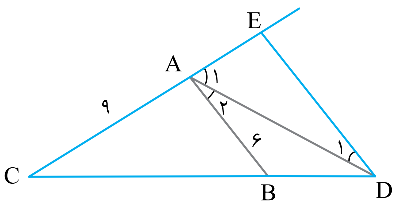


۱- گزینه‌ی ۱ در مثلث ABC می‌دانیم HM||AC، پس طبق قضیه‌ی تالس داریم:

$$\frac{BM}{BC}=\frac{HM}{AC}\Rightarrow\frac{۴-x}{۴}=\frac{HM}{۳}\quad (I)$$

از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه‌ی BCH داریم:

$$HM^{۲}=x(۴-x)\xrightarrow{(I)}\frac{۹(۴-x)^{۲}}{۱۶}=x(۴-x)\Rightarrow ۹(۴-x)=۱۶x\Rightarrow ۲۵x=۳۶\Rightarrow x=\frac{۳۶}{۲۵}=۱/۴۴$$

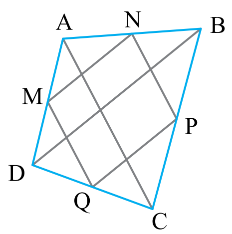


۲- گزینه‌ی ۳ مطابق شکل مقابل، اگر طول DE را x بنامیم، داریم:

$$\left\{\begin{array}{l}AB||DE\ ,\ \text{مورب } AD\Rightarrow\hat{A}_{۲}=\hat{D}_{۱}\\ \text{نیمساز } AD\Rightarrow\hat{A}_{۱}=\hat{A}_{۲}\end{array}\right.\Rightarrow\hat{A}_{۱}=\hat{D}_{۱}\Rightarrow AE=DE=x$$

در مثلث CDE با توجه به این که AB||DE، طبق قضیه‌ی تالس:

$$\frac{AC}{CE}=\frac{AB}{DE}\Rightarrow\frac{۹}{۹+x}=\frac{۶}{x}\Rightarrow ۹x=۵۴+۶x\Rightarrow ۳x=۵۴\Rightarrow x=۲۷$$



۳- گزینه‌ی ۳ اضلاع لوزی MNPQ با اقطار ABCD موازی هستند و نصف قطرها هستند. پس با توجه به آن که دو ضلع مجاور لوزی با هم برابرند، پس قطرها با هم مساوی هستند.

۴- گزینه‌ی ۲ طول MD را x می‌نامیم:

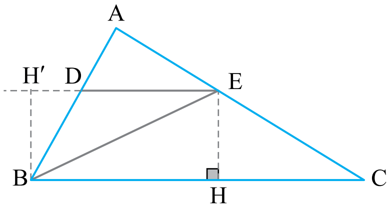
$$\left\{\begin{array}{l}\overset{\Delta}{MAC}:EB||AC\xrightarrow{\text{تالس}}\frac{ME}{AM}=\frac{MB}{MC}\\ \overset{\Delta}{MDC}:AB||CD\xrightarrow{\text{تالس}}\frac{AM}{MD}=\frac{MB}{MC}\end{array}\right.\Rightarrow\frac{ME}{AM}=\frac{AM}{MD}\Rightarrow ME\times MD=AM^{۲}\Rightarrow(x-۱۰)x=(x-۷)^{۲}$$

$$x^{۲}-۱۰x=x^{۲}-۱۴x+۴۹\Rightarrow ۴x=۴۹\Rightarrow x=\frac{۴۹}{۴}=۱۲/۲۵$$

۵- گزینه‌ی ۴ در ذوزنقه‌ی ABDC می‌دانیم:

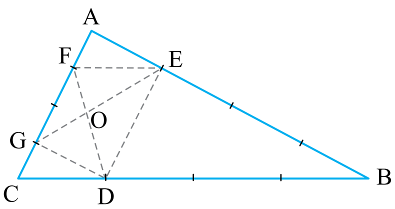
$$\left\{\begin{array}{l}MN=\frac{AB+CD}{۲}=\frac{AB+۳AB}{۲}=۲AB\\ \overset{\Delta}{ABC}:\frac{NP}{AB}=\frac{CN}{AC}\Rightarrow NP=\frac{۱}{۲}AB\\ \overset{\Delta}{ABD}:\frac{MQ}{AB}=\frac{MD}{BD}\Rightarrow MQ=\frac{۱}{۲}AB\end{array}\right.\Rightarrow PQ=۲AB-(\frac{۱}{۲}AB+\frac{۱}{۲}AB)=AB=\frac{۱}{۳}CD$$

۶- گزینه‌ی ۲ ارتفاع دو مثلث BEC و EBD برابر است $(EH=BH')$. پس برای یافتن نسبت مساحت‌ها کافی است نسبت دو قاعده‌ی $(\frac{BC}{DE})$ را بیابیم. با توجه به قضیه‌ی تالس $(DE\|BC)$ داریم:



$$\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{AD}{AD+BD}=\frac{\frac{4}{5}DB}{\frac{4}{5}DB+DB}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{9}{5}}=\frac{4}{9}\Rightarrow\frac{S_{\overset{\Delta}{BEC}}}{S_{\overset{\Delta}{EBD}}}=\frac{BC}{DE}=\frac{9}{4}=2/25$$

۷- گزینه‌ی ۱ در مثلث ABC داریم:



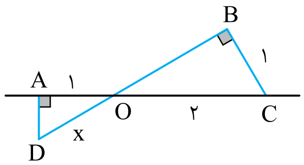
$$\frac{BE}{AB}=\frac{BD}{BC}=\frac{3}{4}$$

پس طبق عکس قضیه‌ی تالس، $ED\|AC$. بنابراین فاصله‌ی دو نقطه‌ی E و D از خط AC برابر است.

این فاصله را h می‌نامیم، پس:

$$\left\{\begin{array}{l}GC=AF\Rightarrow\frac{h\times GC}{2}=\frac{h\times AF}{2}\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{GCD}}=S_{\overset{\Delta}{AFE}}\\ S_{\overset{\Delta}{EFG}}=S_{\overset{\Delta}{GDF}}\xrightarrow[\text{GFO}]{-S_{\Delta}}S_{\overset{\Delta}{OGD}}=S_{\overset{\Delta}{OFE}}\end{array}\right.\Rightarrow S_{AEOF}=S_{ODCG}$$

۸- گزینه‌ی ۴ دو مثلث OBC و OAD دو زاویه‌ی مساوی دارند، پس متشابه هستند و داریم:



$$\frac{OA}{OB}=\frac{OD}{OC}\Rightarrow\frac{AO}{\sqrt{OC^2-BC^2}}=\frac{OD}{OC}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{4-1}}=\frac{x}{2}\Rightarrow x=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

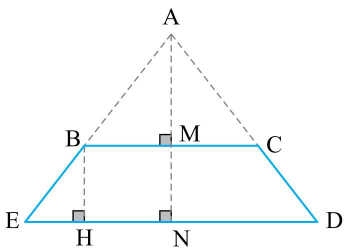
۹- گزینه‌ی ۳ ارتفاع DH عمود بر AC را در نظر بگیرید، داریم:

$$S_{\overset{\Delta}{CDE}}=0/6S_{\overset{\Delta}{ADE}}\Rightarrow DH\times CE=0/6\times DH\times AE\Rightarrow\frac{AE}{CE}=\frac{5}{3}\Rightarrow\frac{AE}{CE+AE}=\frac{5}{3+5}\Rightarrow\frac{AE}{AC}=\frac{5}{8}$$

ضمناً با توجه به این که $DE\|BC$، دو مثلث ADE و ABC متشابه هستند و نسبت تشابه برابر $\frac{5}{8}$ است، پس داریم:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ADE}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=(\frac{5}{8})^2\Rightarrow\frac{S_{\overset{\Delta}{ADE}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}-S_{\overset{\Delta}{ADE}}}=\frac{25}{64-25}\Rightarrow\frac{S_{BCED}}{S_{\overset{\Delta}{ADE}}}=\frac{39}{25}=1/56$$

۱۰- گزینه‌ی ۲ در مثلث BHE داریم:



$$HE=\frac{15-9}{2}=3$$

$$BE^2=BH^2+EH^2\Rightarrow BH=\sqrt{5^2-3^2}=4$$

ضمناً با توجه به این که $BC\|ED$، دو مثلث ABC و AED متشابه هستند و داریم:

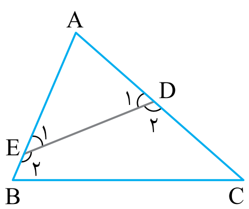
$$\frac{BC}{DE}=\frac{AM}{AN}\Rightarrow\frac{9}{15}=\frac{x}{x+4}\Rightarrow 15x=9x+36\Rightarrow 6x=36\Rightarrow x=6$$

۱۱- گزینه‌ی ۴ دو ضلع AB و CD موازی هستند، پس دو مثلث ABM و CDM در حالت سه زاویه متشابه می‌باشند. بنابراین:

$$\frac{MD}{AM}=\frac{CD}{AB}\Rightarrow\frac{AM+MD}{AM}=\frac{AB+CD}{AB}\Rightarrow\frac{AD}{AM}=\frac{4+1}{4}\Rightarrow AM=\frac{4}{5}AD$$

از آن‌جا که AD قطر مربعی به ضلع واحد است، پس $AD=\sqrt{2}$ و $AM=\frac{4\sqrt{2}}{5}$.

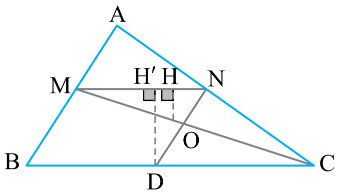
۱۲- گزینه‌ی ۲ با توجه به این که زاویه‌های روبه‌رو در چهارضلعی مکمل‌اند، داریم:



$$\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\hat{B}+\hat{D}_2=180^\circ\\ \hat{D}_1+\hat{D}_2=180^\circ\end{array}\right.\Rightarrow\\ \left\{\begin{array}{l}\hat{E}_1+\hat{E}_2=180^\circ\\ \hat{C}+\hat{E}_2=180^\circ\end{array}\right.\Rightarrow\end{array}\right.\left\{\begin{array}{l}\hat{D}_1=\hat{B}\\ \\ \hat{E}_1=\hat{C}\end{array}\right.\xrightarrow{\text{زز}}\overset{\Delta}{ADE}\sim\overset{\Delta}{ABC}\Rightarrow\frac{S_{\overset{\Delta}{ADE}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=(\frac{DE}{BC})^2=(\frac{12}{20})^2=\frac{9}{25}$$

بنابراین مساحت چهارضلعی $\frac{16}{25}=0/64$ برابر مساحت مثلث ABC است.

۱۳- گزینه‌ی ۱ نسبت مساحت‌های خواسته شده برابر است با:



$$\frac{S_{\overset{\triangle}{OMN}}}{S_{BMND}}=\frac{\frac{۱}{۲}OH\times MN}{DH'\times MN}=\frac{۱}{۲}\frac{OH}{DH'}$$

از آن‌جایی که $OH\|DH'$، پس طبق تالس در $\overset{\triangle}{NH'D}$ داریم:

$$\frac{OH}{DH'}=\frac{NO}{ND}$$

حال از آن‌جایی که $MN\|DC$، دو مثلث ODC و OMN متشابه هستند و داریم:

$$\frac{NO}{OD}=\frac{MN}{DC}\Rightarrow\frac{NO}{OD+NO}=\frac{MN}{MN+DC}\xrightarrow{MN=BD}\frac{NO}{ND}=\frac{MN}{BC}$$

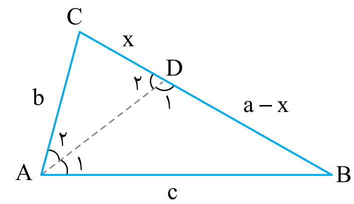
ضمناً با توجه به تشابه دو مثلث ABC و AMN داریم:

$$\frac{MN}{BC}=\frac{AM}{AB}=\frac{AM}{AM+MB}=\frac{\frac{۲}{۳}MB}{\frac{۲}{۳}MB+MB}=\frac{۲}{۵}$$

بنابراین نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{OMN}}}{S_{BMND}}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۵}=\frac{۱}{۵}=۲۰\%$$

۱۴- گزینه‌ی ۳ نیمساز AD را رسم می‌کنیم، می‌دانیم $\hat{A}_۲=\hat{A}_۱=\hat{B}$، پس:



$$\begin{cases}\hat{C}=\hat{C}\\ \hat{A}_۲=B\end{cases}\Rightarrow \overset{\triangle}{ACD}\sim\overset{\triangle}{ABC}\Rightarrow\frac{x}{b}=\frac{b}{a}=\frac{AD}{c}\xrightarrow{AD=a-x}\begin{cases}b^۲=ax\\ a(a-x)=bc\end{cases}\Rightarrow a^۲-b^۲=bc$$

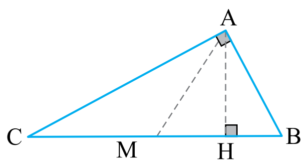
۱۵- گزینه‌ی ۲ دو مثلث ABC و EFC متشابه‌اند ($\hat{C}=\hat{C}$ و $\hat{A}=\hat{E}$)، پس:

$$\frac{EF}{AB}=\frac{CE}{AC}\Rightarrow\frac{۴}{۴\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{۶^۲-۴^۲}}{AC}\Rightarrow AC=\sqrt{۵}\times\sqrt{۲۰}=۱۰\Rightarrow AF=۱۰-۶=۴$$

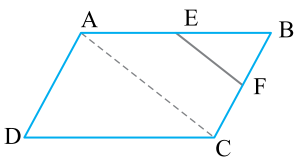
۱۶- گزینه‌ی ۴ می‌دانیم مثلث‌های ABH، ABC و ACH متشابه هستند، پس:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AH}{CH}=\frac{BH}{AH}\Rightarrow\begin{cases}\frac{BH}{AH}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\\ \frac{AH}{CH}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\end{cases}\xrightarrow{\times}\frac{BH}{CH}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow BH=\frac{۳}{۷}BC\Rightarrow HM=\frac{BC}{۲}-BH=BC(\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۷})=\frac{۱}{۱۴}BC$$

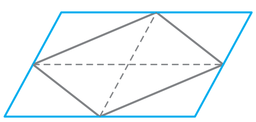
از آن‌جا که دو مثلث ABC و AHM دارای ارتفاع برابر (AH) هستند، نسبت مساحت آن‌ها برابر نسبت قاعده‌ها یعنی ۱۴ است.



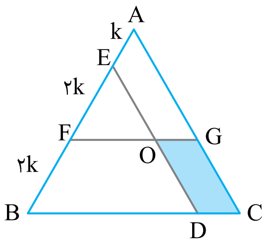
۱۷- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول:** مطابق شکل روبه‌رو دو مثلث BEF و ABC متشابه با نسبت تشابه $\frac{۱}{۲}$ هستند، پس $S_{\overset{\triangle}{BEF}}=\frac{۱}{۴}S_{\overset{\triangle}{ABC}}$، از جایی که قطر متوازی‌الاضلاع، مساحت آن را نصف می‌کند، پس مساحت مثلث BEF، $\frac{۱}{۸}$ مساحت متوازی‌الاضلاع است و داریم:



$$\frac{S_{ABCD}}{S_{BEF}}=\frac{۸}{۱}\Rightarrow\frac{S_{ABCD}-S_{BEF}}{S_{BEF}}=\frac{۸-۱}{۱}=۷$$



راه حل دوم: اگر اوساط اضلاع را دو به دو به هم وصل کنیم، ۸ مثلث با مساحت‌های برابر به وجود می‌آید. پس نسبت خواسته شده برابر ۷ است.



۱۸- گزینه‌ی ۱ می‌دانیم نسبت مساحت‌ها، مجذور نسبت تشابه است. اگر مساحت مثلث ABC را S بنامیم، داریم:

$$\begin{cases} \overset{\Delta}{BED} \sim \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \frac{S_{BED}}{S_{ABC}} = (\frac{۴}{۵})^۲ = \frac{۱۶}{۲۵} \Rightarrow S_{BED} = \frac{۱۶}{۲۵}S \\ \overset{\Delta}{EFO} \sim \overset{\Delta}{BED} \Rightarrow \frac{S_{EFO}}{S_{BED}} = (\frac{۲}{۴})^۲ = \frac{۱}{۴} \Rightarrow S_{EFO} = \frac{۱}{۴}S_{BED} \end{cases} \Rightarrow S_{EFO} = \frac{۴}{۲۵}S$$

$$\overset{\Delta}{EFO} \sim \overset{\Delta}{AFG} \Rightarrow \frac{S_{EFO}}{S_{AFG}} = (\frac{۲}{۳})^۲ \Rightarrow S_{AFG} = \frac{۹}{۴}S_{EFO} \Rightarrow S_{AFG} = \frac{۹}{۲۵}S$$

بنابراین مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با:

$$S_{ODCG} = S_{\underset{ABC}{\Delta}} - S_{\underset{AFG}{\Delta}} - S_{\underset{BDE}{\Delta}} + S_{\underset{EFO}{\Delta}} = S - \frac{۹}{۲۵}S - \frac{۱۶}{۲۵}S + \frac{۴}{۲۵}S = \frac{۴}{۲۵}S = ۰/۱۶S$$

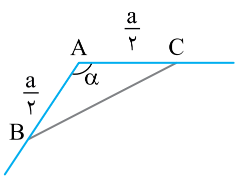
سراسری خارج از کشور - ۹۲

۱۹- گزینه‌ی ۱ با توجه به سؤال داریم:

$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{ADE} \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow \frac{۲}{۵} = \frac{۳}{AD} \Rightarrow AD = \frac{۱۵}{۲}$$

$$AD = ۲ + DB \Rightarrow \frac{۱۵}{۲} = ۲ + DB \Rightarrow BD = \frac{۱۱}{۲}$$

$$\overset{\Delta}{AMN} \sim \overset{\Delta}{ADE} \Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{ADE}} = (\frac{AM}{AE})^۲ = (\frac{۲ + \frac{۱۱}{۲} + \frac{۱}{۲}}{۳+۲})^۲ = \frac{۶۴}{۲۵}$$



۲۰- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول:** شکل روبه‌رو قسمتی از هشت‌ضلعی منتظم است. هر زاویه‌ی هشت‌ضلعی منتظم برابر است با:

$$\alpha = \frac{۱۸۰ \times (۸-۲)}{۸} = \frac{۱۸۰ \times ۳}{۴} = ۱۳۵^\circ$$

بنابراین با توجه به قضیه‌ی کسینوس‌ها در مثلث ABC داریم:

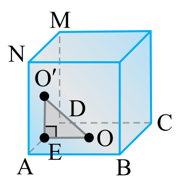
$$BC = \sqrt{(\frac{a}{۲})^۲ + (\frac{a}{۲})^۲ - ۲ \times \frac{a}{۲} \times \frac{a}{۲}\cos(۱۳۵^\circ)} = \sqrt{\frac{a^۲}{۲} + \frac{a^۲}{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲}} = a\sqrt{\frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۴}}$$

بنابراین نسبت تشابه دو هشت‌ضلعی برابر $\sqrt{\frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۴}}$ است، پس نسبت مساحت‌ها برابر $\frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۴}$ است.

راه‌حل دوم: در هر n ضلعی منتظم اگر اوساط اضلاع را به ترتیب به هم وصل کنیم، یک n ضلعی منتظم جدید به‌دست می‌آید که نسبت تشابه این دو n ضلعی $\cos \frac{۱۸۰^\circ}{n}$ است. پس نسبت مساحت‌ها برابر است با:

$$\cos^۲ \frac{۱۸۰}{۸} = \cos^۲ ۲۲/۵^\circ = \frac{۱ + \cos ۴۵^\circ}{۲} = \frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

پاسخ تشریحی آزمون ۹۳

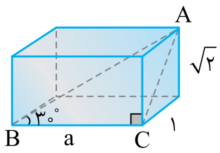


۱- گزینه‌ی ۳ طول OE و O′E برابر نصف طول یال یعنی $۲\sqrt{۲}$ است. با توجه به قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث O′OE داریم:

$$OE^۲ + O'E^۲ = OO'^۲ \Rightarrow OO' = \sqrt{۲ \times ۸} = ۴$$

سراسری - ۹۲

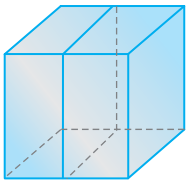
۲- گزینه‌ی ۴ صفحه‌ی سایه زده شده بر صفحه‌ی وجه ABCD از مکعب عمود است.



۳- گزینه‌ی (۳) مطابق شـکل مقابل زاویه‌ی بین قطر AB با یال BC برابر 30° اسـت و مثلث ABC قائم‌الزاویه است، پس:

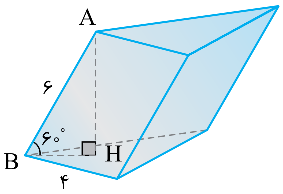
$$\tan\hat{B}=\frac{AC}{BC}\Rightarrow \tan 30^\circ=\frac{\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}}{a}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{a}\Rightarrow a=3$$

سراسری خارج از کشور – ۸۹



۴- گزینه‌ی (۴) اضلاع مکعب مستطیل برابر ۶، ۶ و ۳ هستند، پس طول قطر هریک از آن‌ها برابر است با:

$$\sqrt{6^2+6^2+3^2}=\sqrt{81}=9$$



۵- گزینه‌ی (۴) مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۴ برابر است با:

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 4^2=4\sqrt{3}$$

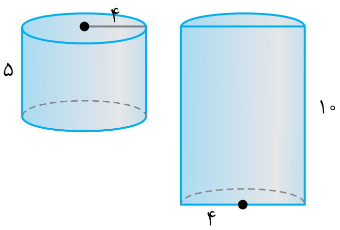
ضمناً در مثلث ABH داریم:

$$\overset{\Delta}{ABH}:\sin 60^\circ=\frac{AH}{AB}\Rightarrow AH=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$$

بنابراین حجم منشور برابر است با:

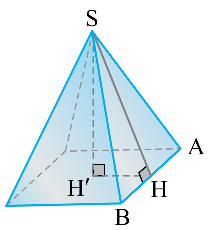
$$V=S\times AH=4\sqrt{3}\times 3\sqrt{3}=36$$

سراسری – ۹۱



۶- گزینه‌ی (۴) شکل حاصل نیم استوانه‌ای به شعاع قاعده‌ی ۴ و ارتفاع ۱۰ است، پس سطح کل این نیم استوانه برابر است با:

$$S=2R\times h+\pi R\times h+\pi R^2=2\times 4\times 10+\pi\times 4\times 10+\pi\times 4^2=80+56\pi$$



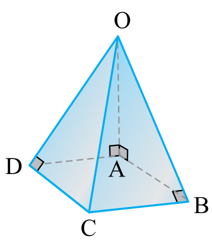
۷- گزینه‌ی (۱) ارتفاع SH' را رسم می‌کنیم، داریم:

$$\overset{\Delta}{ABS}:SA^2=SH^2+AH^2\Rightarrow AH=\sqrt{34-25}=3$$

از جایی که AH و HH'، هر دو نصف ضلع مربع قاعده هستند، پس با هم برابرند و $HH'=3$.

$$\overset{\Delta}{SHH'}:SH^2=SH'^2+HH'^2\Rightarrow SH'=\sqrt{5^2-3^2}=4$$

$$V=\frac{1}{3}SH'\times(AB)^2=\frac{1}{3}\times 4\times(2\times 3)^2=48$$

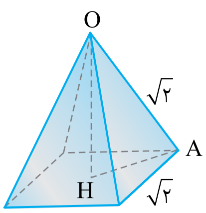


۸- گزینه‌ی (۱) در شکل مقابل مثلث‌های OAD، OAB، OBC و ODC به ترتیب در رأس‌های A، A، B و D دارای زاویه‌ی قائمه هستند. کوتاه‌ترین یال برابر OA و بلندترین برابر OC است:

$$\overset{\Delta}{OAB}:OB^2=OA^2+AB^2\Rightarrow OB=\sqrt{6+4}=\sqrt{10}$$

$$\overset{\Delta}{OBC}:OC^2=OB^2+BC^2\Rightarrow OC=\sqrt{6+10}=\sqrt{16}=4$$

سراسری خارج از کشور – ۹۱



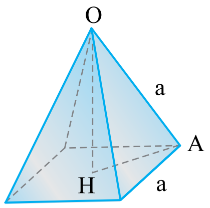
۹- گزینه‌ی (۱) AH، نصف قطر مربع قاعده است، پس:

$$AH=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2}=1$$

$$\overset{\Delta}{OAH}:AH^2+OH^2=OA^2\Rightarrow OH=\sqrt{2-1}=1$$

بنابراین حجم هرم برابر است با:

$$V=\frac{1}{3}S\times(OH)=\frac{1}{3}\times(\sqrt{2})^2\times 1=\frac{2}{3}$$



۱۰- گزینه‌ی ۱ طول یال‌های جانبی و اضلاع قاعده را a در نظر می‌گیریم، پس سطح کل هرم برابر است با:

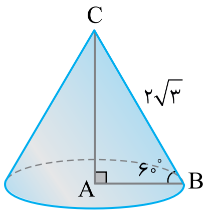
$$S=a^{۲}+۴\times\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}=a^{۲}(\sqrt{۳}+۱)\xrightarrow{S=۱۸(۱+\sqrt{۳})}a^{۲}=۱۸\Rightarrow a=۳\sqrt{۲}\Rightarrow AH=\frac{۱}{۲}a\sqrt{۲}=۳$$

با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث OAH داریم:

$$AH^{۲}+OH^{۲}=OA^{۲}\Rightarrow OH=\sqrt{(۳\sqrt{۲})^{۲}-۳^{۲}}=۳\Rightarrow V=\frac{۱}{۳}a^{۲}\times h=\frac{۱}{۳}\times(۳\sqrt{۲})^{۲}\times۳=۱۸$$

۱۱- گزینه‌ی ۱ ارتفاع مخروط را h می‌نامیم، پس:

$$V_{\text{هرم}}=V_{\text{مخروط}}\Rightarrow\frac{۱}{۳}Sh=\frac{۱}{۳}\pi R^{۲}h\Rightarrow\frac{۱}{۳}\times a^{۲}\times a=\frac{۱}{۳}\pi a^{۲}h\Rightarrow h=\frac{a}{\pi}$$



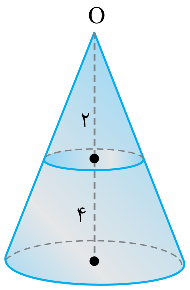
۱۲- گزینه‌ی ۲ مطابق شکل روبه‌رو در مثلث ABC داریم:

$$\overset{\Delta}{ABC}:\sin۶۰^{\circ}=\frac{AC}{BC}\Rightarrow AC=۲\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۳$$

$$\overset{\Delta}{ABC}:\cos۶۰^{\circ}=\frac{AB}{BC}\Rightarrow AB=۲\sqrt{۳}\times\frac{۱}{۲}=\sqrt{۳}$$

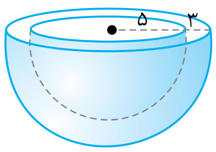
بنابراین حجم مخروط برابر است با:

$$V=\frac{۱}{۳}\pi(AB)^{۲}\times AC=\frac{۱}{۳}\pi\times(\sqrt{۳})^{۲}\times۳=۳\pi$$



۱۳- گزینه‌ی ۱ اگر شعاع دایره‌ی کوچک‌تر در شکل مقابل را R' بنامیم، داریم:

$$\frac{R'}{۳}=\frac{۲}{۶}\Rightarrow R'=۱\Rightarrow V=\frac{۱}{۳}\pi R'^{۲}\times h'=\frac{۱}{۳}\pi\times۱\times۲=\frac{۲\pi}{۳}$$



۱۴- گزینه‌ی ۴ سطح کل ظرف برابر سطح دو نیم کره به شعاع‌های ۵ و ۸ و سطح یک حلقه بین دو دایره به شعاع‌های ۸ و ۵ (به ضخامت ۳) است، پس:

$$S=\frac{۱}{۲}\times۴\pi\times۸^{۲}+\frac{۱}{۲}\times۴\pi\times۵^{۲}+(\pi\times۸^{۲}-\pi\times۵^{۲})=۱۲۸\pi+۵۰\pi+۳۹\pi=۲۱۷\pi$$

سراسری - ۹۰

۱۵- گزینه‌ی ۴ با توجه به داده‌های مسأله داریم:

$$\frac{۴}{۳}\pi a^{۳}=\pi(\frac{a}{۲})^{۲}\times h\Rightarrow\frac{۴}{۳}a=\frac{h}{۴}\Rightarrow h=\frac{۱۶}{۳}a$$

۱۶- گزینه‌ی ۳ قطر مکعب و قطر کره با هم برابرند، پس اگر ضلع مکعب را a بنامیم، داریم:

$$a\sqrt{۳}=۶\Rightarrow a=\frac{۶}{\sqrt{۳}}=۲\sqrt{۳}\Rightarrow S=۶a^{۲}=۶\times۴\times۳=۷۲$$

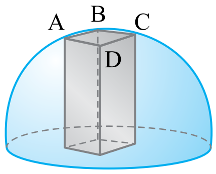
سراسری - ۹۱

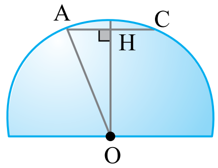
۱۷- گزینه‌ی ۴ رئوس مکعب روی سطح کره قرار دارند. پس قطر کره و قطر مکعب برابر است. اگر ضلع مکعب را x و قطر کره را ۲R بنامیم، داریم:

$$۲R=x\sqrt{۳}\Rightarrow x=\frac{۲R}{\sqrt{۳}}$$

$$\frac{S_{\text{کره}}}{S_{\text{مکعب}}}=\frac{۴\pi R^{۲}}{۶x^{۲}}=\frac{۴\pi R^{۲}}{۶(\frac{۴R^{۲}}{۳})}=\frac{\pi}{۲}$$

۱۸- گزینه‌ی ۳ در مثلث OAH طبق رابطه‌ی فیثاغورس داریم:



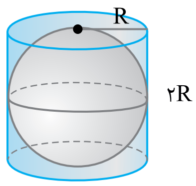


$$OH^2+AH^2=OA^2 \Rightarrow OH=\sqrt{(\sqrt{3})^2-(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\sqrt{3-\frac{3}{4}}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$$

بنابراین ارتفاع منشـــور برابر $\frac{3}{2}$ است و با توجه به این که مساحت مربع برابر نصف ضرب دو قطر آن است، داریم:

$$V=h\times S=\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}(\sqrt{3})^2=\frac{9}{4}$$

۱۹- گزینه‌ی ۴ ارتفاع اســـتوانه برابر قطر کره و شـــعاع کره برابر شعاع قاعده‌ی استوانه است، پس:

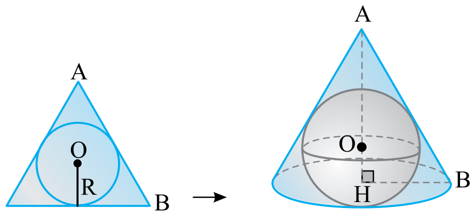


$$\frac{S_{\text{استوانه}}}{S_{\text{کره}}}=\frac{2\pi Rh+2\pi R^2}{4\pi R^2}=\frac{2\pi R\times(2R)+2\pi R^2}{4\pi R^2}=\frac{4\pi+2\pi}{4\pi}=\frac{3}{2}$$

۲۰- گزینه‌ی ۴ حجم به وجود آمده برابر تفاضل حجم مخروط و حجم کره است. ارتفاع AH در مثلث متساوی الاضلاع $\frac{\sqrt{3}}{2}$ برابر طول ضلع است، پس:

$$AH=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2\sqrt{3}=3$$

ضمناً O محل تلاقی میانه‌های مثلث و مرکز ثقل آن است، پس هر میانه ارتفاع را به نسبت دو به یک تقسیم می‌کند، بنابراین:

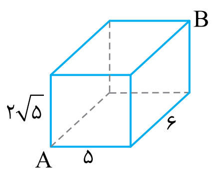


$$OH=\frac{1}{3}\times 3=1$$

$$V=(\frac{1}{3}\pi\times(\sqrt{3})^2\times 3)-\frac{4}{3}\pi\times 1^3=\frac{9}{3}\pi-\frac{4}{3}\pi=\frac{5}{3}\pi$$

پاسخ تشریحی آزمون ۹۴

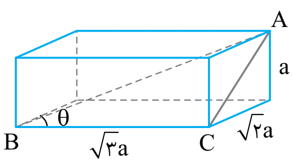
۱- گزینه‌ی ۴ دو نقطه‌ی غیر واقع بر یک وجه حتماً روی یکی از اقطار مکعب مستطیل قرار دارند که طول آن برابر است با:



$$AB=\sqrt{(2\sqrt{5})^2+5^2+6^2}=\sqrt{20+25+36}=\sqrt{81}=9$$

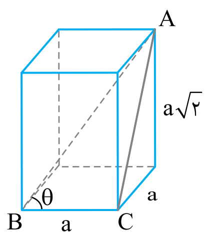
سراسری خارج از کشور - ۹۲

۲- گزینه‌ی ۲ اگـــر طول ضلع کوچک‌تـــر را a بنامیم، دو ضلـــع دیگر $\sqrt{2}a$ و $\sqrt{3}a$ هســـتند. مطابق شکل روبه‌رو زاویه‌ی خواسته شده، $\hat{\theta}$ یعنی زاویه‌ی B از مثلث ABC است. مثلث ABC قائم الزاویه $(\hat{C}=90^\circ)$ است، پس:



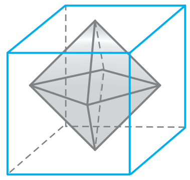
$$\tan\theta=\frac{AC}{BC}=\frac{\sqrt{a^2+2a^2}}{\sqrt{3}a}=\frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3}a}=1\Rightarrow\theta=45^\circ$$

۳- گزینه‌ی ۴ ضلع BC بر قطر وجه AC عمود اســـت، پس مثلث ABC قائم الزاویه است و داریم:



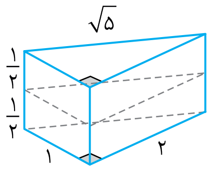
$$\overset{\Delta}{ABC}:\tan\theta=\frac{AC}{BC}\Rightarrow\tan\theta=\frac{\sqrt{(a\sqrt{2})^2+a^2}}{a}\Rightarrow\tan\theta=\sqrt{3}\Rightarrow\theta=60^\circ$$

سراسری - ۸۹



۴- گزینه‌ی ۱ ضلع مکعب را a می‌نامیم. حجم هشت وجهی دو برابر حجم هرم است. قاعده‌ی این هرم مربعی است که قطر آن برابر ضلع مکعب و ارتفاع آن نصف ضلع مکعب است، پس:

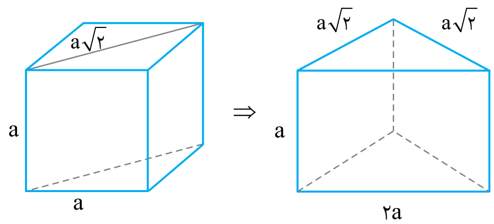
$$\frac{V}{V'}=\frac{۲\times\frac{۱}{۳}Sh}{a^{۳}}=\frac{۲\times\frac{۱}{۳}\times\frac{a}{۲}\times(\frac{a}{\sqrt{۲}})^{۲}}{a^{۳}}=\frac{۱}{۶}$$



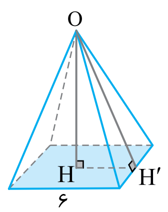
۵- گزینه‌ی ۴ با توجه به این که بین اضلاع مثلث رابطه‌ی فیثاغورس $۱^{۲}+۲^{۲}=(\sqrt{۵})^{۲}$ برقرار است، پس مثلث قاعده قائم الزاویه است. با برش زدن این منشور از وسط ارتفاع و کنار هم قرار دادن دو تکه، یک مکعب مستطیل به ارتفاع $\frac{۱}{۲}$ و قاعده‌ی مستطیل به ابعاد ۲ و ۱ به‌دست می‌آید. قطر این مکعب مستطیل برابر است با:

$$\sqrt{a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}}=\sqrt{(\frac{۱}{۲})^{۲}+۲^{۲}+۱^{۲}}=\frac{\sqrt{۲۱}}{۲}$$

۶- گزینه‌ی ۲ قاعده‌ی منشور حاصل یک مثلث قائم الزاویه‌ی متساوی الساقین به ابعاد $a\sqrt{۲}$، $a\sqrt{۲}$ و $۲a$ و با ارتفاع a می‌باشد. بنابراین سطح کل منشور برابر است با:



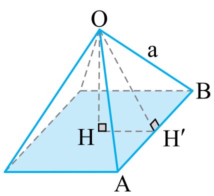
$$S=a\times ۲a+۲\times a\times a\sqrt{۲}+۲\times\frac{۱}{۲}(a\sqrt{۲})(a\sqrt{۲})=۲a^{۲}+۲\sqrt{۲}a^{۲}+۲a^{۲}=(۲\sqrt{۲}+۴)a^{۲}$$



۷- گزینه‌ی ۳ ارتفاع وجه جانبی (OH') برابر ۵ است. در مثلث قائم الزاویه‌ی OHH' داریم:

$$OH'^{۲}=OH^{۲}+HH'^{۲}\Rightarrow ۵^{۲}=OH^{۲}+(\frac{۶}{۲})^{۲}\Rightarrow OH=۴$$

$$V=\frac{۱}{۳}\times S\times h=\frac{۱}{۳}\times ۶^{۲}\times ۴=۴۸$$

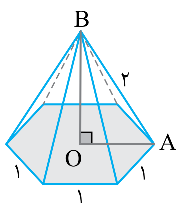


۸- گزینه‌ی ۴ در مثلث قائم الزاویه‌ی OHH' داریم:

$$OH'^{۲}=OH^{۲}+HH'^{۲}\Rightarrow ۱۳^{۲}=۱۲^{۲}+HH'^{۲}\Rightarrow HH'^{۲}=۲۵\Rightarrow HH'=۵$$

بنابراین طول ضلع مربع برابر ۱۰ است و سطح کل هرم برابر است با:

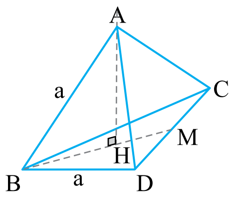
$$S=۱۰\times ۱۰+۴\times\frac{۱۳\times ۱۰}{۲}=۱۰۰+۲۶۰=۳۶۰$$



۹- گزینه‌ی ۴ مساحت شش ضلعی از رابطه‌ی $\frac{۶\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$ به‌دست می‌آید، پس $S=\frac{۶\sqrt{۳}}{۴}$. از آن‌جا که OA برابر نصف قطر بزرگ شش ضلعی یعنی برابر ضلع شش ضلعی است، داریم:

$$\overset{\Delta}{OAB}: BO^{۲}+OA^{۲}=BA^{۲}\Rightarrow BO=\sqrt{۴-۱}=\sqrt{۳}$$

$$V=\frac{۱}{۳}\times\frac{۶\sqrt{۳}}{۴}\times\sqrt{۳}=\frac{۳}{۲}$$



۱۰- گزینه‌ی ۴ چهار وجهی منتظم به طول یال a ، یک هرم با قاعده‌ی مثلث متســاوی الاضلاع اســت، برای یافتن ارتفاع هرم داریم:

$$\overset{\Delta}{CDH}: BH=\frac{2}{3}\times BM=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{3}a$$

$$\overset{\Delta}{ABH}: AB^2=AH^2+BH^2 \Rightarrow AH=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}a=\frac{\sqrt{6}}{3}a$$

بنابراین حجم چهار وجهی منتظم به طول یال a برابر است با:

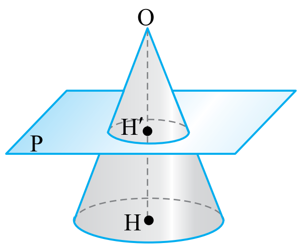
$$V=\frac{1}{3}\times S\times h=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times a^2\times\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

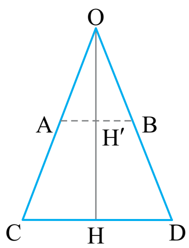
برای یافتن حجم جسم باقی مانده، حجم ۴ چهار وجهی منتظم به ضلع $\frac{a}{2}$ را از کل حجم کم می‌کنیم:

$$V'=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3-4\times\frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{a}{2}\right)^3=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3-\frac{\sqrt{2}}{24}a^3=\frac{\sqrt{2}}{24}a^3$$

بنابراین نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{V'}{V}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{24}a^3}{\frac{\sqrt{2}}{12}a^3}=\frac{1}{2}$$



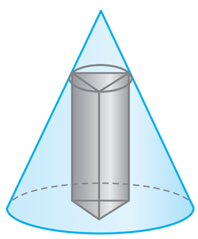


۱۱- گزینه‌ی ۲ اگر سطحِ مقطع مخروط را رسم کنیم، با استفاده از تشابه دو مثلث OAH' و OCH داریم:

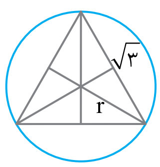
$$\frac{AH'}{CH}=\frac{OH'}{OH}$$

پس نسبت دو حجم برابر است با:

$$\frac{V'}{V}=\frac{\frac{1}{3}\times\pi\times AH'^2\times OH'}{\frac{1}{3}\times\pi\times CH^2\times OH}=\left(\frac{OH'}{OH}\right)^3\Rightarrow\frac{1}{125}=\left(\frac{OH'}{OH}\right)^3\Rightarrow\frac{OH'}{10}=\frac{1}{5}\Rightarrow OH'=2\Rightarrow HH'=8$$



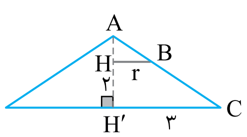
۱۲- گزینه‌ی ۳ قاعده‌ی پایین منشــور مطابق شکل روی قاعده‌ی مخروط و رئوس قاعده‌ی بالای منشور روی سطح جانبی مخروط قرار می‌گیرند. اگر از بالا به قاعده‌ی بالایی منشور بنگریم، داریم:



در مثلث متساوی الاضلاع میانه‌ها (ارتفاع‌ها) هم‌دیگر را به نسبت ۲ به ۳ قطع می‌کنند و ارتفاع $\frac{\sqrt{3}}{2}$ برابر طول ضلع است، پس:

$$r=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}\Rightarrow r=1$$

شعاع قاعده‌ی مخروط برابر ۳ است، پس:



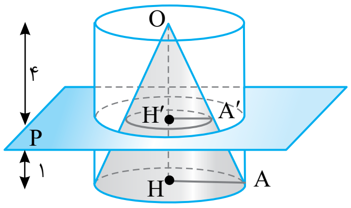
$$\overset{\Delta}{ACH'}: BH \parallel CH'\Rightarrow\frac{AH}{AH'}=\frac{BH}{CH'}\Rightarrow\frac{AH}{AH+2}=\frac{1}{3}\Rightarrow 2AH=2\Rightarrow AH=1$$

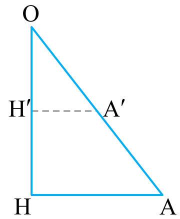
بنابراین حجم مخروط برابر است با:

$$V=\frac{1}{3}\pi\times(CH')^2\times AH'=\frac{1}{3}\times\pi\times(3)^2\times(1+2)=9\pi$$

۱۳- گزینه‌ی ۱ قاعده‌ی بزرگ‌ترین مخروط همان قاعده‌ی استوانه است. با استفاده از قضیه‌ی تالس در مثلث OAH داریم:

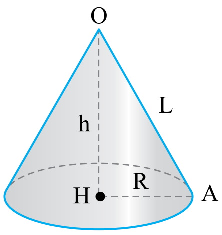
$$\frac{OH'}{OH}=\frac{A'H'}{AH}\Rightarrow\frac{A'H'}{۲}=\frac{۵-۱}{۵}\Rightarrow A'H'=\frac{۸}{۵}$$





سطح مقطع خواسته شده برابر سطح بین دو دایره‌ی هم‌مرکز به شعاع‌های AH و $A'H'$ است، پس:

$$S=\pi AH^{۲}-\pi A'H'^{۲}=\pi(۲)^{۲}-\pi(\frac{۸}{۵})^{۲}=\pi\times\frac{۳۶}{۲۵}=۱/۴۴\pi$$



۱۴- گزینه‌ی ۲ حجم کره $\sqrt{۲}$ برابر حجم مخروط است، پس:

$$\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}=\sqrt{۲}\times\frac{۱}{۳}\times\pi R^{۲}\times h\Rightarrow ۴R=\sqrt{۲}h\Rightarrow h=\frac{۴R}{\sqrt{۲}}\Rightarrow h=۲\sqrt{۲}R$$

$$\overset{\Delta}{OHA}: h^{۲}+R^{۲}=L^{۲}\Rightarrow L=\sqrt{۸R^{۲}+R^{۲}}=\sqrt{۹R^{۲}}=۳R$$

بنابراین فاصله‌ی رأس مخروط تا محیط قاعده، ۳ برابر شعاع قاعده است.

۱۵- گزینه‌ی ۲ مرکز کره بر مرکز مکعب مستطیل منطبق است و شعاع کره نصف قطر مکعب مستطیل است:

$$R=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۵^{۲}+۶^{۲}+(۲\sqrt{۵})^{۲}}=\frac{\sqrt{۸۱}}{۲}=\frac{۹}{۲}$$

بنابراین سطح کره برابر است با:

$$S=۴\pi R^{۲}=۴\pi\times\frac{۸۱}{۴}=۸۱\pi$$

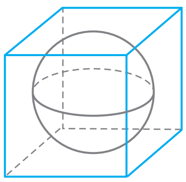
۱۶- گزینه‌ی ۴ قطر کره با قطر مکعب برابر است، اگر ضلع مکعب را a بنامیم، داریم:

$$R=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

پس نسبت خواسته شده برابر است با:

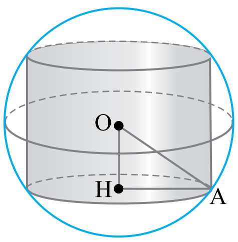
$$\frac{V}{V'}=\frac{a^{۳}}{\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}}=\frac{a^{۳}}{\frac{۴}{۳}\pi(\frac{\sqrt{۳}a}{۲})^{۳}}=\frac{۱}{\frac{۴}{۳}\pi\times\frac{۳\sqrt{۳}}{۸}}=\frac{۱}{\frac{\pi\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۲}{\pi\sqrt{۳}}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳\pi}$$

۱۷- گزینه‌ی ۳ قطر کره برابر طول ضلع مکعب است، پس نسبت خواسته شده برابر است با:



$$\frac{V}{V'}=\frac{\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}}{(۲R)^{۳}}=\frac{\frac{۴}{۳}\pi}{۸}=\frac{\pi}{۶}$$

۱۸- گزینه‌ی ۱ اگر ارتفاع استوانه را h و شعاع کره را R بنامیم، داریم:



$$S=۲\pi Rh\Rightarrow ۴۸\pi=۲\pi\times R\times h\Rightarrow R\times h=۲۴$$

$$\overset{\Delta}{OAH}: OA^{۲}=OH^{۲}+AH^{۲}\Rightarrow ۲۵=\frac{h^{۲}}{۴}+R^{۲}\Rightarrow ۴R^{۲}+h^{۲}=۱۰۰$$

$$\Rightarrow ۴(\frac{۲۴}{h})^{۲}+h^{۲}=۱۰۰\Rightarrow h^{۴}-۱۰۰h^{۲}+۴\times۲۴^{۲}=۰\Rightarrow h^{۲}=۵۰\pm\sqrt{۱۹۶}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}h^{۲}=۶۴\Rightarrow h=۸\ ,\ R=۳\\ h^{۲}=۳۶\Rightarrow h=۶\ ,\ R=۴\end{cases}\ ,\quad V=\pi R^{۲}h\Rightarrow\begin{cases}V=۷۲\pi\\ V=۹۶\pi\end{cases}$$

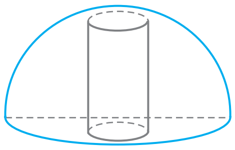
بنابراین حجم بیش‌تر برابر ۹۶π می‌باشد.

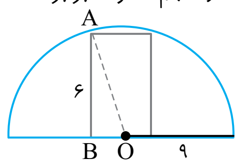
۱۹- گزینه‌ی ۴ تمام نقاط محیط قاعده‌ی استوانه روی کره قرار دارد. پس AO برابر شعاع دایره است و داریم:

$$\overset{\Delta}{ABO}: AO^{۲}=OB^{۲}+AB^{۲}\Rightarrow ۹^{۲}=OB^{۲}+۶^{۲}\Rightarrow OB=\sqrt{۸۱-۳۶}\Rightarrow OB=\sqrt{۴۵}=۳\sqrt{۵}$$

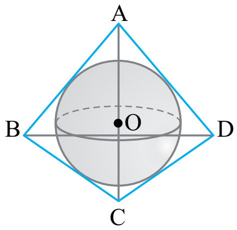
بنابراین شعاع قاعده استوانه برابر $۳\sqrt{۵}$ است و حجم استوانه برابر است با:

$$V=\pi r^{۲}h=\pi(۳\sqrt{۵})^{۲}\times ۶=\pi\times ۴۵\times ۶=۲۷۰\pi$$





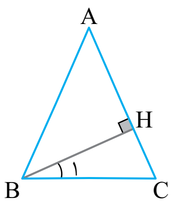
۲۰- گزینه‌ی ۱ چهار وجهی منتظم یک هرم با قاعده و وجه مثلث متساوی الاضلاع است. اگر ABCD چهار وجهی منتظم و O مرکز دایره باشد، ارتفاع چهار وجهی منتظم برابر طول یال $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ برابر طول یال اســت (به محاســبات ســؤال ۱۰ مراجعه کنید). ضمناً اگر نقطه‌ی O را به چهار رأس A، B، C و D وصل کنیم، چهار هرم با قاعده‌ی مثلث متســاوی الاضلاع و ارتفاع شــعاع دایره (R) به وجود می‌آید. بنابراین اگر مســاحت قاعده را S بنامیم، حجم چهار وجهی را می‌توان به دو گونه محاسبه کرد:



$$\frac{۱}{۳}\times S\times h=۴\times\frac{۱}{۳}\times S\times R\Rightarrow h=۴R\Rightarrow R=\frac{h}{۴}\Rightarrow R=\frac{\frac{\sqrt{۶}}{۳}\times ۲\sqrt{۶}}{۴}=\frac{۱۲}{۱۲}=۱$$

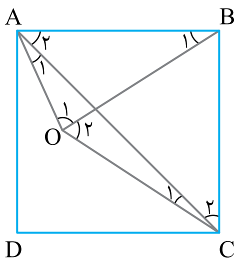
پاسخ تشریحی آزمون ۹۵

۱- گزینه‌ی ۲ با توجه به معلومات مسأله $BH=\frac{AB}{۲}$. می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی ۳۰° نصف وتر است و برعکس، پس $\hat{A}=۳۰^\circ$ و داریم:



$$\hat{A}+۲\hat{C}=۱۸۰^\circ\Rightarrow\begin{cases}\hat{C}=۷۵^\circ\\ \hat{B}_۱+\hat{H}+\hat{C}=۱۸۰^\circ\end{cases}\Rightarrow\hat{B}_۱+۷۵^\circ+۹۰^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{B}_۱=۱۵^\circ$$

۲- گزینه‌ی ۴ مثلث مورد نظر در شکل روبه‌رو، مثلث AOC است. داریم:



$$\begin{cases}\hat{C}_۱+\hat{C}_۲=۶۰^\circ\\ \hat{C}_۲=۴۵^\circ\end{cases}\Rightarrow\hat{C}_۱=۱۵^\circ$$

ضمناً با توجه به این که AOB متساوی‌الساقین است و $\hat{B}_۱=۹۰^\circ-۶۰^\circ=۳۰^\circ$ داریم:

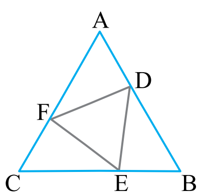
$$\hat{A}_۱=\hat{O}_۱=\frac{۱۸۰^\circ-\hat{B}_۱}{۲}\Rightarrow\hat{O}_۱=\frac{۱۵۰^\circ}{۲}=۷۵^\circ$$

بنابراین نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{\hat{O}_۱+\hat{O}_۲}{\hat{C}_۱}=\frac{۷۵^\circ+۶۰^\circ}{۱۵^\circ}=\frac{۷۵^\circ}{۱۵^\circ}+\frac{۶۰^\circ}{۱۵^\circ}=۵+۴=۹$$

۳- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول:** مثلث FDE نیز مانند مثلث ABC متســاوی‌الاضلاع اســت. طول BE را برابر x در نظــر می‌گیریم. در مثلث BDE، زاویه‌ی B ۶۰ درجه است و BD دو برابر BE است، پس مثلث BDE قائم‌الزاویه و زاویه‌ی D برابر ۳۰ درجه می‌باشد. پس طول DE برابر است با:

$$DE^{۲}=BD^{۲}-BE^{۲}=(۲x)^{۲}-x^{۲}=۳x^{۲}\Rightarrow DE=\sqrt{۳}x$$



نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه FDE و ABC برابر مربع نسبت تشابه است، پس:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{FDE}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\left(\frac{DE}{AB}\right)^{۲}=\left(\frac{\sqrt{۳}x}{۳x}\right)^{۲}=\frac{۱}{۳}$$

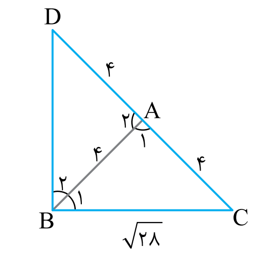
راه‌حل دوم: مساحت مثلث‌های BDE ،EFC و ADF با هم برابر و مساوی است با:

$$S_{\overset{\Delta}{BDE}}=\frac{۱}{۲}BD\times BE\times\sin\hat{B}=\frac{۱}{۲}x\times ۲x\times\sin ۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}x^۲$$

بنابراین نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{DEF}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۳x)^۲-(\frac{\sqrt{۳}}{۲}x^۲)\times ۳}{\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۳x)^۲}=\frac{۹x^۲-۶x^۲}{۹x^۲}=\frac{۱}{۳}$$

۴- گزینه‌ی ۱ مطابق شـکل روبه‌رو، دو مثلث ABC و ADB هر دو در رأس A متساوی‌السـاقین هستند، پس $\hat{B}_۱=\hat{C}$ و $\hat{B}_۲=\hat{D}$ و داریم:

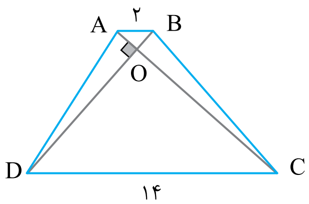


$$\begin{cases}\hat{B}=\hat{B}_۱+\hat{B}_۲=\hat{C}+\hat{D}\\ \overset{\Delta}{BCD}:\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=۱۸۰^\circ\end{cases}\Rightarrow ۲\hat{B}=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{B}=۹۰^\circ$$

بنابراین مثلث BCD قائم‌الزاویه است و داریم:

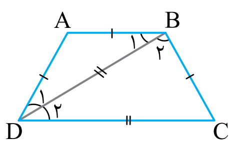
$$BC^۲+BD^۲=CD^۲\Rightarrow BD=\sqrt{۸^۲-(\sqrt{۲۸})^۲}=\sqrt{۶۴-۲۸}=\sqrt{۳۶}=۶$$

۵- گزینه‌ی ۴ مثلث‌های AOB و DOC قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین هستند، پس:



$$\begin{cases}\sqrt{۲}OA=AB\Rightarrow OA=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}\\ \sqrt{۲}OD=DC\Rightarrow OD=\frac{۱۴}{\sqrt{۲}}=۷\sqrt{۲}\\ \overset{\Delta}{AOD}:OA^۲+OD^۲=AD^۲\Rightarrow AD=\sqrt{(\sqrt{۲})^۲+(۷\sqrt{۲})^۲}=\sqrt{۲+۹۸}=۱۰\end{cases}$$

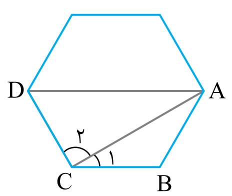
۶- گزینه‌ی ۴ مطابق شـکل روبه‌رو، دو مثلث ABD و BDC متساوی‌السـاقین هسـتند، پس $\hat{B}_۲=\hat{C}$ و $\hat{B}_۱=\hat{D}_۱$. بـا توجه به ایـن که در ذوزنقه‌ی ABCD داریم $AB||CD$، پس طبـق قضیه‌ی خطوط موازی مورب داریم $\hat{B}_۱=\hat{D}_۲$. بنابراین $\hat{D}_۱=\hat{D}_۲$. ضمناً با توجه به این که $\hat{C}=\hat{D}$ داریم:



$$\hat{C}=\hat{D}_۱+\hat{D}_۲\Rightarrow\hat{C}=۲\hat{D}_۲\Rightarrow\hat{D}_۲=\frac{\hat{C}}{۲}$$

$$\overset{\Delta}{ABC}:\hat{B}_۲+\hat{C}+\hat{D}_۲=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{C}+\hat{C}+\frac{\hat{C}}{۲}=۱۸۰^\circ\Rightarrow\frac{۵\hat{C}}{۲}=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{C}=۷۲^\circ$$

۷- گزینه‌ی ۱ در شش ضلعی منتظم می‌دانیم هر زاویه برابر ۱۲۰° است، پس:



$$\overset{\Delta}{ABC}:\hat{C}_۱+\hat{A}+\hat{B}=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۲\hat{C}_۱+۱۲۰^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{C}_۱=۳۰^\circ\Rightarrow\hat{C}=۱۲۰^\circ$$

$$\Rightarrow\hat{C}_۱+\hat{C}_۲=۱۲۰^\circ\xrightarrow{\hat{C}_۱=۳۰^\circ}\hat{C}_۲=۹۰^\circ$$

بنابراین مثلث ACD قائم‌الزاویه است، اگر طول ضلع شش ضلعی را a بنامیم، طول ضلع AD برابر 2a است و داریم:

$$\overset{\Delta}{ACD}:AD^۲=CD^۲+AC^۲\Rightarrow AC=\sqrt{۴a^۲-a^۲}=\sqrt{۳}a$$

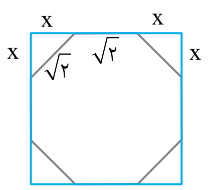
بنابراین مساحت مثلث ACD برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}AC\times CD=\frac{۱}{۲}\times\sqrt{۳}a\times a=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a^۲$$

بنابراین نسبت مساحت مثلث به مساحت شش ضلعی برابر است با:

$$\frac{S}{S'}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}a^۲}{۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times a^۲}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۶}{۴}}=\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$$

۸- گزینه‌ی ۲ مطابق شکل روبه‌رو در مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین داریم:



$$x\sqrt{۲}=\sqrt{۲}\Rightarrow x=۱$$

بنابراین ضلع مربع برابر است با:

$$x+\sqrt{۲}+x=\sqrt{۲}+۲$$

و مساحت مربع برابر است با:

$$(\sqrt{۲}+۲)^{۲}=۲+۴+۴\sqrt{۶}=۶+۴\sqrt{۲}$$

۹- گزینه‌ی ۲ با توجه به این که $AB\|A'B'$، دو مثلث ABM و $A'B'M$ متشابه با نسبت تشابه $\frac{۱}{۲}$ هستند، بنابراین نسبت مساحت‌ها یک به چهار است. ضمناً با توجه به این که AM میانه‌ی مثلث ABC است، پس مثلث ABC را به دو مثلث با مساحت‌های مساوی تقسیم می‌کند و داریم:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{A'B'M}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{\frac{۱}{۴}\times S_{\overset{\Delta}{ABM}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۸}$$

۱۰- گزینه‌ی ۳ چون مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است. پس:

$$OA=OB=AB=۴\sqrt{۳}$$

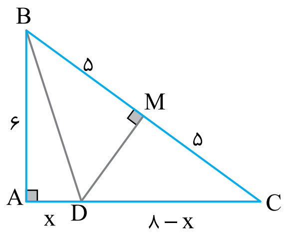
پس ارتفاع مثلث OAB برابر است با:

$$h=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times۴\sqrt{۳}=۶$$

پس ارتفاع مثلث OCD برابر است با $-۶+۴\sqrt{۳}$. بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$S_{\overset{\Delta}{OCD}}=\frac{۱}{۲}\times۴\sqrt{۳}(-۶+۴\sqrt{۳})=۲\sqrt{۳}(-۶+۴\sqrt{۳})=-۱۲\sqrt{۳}+۲۴=۱۲(-\sqrt{۳}+۲)$$

۱۱- گزینه‌ی ۲ با توجه به قضیه‌ی فیثاغورس، در مثلث ABC، طول BC برابر ۱۰ است و $BM=MC=۵$. مثلث‌های ABD، BMD و CMD قائم‌الزاویه هستند و می‌توان در آن‌ها از قضیه‌ی فیثاغورس استفاده کرد:



$$\begin{cases}\begin{cases}\overset{\Delta}{ABD}:x^{۲}+۶^{۲}=BD^{۲}\\ \overset{\Delta}{BMD}:۵^{۲}+MD^{۲}=BD^{۲}\end{cases}\Rightarrow x^{۲}+۳۶=۲۵+MD^{۲}\\ \overset{\Delta}{CMD}:(۸-x)^{۲}=۵^{۲}+MD^{۲}\end{cases}$$

$$\Rightarrow x^{۲}+۳۶=(۸-x)^{۲}\Rightarrow x^{۲}+۳۶=۶۴+x^{۲}-۱۶x\Rightarrow۱۶x=۲۸\Rightarrow x=\frac{۷}{۴}$$

۱۲- گزینه‌ی ۱ محیط ذوزنقه برابر ۱۱ است، پس:

$$MB+MN+NC+BC=۱۱\Rightarrow MB+NC=۴$$

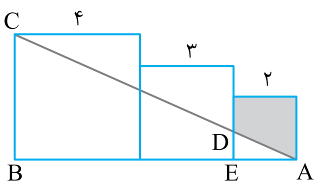
در ضمن با توجه به قضیه‌ی تالس در مثلث ABC داریم:

$$\frac{MN}{BC}=\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}\Rightarrow\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{AM}{AB-AM}=\frac{AN}{AC-AN}=\frac{۳}{۴-۳}\Rightarrow\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}=۳$$
$$\Rightarrow AM=۳MB\ ,\ AN=۳NC\Rightarrow AM+AN=۳(MB+NC)=۳\times۴=۱۲$$

بنابراین محیط مثلث AMN برابر است با:

$$P=AM+AN+MN=۱۲+۳=۱۵$$

۱۳- گزینه‌ی ۳ در مثلث ABC، آن‌جا که $BC\|DE$، طبق قضیه‌ی تالس داریم:

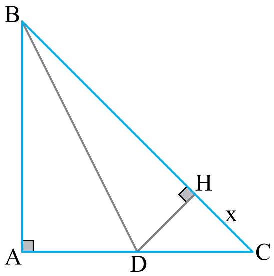


$$\frac{DE}{CB}=\frac{AE}{AB}\Rightarrow\frac{DE}{۴}=\frac{۲}{۲+۳+۴}\Rightarrow DE=\frac{۸}{۹}$$

$$S_{\overset{\Delta}{ADE}}=\frac{۱}{۲}AE\times DE=\frac{۱}{۲}\times۲\times\frac{۸}{۹}=\frac{۸}{۹}$$

بنابراین مساحت چهار ضلعی سایه زده شده برابر است با:

$$S=۲\times۲-\frac{۸}{۹}=۴-\frac{۸}{۹}=\frac{۳۶-۸}{۹}=\frac{۲۸}{۹}$$



۱۴- گزینه‌ی ۴ در مثلث قائم‌الزاویه ABD داریم:

$$BD^۲=AB^۲+AD^۲\Rightarrow BD=\sqrt{(۹/۶)^۲+(۲/۸)^۲}=\sqrt{۹۲/۱۶+۷/۸۴}=۱۰$$

ضمناً در مثلث BDH داریم:

$$BD^۲=BH^۲+HD^۲\Rightarrow HD=\sqrt{۱۰^۲-۸^۲}=\sqrt{۳۶}=۶$$

همچنین در مثلث CHD داریم:

$$CD^۲=CH^۲+DH^۲\Rightarrow CD=\sqrt{x^۲+۳۶}$$

دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC و CDH در زاویه‌ی $\hat{C}$ مشترک هستند، پس:

$$\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{CDH}\Rightarrow\frac{DC}{BC}=\frac{HD}{AB}\Rightarrow\frac{\sqrt{x^۲+۳۶}}{۸+x}=\frac{۶}{۹/۶}\Rightarrow\frac{\sqrt{x^۲+۳۶}}{۸+x}=\frac{۱۰}{۱۶}$$

با امتحان کردن گزینه‌ها، تنها $x=۸$ در معادله‌ی فوق صدق می‌کند.

۱۵- گزینه‌ی ۴ دو ضلع MN ، BC بر AB عمود بوده، پس با هم موازی هستند. بنابراین طبق قضیه‌ی تالس در مثلث ABC داریم:

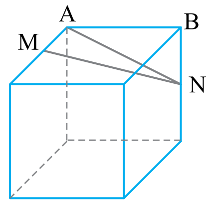
$$\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}\Rightarrow\frac{AN}{AN+۸}=\frac{۱/۲}{۶}\Rightarrow ۵AN=AN+۸\Rightarrow AN=۲$$

با توجه به این که $AN=۲$ ، پس $AC=۱۰$ و در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC داریم:

$$AC^۲=BC^۲+AB^۲\Rightarrow AB=\sqrt{۱۰۰-۳۶}=۸$$

بنابراین مساحت ABC برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}\times AB\times BC=\frac{۱}{۲}\times۸\times۶=۲۴$$



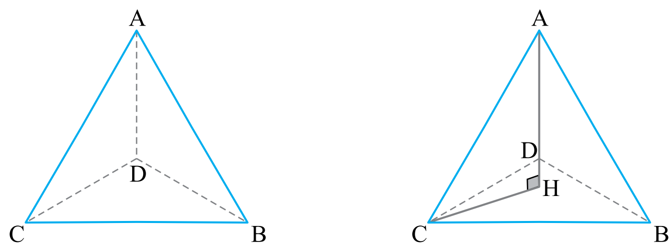
۱۶- گزینه‌ی ۱ در شکل مقابل مثلث ABN قائم‌الزاویه است و داریم:

$$AN^۲=BN^۲+AB^۲\Rightarrow AN=\sqrt{(\frac{\sqrt{۶}}{۲})^۲+(\sqrt{۶})^۲}=\sqrt{\frac{۶}{۴}+۶}=\sqrt{\frac{۳۰}{۴}}=\frac{\sqrt{۳۰}}{۲}$$

با توجه به عمود بودن ضلع AM بر خط AB ، مثلث AMN نیز قائم‌الزاویه است، پس:

$$MN^۲=AM^۲+AN^۲\Rightarrow MN=\sqrt{(\frac{\sqrt{۶}}{۲})^۲+(\frac{\sqrt{۳۰}}{۲})^۲}=\sqrt{\frac{۳۶}{۴}}=۳$$

۱۷- گزینه‌ی ۱ چهار وجهی منتظم یک هرم با قاعده و وجوه مثلث متساوی‌الساقین است. پای عمود AH ، مرکز ثقل (محل تلاقی میانه‌ها) مثلث BCD می‌باشد. بنابراین طول CH ، $\frac{۲}{۳}$ برابر میانه (ارتفاع) مثلث BCD است و داریم:



$$CH=\frac{۲}{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\sqrt{۶}=\sqrt{۲}$$

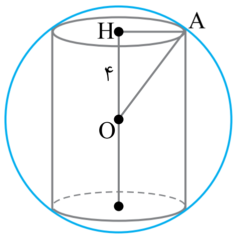
بنابراین در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ACH داریم:

$$AC^۲=AH^۲+CH^۲\Rightarrow AH=\sqrt{(\sqrt{۶})^۲-(\sqrt{۲})^۲}=\sqrt{۴}=۲$$

۱۸- گزینه‌ی ۲ اگر شعاع قاعده‌ی استوانه را r در نظر بگیریم، ارتفاع استوانه ۴r و ارتفاع هر یک از دو مخروط برابر ۲r است، پس حجم خواسته شده برابر است با:

$$V=V_{\text{استوانه}}-۲\times V_{\text{مخروط}}=\pi r^۲\times۴r-۲\times\frac{۱}{۳}\times\pi r^۲(۲r)=۴\pi r^۳-\frac{۴}{۳}\pi r^۳=\frac{۸}{۳}\pi r^۳\Rightarrow\frac{V}{V_{\text{استوانه}}}=\frac{\frac{۸}{۳}\pi r^۳}{۴\pi r^۳}=\frac{۲}{۳}$$

۱۹- گزینه‌ی ۱ مطابق شکل روبه‌رو، در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OHA داریم:



$$OA^{۲}=OH^{۲}+AH^{۲}\Rightarrow R^{۲}=(\frac{h}{۲})^{۲}+r^{۲}\Rightarrow R=\sqrt{۴^{۲}+۳^{۲}}\Rightarrow R=۵$$

بنابراین شعاع کره برابر ۵ است و حجم آن برابر است با:

$$V=\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}=\frac{۴}{۳}\times\pi\times۵^{۳}=\frac{۵۰۰\pi}{۳}$$

۲۰- گزینه‌ی ۴ سطح کل نیم کره‌ای به شعاع R برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}\times۴\pi R^{۲}+\pi R^{۲}=۳\pi R^{۲}\xrightarrow{S=۲۷\pi}۳\pi R^{۲}=۲۷\pi\Rightarrow R^{۲}=۹\Rightarrow R=۳$$

بنابراین حجم کره‌ای به شعاع $R=۳$ برابر است با:

$$V=\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}=\frac{۴}{۳}\pi\times۲۷=۳۶\pi$$

۱۸

آزمون‌های جامع کنکوری

پاسخ تشریحی آزمون ۹۶

۱- گزینه‌ی ۴ با توجه به جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی $a_n=a_۱+(n-۱)d$، داریم:

$$۲a_۱+۳a_۲-۵a_۳=۸\Rightarrow ۲a_۱+۳(a_۱+d)-۵(a_۱+۲d)=۸\Rightarrow ۵a_۱+۳d-۵a_۱-۱۰d=۸\Rightarrow -۷d=۸\Rightarrow d=-\frac{۸}{۷}$$

بنابراین حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$۵a_۱-۳a_۲-۲a_۳=۵a_۱-۳(a_۱+d)-۲(a_۱+۲d)=-۳d-۴d=-۷d=-۷(-\frac{۸}{۷})=۸$$

۲- گزینه‌ی ۳ با تقسیم کردن ۲۵ بر ۹۹ متوجه می‌شویم حاصل کسر $\frac{۲۵}{۹۹}$ به صورت اعشاری برابر $۰/۲۵۲۵۲۵...=۰/\overline{۲۵}$ است، پس جمله‌ی دهم دنباله‌ی تقریبات اعشاری برابر است با $۰/۲۵۲۵۲۵۲۵۲۵$ که مجموع ارقام آن برابر است با: $۵\times(۲+۵)=۵\times۷=۳۵$

۳- گزینه‌ی ۱ با توجه به این که $(۲-\sqrt{۳})(۲+\sqrt{۳})=۱$ پس $۲-\sqrt{۳}=(۲+\sqrt{۳})^{-۱}$ و داریم:

$$\sqrt[۳]{A}=(۲-\sqrt{۳})^{\frac{۳}{۲}}(۲+\sqrt{۳})^{\frac{۴}{۳}}\times\sqrt[۳]{\sqrt{۲}}=(۲+\sqrt{۳})^{-\frac{۳}{۲}}\times(۲+\sqrt{۳})^{\frac{۴}{۳}}\times\sqrt[۶]{۲}=(۲+\sqrt{۳})^{\frac{۴}{۳}-\frac{۳}{۲}}\times۲^{\frac{۱}{۶}}=(۲+\sqrt{۳})^{-\frac{۱}{۶}}\times۲^{\frac{۱}{۶}}$$

$$=(۲-\sqrt{۳})^{\frac{۱}{۶}}\times۲^{\frac{۱}{۶}}=(۴-۲\sqrt{۳})^{\frac{۱}{۶}}=((\sqrt{۳}-۱)^۲)^{\frac{۱}{۶}}=(\sqrt{۳}-۱)^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{\sqrt{۳}-۱}\Rightarrow A=\sqrt{۳}-۱$$

۴- گزینه‌ی ۱ تابع به ازای مقادیر صحیح و غیر آن، دو مقدار مختلف می‌دهد. در بین اعداد به صورت $\frac{۲۴}{k}$، به ازای ۸ مقدار $k=۱,۲,۳,۴,۶,۸,۱۲,۲۴$ ورودی تابع عددی صحیح است، پس:

$$f(\frac{۲۴}{۱})+f(\frac{۲۴}{۲})+\cdots+f(\frac{۲۴}{۲۴})=(۲۴+۱۲+۸+۶+۴+۳+۲+۱)+۱۶(-۱)=۶۰-۱۶=۴۴$$

۵- گزینه‌ی ۲ زیر رادیکال باید نامنفی و مخرج کسر نباید صفر باشد، پس:

$$\begin{cases}۹x^۲-x^۴\geq۰\Rightarrow x^۲(۹-x^۲)\geq۰\Rightarrow -۳\leq x\leq ۳\\ x^۲-۱>۰\Rightarrow\begin{cases}x>۱\\x<-۱\end{cases}\end{cases}\Rightarrow D=[-۳,-۱)\cup(۱,۳]$$

بنابراین اعداد صحیح ۳، ۲ ، -۲ و -۳ در دامنه‌ی این تابع قرار دارند.

۶- گزینه‌ی ۲ جدول تعیین علامت f به صورت زیر است:

x		-۱		۲	
f	$-$	⋮	$+$	⋮	$-$

چون دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{(ax^۲+bx+۲)(f(x))}$ تمام اعداد حقیقی است، بایستی $(ax^۲+bx+۲)f(x)$ همواره نامنفی باشد، پس جدول تعیین علامت عبارت $ax^۲+bx+۲$ به صورت زیر خواهد بود:

x		-۱		۲	
$ax^۲+bx+c$	$-$	⋮	$+$	⋮	$-$

پس باید -۱ و ۲ ریشه‌های این عبارت درجه‌ی دو باشند و a منفی باشد، بنابراین:

$$\begin{cases}۴a+۲b+۲=۰\\a-b+۲=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-۱\\b=۱\end{cases}\Rightarrow ۲a+b=-۱$$

۷- گزینه‌ی ۲ چون $f(۲)=۳$، پس $f^{-۱}(۳)=۲$ و داریم:

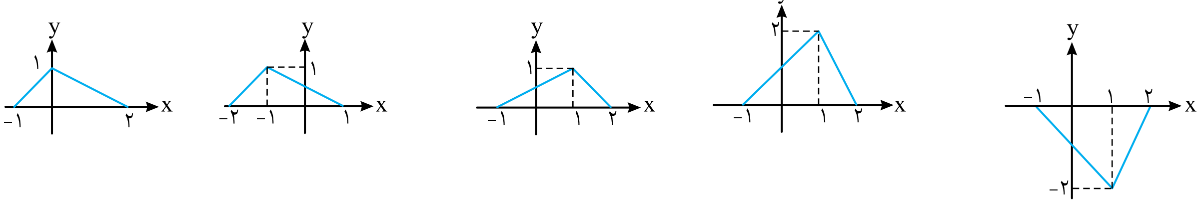
$$g^{-۱}(۱-f^{-۱}(۳))=g^{-۱}(۱-۲)=g^{-۱}(-۱)$$

با توجه به این که $g(a)=-۱$، پس $g^{-۱}(-۱)=a$ و داریم:

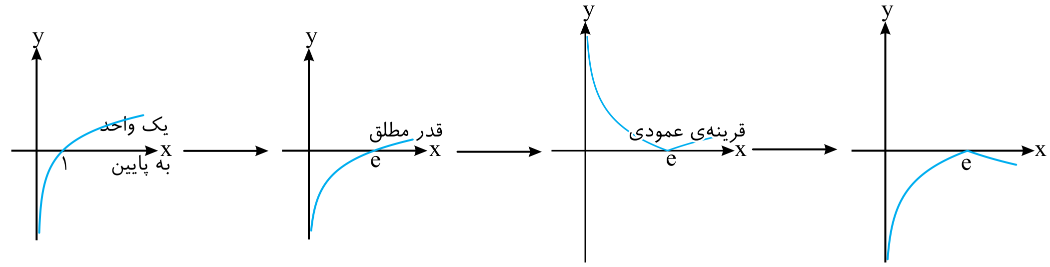
$$۴-a=g^{-۱}(-۱)\Rightarrow ۴-a=a\Rightarrow ۲a=۴\Rightarrow a=۲$$

۸- گزینه‌ی ۴ برای رسم نمودار $y=-۲f(۱-x)$ طی مراحل زیر داریم:

$$y=f(x)\xrightarrow{\text{یک واحد به چپ}}y=f(x+۱)\xrightarrow{\text{قرینه‌ی افقی}}y=f(-x+۱)\xrightarrow{\text{دو برابر عمودی}}y=۲f(-x+۱)\xrightarrow{\text{قرینه‌ی عمودی}}y=-۲f(-x+۱)$$

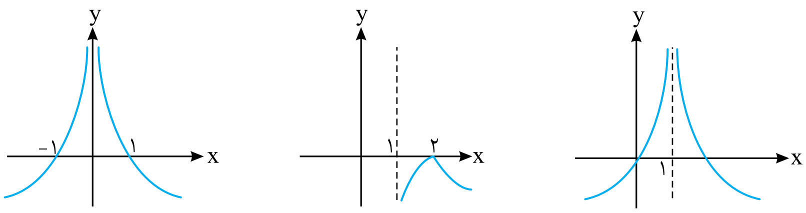


۹- گزینه‌ی ۳ نمودار تابع گزینه‌ی (۳) را با طی مراحل زیر رسم می‌کنیم:



$y=\ln x$ $\quad$ $y=\ln x-۱$ $\quad$ $y=|\ln x-۱|$ $\quad$ $y=-|\ln x-۱|$

سایر گزینه‌ها به شکل زیر هستند:



$-\ln|x|$ $\quad$ $y=-|\ln(x-۱)|$ $\quad$ $y=-\ln|x-۱|$

۱۰- گزینه‌ی ۴ ابتدا دو مقدار داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\log ۴=a\Rightarrow ۲\log ۲=a\Rightarrow \log ۲=\frac{a}{۲}$$

$$\log\sqrt{۳}=b\Rightarrow \frac{۱}{۲}\log ۳=b\Rightarrow \log ۳=۲b$$

بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با:

$$\log_۳ ۵=\frac{\log ۵}{\log ۳}=\frac{\log\frac{۱۰}{۲}}{\log ۳}=\frac{\log ۱۰-\log ۲}{\log ۳}=\frac{۱-\frac{a}{۲}}{۲b}=\frac{۲-a}{۴b}$$

۱۱- گزینه‌ی ۳ ابتدا x را از معادله‌ی داده شده پیدا می‌کنیم:

$$\log_x \sqrt[۳]{۵}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow \frac{۱}{۳}\log_x ۵=\frac{۱}{۶}\Rightarrow \log_x ۵=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۵=x^{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow x=۲۵\Rightarrow \log_۲(x+۷)=\log_۲ ۳۲=\log_۲ ۲^۵=۵$$

۱۲- گزینه‌ی ۳ ابتدا دامنه‌ی تعریف لگاریتم‌ها را مشخص می‌کنیم:

$$\begin{cases} x+۱>۰\Rightarrow x>-۱ \\ \frac{۱}{x}-۱>۰\Rightarrow \frac{۱-x}{x}>۰\Rightarrow ۰<x<۱ \end{cases}\Rightarrow ۰<x<۱$$

اکنون به حل معادله می‌پردازیم:

$$\log_۲(x+۱)+\log_۲(\frac{۱}{x}-۱)=۱\Rightarrow \log_۲(x+۱)(\frac{۱}{x}-۱)=۱\Rightarrow ۱-x+\frac{۱}{x}-۱=۲\Rightarrow \frac{۱}{x}=۲+x\Rightarrow x^۲+۲x-۱=۰\Rightarrow x=-۱\pm\sqrt{۲}$$

تنها جواب قابل قبول معادله $x=\sqrt{۲}-۱$ است، زیرا در محدوده‌ی $(۰,۱)$ قرار دارد.

۱۳- گزینه‌ی ۴ طرفین معادله‌ی داده شده را یک بار از سمت راست و یک بار از سمت چپ در B ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases} AB-BA=I\xrightarrow{\times B}AB\times B-BA\times B=I\times B\Rightarrow AB^۲-BAB=B \\ AB-BA=I\xrightarrow{B\times}B\times AB-B\times BA=B\times I\Rightarrow BAB-B^۲A=B \end{cases}\xrightarrow{+}AB^۲-BAB+BAB-B^۲A=B+B\Rightarrow AB^۲-B^۲A=۲B$$

۱۴- گزینه‌ی ۱ ماتریس $A-B$ برابر است با:

$$A-B=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix}$$

با استفاده از دستور محاسبه‌ی ماتریس وارون داریم:

$$(A-B)^{-۱}=\frac{۱}{(-۱)(-۱)-۰\times(-۲)}\begin{bmatrix} -۱ & -(۰) \\ -(-۲) & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$$

۱۵- گزینه‌ی ۴ با جمع کردن دو معادله‌ی داده شده، ماتریس $A+B$ و دترمینان آن را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} A+۳B=\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۹ & ۵ \end{bmatrix} \\ ۳A+B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix} \end{cases}\xrightarrow{+}۴A+۴B=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۱۲ & ۱۰ \end{bmatrix}\Rightarrow A+B=\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۱۲ & ۱۰ \end{bmatrix}\Rightarrow |A+B|=(\frac{۱}{۴})^{۲}(-۱\times۱۰-۳\times۱۲)$$

$$\Rightarrow |A+B|=\frac{۱}{۱۶}(-۱۰-۳۶)=-\frac{۴۶}{۱۶}=-\frac{۲۳}{۸}$$

۱۶- گزینه‌ی ۴ تمامی نسبت‌های مثلثاتی را با استفاده از زاویه‌ی ۱۰ درجه بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{۲\sin ۱۰۰^\circ-\cos ۱۷۰^\circ}{۳\sin ۳۵۰^\circ-۲\cos ۲۶۰^\circ}=\frac{۲\sin(۹۰^\circ+۱۰^\circ)-\cos(۱۸۰^\circ-۱۰^\circ)}{۳\sin(۳۶۰^\circ-۱۰^\circ)-۲\cos(۲۷۰^\circ-۱۰^\circ)}=\frac{۲\cos ۱۰^\circ+\cos ۱۰^\circ}{-۳\sin ۱۰^\circ+۲\sin ۱۰^\circ}=\frac{۳\cos ۱۰^\circ}{-\sin ۱۰^\circ}=-۳\cot ۱۰^\circ=-۳\tan ۸۰^\circ$$

۱۷- گزینه‌ی ۲ براساس قضیه‌ی سینوس‌ها در مثلث ABC داریم:

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}\xrightarrow{\frac{a}{\sin\hat{A}}=۴}b=۴\sin\hat{B}\ ,\ c=۴\sin\hat{C}\Rightarrow\frac{\sin\hat{A}+\sin\hat{B}+\sin\hat{C}}{a+b+c}=\frac{\sin\hat{A}+\sin\hat{B}+\sin\hat{C}}{۴\sin\hat{A}+۴\sin\hat{B}+۴\sin\hat{C}}=\frac{۱}{۴}$$

۱۸- گزینه‌ی ۴ طبق قضیه‌ی کسینوس‌ها در مثلث BDC می‌دانیم:

$$BD^{۲}=BC^{۲}+CD^{۲}-۲\times BC\times CD\times\cos\hat{C}\Rightarrow ۲۸=۱۶+CD^{۲}-۲\times۴\times CD\times\frac{۱}{۲}\Rightarrow CD^{۲}-۴CD-۱۲=۰\Rightarrow CD=۲\pm\sqrt{۱۶}\Rightarrow\begin{cases} CD=۶ \\ CD=-۲\ \text{غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

بنابراین اضلاع متوازی‌الاضلاع ۴ و ۶ هستند و محیط متوازی‌الاضلاع برابر است با:

$$P=۲\times(۴+۶)=۲۰$$

۱۹- گزینه‌ی ۱ تعداد زیر مجموعه‌های k عضوی یک مجموعه‌ی n عضوی برابر $\binom{n}{k}$ است، پس:

$$\binom{n}{۳}=\binom{n}{۵}\Rightarrow n=۵+۳=۸$$

تعداد زیر مجموعه‌های دو عضوی این مجموعه برابر است با:

$$\binom{۸}{۲}=\frac{۸\times۷}{۲}=۲۸$$

۲۰- گزینه‌ی ۲ تعداد حالات خواسته شده برابر است با:

$$\binom{۴}{۲}\times\binom{۴}{۲}\times\binom{۵}{۲}\times۶!=۶\times۶\times۱۰\times۶!=۳۶۰\times۶!$$

پاسخ تشریحی آزمون ۹۷

۱- گزینه‌ی ۲ جمله‌ی عمومی دنباله‌ی هندسی به صورت $a_n=a_۱q^{n-۱}$ است، بنابراین:

$$\begin{cases} a_۷\times a_{۲۱}=۱۰۸\Rightarrow a_۱q^{۶}\times a_۱q^{۲۰}=۱۰۸\Rightarrow a_۱^{۲}q^{۲۶}=۱۰۸ \\ a_{۱۵}=۱۲\Rightarrow a_۱q^{۱۴}=۱۲\Rightarrow a_۱^{۲}q^{۲۸}=۱۴۴ \end{cases}\Rightarrow\frac{۱}{q^{۲}}=\frac{۱۰۸}{۱۴۴}\Rightarrow q^{۲}=\frac{۱۴۴}{۱۰۸}=\frac{۳۶}{۲۷}$$

جمله‌ی سیزدهم دنباله، دو جمله قبل از جمله‌ی پانزدهم است، پس:

$$a_{۱۵}=a_{۱۳}\times q^{۲}\Rightarrow a_{۱۳}=\frac{a_{۱۵}}{q^{۲}}=\frac{۱۲}{\frac{۳۶}{۲۷}}=\frac{۲۷}{۳}=۹$$

۲- گزینه‌ی ۲ عدد اعشاری کسر $\frac{۸}{۱۵}$ به صورت $۰/۵۳۳۳۳...=۰/۵\overline{۳}$ می‌باشد. دنباله‌ی تقریبات اعشاری این کسر برابر است با:

$$۰/۵,۰/۵۳,۰/۵۳۳,۰/۵۳۳۳,۰/۵۳۳۳۳,...$$

بنابراین اختلاف جمله‌ی پنجم و چهارم برابر است با:

$$a_۵-a_۴=۰/۵۳۳۳۳-۰/۵۳۳۳=۰/۰۰۰۰۳=۳\times ۱۰^{-۵}$$

۳- گزینه‌ی ۴ اگر عبارت مورد نظر را A بنامیم، $A^۲$ برابر است با:

$$A^۲=\left(\sqrt{۲-\sqrt{۳}}+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}\right)^۲\sqrt[۳]{(۲\sqrt{۲})^۲}=(۲-\sqrt{۳}+۲+\sqrt{۳}+۲\sqrt{۴-۳})\sqrt[۳]{۸}=(۴+۲\sqrt{۱})\times ۲=۱۲$$

بنابراین $A^۲=۱۲$ و با توجه به مثبت بودن A داریم: $A=۲\sqrt{۳}$

۴- گزینه‌ی ۴ برای آن که f تابع باشد، باید زوج مرتب‌های با مؤلفه‌ی اول یکسان، یکی باشند، پس:

$$(۱,a^۲)\in f\ ,\ (۱,۴)\in f\Rightarrow a^۲=۴\Rightarrow a=\pm ۲$$

$$(۲,۲a-b)\in f\ ,\ (۲,۰)\in f\Rightarrow ۲a-b=۰\Rightarrow b=۲a$$

بنابراین دو حالت زیر ممکن است:

$$\text{I)}\begin{cases}a=۲\\ b=۴\end{cases}\Rightarrow f=\{(۱,۴),(۲,۰),(۲,۱),(۴,۱۶)\}\ \text{تابع نیست}$$

$$\text{II)}\begin{cases}a=-۲\\ b=-۴\end{cases}\Rightarrow f=\{(۱,۴),(۲,۰),(-۶,۱),(-۴,-۱۶)\}\ \text{تابع است}$$

فقط حالت دوم تابع است، پس $b=-۴$ و $f(b)=-۱۶$.

۵- گزینه‌ی ۳ ابتدا ضابطه‌ی تابع $y=f(f(x))$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(f(x))=۳-۲f(x)=۳-۲(۳-۲x)=۴x-۳$$

حال با توجه به این که دامنه‌ی تابع $[-۲,۲]$ می‌باشد، داریم:

$$-۲\le x\le ۲\Rightarrow -۸\le ۴x\le ۸\Rightarrow -۱۱\le ۴x-۳\le ۵$$

بنابراین برد تابع بازه‌ی $[-۱۱,۵]$ می‌باشد.

۶- گزینه‌ی ۳ نامعادله‌ی $\frac{mx^۲-x-۱}{x^۲+۱}<۲$ به ازای تمام مقادیر x برقرار است، پس:

$$\frac{mx^۲-x-۱}{x^۲+۱}-۲<۰\Rightarrow\frac{(m-۲)x^۲-x-۳}{x^۲+۱}<۰\xrightarrow{x^۲+۱>۰}(m-۲)x^۲-x-۳<۰\Rightarrow\begin{cases}\Delta<۰\Rightarrow ۱+۱۲(m-۲)<۰\Rightarrow ۱۲m<۲۳\Rightarrow m<\frac{۲۳}{۱۲}\\ a<۰\Rightarrow m-۲<۰\Rightarrow m<۲\end{cases}$$

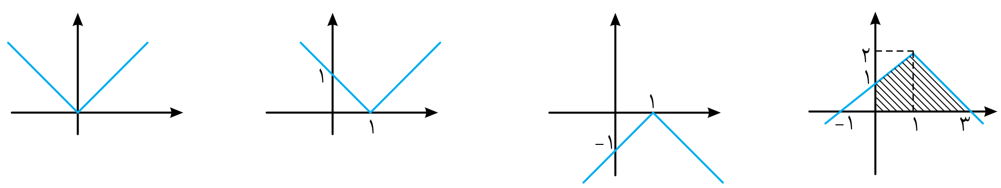
اشتراک دو محدوده‌ی به‌دست آمده همان $m<\frac{۲۳}{۱۲}$ است.

۷- گزینه‌ی ۲ تابع درجه‌ی دوم $f(x)=۴x^۲+۴kx-۱$ یک سهمی با دهانه‌ای رو به بالاست $(۴>۰)$، برای آن که این تابع در بازه‌ی $(-\infty,۲]$ یک به یک باشد، می‌بایست طول رأس سهمی کوچک‌تر از ۲ نباشد، پس:

$$\frac{-b}{۲a}\ge ۲\Rightarrow\frac{-۴k}{۸}\ge ۲\Rightarrow -۴k\ge ۱۶\Rightarrow k\le -۴$$

۸- گزینه‌ی ۴ نمودار تابع را طی مراحل زیر رسم می‌کنیم:

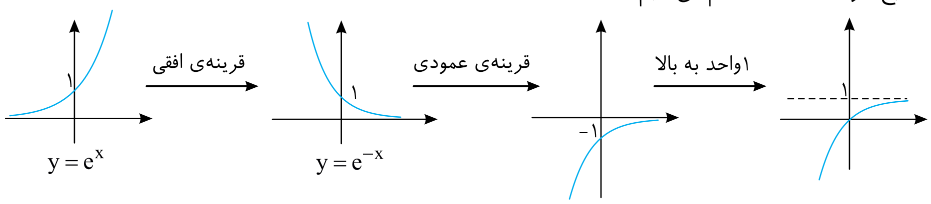
$$y=|x|\xrightarrow{\text{یک واحد به راست}}y=|x-۱|\xrightarrow{\text{قرینه‌ی عمودی}}y=-|x-۱|\xrightarrow{\text{۲ واحد به بالا}}y=۲-|x-۱|$$



مساحت خواسته شده را با کم کردن مساحت دو مثلث از هم پیدا می‌کنیم:

$$S=\frac{۲\times(۳-(-۱))}{۲}-\frac{۱\times ۱}{۲}=۴-\frac{۱}{۲}=\frac{۷}{۲}$$

۹- گزینه‌ی ۲ طی مراحل زیر نمودار تابع خواسته شده را رسم می‌کنیم:



۱۰- گزینه‌ی ۳ از قوانین لگاریتم می‌دانیم $x^{\log_x y}=y$، پس $a=۳$ و $b=۵$، بنابراین:

$$\log_{(b-a)}(a+b)=\log_۲ ۸=۳$$

۱۱- گزینه‌ی ۱ برای حل معادله‌ی مورد نظر داریم:

$$۲^{x+۲}=۲^x+۳۰\Rightarrow ۲^x\times ۲^۲=۲^x+۳۰\Rightarrow ۳\times ۲^x=۳۰\Rightarrow ۲^x=۱۰\Rightarrow x=\log_۲ ۱۰\Rightarrow x=\frac{۱}{\log_{۱۰} ۲}\Rightarrow x=\frac{۱}{\log ۲}$$

۱۲- گزینه‌ی ۲ ابتدا از معادله‌ی داده شده، x را پیدا می‌کنیم:

$$۸^x=۴\sqrt[۳]{۲}\Rightarrow x=\log_۸ ۴\sqrt[۳]{۲}=\log_{۲^۳} ۲^۲\times ۲^{\frac{۱}{۳}}=\frac{۱}{۳}\log_۲ ۲^{\frac{۷}{۳}}=\frac{\frac{۷}{۳}}{۳}=\frac{۷}{۹}$$

بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با:

$$\log_{\sqrt{۳}}(۹x+۲)=\log_{\sqrt{۳}} ۹=\log_{۳^{\frac{۱}{۲}}} ۳^۲=\frac{۲}{\frac{۱}{۲}}=۴$$

۱۳- گزینه‌ی ۱ ماتریس $\begin{bmatrix}۱\\۲\\۳\end{bmatrix}$ یک ماتریس ۳×۱ و ماتریس $\begin{bmatrix}۳ & -۱ & ۲\end{bmatrix}$ یک ماتریس ۱×۳ است، پس ضرب این دو، یک ماتریس ۳×۳ است و داریم:

$$A=\begin{bmatrix}۱\\۲\\۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & -۱ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & -۱ & ۲\\ ۶ & -۲ & ۴\\ ۹ & -۳ & ۶\end{bmatrix}$$

جمع درایه‌های ستون دوم A برابر $-۶=-۳-۲-۱$ است.

۱۴- گزینه‌ی ۲ ابتدا ماتریس X را پیدا می‌کنیم:

$$۲X=\begin{bmatrix}۵ & ۳\\ -۲ & ۰\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۳ & -۱\\ ۲ & ۴\end{bmatrix}\Rightarrow ۲X=\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ -۴ & -۴\end{bmatrix}\Rightarrow X=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۲ & -۲\end{bmatrix}$$

حال برای یافتن معکوس $۳X$ داریم:

$$۳X=\begin{bmatrix}۳ & ۶\\ -۶ & -۶\end{bmatrix}\Rightarrow (۳X)^{-۱}=\frac{۱}{-۱۸+۳۶}\times\begin{bmatrix}-۶ & -۶\\ ۶ & ۳\end{bmatrix}=\frac{۳}{۱۸}\begin{bmatrix}-۲ & -۲\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}=\frac{۱}{۶}\begin{bmatrix}-۲ & -۲\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{۱}{۳} & -\frac{۱}{۳}\\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۶}\end{bmatrix}$$

۱۵- گزینه‌ی ۲ دترمینان ماتریس A برابر k است، پس:

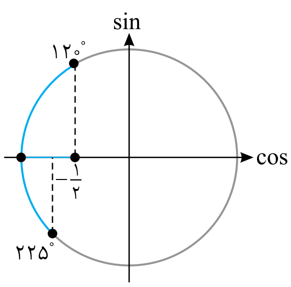
$$\begin{vmatrix}۲k & ۱\\ ۱ & k\end{vmatrix}=k\Rightarrow ۲k^۲-۱=k\Rightarrow ۲k^۲-k-۱=۰\Rightarrow\begin{cases}k=۱\\ k=-\frac{۱}{۲}\end{cases}\xrightarrow{k\geq ۰}k=۱$$

بنابراین ماتریس A برابر $\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$ است و داریم:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۲\times۱-۱\times۱}\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}$$

۱۶- گزینه‌ی ۴ با توجه به دایره‌ی مثلثاتی روبه‌رو، وقتی $۱۲۰^\circ\leq x\leq ۲۲۵^\circ$، محدوده‌ی $\cos x$ برابر است با:

$$-۱\leq \cos x\leq -\frac{۱}{۲}$$



۱۷- گزینه‌ی ۳ با توجه به این که حداکثر مقدار نسبت‌های مثلثاتی $\sin$ و $\cos$ برابر یک است، برای آن که مجموع این دو مقدار برابر ۲ باشد، باید هر دو برابر یک باشند، پس:

$$\begin{cases} \sin 3\hat{A}=1 \Rightarrow 3\hat{A}=90^\circ \Rightarrow \hat{A}=30^\circ \\ \cos 6\hat{B}=1 \Rightarrow 6\hat{B}=360^\circ \Rightarrow \hat{B}=60^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{C}=180^\circ-\hat{A}-\hat{B}=90^\circ$$

بنابراین مثلث در رأس C قائم است.

۱۸- گزینه‌ی ۲ رابطه‌ی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$((a+b)+c)((a+b)-c)=3ab \Rightarrow (a+b)^2-c^2=3ab \Rightarrow a^2+b^2+2ab-c^2=3ab \Rightarrow c^2=a^2+b^2-ab$$

با توجه به رابطه‌ی کسینوس‌ها در مثلث می‌دانیم $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\hat{C}$، پس:

$$-2ab\cos\hat{C}=-ab \Rightarrow \cos\hat{C}=\frac{1}{2} \Rightarrow \hat{C}=60^\circ$$

۱۹- گزینه‌ی ۳ تعداد کل اعداد سه رقمی برابر $9\times10\times10=900$ می‌باشد، از این تعداد $8\times9\times9=648$ عدد فاقد رقم ۲ است، بنابراین تعداد اعداد شامل ۲ برابر $900-648=252$ است. پس مقدار خواسته شده برابر است با: $648-252=396$

۲۰- گزینه‌ی ۴ تعداد اعداد را در دو حالت که رقم سمت راست برابر صفر یا برابر ۲ باشد، می‌شماریم:

$$\begin{cases} \underline{3}\times\underline{2}\times\underline{1}\times\underset{\text{صفر}}{\underline{1}}=6 \\ \underline{2}\times\underline{2}\times\underline{1}\times\underset{2}{\underline{1}}=4 \end{cases} \xrightarrow{+} 6+4=10$$

پاسخ تشریحی آزمون ۹۸

۱- گزینه‌ی ۲ برای اثبات درستی گزینه‌ی (۲) داریم:

$$n(A'\cap B')=n((A\cup B)')=n(S)-n(A\cup B) \Rightarrow n(A'\cap B')+n(A\cup B)=n(S)$$

گزینه‌ی (۱) نادرست است، زیرا:

$$n(A'\cup B')=n((A\cap B)')=n(S)-n(A\cap B)=n(S)+n(A\cup B)-n(A)-n(B) \Rightarrow n(A'\cup B')+n(A)+n(B)=n(S)+n(A\cup B)$$

گزینه‌ی (۳) نادرست است، زیرا: $n(A-B)+n(A\cap B)=n(A)$

گزینه‌ی (۴) نادرست است، زیرا: $n(A-B)+n(B-A)=n(A\cup B)-n(A\cap B)$

۲- گزینه‌ی ۴ احتمال خواسته شده آن است که یا به ۲ سؤال از ۳ سؤال اول و ۲ سؤال از ۳ سؤال دوم جواب دهیم یا به ۳ سؤال از ۳ سؤال اول و ۱ سؤال از ۳ سؤال دوم جواب دهیم:

$$P(A)=\frac{\binom{3}{2}\binom{3}{2}+\binom{3}{3}\binom{3}{1}}{\binom{6}{4}}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$$

۳- گزینه‌ی ۳ باید احتمال هر دو سفید بودن و هر دو سیاه بودن را حساب کنیم:

$$\text{احتمال سفید بودن هر دو}=\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{6}$$

$$\text{احتمال سیاه بودن هر دو}=\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}=\frac{5}{18}$$

$$\text{احتمال هم‌رنگ بودن}=\frac{1}{6}+\frac{5}{18}=\frac{4}{9}$$

۴- گزینه‌ی ۱ چون S فقط دارای ۳ پیشامد است که ناسازگارند، داریم:

$$P(S)=P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)=1 \Rightarrow P(A)+3P(A)+4P(A)=1 \Rightarrow P(A)=\frac{1}{8} \Rightarrow P(B)=\frac{3}{8}\ ,\ P(C)=\frac{4}{8}$$

حال داریم:

$$P(A'\cap B')=P((A\cup B)')=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)=1-\frac{1}{8}-\frac{3}{8}=\frac{1}{2}$$

۵- گزینه‌ی ۲ با فرض $x\neq\pm1$ طرفین معادله را در x^2-1 ضرب می‌کنیم و داریم:

$$(x-1)^2-(x+1)^2+4x^3=0\Rightarrow x^2-2x+1-x^2-2x-1+4x^3=0\Rightarrow 4x^3-4x=0\Rightarrow 4x(x^2-1)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x=1 & \text{غ‌ق‌ق}\\ x=-1 & \text{غ‌ق‌ق}\end{cases}$$

بنابراین معادله یک جواب دارد.

۶- گزینه‌ی ۴ نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم و با توجه به این که طرفین نامعادله نامنفی هستند، طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$2|x-1|<\sqrt{2x^2+4}\Rightarrow 4|x-1|^2<2x^2+4\Rightarrow 4x^2-8x+4<2x^2+4\Rightarrow 2x^2-8x<0\Rightarrow 2x(x-4)<0\Rightarrow 0<x<4$$

x		0		4	
$2x(x-4)$	$+$	0	$-$	0	$+$

با توجه به این‌که مجموعه جواب بازه‌ی $(0,4)$ است داریم:

$$b-a=4-0=4$$

۷- گزینه‌ی ۱ عبارت داده شده را بسط می‌دهیم:

$$A=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha-\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha+\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\sin\alpha(\cos\beta-\sin\beta)-\cos\alpha(\cos\beta-\sin\beta)}{\sin\alpha(\cos\beta+\sin\beta)+\cos\alpha(\sin\beta+\cos\beta)}$$

$$=\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)(\cos\beta-\sin\beta)}{(\sin\alpha+\cos\alpha)(\cos\beta+\sin\beta)}\Rightarrow A=-\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}\times\frac{\sin\beta-\cos\beta}{\sin\beta+\cos\beta}=-\left(\frac{-1}{7}\right)\times3=\frac{3}{7}$$

۸- گزینه‌ی ۴ با استفاده از قوانین مثلثات داریم:

$$\left(\frac{2}{\sin 2x}-\frac{1}{\tan x}\right)\left(\cot\frac{x}{2}-\tan\frac{x}{2}\right)=\left(\frac{1}{\sin x\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)(2\cot x)=\frac{1-\cos^2x}{\sin x\cos x}\times\frac{2\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^2x}{\sin x\cos x}\times\frac{2\cos x}{\sin x}=2$$

۹- گزینه‌ی ۳ اگر مخرج کسر درجه‌ی اول باشد، فقط یک عدد حقیقی در دامنه‌ی تابع نخواهد بود، پس داریم:

$$4a-3=0\Rightarrow a=\frac{3}{4}$$

همچنین اگر مخرج درجه‌ی دوم باشد و ریشه‌ی مضاعف داشته باشد، باز هم فقط یک عدد حقیقی در دامنه‌ی تابع نخواهد بود. پس داریم:

$$\Delta_{\text{مخرج}}=0\Rightarrow 4a^2-4(4a-3)=0\Rightarrow a^2-4a+3=0\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ a=3\end{cases}$$

بنابراین ۳ مقدار برای a وجود دارد.

۱۰- گزینه‌ی ۱ دامنه‌ی g را محاسبه می‌کنیم:

$$x^3-4x\geq0\Rightarrow x(x^2-4)\geq0\Rightarrow\begin{cases}x\geq2\\ -2\leq x\leq0\end{cases}$$

x		-2		0		2	
x^3-4x	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

بنابراین داریم:

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=0\}=\{-3,-2,-1,0,1,3\}\cap([-2,0]\cup[2,+\infty))-\{x|\sqrt{x^3-4x}=0\}=\{-2,-1,0,3\}-\{0,2,-2\}=\{-1,3\}$$

$$\frac{f}{g}=\left\{\left(-1,\frac{f(-1)}{g(-1)}\right),\left(3,\frac{f(3)}{g(3)}\right)\right\}=\left\{\left(-1,\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(3,\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{15}}\right)\right\}=\left\{\left(-1,\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(3,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$$

بنابراین برد تابع $\frac{f}{g}$ به صورت $\{\frac{1}{\sqrt{3}}\}$ است و یک عضو دارد.

۱۱- گزینه‌ی ۳ اگر فرض‌کنیم $f(x)=ax^2+bx+c$، داریم:

$$f(0)=c=0$$

$$f(1)=a+b=-1\Rightarrow b=-a-1$$

$$(fof)(2)=f(4a+2b)=a(4a+2b)^2+b(4a+2b)=0\Rightarrow a(4a-2a-2)^2+(-a-1)(4a-2a-2)=0\Rightarrow a(2a-2)^2-(a+1)(2a-2)=0$$

$$\Rightarrow(2a-2)(2a^2-2a-a-1)=0\Rightarrow2(a-1)(2a^2-3a-1)=0\Rightarrow\begin{cases}a=1\Rightarrow b=-2\\ a=\frac{3\pm\sqrt{17}}{4} & \text{غ‌ق‌ق}\end{cases}\Rightarrow f(x)=x^2-2x\Rightarrow f(-1)=3$$

۱۲- گزینه‌ی ۳ وقتی x به سمت صفر میل می‌کند، عبارت $x^۲$ با مقادیر مثبت به سمت صفر میل می‌کند، پس:
$$\lim_{x\to ۰} f(x^۲)=\lim_{x\to ۰^+} f(x)=۱$$

با توجه به نمودار تابع وقتی $x\to ۰^+$ تابع f از یک بیش‌تر است، پس:
$$f(x^۲)>۱\Rightarrow -f(x^۲)<-۱\Rightarrow ۱-f(x^۲)<۰\Rightarrow (۱-f(x^۲))\to ۰^-$$

بنابراین حاصل حد خواسته شده مطابق شکل برابر است با:
$$\lim_{x\to ۰} f(۱-f(x^۲))=\lim_{x\to ۰^-} f(x)=۲$$

۱۳- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول**: با اضافه و کم کردن ۱ به صورت کسر داریم:
$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{۲x-۱}-\sqrt[۳]{x}}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{۲x-۱}-۱-\sqrt[۳]{x}+۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{۲x-۱}-۱}{x-۱}-\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt[۳]{x}-۱}{x-۱}$$
$$=\lim_{x\to ۱}\frac{۲x-۲}{(x-۱)(\sqrt{۲x-۱}+۱)}-\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt[۳]{x}-۱}{(\sqrt[۳]{x}-۱)(\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{x}+۱)}=\frac{۲}{۱+۱}-\frac{۱}{۳}=۱-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}$$

راه‌حل دوم: با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال داریم:
$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{۲x-۱}-\sqrt[۳]{x}}{x-۱}\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to ۱}\frac{\frac{۲}{۲\sqrt{۲x-۱}}-\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}}{۱}=\frac{۲}{۲}-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}$$

۱۴- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول**: با تغییر متغیر $x-\pi=t$ داریم:
$$\lim_{x\to\pi}\frac{۱+\cos ۷x}{(x-\pi)^۲}=\lim_{t\to ۰}\frac{۱+\cos(۷t+۷\pi)}{(t+\pi-\pi)^۲}=\lim_{t\to ۰}\frac{۱-\cos ۷t}{t^۲}=\lim_{t\to ۰}\frac{\frac{(۷t)^۲}{۲}}{t^۲}=\frac{۴۹}{۲}=۲۴/۵$$

راه‌حل دوم: با استفاده از قضیه‌ی هوپیتال داریم:
$$\lim_{x\to\pi}\frac{۱+\cos ۷x}{(x-\pi)^۲}\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to\pi}\frac{-۷\sin ۷x}{۲(x-\pi)}\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to\pi}\frac{-۴۹\cos ۷x}{۲}=\frac{-۴۹(-۱)}{۲}=\frac{۴۹}{۲}=۲۴/۵$$

۱۵- گزینه‌ی ۳ با توجه به این که $\lim_{x\to +\infty} ۲^{-x}=۰$ و $\lim_{x\to -\infty} ۲^{x}=۰$ داریم:
$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{۲^x+k\times ۲^{-x}}{k\times ۲^x+۲^{-x}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{۲^x}{k\times ۲^x}=\frac{۱}{k}$$
$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{۲^x+k\times ۲^{-x}}{k\times ۲^x+۲^{-x}}=\lim_{x\to -\infty}\frac{k\times ۲^{-x}}{۲^{-x}}=k$$

با توجه به این که $\lim_{x\to -\infty} f(x)+\lim_{x\to +\infty} f(x)=-۲$، پس:
$$k+\frac{۱}{k}=-۲\Rightarrow k=-۱$$

۱۶- گزینه‌ی ۲ وقتی $x\to\frac{\pi}{۲}^+$، x در ربع دوم قرار دارد، پس حاصل $\cot x$ منفی است، یعنی $\cot x\to ۰^-$، بنابراین:
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}(fof)(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\cot(\cot x)=\lim_{x\to ۰^-}\cot x=-\infty$$

توجه کنید وقتی $x\to ۰^-$، x در ربع چهارم است و $\cot x$ منفی است.

۱۷- گزینه‌ی ۱ برای این که تابع در $x=\frac{\pi}{۴}$ پیوسته باشد، باید داشته باشیم:
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^+} f(x)=f(\frac{\pi}{۴})$$
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^-}(a+\sin^۲ x)=a+(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲=a+\frac{۱}{۲}$$
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^+} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^+}\sqrt{۲}\cos ۳x=\sqrt{۲}\times(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})=-۱$$
$$f(\frac{\pi}{۴})=\sqrt{۲}\cos\frac{۳\pi}{۴}=\sqrt{۲}(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})=-۱$$

پس داریم:
$$a+\frac{۱}{۲}=-۱\Rightarrow a=-\frac{۳}{۲}$$

۱۸- گزینه‌ی ۲ آهنگ متوسط تغییر تابع در بازه‌ی $[\frac{۱}{۴},۱]$ برابر است با:

$$\frac{f(۱)-f(\frac{۱}{۴})}{۱-\frac{۱}{۴}}=\frac{۲-\frac{۳}{۴}}{\frac{۳}{۴}}=\frac{۵}{۳}$$

آهنگ تغییر تابع در $x=c$ برابر $f'(c)$ است، پس داریم:

$$f'(x)=۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\Rightarrow f'(c)=۱+\frac{۱}{۲\sqrt{c}}$$

پس می‌توان نوشت:

$$۱+\frac{۱}{۲\sqrt{c}}=\frac{۵}{۳}\Rightarrow\frac{۱}{۲\sqrt{c}}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow ۴\sqrt{c}=۳\Rightarrow ۱۶c=۹\Rightarrow c=\frac{۹}{۱۶}$$

$$f(c)=\frac{۹}{۱۶}+\sqrt{\frac{۹}{۱۶}}=\frac{۹}{۱۶}+\frac{۳}{۴}=\frac{۲۱}{۱۶}$$

۱۹- گزینه‌ی ۲ از تعریف مشتق در $x=۰$ استفاده می‌کنیم:

$$g(x)=f(x)\sin ۲x$$

$$g'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{g(x)-g(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)\sin ۲x-۰}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۲x}{۲x}\times\lim_{x\to ۰}۲f(x)=۱\times ۲\times(-۲)=-۴$$

۲۰- گزینه‌ی ۱ از طرفین رابطه‌ی $y=f(\sqrt{x})$ مشتق می‌گیریم:

$$g'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}f'(\sqrt{x})$$

در $x=۱$ داریم:

$$g'(۱)=\frac{۱}{۲}f'(۱)$$

بنابراین باید از رابطه‌ی $f(۳x+۴)=x^۳+x^۲-۳x$ مقدار $f'(۱)$ را محاسبه کنیم. پس از طرفین آن مشتق می‌گیریم:

$$۳f'(۳x+۴)=۳x^۲+۲x-۳$$

با قرار دادن $x=-۱$ در رابطه‌ی فوق داریم:

$$۳f'(-۳+۴)=۳-۲-۳\Rightarrow f'(۱)=-\frac{۲}{۳}\Rightarrow g'(۱)=\frac{۱}{۲}\times(-\frac{۲}{۳})=-\frac{۱}{۳}$$

پاسخ تشریحی آزمون ۹۹

۱- گزینه‌ی ۱ زیرمجموعه‌هایی از $S=\{۱,۲,...,۱۰\}$ مد نظر هستند که اعضای مربع کامل یعنی، ۱ ، ۴ و ۹ را شامل شوند. ضمناً حداقل یکی از اعضای ۵ و ۱۰ را نیز داشته باشند. پس تعداد زیرمجموعه‌هایی به شکل زیر مورد سؤال هستند:

فقط شامل ۵ : $A_۱=\{۱,۴,۹,۵,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc\}\Rightarrow A_۱$ تعداد $=۲^۵$

فقط شامل ۱۰ : $A_۲=\{۱,۴,۹,۱۰,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc\}\Rightarrow A_۲$ تعداد $=۲^۵$

شامل ۵ و ۱۰ : $A_۳=\{۱,۴,۹,۵,۱۰,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc\}\Rightarrow A_۳$ تعداد $=۲^۵$

بنابراین در کل $۲^۵+۲^۵+۲^۵=۹۶$ زیرمجموعه وجود دارد.

۲- گزینه‌ی ۱ پیشامد قبول شدن در ریاضی را A، پیشامد قبول شدن در فیزیک را B و پیشامد قبول شدن در شیمی را C می‌نامیم. می‌خواهیم احتمال این که فقط یکی از پیشامدهای A ، B و C اتفاق بیفتد را حساب کنیم. با توجه به این که A ، B و C مستقل‌اند، داریم:

احتمال این که فقط A رخ دهد : $P(A\cap B'\cap C')=P(A)\times P(B')\times P(C')=۰/۳(۱-۰/۴)(۱-۰/۸)=۰/۰۳۶$

احتمال این که فقط B رخ دهد : $P(A'\cap B\cap C')=P(A')\times P(B)\times P(C')=(۱-۰/۳)۰/۴(۱-۰/۸)=۰/۰۵۶$

احتمال این که فقط C رخ دهد : $P(A'\cap B'\cap C)=P(A')\times P(B')\times P(C)=(۱-۰/۳)(۱-۰/۴)۰/۸=۰/۳۳۶$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با:

$$۰/۰۳۶+۰/۰۵۶+۰/۳۳۶=۰/۴۲۸$$

۳- گزینه‌ی ۴ احتمال این که در هر پرتاب دو تاس ۶ ظاهر شوند، $\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۶}$ است. می‌خواهیم احتمال پیشامدی را حساب کنیم که در آن در پرتاب اول و دوم هر دو ۶ ظاهر نشود و پرتاب سوم هر دو ۶ ظاهر شوند. چون پرتاب‌ها مستقل از یکدیگرند، داریم:

احتمال این که اولین بار در پرتاب سوم جفت تاس‌ها ۶ باشند $=\underbrace{(۱-\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۶})}_{\text{در پرتاب اول جفت ۶ نیاید}}\times\underbrace{(۱-\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۶})}_{\text{در پرتاب دوم جفت ۶ نیاید}}\times\underbrace{(\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۶})}_{\text{در پرتاب سوم جفت ۶ بیاید}}=(\frac{۳۵}{۳۶})^۲\times\frac{۱}{۳۶}=\frac{۳۵^۲}{۳۶^۳}$

۴- گزینه‌ی ۲ تمام عبارت‌ها را به یک طرف نامعادله منتقل کرده و تعیین علامت می‌کنیم:

$$x-۲-\frac{۳x}{x+۲}>۰\Rightarrow\frac{(x-۲)(x+۲)-۳x}{x+۲}>۰\Rightarrow\frac{x^۲-۳x-۴}{x+۲}>۰$$

x	$-\infty$		-۲		-۱		۴	
$x^۲-۳x-۴$		+		+	۰	−	۰	+
$x+۲$		−	۰	+		+		+
$\frac{x^۲-۳x-۴}{x+۲}$		−	‖	+	۰	−	۰	+

$\Rightarrow x>۴$ یا $-۲<x<-۱$

بنابراین اعداد طبیعی ۱، ۲، ۳ و ۴ در نامعادله صدق نمی‌کنند.

۵- گزینه‌ی ۲ از بسط تانژانت تفاضل دو زاویه استفاده می‌کنیم:

$$\tan ۲\beta=\tan((\alpha+\beta)-(\alpha-\beta))=\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan(\alpha-\beta)}{۱+\tan(\alpha+\beta)\tan(\alpha-\beta)}=\frac{\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۲}}{۱+\frac{۱}{۶}}=-\frac{۱}{۷}$$

$$\tan ۴\beta=\tan(۲\times ۲\beta)=\frac{۲\tan ۲\beta}{۱-\tan^۲ ۲\beta}=\frac{۲(-\frac{۱}{۷})}{۱-(-\frac{۱}{۷})^۲}=-\frac{۷}{۲۴}$$

۶- گزینه‌ی ۱ ابتدا مقدار $\sin x$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{۱-\sin x}{۱+\sin x}=۴\Rightarrow ۴+۴\sin x=۱-\sin x\Rightarrow ۵\sin x=-۳\Rightarrow \sin x=-\frac{۳}{۵}$$

اکنون محاسبه‌ی $\tan\frac{x}{۲}$ از اتحادهای مختلفی ممکن است. مثلاً می‌توان نوشت:

$$\sin x=\frac{۲\tan\frac{x}{۲}}{۱+\tan^۲\frac{x}{۲}}\Rightarrow -\frac{۳}{۵}=\frac{۲\tan\frac{x}{۲}}{۱+\tan^۲\frac{x}{۲}}\Rightarrow ۱۰\tan\frac{x}{۲}=-۳-۳\tan^۲\frac{x}{۲}\Rightarrow ۳\tan^۲\frac{x}{۲}+۱۰\tan\frac{x}{۲}+۳=۰$$

$$\Rightarrow(\tan\frac{x}{۲}+۳)(۳\tan\frac{x}{۲}+۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}\tan\frac{x}{۲}=-۳\\ \tan\frac{x}{۲}=-\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

پس حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای $\tan\frac{x}{۲}$ برابر ۱ است.

۷- گزینه‌ی ۲ عبارت داده شده را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$A=\tan x-\tan y=\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\sin y}{\cos y}=\frac{\sin x\cos y-\sin y\cos x}{\cos x\cos y}=\frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}$$

اگر قرار دهیم $y=۲x-\frac{\pi}{۲}$ داریم:

$$A=\frac{\sin(x-۲x+\frac{\pi}{۲})}{\cos x\cos y}=\frac{\sin(\frac{\pi}{۲}-x)}{\cos x\cos y}=\frac{\cos x}{\cos x\cos y}=\frac{۱}{\cos y}$$

۸- گزینه‌ی ۱ با توجه به این که f تابع است، پس $f(1)$ نمی‌تواند دو مقدار داشته باشد:

$$\begin{cases} f(1)=1^2+a\times1=a+1 \\ f(1)=(-1)^3+2a\times1=2a-1 \end{cases} \Rightarrow a+1=2a-1 \Rightarrow a=2 \Rightarrow f(x)=\begin{cases} x^2+2x & x\le1 \\ -x^3+4x & x\ge1 \end{cases}$$

$$\sqrt{2}-1<1 \Rightarrow f(\sqrt{2}-1)=(\sqrt{2}-1)^2+2(\sqrt{2}-1)=1$$

۹- گزینه‌ی ۳ ضابطه‌ی توابع f و g را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x+5+4\sqrt{x+1}}=\sqrt{(\sqrt{x+1}+2)^2}=|\sqrt{x+1}+2|=\sqrt{x+1}+2$$

$$g(x)=\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}=\sqrt{(\sqrt{x+1}-2)^2}=|\sqrt{x+1}-2|$$

برای این که تساوی $f(x)+g(x)=4$ برقرار باشد، باید داشته باشیم:

$$|\sqrt{x+1}-2|=2-\sqrt{x+1} \Rightarrow \sqrt{x+1}-2\le0 \Rightarrow \sqrt{x+1}\le2 \Rightarrow x+1\le4 \Rightarrow x\le3$$

از طرفی برای این که تابع تعریف شود، باید داشته باشیم:

$$x+1\ge0 \Rightarrow x\ge-1$$

بنابراین در بازه‌ی $[-1,3]$ داریم:

$$(f+g)(x)=4 \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow b-a=4$$

۱۰- گزینه‌ی ۲ تعریف دامنه‌ی fog به صورت زیر است:

$$D_{fog}=\{x|x\in D_g, g(x)\in D_f\}=\{x|-2\le x\le4, -3\le2-x^2\le3\}$$

$$-3\le2-x^2\le3 \Rightarrow -5\le-x^2\le1 \Rightarrow -1\le x^2\le5 \Rightarrow -\sqrt{5}\le x\le\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow D_{fog}=\{x|-2\le x\le4\ ,\ -\sqrt{5}\le x\le\sqrt{5}\}=[-2,\sqrt{5}] \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2=4+5=9$$

۱۱- گزینه‌ی ۲ شرایط دامنه را می‌نویسیم:

$$4-x^2>0 \Rightarrow x^2<4 \Rightarrow -2<x<2$$

$$\log_{0/5}(4-x^2)\ge0 \Rightarrow 4-x^2\le1 \Rightarrow x^2\ge3 \Rightarrow \begin{cases} x\ge\sqrt{3} \\ x\le-\sqrt{3} \end{cases}$$

از اشتراک شرایط فوق داریم:

$$D_f=(-2,2)-(-\sqrt{3},\sqrt{3}) \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow ab=2\sqrt{3}$$

۱۲- گزینه‌ی ۳ رابطه‌ی داده شده را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$|f(x)-1|\le(x-3)^2 \Rightarrow -|x-3|\le f(x)-1\le|x-3|$$

می‌دانیم:

$$\lim_{x\to3} -|x-3|=\lim_{x\to3}|x-3|=0$$

پس طبق قضیه‌ی فشردگی داریم:

$$\lim_{x\to3} f(x)-1=0 \Rightarrow \lim_{x\to3} f(x)=1$$

حال طبق قضایای حد داریم:

$$\lim_{x\to3}\frac{3f(x)-2}{5f(x)}=\frac{3\lim\limits_{x\to3}f(x)-2}{5\lim\limits_{x\to3}f(x)}=\frac{3\times1-2}{5\times1}=\frac{1}{5}$$

۱۳- گزینه‌ی ۱ در $+\infty$ داریم:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+bx+1}{(b-2)x^2+x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a+b)x+1}{(b-2)x^2+x-1}=3$$

چون مقدار حد، عددی مخالف صفر است، پس باید درجه‌ی صورت برابر درجه‌ی مخرج باشد. پس هر دو باید درجه‌ی اول باشند:

$$b-2=0 \Rightarrow b=2 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{(a+2)x}{x}=a+2=3 \Rightarrow a=1$$

حال می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-ax+bx+1}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x+2x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x}=1$$

۱۴- گزینه‌ی ۱ **راه‌حل اول**: با استفاده از فرمول‌های مثلثاتی، تابع را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\tan^2 x-1}{\cos 2x}=\frac{\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\cos^2 x}}{\cos 2x}=\frac{-\cos 2x}{\cos^2 x\times\cos 2x}=\frac{-1}{\cos^2 x}$$

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}}\frac{-1}{\cos^2 x}=\frac{-1}{\frac{1}{2}}=-2$$

راه‌حل دوم: با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}}\frac{\tan^2 x-1}{\cos 2x}\xrightarrow{\text{Hop}}\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}}\frac{2\tan x(1+\tan^2 x)}{-2\sin 2x}=\frac{(-1)\times(2)}{(-1)\times(-1)}=-2$$

۱۵- گزینه‌ی ۲ اولاً واضح است که a منفی است وگرنه حاصل حد بی‌نهایت می‌شود. به کمک اتحاد مزدوج داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\frac{a^2x+1}{x-1}}+a\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{a^2x+1}{x-1}-a^2\right)\times\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2x+1}{x-1}}-a}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(a^2x+1-a^2x+a^2)}{x-1}\times\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2x+1}{x-1}}-a}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a^2+1)x}{x}\times\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2x}{x}}-a}=(a^2+1)\times\frac{1}{|a|-a}=\frac{a^2+1}{-2a}=1\Rightarrow a^2+1=-2a\Rightarrow a^2+2a+1=0\Rightarrow(a+1)^2=0\Rightarrow a=-1$$

۱۶- گزینه‌ی ۲ می‌دانیم $\lim\limits_{x\to+\infty}\log x=+\infty$، پس داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}(\log_3 x-\log_2 x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\log x}{\log 3}-\frac{\log x}{\log 2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\log x\left(\frac{1}{\log 3}-\frac{1}{\log 2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\log x\Big(\underbrace{\frac{\log 2-\log 3}{\log 2\times\log 3}}_{<0}\Big)=-\infty$$

۱۷- گزینه‌ی ۳ حد تابع در $x=1$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\left(\frac{a}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{ax+a-2}{x^2-1}\right)$$

حد مخرج کسر فوق صفر است، پس حد صورت باید صفر باشد. در غیر این صورت حاصل حد بی‌نهایت خواهد بود. پس داریم:

$$\lim_{x\to1}(ax+a-2)=a+a-2=0\Rightarrow a=1$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

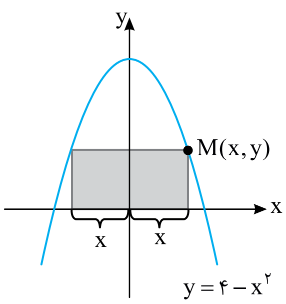
تابع در $x=1$ پیوسته است، پس داریم:

$$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)\Rightarrow\frac{1}{2}=b$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$a+b=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

۱۸- گزینه‌ی ۳ مساحت مستطیل را محاسبه می‌کنیم:



$$S=2xy=2x(4-x^2)\Rightarrow S(x)=8x-2x^3$$

آهنگ تغییر مساحت مستطیل همان مشتق آن است، پس داریم:

$$S'(x)=8-6x^2\Rightarrow S'\left(\frac{1}{2}\right)=8-6\left(\frac{1}{2}\right)^2=8-\frac{3}{2}=\frac{13}{2}$$

۱۹- گزینه‌ی ۱ از رابطه‌ی داده شده داریم:

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h^2-h}=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h(h-1)}=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\times\lim_{h\to0}\frac{1}{h-1}=f'(2)\times(-1)\Rightarrow f'(2)=4$$

(می‌توان از قاعده‌ی هوپیتال هم استفاده کرد.)

از طرفین رابطه‌ی $g(x)=f(\sqrt{x})$ مشتق می‌گیریم: $g(x)=f(\sqrt{x})\Rightarrow g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}f'(\sqrt{x})\xrightarrow{x=4}g'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}f'(\sqrt{4})=\frac{1}{4}f'(2)=\frac{1}{4}(-4)=-1$

۲۰- گزینه‌ی ۳ با توجه به این که مقدار $\tan(\frac{\pi}{x})$ در $x=1$ برابر صفر اســت، کافی اســت از این عبارت مشــتق بگیریم و بقیه‌ی عبارت را به همان صورت بنویسیم:

$$(\tan(\frac{\pi}{x}))'=-\frac{\pi}{x^2}(1+\tan^2(\frac{\pi}{x}))$$

$$y'(1)=-\frac{\pi}{1^2}(1+\tan^2(\frac{\pi}{1}))\cos(\frac{\pi}{1^2})\cos(\frac{\pi\times 1}{3})=-\pi(1+0)(-1)(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{2}$$

پاسخ تشریحی آزمون ۱۰۰

۱- گزینه‌ی ۱ احتمال را در دو حالت که مهره‌ی انتقالی و خارج شده هر دو سیاه رنگ یا هر دو سفید رنگ باشند، محاسبه می‌کنیم:

$$P=\underbrace{\frac{5}{12}\times\frac{5}{11}}_{\text{هر دو سیاه}}+\underbrace{\frac{7}{12}\times\frac{7}{11}}_{\text{هر دو سفید}}=\frac{25}{132}+\frac{49}{132}=\frac{74}{132}=\frac{37}{66}$$

۲- گزینه‌ی ۴ احتمال رو آمدن $\frac{1}{2}$ است، پس:

$$P=\frac{1}{2}\times\binom{2}{1}\times(\frac{2}{3})^1\times(\frac{1}{3})^1+\frac{1}{2}\binom{3}{1}\times(\frac{2}{3})^1\times(\frac{1}{3})^2=\frac{2}{9}+\frac{1}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

۳- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول:** پیشامد آن که لااقل ۲ فرزند پسر داشته باشد، یعنی تعداد فرزندان پسر می‌تواند ۲ یا ۳ یا ۴ تا باشد. پس تعداد فرزندان دختر می‌تواند از صفر تا ۲ باشد. پس حداکثر ۲ فرزند دختر داریم. یعنی دو پیشامد یکی هستند، پس احتمال آن دو برابر است.

راه‌حل دوم: احتمال هر کدام را محاسبه می‌کنیم:

$$P(\text{لااقل ۲ پسر})=\binom{4}{2}(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^2+\binom{4}{3}(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})+\binom{4}{4}(\frac{1}{2})^4=\frac{11}{16}$$

$$P(\text{حداکثر ۲ دختر})=\binom{4}{0}(\frac{1}{2})^4+\binom{4}{1}(\frac{1}{2})^1(\frac{1}{2})^3+\binom{4}{2}(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^2=\frac{11}{16}$$

بنابراین دو احتمال برابر است.

۴- گزینه‌ی ۳ اگــر α و β ریشــه‌های معادله‌ی $x^2+ax+36=0$ باشــند، داریــم $\alpha+\beta=-a$ و $\alpha\beta=36$. همچنین اگر α' و β' ریشــه‌های معادله‌ی $x^2+x+b=0$ باشند، داریم $\alpha'+\beta'=-1$ و $\alpha'\beta'=b$. همچنین می‌دانیم $\alpha=\alpha'^2$ و $\beta=\beta'^2$، پس:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=\alpha'^2+\beta'^2\Rightarrow\alpha+\beta=(\alpha'+\beta')^2-2\alpha'\beta'\Rightarrow -a=(-1)^2-2\times b\\ \alpha\beta=\alpha'^2\beta'^2\Rightarrow\alpha\beta=(\alpha'\beta')^2\Rightarrow 36=b^2\Rightarrow b=\pm 6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=6\ ,\ a=11\\ b=-6\ ,\ a=-13\end{cases}$$

توجه کنید b نمی‌تواند برابر ۶ باشد، زیرا در آن صورت معادله‌ی $x^2+x+b=0$ جواب ندارد. بنابراین: $a-b=-13+6=-7$

۵- گزینه‌ی ۴ هر دو تابع از نقطه‌ای با طول -1 روی محور طول‌ها (نقطه‌ی $(-1,0)$) می‌گذرند، پس:

$$\begin{cases}-2+a=0\\ b-a-3=0\end{cases}\Rightarrow a=2, b=5$$

بنابراین ضابطه‌ی سهمی به صورت $y=5x^2+2x-3$ می‌باشد و طول رأس سهمی برابر است با: $S=\frac{-b}{2a}=-\frac{2}{2\times 5}=-\frac{1}{5}$

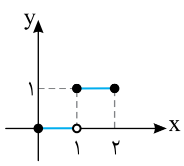
۶- گزینه‌ی ۱ دو عبارت رادیکال و قدر مطلق، هر دو نامنفی هستند، پس جمع آن‌ها تنها در حالتی برابر صفر می‌شود که هر دو صفر باشند:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-2x+1}=0\Rightarrow(x-1)^2=0\Rightarrow x=1\\ ||x|-1|=0\Rightarrow|x|=1\Rightarrow x=\pm 1\end{cases}\Rightarrow x=1$$

پس تنها جواب معادله $x=1$ است.

۷- گزینه‌ی ۱ تابع $y=[\frac{x+1}{2}]$ در نقاطی که $\frac{x+1}{2}$ عددی صحیح است، تغییر ضابطه می‌دهند، پس در بازه‌ی $[0,2]$ فقط در نقطه‌ی $x=1$ تغییر ضابطه می‌دهد و داریم:

$$y=\begin{cases}1 & 1\le x\le 2\\ 0 & 0\le x<1\end{cases}$$



بنابراین مساحت خواسته شده برابر ۱ است.

۸- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول**: برای یافتن جمله‌ی a_n با استفاده از مجموع جملات (S_n) داریم:

$$a_n=S_n-S_{n-1}\Rightarrow\begin{cases}a_۴=S_۴-S_۳=(۲\times۱۶-۱۲)-(۲\times۹-۹)=۱۱\\ a_۲=S_۲-S_۱=(۲\times۴-۶)-(۲-۳)=۳\end{cases}\Rightarrow a_۴-a_۲=۸$$

راه‌حل دوم: با استفاده از $S_۱$ و $S_۲$ قدر نسبت را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases}S_۱=a_۱\Rightarrow a_۱=-۱\\ S_۲=a_۱+a_۲\Rightarrow a_۱+(a_۱+d)=۲\end{cases}\Rightarrow d=۴$$

$$a_۴-a_۲=(۴-۲)d=۲d=۸$$

۹- گزینه‌ی ۴ با صرف نظر کردن از ۱ در مخرج کسر، عدد همگرایی دنباله برابر ۲ است. پس برای آن که فاصله‌ی a_n از ۲ کم‌تر از $\frac{۱}{۱۰}$ باشد، داریم:

$$|a_n-۲|<\frac{۱}{۱۰}\Rightarrow\left|\frac{\sqrt{۴n}}{\sqrt{n}+۱}-۲\right|<\frac{۱}{۱۰}\Rightarrow\left|\frac{۲\sqrt{n}-۲\sqrt{n}-۲}{\sqrt{n}+۱}\right|<\frac{۱}{۱۰}\Rightarrow\left|\frac{-۲}{\sqrt{n}+۱}\right|<\frac{۱}{۱۰}\Rightarrow\frac{۲}{\sqrt{n}+۱}<\frac{۱}{۱۰}\Rightarrow\sqrt{n}+۱>۲۰\Rightarrow\sqrt{n}>۱۹\Rightarrow n>۳۶۱$$

بنابراین $n_۰$ حداقل برابر ۳۶۲ می‌باشد.

۱۰- گزینه‌ی ۲ ابتدا مقدار تقریبی $\log_{\sqrt{۲}}۱۲$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\log_{\sqrt{۲}}۱۲=\log_{۲^{\frac{۱}{۲}}}۱۲=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}\log_۲ ۱۲=۲\log_۲ ۱۲=\log_۲ ۱۲^۲=\log_۲ ۱۴۴$$

از آن‌جایی که $۱۲۸<۱۴۴<۲۵۶$ است، پس $\log_۲ ۲^۷<\log_۲ ۱۴۴<\log_۲ ۲^۸$ است، پس $۷<\log_۲ ۱۴۴<۸$، یعنی:

$$[\log_۲ ۱۴۴]=۷$$

۱۱- گزینه‌ی ۴ برای آن که ۱۵۰ واحد کار توسط کارگر انجام شود، داریم:

$$f(t)=۱۵۰\Rightarrow ۱۸۰-۶۰e^{-۰/۲t}=۱۵۰\Rightarrow ۶۰e^{-۰/۲t}=۳۰\Rightarrow e^{-۰/۲t}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\ln(e^{-۰/۲t})=\ln(\frac{۱}{۲})\Rightarrow -۰/۲t=-\ln ۲\Rightarrow ۰/۲t=۰/۷\Rightarrow t=\frac{۷}{۲}=۳/۵$$

۱۲- گزینه‌ی ۴ با توجه به بسط $\cos(\alpha+\beta)$ داریم:

$$\cos(x+\frac{\pi}{۳})\cos(x-\frac{\pi}{۳})=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow(\cos x\times\frac{۱}{۲}-\sin x\times\frac{\sqrt{۳}}{۲})(\cos x\times\frac{۱}{۲}+\sin x\times\frac{\sqrt{۳}}{۲})=-\frac{۱}{۲}$$

$$\frac{\cos^۲ x}{۴}-\frac{۳\sin^۲ x}{۴}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow\cos^۲ x-۳(۱-\cos^۲ x)=-۲\Rightarrow ۴\cos^۲ x=۱\Rightarrow ۲\cos^۲ x=\frac{۱}{۲}$$

$$۲\cos^۲ x-۱=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow\cos ۲x=\cos(\frac{۲\pi}{۳})\Rightarrow ۲x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$

۱۳- گزینه‌ی ۲ با توجه به محدوده‌ی تعریف تانژانت $(x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲})$ معادله را ساده می‌کنیم:

$$۲\tan x\cos^۲ x=۱\Rightarrow\frac{۲\sin x\cos^۲ x}{\cos x}=۱\Rightarrow ۲\sin x\cos x=۱\Rightarrow\sin ۲x=۱\Rightarrow ۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴}$$

تمامی جواب‌های به‌دست آمده قابل قبول هستند.

۱۴- گزینه‌ی ۲ چون $f^{-1}(\frac{۱}{۲})=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$، بنابراین $f(\frac{\sqrt{۳}}{۳})=\frac{۱}{۲}$، پس داریم:

$$\frac{۱}{۲}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۳}}{\sqrt{\frac{۳}{۹}+a}}\Rightarrow\sqrt{\frac{۱}{۳}+a}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow\frac{۱}{۳}+a=\frac{۴}{۳}\Rightarrow a=۱$$

۱۵- گزینه‌ی ۳ با توجه به این که $fog^{-1}(x)=\frac{۱}{f(x)}$ و با توجه به ضابطه‌ی تابع f داریم:

$$\frac{۱}{g^{-1}(x)+۱}=\frac{۱}{\frac{۱}{x+۱}}\Rightarrow g^{-1}(x)+۱=\frac{۱}{x+۱}\Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{-x}{x+۱}$$

حال برای یافتن تابع $g(x)$، معکوس تابع $g^{-1}(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$y=\frac{-x}{x+۱}\Rightarrow yx+y=-x\Rightarrow x(y+۱)=-y\Rightarrow x=\frac{-y}{y+۱}\xrightarrow{(g^{-1})^{-1}}g(x)=\frac{-x}{x+۱}$$

۱۶- گزینه‌ی ۱ ضابطه‌ی تابع را در سمت چپ و راست $x=۳$ نوشته، سپس مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=\begin{cases}(x-۳)\times ۳ & ۳\le x<۴\\ -(x-۳)\times ۲ & ۲\le x<۳\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}۳x-۹ & ۳\le x<۴\\ -۲x+۶ & ۲\le x<۳\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}۳ & ۳\le x<۴\\ -۲ & ۲\le x<۳\end{cases}\Rightarrow \frac{f'_+(۳)}{f'_-(۳)}=\frac{۳}{-۲}=-\frac{۳}{۲}$$

۱۷- گزینه‌ی ۳ مشتق تابع f برابر است با:

$$f(x)=\tan^۲\frac{\pi}{x}\Rightarrow f'(x)=۲\tan\frac{\pi}{x}(۱+\tan^۲\frac{\pi}{x})(-\frac{\pi}{x^۲})$$

$$\Rightarrow f'(۴)=۲\tan\frac{\pi}{۴}(۱+\tan^۲\frac{\pi}{۴})(-\frac{\pi}{۴^۲})=۲\times۱\times۲\times(-\frac{\pi}{۱۶})=-\frac{\pi}{۴}$$

۱۸- گزینه‌ی ۳ آهنگ متوسط تغییر در $x=۲$ با نمو یک به معنای آهنگ متوسط تغییر در بازه‌ی $[۲,۳]$ است و برابر است با:

$$\frac{f(۳)-f(۲)}{۳-۲}=\frac{(۹+۳)-(۴+۲)}{۱}=۶$$

ضمناً آهنگ لحظه‌ای تغییر در $x=۲$ برابر مشتق تابع در آن نقطه است:

$$f'(۲)=۲x+۱=۵$$

بنابراین اختلاف این دو عدد برابر $۶-۵=۱$ است.

۱۹- گزینه‌ی ۳ خط مماس در نقطه‌ای افقی است که مشتق در آن نقطه به صفر میل می‌کند:

$$y'=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{۲x-y}{-x+۲y+۱}\xrightarrow{y'=۰}۲x-y=۰\Rightarrow y=۲x$$

نقطه‌ی مورد نظر در معادله‌ی منحنی صدق می‌کند، پس:

$$x^۲-xy+y^۲+y=۰\xrightarrow{y=۲x}x^۲-x(۲x)+(۲x)^۲+۲x=۰\Rightarrow x^۲-۲x^۲+۴x^۲+۲x=۰$$

$$\Rightarrow ۳x^۲+۲x=۰\Rightarrow x(۳x+۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ x=-\frac{۲}{۳}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=۰\\ y=-\frac{۴}{۳}\end{cases}$$

بنابراین مجموع عرض این نقاط برابر $-\frac{۴}{۳}$ است.

۲۰- گزینه‌ی ۲ با استفاده از قوانین مشتق‌گیری داریم:

$$f(x)=e^{۲\ln(\sin x)}\Rightarrow f'(x)=e^{۲\ln(\sin x)}\times\frac{۲\cos x}{\sin x}\Rightarrow f'(\frac{\pi}{۳})=e^{۲\ln\frac{\sqrt{۳}}{۲}}\times\frac{۲\times\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=e^{\ln\frac{۳}{۴}}\times\frac{۲}{\sqrt{۳}}=\frac{۳}{۴}\times\frac{۲}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

پاسخ تشریحی آزمون ۱۰۱

۱- گزینه‌ی ۲ تعداد موش‌های جعبه‌ی A را n می‌نامیم. احتمال سیاه بودن موش برابر است با:

$$P=\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{n}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۵}\xrightarrow{P=\frac{۲}{۳}}\frac{۲}{n}+\frac{۱}{۲}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{۲}{n}=\frac{۴-۳}{۶}\Rightarrow n=۱۲$$

۲- گزینه‌ی ۱ با استفاده از فرمول احتمال شرطی داریم:

$$P(A|B')=\frac{P(A\cap B')}{P(B')}\Rightarrow\frac{۱}{۳}=\frac{P(A\cap B')}{۱-\frac{۴}{۵}}\Rightarrow P(A\cap B')=\frac{۱}{۱۵}$$

$$P(B'|A)=\frac{P(B'\cap A)}{P(A)}\Rightarrow\frac{۲}{۵}=\frac{\frac{۱}{۱۵}}{P(A)}\Rightarrow P(A)=\frac{\frac{۱}{۱۵}}{\frac{۲}{۵}}=\frac{۱}{۶}$$

۳- گزینه‌ی ۳ احتمال آن که هیچ کدام خطا نداشته باشند را محاسبه می‌کنیم:

$$P(A')=(۰/۸)^۳=۰/۵۱۲\Rightarrow P(A)=۱-P(A')=۰/۴۸۸$$

۴- گزینه‌ی ۱ **راه‌حل اول:** معادله‌ی مورد نظر به صورت $2x^2-4x+1=0$ می‌باشد که جمع و ضرب ریشه‌ها در آن به ترتیب برابر $S=\frac{4}{2}=2$ و $P=\frac{1}{2}$ است. پس جمع و ضرب ریشه‌های معادله‌ی جدید برابر است با:

$$S'=\frac{1}{2\alpha^2+1}+\frac{1}{2\beta^2+1}=\frac{2\beta^2+1+2\alpha^2+1}{(2\alpha^2+1)(2\beta^2+1)}=\frac{2(\alpha^2+\beta^2)+2}{4(\alpha\beta)^2+2(\alpha^2+\beta^2)+1}=\frac{2(S^2-2P)+2}{4P^2+2(S^2-2P)+1}=\frac{2\times3+2}{1+2\times3+1}=\frac{8}{8}=1$$

$$P'=\left(\frac{1}{2\alpha^2+1}\right)\left(\frac{1}{2\beta^2+1}\right)=\frac{1}{4P^2+2(S^2-2P)+1}=\frac{1}{8}$$

بنابراین معادله‌ی مورد نظر به صورت زیر است:

$$x^2-S'x+P'=0\Rightarrow x^2-x+\frac{1}{8}=0\Rightarrow 8x^2-8x+1=0$$

راه‌حل دوم: با توجه به این که α و β در معادله‌ی $2x^2-4x+1=0$ صدق می‌کنند، داریم:

$$2\alpha^2+1=4\alpha\ \ ,\ \ 2\beta^2+1=4\beta$$

بنابراین باید معادله‌ای از درجه دوم بیابیم که ریشه‌های آن $\frac{1}{4\alpha}$ و $\frac{1}{4\beta}$ باشند:

$$\begin{cases}S'=\frac{1}{4\alpha}+\frac{1}{4\beta}=\frac{\beta+\alpha}{4\alpha\beta}=\frac{S}{4P}=\frac{2}{2}=1\\ P'=\frac{1}{4\alpha}\times\frac{1}{4\beta}=\frac{1}{16\alpha\beta}=\frac{1}{8}\end{cases}\Rightarrow x^2-x+\frac{1}{8}=0\Rightarrow 8x^2-8x+1=0$$

۵- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول:** تابع محور عرض‌ها را در $(0,-1)$ قطع می‌کند، پس $c=-1$. ضمناً تابع از نقطه‌ی $(2,0)$ گذشته و این نقطه رأس تابع است، بنابراین:

$$\begin{cases}-\frac{b}{2a}=2\Rightarrow b=-4a\\ 4a+2b-1=0\end{cases}\Rightarrow 4a-8a-1=0\Rightarrow a=-\frac{1}{4}\Rightarrow b=1\Rightarrow 4a-b=-2$$

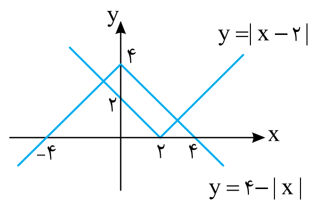
راه‌حل دوم: تابع در $x=2$ بر محور xها مماس است، پس به صورت $y=a(x-2)^2$ است، ضمناً از نقطه‌ی $(0,-1)$ می‌گذرد، بنابراین:

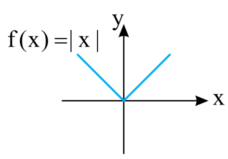
$$-1=a(0-2)^2\Rightarrow a=-\frac{1}{4}$$

بنابراین تابع به صورت $y=-\frac{1}{4}(x-2)^2$ است و داریم:

$$y=-\frac{1}{4}(x^2-4x+4)\Rightarrow y=-\frac{1}{4}x^2+x-1\Rightarrow a=-\frac{1}{4},b=1\ \Rightarrow 4a-b=-2$$

۶- گزینه‌ی ۱ **راه‌حل اول:** با استفاده از قوانین رسم نمودار و با توجه به نمودار تابع $f(x)=|x|$، نمودار دو تابع مورد نظر را روی یک دستگاه رسم می‌کنیم:





با استفاده از شکل و عددگذاری، نقاط با طول‌های ۳ و ۱− محل برخورد این دو منحنی هستند و داریم: $-1+3=2$

راه‌حل دوم: به صورت جبری به حل معادله‌ی $|x-2|=|x|-4$ می‌پردازیم:

$$x\geq2\Rightarrow 4-x=x-2\Rightarrow 2x=6\Rightarrow x=3\ \checkmark$$

$$0\leq x<2\Rightarrow 4-x=2-x\Rightarrow 4=2\ \text{غ‌ق}$$

$$x<0\Rightarrow 4+x=2-x\Rightarrow 2x=-2\Rightarrow x=-1\ \checkmark$$

بنابراین مجموع دو ریشه برابر ۲ است.

۷- گزینه‌ی ۳ با توجه به قوانین لگاریتم داریم $\log_{۲}\frac{۱}{x}=-\log_{۲}x$، پس: $f(x)=۰\Rightarrow[\log_{۲}x]+[-\log_{۲}x]=۰$

از آن‌جا که $[x]+[-x]=\begin{cases}-۱ & x\notin\mathbb{Z}\\ ۰ & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$، پس $\log_{۲}x=k\ ,\ k\in\mathbb{Z}$ یعنی $x=۲^{k}$. از بین اعداد یک رقمی، فقط اعداد ۲، ۴ و ۸ چنین هستند.

۸- گزینه‌ی ۲ اگر دنباله‌ی هندسی اولیه را $a,aq,aq^{۲},aq^{۳},\dots$ در نظر بگیریم، دنباله‌ی هندسی جدید به صورت زیر است:

$$a-q,aq-q^{۲},aq^{۲}-q^{۳},\dots,aq^{n-۱}-q^{n},\dots\Rightarrow a-q,q(a-q),q^{۲}(a-q),\dots,q^{n-۱}(a-q),\dots$$

بنابراین دنباله‌ی به‌دست آمده یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اولیه‌ی $a-q$ و قدر نسبت q می‌باشد و داریم:

$$S_{\infty}=\frac{a-q}{۱-q}=\frac{۳-(-\frac{۱}{۳})}{۱-(-\frac{۱}{۳})}=\frac{\frac{۱۰}{۳}}{\frac{۴}{۳}}=\frac{۵}{۲}$$

۹- گزینه‌ی ۲ از بین دو عدد متوالی طبیعی $n-۱$ و n حتماً یکی زوج است، پس حاصل $n^{۲}-n$ همواره زوج و حاصل $(-۱)^{n^{۲}-n}$ همواره عدد $(+۱)$ است. اما $\cos n\pi$ برای nهای فرد برابر -۱ و برای nهای زوج برابر یک است، پس:

$$a_{n}=۱+(-۱)^{n}=\begin{cases}۰ & \text{فرد } n\\ ۲ & \text{زوج } n\end{cases}$$

بنابراین دنباله‌ی a_{n} واگراست ولی کراندارست.

۱۰- گزینه‌ی ۴ بنابر اطلاعات مسأله، تابع از نقاط $(-۱,۰)$ و $(۱,-۱)$ می‌گذرد، پس:

$$\begin{cases}\log_{\frac{۱}{۲}}(-a+b)=۰\Rightarrow-a+b=۱\\ \log_{\frac{۱}{۲}}(a+b)=-۱\Rightarrow a+b=(\frac{۱}{۲})^{-۱}=۲\end{cases}\Rightarrow۲b=۳\Rightarrow b=\frac{۳}{۲}\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین ضابطه‌ی تابع به صورت $y=\log_{\frac{۱}{۲}}(\frac{۱}{۲}x+\frac{۳}{۲})$ است و برای یافتن وارون تابع خواسته شده داریم:

$$y=f(x+۲)+۱\Rightarrow y=\log_{\frac{۱}{۲}}(\frac{۱}{۲}(x+۲)+\frac{۳}{۲})+۱\Rightarrow y-۱=\log_{\frac{۱}{۲}}(\frac{۱}{۲}x+\frac{۵}{۲})\Rightarrow(\frac{۱}{۲})^{y-۱}=\frac{۱}{۲}x+\frac{۵}{۲}$$

$$\Rightarrow(\frac{۱}{۲})^{y-۱}-\frac{۵}{۲}=\frac{۱}{۲}x\Rightarrow x=۲(۲^{۱-y}-\frac{۵}{۲})\xrightarrow{f^{-۱}}y=۲^{۲-x}-۵$$

۱۱- گزینه‌ی ۳ اگر پایه‌ی لگاریتمی نوشته نشود، آن را ۱۰ در نظر می‌گیریم و با استفاده از قوانین لگاریتم داریم:

$$\begin{cases}\log\frac{x}{y}=۱\\ \log_{۳}(x-y)=۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{x}{y}=۱۰^{۱}\\ x-y=۳^{۳}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۱۰y\\ x-y=۲۷\end{cases}\Rightarrow۱۰y-y=۲۷\Rightarrow y=۳\Rightarrow x=۳۰\Rightarrow x+y=۳۳$$

۱۲- گزینه‌ی ۱ با استفاده از قضایای مثلثات، ابتدا معادله را ساده کرده، سپس آن‌را حل می‌کنیم:

$$\cos ۳x\sin(۳\pi-x)-\sin ۳x\cos(\pi+x)=\cos\frac{۳\pi}{۲}\Rightarrow\cos ۳x\sin x+\sin ۳x\cos x=۰\Rightarrow\sin(۳x+x)=۰\Rightarrow\sin ۴x=۰\Rightarrow۴x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۴}$$

۱۳- گزینه‌ی ۱ **راه‌حل اول**: با نوشتن تانژانت بر حسب سینوس و کسینوس، عبارت را به ضرب تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{\sin(x+\frac{\pi}{۴})}{\cos(x+\frac{\pi}{۴})}+\frac{\sin(x-\frac{\pi}{۴})}{\cos(x-\frac{\pi}{۴})}=۲\sqrt{۳}\Rightarrow\frac{\sin(x+\frac{\pi}{۴}+x-\frac{\pi}{۴})}{\cos(x+\frac{\pi}{۴})\cos(x-\frac{\pi}{۴})}=۲\sqrt{۳}\Rightarrow\frac{\sin ۲x}{\cos^{۲}x\times\frac{۱}{۲}-\sin^{۲}x\times\frac{۱}{۲}}=۲\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow\frac{\sin ۲x}{\frac{۱}{۲}\cos ۲x}=۲\sqrt{۳}\Rightarrow\tan ۲x=\sqrt{۳}\Rightarrow\tan ۲x=\tan\frac{\pi}{۳}\Rightarrow۲x=k\pi+\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶}$$

راه‌حل دوم: از فرمول بسط تانژانت کمک می‌گیریم:

$$\tan(x+\frac{\pi}{۴})+\tan(x-\frac{\pi}{۴})=۲\sqrt{۳}\Rightarrow\frac{\tan x+۱}{۱-\tan x}+\frac{\tan x-۱}{۱+\tan x}=۲\sqrt{۳}\Rightarrow\frac{(\tan x+۱)^{۲}-(\tan x-۱)^{۲}}{۱-\tan^{۲}x}=۲\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow\frac{۴\tan x}{۱-\tan^{۲}x}=۲\sqrt{۳}\Rightarrow۲\tan ۲x=۲\sqrt{۳}\Rightarrow\tan ۲x=\sqrt{۳}\Rightarrow۲x=k\pi+\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶}$$

۱۴- گزینه‌ی ۱ با توجه به این که $g^{-1}(f(a))=3$، پس می‌توان نتیجه گرفت $f(a)=g(3)$، بنابراین با توجه به تابع g داریم $f(a)=-2$. تابع f دو ضابطه دارد که حاصل ضابطه‌ی اول اعداد مثبت یا صفر و حاصل ضابطه‌ی دوم فقط اعداد منفی اســت، پس برای آن که خروجی تابع f برابر -2 شــود، باید داشته باشیم:

$$-\sqrt{-a}=-2\Rightarrow\sqrt{-a}=2\Rightarrow -a=4\Rightarrow a=-4$$

۱۵- گزینه‌ی ۱ تابع f را به صورت چند ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+x} & x\geq 0\\[2mm] \dfrac{x}{1-x} & x<0\end{cases}$$

وارون هر ضابطه را در محدوده‌ی خود به‌دست می‌آوریم:

$$x\geq 0: y=\frac{x}{1+x}\Rightarrow y+xy=x\Rightarrow x(1-y)=y\Rightarrow x=\frac{y}{1-y}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{1-x}$$

$$x<0: y=\frac{x}{1-x}\Rightarrow y-xy=x\Rightarrow x(1+y)=y\Rightarrow x=\frac{y}{1+y}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{1+x}$$

بنابراین با اجتماع دو ضابطه داریم:

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-x} & 0\leq x<1\\[2mm] \dfrac{x}{1+x} & -1<x<0\end{cases}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{1-|x|}\Rightarrow f^{-1}(-x)=\frac{-x}{1-|-x|}=\frac{-x}{1-|x|}=\frac{x}{|x|-1}$$

۱۶- گزینه‌ی ۲ در سمت راست عدد ۳، $\frac{-9}{x}$ به سمت -3 میل می‌کند و داریم:

$$x>3\Rightarrow\frac{1}{x}<\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{-9}{x}>\frac{-9}{3}\Rightarrow\frac{-9}{x}>-3\Rightarrow -\frac{9}{x}\to -3^{+}\Rightarrow[-\frac{9}{x}]=-3$$

بنابراین ضابطه‌ی تابع در سمت راست ۳ به صورت $y=-3\sqrt{a-x}$ است و داریم:

$$y'=\frac{-3(-1)}{2\sqrt{a-x}}\Rightarrow\frac{3}{2\sqrt{a-3}}=\frac{3}{2}\Rightarrow\sqrt{a-3}=1\Rightarrow a=4$$

۱۷- گزینه‌ی ۳ تابع f در تمام نقاط با طول غیر صحیح پیوسته و مشتق‌پذیر است، اما در نقاط با طول صحیح که عامل صفر کننده در آن‌ها ضرب شود، پیوسته می‌شوند و به شرطی در آن نقاط مشتق‌پذیرند که دو بار عامل صفر کننده در آن‌ها ضرب شود (ریشه‌ی مضاعف یا مکرر داشته باشد). با توجه به این که $f(x)=x(x-1)(x+1)[x]$، دارای ۳ عامل صفر کننده‌ی ساده است، پس تابع در نقاط صحیح صفر، ۱ و -1 پیوسته و مشتق‌ناپذیر است.

۱۸- گزینه‌ی ۴ **راه‌حل اول**: تابع را به صورت $\frac{y}{x}=(2x^2y-1)^2$ نوشته و ساده می‌کنیم:

$$\frac{y}{x}=4x^4y^2-4x^2y+1\Rightarrow y=4x^5y^2-4x^3y+x\Rightarrow 4x^5y^2-4x^3y-y+x=0$$

حال با توجه به فرمول مشتق ضمنی داریم:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{20x^4y^2-12x^2y+1}{8x^5y-4x^3-1}\xrightarrow{(1,1)}\frac{dy}{dx}=-\frac{20-12+1}{8-4-1}=-\frac{9}{3}=-3$$

راه‌حل دوم: تابع را به صورت $\sqrt{\frac{y}{x}}-2x^2y+1=0$ نوشته و از فرمول مشتق ضمنی استفاده می‌کنیم:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{\dfrac{-\frac{y}{x^2}}{2\sqrt{\frac{y}{x}}}-4xy}{\dfrac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\frac{y}{x}}}-2x^2}\xrightarrow{(1,1)}\frac{dy}{dx}=-\frac{-\frac{1}{2}-4}{\frac{1}{2}-2}=-\frac{-\frac{9}{2}}{-\frac{3}{2}}=-3$$

۱۹- گزینه‌ی ۲ با استفاده از فرمول مشتق ضمنی، مشتق را در نقطه‌ی $(1,1)$ پیدا می‌کنیم:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+3y}}+\frac{2}{2\sqrt{x}}}{\frac{3}{2\sqrt{x+3y}}+0}\xrightarrow{(1,1)}\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{1}{4}+\frac{2}{2}}{\frac{3}{4}}=-\frac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{4}}=-\frac{5}{3}$$

بنابراین شیب خط قائم بر نمودار در این نقطه برابر است با:

$$m=\frac{-1}{-\frac{5}{3}}=\frac{3}{5}\Rightarrow y-1=\frac{3}{5}(x-1)\Rightarrow y=\frac{3}{5}x-\frac{3}{5}+1\Rightarrow y=\frac{3}{5}x+\frac{2}{5}$$

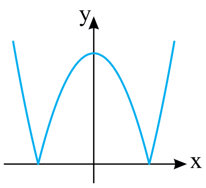
۲۰- گزینه‌ی ۱ با توجه به این که $(\ln u)'=\frac{u'}{u}$، از تابع مورد نظر دو بار مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=\ln x^2+2\ln\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{2x}{x^2}+2\times\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{x}+\frac{1}{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{x}\Rightarrow f''(x)=-\frac{3}{x^2}\Rightarrow f''(\frac{1}{2})=-\frac{3}{(\frac{1}{2})^2}=-12$$

پاسخ تشریحی آزمون ۱۰۲

۱- گزینه‌ی ۴ با توجه به نمودار f'، در بازه‌های $(-\infty,a)$ و (b,d) تابع f' صعودی است. ضمناً هرگاه f' مثبت (بالای محور طول‌ها) باشد، تابع f صعودی است. پس f در بازه‌ی (c,e) صعودی است. اشتراک این بازه‌ها، بازه‌ی (c,d) می‌باشد.

۲- گزینه‌ی ۲ برای آن که تابع f سه نقطه‌ی بحرانی داشته باشد، باید $y=x^2-2ax+4$ دارای دو ریشه باشد تا مطابق شکل روبه‌رو، در دو نقطه مشتق نداشته باشد و مشتق یک نقطه برابر صفر باشد، پس:



$$\Delta'>0\Rightarrow(-a)^2-4\times1>0\Rightarrow a^2>4\Rightarrow|a|\geq2$$

۳- گزینه‌ی ۱ ریشه‌های مشتق دوم را به‌دست می‌آوریم:

$$y=x\times e^{1-x^2}\Rightarrow y'=1\times e^{1-x^2}+xe^{1-x^2}(-2x)=e^{1-x^2}(1-2x^2)\Rightarrow y''=e^{1-x^2}(-2x)(1-2x^2)+e^{1-x^2}(-4x)$$

$$=e^{1-x^2}(-2x+4x^3-4x)=e^{1-x^2}(4x^3-6x)\xrightarrow{y''=0}2x(x^2-3)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=\pm\sqrt{3}\end{cases}$$

در هر سه عدد به‌دست آمده y'' تغییر علامت می‌دهد و y' موجود است، پس هر سه عدد طول نقاط عطف هستند.

۴- گزینه‌ی ۳ برای آن که تقعر تابع رو به پایین باشد می‌بایست علامت f'' منفی باشد، پس:

$$f(x)=x^2+\frac{1}{x}\Rightarrow f'(x)=2x-\frac{1}{x^2}\Rightarrow f''(x)=2+\frac{2}{x^3}\xrightarrow{f''<0}2+\frac{2}{x^3}<0\Rightarrow\frac{2(x^3+1)}{x^3}<0$$

$$\Rightarrow -1<x<0$$

x		-1		0	
$\frac{2(x^3+1)}{x^3}<0$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$

۵- گزینه‌ی ۱ ابتدا نقاط بحرانی تابع را در بازه‌ی مورد نظر پیدا می‌کنیم:

$$y'=3x^2-6x-9\xrightarrow{y'=0}3(x^2-2x-3)=0\Rightarrow3(x+1)(x-3)=0\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\x=3\end{cases}$$

فقط $x=-1$ در بازه‌ی مورد نظر است. برای یافتن ماکزیمم مطلق تابع، مقادیر ابتدا و انتهای بازه و نقاط بحرانی را با هم مقایسه می‌کنیم:

$f(-2)=-8-12+18+5=3$

$f(-1)=-1-3+9+5=10$

$f(2)=8-12-18+5=-17$

بنابراین $(-1,10)$ ماکزیمم مطلق تابع در این بازه است.

۶- گزینه‌ی ۳ ابتدا ریشه‌های مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$y'=\frac{3x^2(x^2-3)-2x\times x^3}{(x^2-3)^2}=\frac{x^4-9x^2}{(x^2-3)^2}\xrightarrow{y'=0}x^4-9x^2=0\Rightarrow x^2(x^2-9)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=\pm 3\end{cases}$$

با توجه به این که y' در $x=0$ دارای ریشه‌ی مضاعف است، پس y' در صفر تغییر علامت نمی‌دهد و در دو نقطه با طول‌های ۳ و ۳− اکسترمم‌های نسبی تابع هستند و اختلاف آن‌ها برابر $3-(-3)=6$ است.

۷- گزینه‌ی ۱ صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} ax^2+bx+2 & x-1 \\ \cline{2-2} -ax^2+ax & ax+(a+b) \\ \cline{1-1} (a+b)x+2 & \\ -(a+b)x+a+b & \\ \cline{1-1} a+b+2 & \end{array}$$

برای آن که $y=2x+3$ مجانب مایل تابع باشد، داریم:

$$\begin{cases}a=2\\a+b=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}\Rightarrow a-b=1$$

۸- گزینه‌ی ۳ نقطه‌ای به طول ۲ نقطه‌ی عطف تابع است، پس $\frac{-a}{-3}=2\Rightarrow a=6$ ضمناً با توجه به این که خط مماس در $x=2$ افقی است، پس $f'(2)=0$، یعنی:

$$y'=-3x^2+12x+b\xrightarrow{x=2}0=-12+24+b\Rightarrow b=-12$$

بنابراین تابع به صورت $y=-x^3+6x^2-12x+12$ است و مقدار تابع در نقطه‌ی عطف $x=2$ برابر است با:

$$y=-8+6\times 4-12\times 2+12=4$$

۹- گزینه‌ی ۱ نقطه‌ی $x=0$ تنها مجانب قائم تابع و در نتیجه تنها ریشه‌ی مخرج کسر است، پس $b=0$. ضمناً $x=-4$ اکسترمم نسبی تابع است و مشتق تابع در این نقطه برابر صفر است:

$$y=\frac{x+a}{x^2}\Rightarrow y'=\frac{x^2-2x(x+a)}{x^4}\Rightarrow y=\frac{-x^2-2ax}{x^4}\xrightarrow{x=-4}0=\frac{-16+8a}{(-4)^4}\Rightarrow a=2$$

۱۰- گزینه‌ی ۴ **راه‌حل اول**: معادله‌ی خط با طول از مبدأ p و عرض از مبدأ q برابر است با:

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1\xrightarrow[q=-2]{p=4}\frac{x}{4}+\frac{y}{-2}=1\Rightarrow x-2y=4$$

برای یافتن محل تلاقی این خط با نیمساز ربع اول و سوم، x و y را برابر قرار می‌دهیم:

$$x-2x=4\Rightarrow\begin{cases}x=-4\\y=-4\end{cases}$$

راه‌حل دوم: معادله‌ی خط مفروض را $y=ax+b$ در نظر می‌گیریم. این خط از دو نقطه‌ی $(0,-2)$ و $(4,0)$ می‌گذرد، پس:

$$\begin{cases}-2=0\times a+b\Rightarrow b=-2\\0=4\times a+b\Rightarrow a=-\frac{b}{4}\end{cases}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

بنابراین معادله‌ی خط به صورت $y=\frac{1}{2}x-2$ است که خط $y=x$ را در نقطه‌ی $A(-4,-4)$ قطع می‌کند.

۱۱- گزینه‌ی ۳ فرم گسترده‌ی دایره به صورت $x^2+y^2+ax+by+c=0$ می‌باشد، با جایگذاری سه نقطه‌ی داده شده و حل دستگاه معادلات، مقدار a، b و c را می‌یابیم:

$$\begin{cases}(0,0):c=0\\(1,1):1+1+a+b+c=0\xrightarrow{c=0}a+b=-2\\(2,-2):4+4+2a-2b+c=0\xrightarrow{c=0}a-b=-4\end{cases}\Rightarrow a=-3,b=1,c=0$$

بنابراین معادله‌ی دایره برابر است با:

$$x^2+y^2-3x+y=0\Rightarrow(x-\frac{3}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{9}{4}+\frac{1}{4}\Rightarrow R=\sqrt{\frac{10}{4}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

۱۲- گزینه‌ی ۳ ابتدا با استاندارد کردن معادله‌ی دو دایره، مرکز و شعاع آن‌ها را پیدا می‌کنیم:

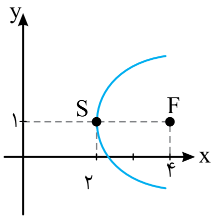
$$x^۲+y^۲+۴\sqrt{۶}y+b=۰\Rightarrow x^۲+(y+۲\sqrt{۶})^۲=۲۴-b\Rightarrow O(۰,-۲\sqrt{۶})\ ,\ R=\sqrt{۲۴-b}$$

$$x^۲+y^۲-۲x=۳\Rightarrow (x-۱)^۲+y^۲=۴\Rightarrow O'(۱,۰), R=۲$$

برای آن که دو دایره مماس خارج باشند، باید داشته باشیم $OO'=R+R'$، پس:

$$\sqrt{(۱-۰)^۲+(۰+۲\sqrt{۶})^۲}=\sqrt{۲۴-b}+۲\Rightarrow\sqrt{۲۴+۱}=\sqrt{۲۴-b}+۲\Rightarrow\sqrt{۲۴-b}=۳\Rightarrow ۲۴-b=۹\Rightarrow b=۱۵$$

۱۳- گزینه‌ی ۱ با توجه به شکل واضح است که $x=۰$ معادله‌ی خط هادی سهمی است.



۱۴- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول:** ابتدا معادله‌ی بیضی را به فرم استاندارد می‌نویسیم:

$$۹x^۲+۴y^۲-۱۸x-۱۶y=۱۱۹\Rightarrow(۳x-۳)^۲+(۲y-۴)^۲=۱۱۹+۹+۱۶\Rightarrow ۹(x-۱)^۲+۴(y-۲)^۲=۱۴۴\Rightarrow\frac{(x-۱)^۲}{۱۶}+\frac{(y-۲)^۲}{۳۶}=۱$$

بنابراین بیضی قائم به مرکز $(۱,۲)$ است و $a=۴$ و $b=۶$. بنابراین فاصله‌ی دو رأس کانونی بیضی که در آن‌ها خط مماس افقی است، برابر $۲b=۱۲$ می‌باشد.

راه‌حل دوم: برای یافتن نقاطی که مماس در آن‌ها افقی است، مشتق ضمنی تابع را برابر صفر قرار می‌دهیم:

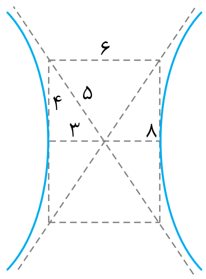
$$y'=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{۱۸x-۱۸}{۸y-۱۶}\xrightarrow{y'=۰}۱۸x-۱۸=۰\Rightarrow x=۱$$

با جایگذاری $x=۱$ در معادله‌ی بیضی داریم:

$$۹+۴y^۲-۱۸-۱۶y=۱۱۹\Rightarrow ۴y^۲-۱۶y-۱۲۸=۰\Rightarrow y^۲-۴y-۳۲=۰\Rightarrow(y-۸)(y+۴)=۰\Rightarrow\begin{cases}y=۸\\y=-۴\end{cases}$$

اختلاف دو مقدار به‌دست آمده برابر ۱۲ است.

۱۵- گزینه‌ی ۱ با توجه به ابعاد مستطیل داده شده، $a=۳$ و $b=۴$، داریم:



$$c^۲=a^۲+b^۲\Rightarrow c=\sqrt{۹+۱۶}=۵$$

خروج از مرکز هذلولی برابر $\frac{c}{a}$ است، بنابراین $e=\frac{۵}{۳}$.

۱۶- گزینه‌ی ۳ برای محاسبه‌ی انتگرال مورد نظر، ابتدا تابع را ساده می‌کنیم و سپس از آن انتگرال می‌گیریم:

$$\frac{\cos^۳ x}{۱+\sin x}\times\frac{۱-\sin x}{۱-\sin x}=\frac{\cos^۳ x(۱-\sin x)}{۱-\sin^۲ x}=\frac{\cos^۳ x(۱-\sin x)}{\cos^۲ x}=\cos x-\sin x\cos x=\cos x-\frac{۱}{۲}\sin ۲x$$

$$\int\frac{\cos^۳ x}{۱+\sin x}dx=\int(\cos x-\frac{۱}{۲}\sin ۲x)dx=\sin x+\frac{۱}{۴}\cos ۲x+c$$

۱۷- گزینه‌ی ۴ با توجه به فرمول مشتق ضرب توابع داریم:

$$f'(x)=۱\times\int_۱^x\frac{dt}{t^۲+۴}+(x-۱)\times\frac{۱}{x^۲+۴}\Rightarrow f''(x)=\frac{۱}{x^۲+۴}+\frac{x^۲+۴-۲x(x-۱)}{(x^۲+۴)^۲}=\frac{x^۲+۴+x^۲+۴-۲x^۲+۲x}{(x^۲+۴)^۲}=\frac{۲x+۸}{(x^۲+۴)^۲}\Rightarrow f''(۱)=\frac{۱۰}{۲۵}=\frac{۲}{۵}$$

۱۸- گزینه‌ی ۱ ابتدا معادله‌ی خط مماس بر سهمی را پیدا می‌کنیم:

$$m=f'(۱)=۲\times۱=۲\Rightarrow y-۱=۲(x-۱)\Rightarrow y=۲x-۱$$

خط $y=۲x-۱$ محور طول‌ها را در نقطه‌ای با طول $\frac{۱}{۲}$ قطع می‌کند، پس مساحت سایه زده برابر است با:

$$\int_۰^۱ x^۲dx-\int_{\frac{۱}{۲}}^۱(۲x-۱)dx=\frac{x^۳}{۳}\Big|_۰^۱-(x^۲-x)\Big|_{\frac{۱}{۲}}^۱=\frac{۱}{۳}-(۰-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۱۲}$$

۱۹- گزینه‌ی ۱ انتگرال نامعین مورد نظر را محاسبه می‌کنیم:

$$\int \frac{6x}{\sqrt{x-2}}dx=\int \frac{6x-12+12}{\sqrt{x-2}}dx=\int (6\sqrt{x-2}+\frac{12}{\sqrt{x-2}})dx=\int (6(x-2)^{\frac{1}{2}}+12(x-2)^{-\frac{1}{2}})dx=\frac{6(x-2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{12(x-2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c$$

$$=4\sqrt{(x-2)^3}+24\sqrt{x-2}+c=\sqrt{x-2}\times(4(x-2)+24)+c=\sqrt{x-2}(4x+16)+c$$

بنابراین $f(x)$ به صورت $4x+16$ می‌باشد.

۲۰- گزینه‌ی ۳ ابتدا تابع مورد نظر را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{(1+\sqrt{x})^2-4\sqrt{x}}=\sqrt{1+x+2\sqrt{x}-4\sqrt{x}}=\sqrt{1+x-2\sqrt{x}}=\sqrt{(1-\sqrt{x})^2}=|1-\sqrt{x}|$$

با توجه به این که در فاصله‌ی ۱ تا ۴، عبارت داخل قدر مطلق منفی است، پس $|1-\sqrt{x}|=\sqrt{x}-1$ و داریم:

$$\int_1^4 (\sqrt{x}-1)dx=(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x)\Big|_1^4=(\frac{2}{3}\times 8-4)-(\frac{2}{3}-1)=\frac{14}{3}-3=\frac{5}{3}$$

پاسخ تشریحی آزمون ۱۰۳

۱- گزینه‌ی ۲ برای آن که تابع f صعودی اکید باشد باید به ازای همه‌ی مقادیر x، $f'(x)$ نامنفی باشد:

$$f'(x)=3ax^2+4ax+3 \xrightarrow{f'\geq 0} \begin{cases} 3a>0 \Rightarrow a>0 \\ \Delta'\leq 0 \Rightarrow 4a^2-9a\leq 0 \end{cases} \Rightarrow 0\leq a\leq \frac{9}{4}$$

بنابراین اشتراک دو محدوده‌ی به‌دست آمده بازه‌ی $(0,\frac{9}{4})$ است. همچنین اگر $a=0$، داریم $f(x)=3x-1$ که اکیداً صعودی است، پس داریم: $0\leq a\leq \frac{9}{4}$

۲- گزینه‌ی ۱ تابع f فاقد نقطه‌ی بحرانی است، پس مشتق تابع ریشه ندارد.

$$f'(x)=\frac{(2x+m)(x-1)-(x^2+mx+3)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2+mx-2x-m-x^2-mx-3}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-m-3}{(x-1)^2}$$

برای آن که معادله‌ی $x^2-2x-m-3=0$ ریشه نداشته باشد، باید داشته باشیم:

$$\Delta'<0 \Rightarrow 1+m+3<0 \Rightarrow m<-4$$

۳- گزینه‌ی ۱ علامت f'' را تعیین می‌کنیم:

$$f'_x=1\times \ln\sqrt{x}+x\times\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=\ln\sqrt{x}+\frac{1}{2}\Rightarrow f''(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=\frac{1}{2x}$$

با توجه به این که تابع فقط در بازه‌ی $(0,+\infty)$ تعریف شده است، f'' همواره مثبت است و تقعر تابع همواره رو به بالا می‌باشد.

۴- گزینه‌ی ۲ می‌دانیم نقاط برخورد با محور طول‌ها برای تابع $y=\tan(\frac{\pi}{4}-x)$ عطف است (مثلاً $x=\frac{\pi}{4}$) و داریم:

$$y'=-1\times(1+\tan^2(\frac{\pi}{4}-x))\Rightarrow m=y'(\frac{\pi}{4})=-(1+0)=-1$$

۵- گزینه‌ی ۲ با توجه به این که تابع $y=2\sqrt{8-x}$ و $y=-\sqrt{x+1}$ هر دو اکیداً نزولی هستند، پس تابع f نیز اکیداً نزولی است و ماکزیمم و مینیمم آن در ابتدا و انتهای بازه‌ی دامنه اتفاق می‌افتد، پس:

$$8-x\geq 0\Rightarrow x\leq 8 \quad , \quad x+1\geq 0\Rightarrow x\geq -1\Rightarrow D=[-1,8]$$

$$\begin{cases} f(-1)=2\sqrt{8-(-1)}=6 : \max \\ f(8)=-\sqrt{8+1}=-3 : \min \end{cases} \Rightarrow 6-(-3)=9$$

۶- گزینه‌ی ۳ برای آن که نقطه‌ی A اکسترمم نسبی تابع باشد، می‌بایست در تابع صدق کند و مشتق تابع در $x=1$ برابر صفر باشد:

$$f'(x)=\frac{a(x^2+b)-2x(ax)}{(x^2+b)^2}=\frac{-ax^2+ab}{(x^2+b)^2}$$

$$\begin{cases} f'(1)=0 \Rightarrow -a+ab=0 \Rightarrow a(b-1)=0 \\ f(1)=4 \Rightarrow \frac{a}{1+b}=4 \Rightarrow a=4(1+b) \end{cases} \Rightarrow 4(b^2-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=8 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} b=-1 \\ a=0 \text{ غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

توجه کنید در حالت $a=0$ تابع f ثابت و برابر صفر است و این غیر قابل قبول است، پس تابع به صورت $y=\frac{8x}{x^2+1}$ است و داریم:

$$y'=\frac{8(x^2+1)-16x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{-8x^2+8}{(x^2+1)^2}$$

x		-1		1	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	-4 min	$\nearrow$	4 max	$\searrow$

بنابراین نقطه‌ی $A(1,4)$ ماکزیمم نسبی تابع است.

۷- گزینه‌ی ۱ با استفاده از هم‌ارزی رادیکال‌ها در بی‌نهایت می‌دانیم:

$$\sqrt{x^2-2x}\sim|x-1| \Rightarrow \begin{cases} x\to+\infty: y\sim(x-1)-2x=-x-1 \\ x\to-\infty: y\sim(1-x)-2x=-3x+1 \end{cases}$$

بنابراین دو خط $y=-x-1$ و $y=-3x+1$ دو مجانب مایل این تابع هستند. برای یافتن نقطه‌ی برخورد آن‌ها دستگاه معادلات زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} y=-3x+1 \\ y=-x-1 \end{cases} \Rightarrow -3x+1=-x-1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$$

۸- گزینه‌ی ۱ نقطه‌ای با طول صفر، اکسترمم نسبی تابع $y=f(x)$ است، پس $f'(0)=0$ و داریم:

$$y'=3x^2+2ax+b \xrightarrow{f'(0)=0} b=0$$

حال به محاسبه‌ی ریشه‌ی دیگر y' می‌پردازیم:

$$y'=0 \Rightarrow 3x^2+2ax=0 \Rightarrow x(3x+2a)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{2a}{3} \end{cases}$$

با توجه به این که عرض اکسترمم دیگر تابع برابر ۲ می‌باشد، داریم:

$$f(-\frac{2a}{3})=2 \Rightarrow -\frac{8a^3}{27}+a(\frac{4a^2}{9})+6=2 \Rightarrow -\frac{8a^3}{27}+\frac{12a^3}{27}=-4 \Rightarrow 4a^3=-4\times27 \Rightarrow a=-3$$

۹- گزینه‌ی ۴ نقطه‌ای به طول صفر، نقطه‌ی عطف تابع است، پس $f''(0)=0$ و داریم:

$$f'(x)=x^3+3ax^2+2bx \Rightarrow f''(x)=3x^2+6ax+2b \xrightarrow{f''(0)=0} b=0$$

ضمناً خط مماس بر تابع در نقطه‌ای با طول ۳ افقی است، پس $f'(3)=0$:

$$f'(x)=x^3+3ax^2 \xrightarrow{f'(3)=0} 27+27a=0 \Rightarrow a=-1$$

بنابراین مشتق دوم تابع به صورت $f''(x)=3x^2-6x$ است. ریشه‌های معادله‌ی $f''=0$ نقطه‌ی عطف تابع هستند:

$$3x^2-6x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

۱۰- گزینه‌ی ۲ نقطه‌ی $M(\frac{0+2}{2},\frac{-3+3}{2})$ وسط پاره‌خط BC است، از طرفی شیب خط BC برابر $\frac{3-(-3)}{0-2}=-3$ است، پس شیب خط عمود بر آن برابر $\frac{1}{3}$ می‌باشد. بنابراین معادله‌ی عمود منصف BC عبارت است از:

$$y-0=\frac{1}{3}(x-1) \Rightarrow 3y=x-1 \Rightarrow x-3y-1=0$$

فاصله‌ی نقطه‌ی $A(1,2)$ از این خط برابر است با:

$$d=\frac{|1-6-1|}{\sqrt{1+9}}=\frac{6}{\sqrt{10}}$$

۱۱- گزینه‌ی ۲ برای یافتن معادله‌ی وتر مشترک دو دایره کافی است دو معادله‌ی دایره را از هم کم کنیم تا عبارات درجه دوم حذف شده و معادله‌ی یک خط به‌دست آید:

$$\begin{cases} x^۲+y^۲-۲y=۳ \\ x^۲+y^۲+۲x=۰ \end{cases} \Rightarrow -۲y-۲x=۳ \Rightarrow x+y=-۱/۵$$

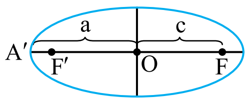
۱۲- گزینه‌ی ۱ ابتدا معادله‌ی دایره را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$x^۲+y^۲-۸x-۴y+۱۱=۰ \Rightarrow (x-۴)^۲+(y-۲)^۲=۹ \Rightarrow O(۴,۲)\ ,\ R=۳$$

بیش‌ترین فاصله‌ی A از دایره برابر $OA+R$ است، پس:

$$OA+R=\sqrt{(۸-۴)^۲+(۲-۲)^۲}+۳=\sqrt{۱۶}+۳=۷$$

۱۳- گزینه‌ی ۲ معادله‌ی بیضی را به صورت استاندارد می‌نویسیم:



$$۳x^۲+۴y^۲+۸y=۴۴ \Rightarrow ۳x^۲+۴(y+۱)^۲=۴۸ \Rightarrow \frac{x^۲}{۱۶}+\frac{(y+۱)^۲}{۱۲}=۱$$

پس بیضی افقی است و $a=۴$ و $b=۲\sqrt{۳}$، بنابراین داریم:

$$a^۲=b^۲+c^۲ \Rightarrow c=\sqrt{۱۶-۱۲}=۲$$

فاصله‌ی کانون از رأس دورتر برابر است با:

$$A'F=OF+OA'=c+a=۲+۴=۶$$

۱۴- گزینه‌ی ۱ طول AB وتر کانونی سهمی است که اندازه‌ی آن برابر $۴p$ می‌باشد، پس:

$$۴p=۹-۵ \Rightarrow p=۱$$

فاصله‌ی رأس از خط هادی برابر p یعنی یک است.

۱۵- گزینه‌ی ۳ ابتدا معادله‌ی هذلولی را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$۹x^۲-۴y^۲-۱۸x-۸y=۳۱ \Rightarrow ۹(x-۱)^۲-۴(y+۱)^۲=۳۱+۹-۴ \Rightarrow \frac{(x-۱)^۲}{۴}-\frac{(y+۱)^۲}{۹}=۱$$

بنابراین $a=۲$ و $b=۳$، پس اختلاف فواصل هر نقطه‌ی دلخواه از دو کانون برابر $۲a=۴$ است.

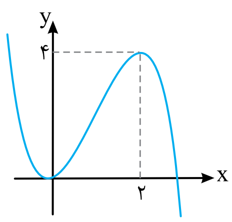
۱۶- گزینه‌ی ۲ مقدار نقاط جدا از هم ۰ ، ۱ ، ۲ و ۳ در انتگرال تأثیری ندارد و برای محاسبه‌ی انتگرال کافی است ازتابع $\frac{۱}{(x-۴)^۲}$ انتگرال بگیریم:

$$\int_۰^۳ f(x)dx=\int_۰^۳ \frac{۱}{(x-۴)^۲}dx=-\frac{۱}{x-۴}\Big|_۰^۳=\frac{-۱}{-۱}-(\frac{۱}{۴})=\frac{۳}{۴}$$

۱۷- گزینه‌ی ۳ با توجه به این که $(\int_۲^x \frac{\ln(t+۲)}{t^۲}dt)'=\frac{\ln(x+۲)}{x^۲}$ داریم:

$$f'(x)=۱\times\int_۲^x \frac{\ln(t+۲)}{t^۲}dt+x\times\frac{\ln(x+۲)}{x^۲} \Rightarrow f'(۲)=\int_۲^۲ \frac{\ln(t+۲)}{t^۲}dt+\frac{\ln(۲+۲)}{۲}=۰+\frac{\ln ۴}{۲}=\frac{\ln ۲^۲}{۲}=\frac{۲\ln ۲}{۲}=\ln ۲$$

۱۸- گزینه‌ی ۱ ابتدا نقطه‌ی ماکزیمم تابع را محاسبه می‌کنیم:



$$f'(x)=۶x-۳x^۲=۰ \Rightarrow ۳x(۲-x)=۰ \xrightarrow{f'=۰} \begin{cases} x=۰ \\ x=۲ \end{cases}$$

بنابراین نقطه‌ی $(۲,۴)$ ماکزیمم تابع است و مساحت خواسته شده برابر است با:

$$S=۲\times۴-\int_۰^۲(۳x^۲-x^۳)dx=۸-(x^۳-\frac{x^۴}{۴})\Big|_۰^۲=۸-(۸-\frac{۱۶}{۴})=۴$$

۱۹- گزینه‌ی ۱ تابع مورد نظر را ساده کرده و انتگرال می‌گیریم:

$$\int\frac{(۱+\sqrt{x})^۲-۱}{x}dx=\int\frac{۱+x+۲\sqrt{x}-۱}{x}dx=\int\frac{x+۲\sqrt{x}}{x}dx=\int(۱+\frac{۲}{\sqrt{x}})dx=\int(۱+۲x^{-\frac{۱}{۲}})dx=x+\frac{۲x^{\frac{۱}{۲}}}{\frac{۱}{۲}}+c=x+۴\sqrt{x}+c=\sqrt{x}(\sqrt{x}+۴)+c$$

بنابراین $f(x)=\sqrt{x}+۴$.

۲۰- گزینه‌ی ۴ با بازه‌بندی انتگرال را محاسبه می‌کنیم:

$$\int_0^2 \frac{x+[x]}{x+1}dx=\int_0^1 \frac{x+0}{x+1}dx+\int_1^2 \frac{x+1}{x+1}dx=\int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}dx+\int_1^2 1\times dx=\int_0^1 (1-\frac{1}{x+1})dx+\int_1^2 dx=(x-\ln(x+1))\Big|_0^1+x\Big|_1^2$$

$$=(1-\ln 2)-(0-\ln 1)+2-1=1-\ln 2+1=2-\ln 2$$

پاسخ تشریحی آزمون ۱۰۴

۱- گزینه‌ی ۲ برای آن‌که $A, B, C, \dots$ جملات متوالی یک دنباله‌ی عددی باشند بایستی شرط $2B=A+C$ برقرار باشد. پس با فرض $2x=C$، $4x+2=B$ و $5x-1=A$ داریم:

$$2B=A+C \Rightarrow 2(4x+2)=5x-1+2x \Rightarrow 8x+4=7x-1 \Rightarrow x=-5$$

۲- گزینه‌ی ۳ می‌دانیم $AA^{-1}=I$، بنابراین:

$$|(\frac{1}{2}A)(3A^{-1})|=|\frac{3}{2}\underbrace{(AA^{-1})}_{I}|=\begin{vmatrix}\frac{3}{2} & 0\\ 0 & \frac{3}{2}\end{vmatrix}=\frac{9}{4}=2/25$$

۳- گزینه‌ی ۳ محور تقارن سهمی $y=ax^2+bx+c$ خط $x=-\frac{b}{2a}$ می‌باشد. با توجه به فرض مسأله داریم:

$$x_S=-\frac{b}{2a}=-\frac{-a}{2(2)}=\frac{a}{4}=1 \Rightarrow a=4$$

برای یافتن نقطه‌ی تلاقی منحنی با محور x ها معادله‌ی $y=0$ را حل می‌کنیم و داریم:

$$y=2x^2-4x-6=0 \Rightarrow x=-1, 3$$

چون نقطه‌ی تلاقی در سمت راست محور x ها است، پس $x=3$ جواب می‌باشد.

۴- گزینه‌ی ۱ ابتدا معادلات داده شده را به یک دستگاه دو معادله و دو مجهول تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{cases}\frac{x+2y}{3}=\frac{x-y+1}{2} \Rightarrow 2x+4y=3x-3y+3\\ \frac{x-y+1}{2}=2x+y-1 \Rightarrow x-y+1=4x+2y-2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}7y=x+3\\ 3=3x+3y \Rightarrow x+y=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}7y-x=3\\ x+y=1\end{cases} \Rightarrow x=y=\frac{1}{2}$$

پس نقطه‌ی $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ جواب دستگاه می‌باشد، بنابراین دستگاه یک جواب دارد.

۵- گزینه‌ی ۳ ۱۳ داده داریم و داده‌ی هفتم داده‌ی وسطی است، پس داده‌ی هفتم میانه است یعنی ۲۱ میانه است. اکنون میانگین را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x}=\frac{12+13+15+16+17+21+21+24+28+30+37+39+39}{13}=\frac{312}{13}=24$$

پس میانه ۳ واحد کم‌تر از میانگین است.

۶- گزینه‌ی ۲ ابتدا میانگین نمرات هر یک را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}\bar{x}_1=17+\frac{0-1-2+2-4}{5}=16\\ \bar{x}_2=17+\frac{1-1-3-2-0}{5}=16\end{cases} \Rightarrow$$ میانگین دو نفر با هم برابر است.

چون میانگین‌ها با هم برابر است، پس واریانس‌ها را حساب می‌کنیم. هرکدام واریانس کم‌تری داشته باشد دقت بالاتری دارد.

$$\begin{cases}\sigma_1^2=\frac{1+0+1+9+9}{5}=4\\ \sigma_2^2=\frac{4+0+4+1+1}{5}=2\end{cases} \Rightarrow$$ دقت نفر دوم بیش‌تر است.

۷- گزینه‌ی ۱ می‌دانیم $n(S)=8$، از طرفی فقط فرزند سوم پسر است، پس ۲ فرزند اول باید دختر باشند یعنی حالت «پسر, دختر, دختر» تنها حالت قابل قبول است، پس داریم:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{1}{8}$$

۸- گزینه‌ی ۴ با قرار دادن صفر به حالت $\frac{0}{0}$ می‌رسیم. برای رفع ابهام می‌دانیم وقتی $u \to 0$، $\sin u \sim u$، پس:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(2\sin^2\frac{x}{2})}{x^3\cos x}\xrightarrow{\text{هم‌ارزی}}\lim_{x\to 0}\frac{x\times 2(\frac{x^2}{4})}{x^3\times 1}=\frac{1}{2}$$

۹- گزینه‌ی ۳ حد چپ و حد راست تابع $g+f$ را در $x=۲$ پیدا می‌کنیم و با مقدار $f+g$ در $x=۲$ برابر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^-}(g+f)(x)=\frac{۱}{۲-۱}+۲\times ۲+a=۵+a\\ (g+f)(۲)=\lim\limits_{x\to ۲^+}(g+f)(x)=a(۲^۲)+\frac{۲}{۲+۱}=۴a+\frac{۲}{۳}\end{cases}\Rightarrow ۵+a=۴a+\frac{۲}{۳}\Rightarrow ۳a=۵-\frac{۲}{۳}=\frac{۱۳}{۳}\Rightarrow a=\frac{۱۳}{۹}$$

۱۰- گزینه‌ی ۲ چون $x\to\infty$، پس می‌توانیم از قاعده‌ی پرتوان استفاده کنیم. داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{mx^{n-۱}+x+۱}{x^{m+۲}+x^۲-۲}=۳$$

برای برقراری این رابطه بایستی داشته باشیم $n-۱=m+۲$ و چون حاصل حد برابر ۳ می‌باشد، پس $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{mx^{n-۱}}{x^{m+۲}}=m=۳$. بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$n-۱=۵\Rightarrow n=۶\Rightarrow\frac{m}{n}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}=۰/۵$$

البته باید دقت کنید که اگر درجه‌ی مخرج ۲ می‌شد به تناقض می‌رسیدیم.

۱۱- گزینه‌ی ۲ می‌دانیم فاصله‌ی نقطه‌ی $M(x\,,y)$ تا مبدأ برابر $d=\sqrt{x^۲+y^۲}$ است، پس:

$$d=\sqrt{x^۲+y^۲}=\sqrt{x^۲+x^۲+۷}=\sqrt{۲x^۲+۷}$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر d در $x=۳$ همان مقدار مشتق d به ازای $x=۳$ است، پس:

$$d'=\frac{۴x+۰}{۲\sqrt{۲x^۲+۷}}\xrightarrow{x=۳}d'(۳)=\frac{۲\times ۳}{\sqrt{۲۵}}=\frac{۶}{۵}=۱/۲$$

۱۲- گزینه‌ی ۳ مطلوب سؤال مقدار مشتق چپ f در $x=۱$ است. پس ابتدا با فرض $x<۱$ تابع f را ساده می‌کنیم، سپس مشتق مورد نظررا حساب می‌کنیم:

$$x<۱:\ f(x)=۱-x+\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=-۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\xrightarrow{m=۱}f'_-(۱)=-۱+\frac{۱}{۲\sqrt{۱}}=-\frac{۱}{۲}$$

نکته: به طور کلی اگر تابع f در $x=\alpha$ مشتق پذیر باشد، خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to ۰}\frac{f(\alpha+mn)-f(\alpha)}{n}=mf'(\alpha)$$

۱۳- گزینه‌ی ۲ احتمال بروز ژن رنگ چشـــم مغلوب برای هر فرزند برابر $\frac{۱}{۴}$ می‌باشـــد، لذا مطابق پیشـــامد مکمل احتمال بروز ژن رنگ چشم غالب $\frac{۳}{۴}$ خواهد شد $(p=\frac{۳}{۴})$. بنابر احتمال دو جمله‌ای (شکست و پیروزی) داریم:

$$P(X=۲)=\binom{۳}{۲}(\frac{۳}{۴})^۲(\frac{۱}{۴})^۱=\frac{۲۷}{۶۴}$$

۱۴- گزینه‌ی ۳ بنابر احتمال پیشامد مکمل داریم:

$$P(۰\le X<۹)=۱-P(X=۹)=۱-\binom{۹}{۹}(\frac{۱}{۲})^۹(\frac{۱}{۲})^۰=۱-(\frac{۱}{۲})^۹$$

۱۵- گزینه‌ی ۲ یک خط به شرطی بر یک تابع مماس است که معادله‌ی حاصل از تلاقی آن‌ها ریشه‌ی مضاعف داشته باشد:

$$y=۲x^۲-۳x+a=-۳\Rightarrow ۲x^۲-۳x+(a+۳)=۰\xrightarrow{\Delta=۰}۹-۴(۲)(a+۳)=۰\Rightarrow a+۳=\frac{۹}{۸}\Rightarrow a=\frac{۹}{۸}-۳=-\frac{۱۵}{۸}$$

۱۶- گزینه‌ی ۲ ابتدا جملات دنباله‌ی $\{a_n\}$ را با توجه به این‌که مجموع جملات یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت $q=\frac{۱}{۳}$ هستند، ساده می‌کنیم:

$$a_n=\frac{۱\times(۱-(\frac{۱}{۳})^n)}{۱-\frac{۱}{۳}}=\frac{۳}{۲}(۱-(\frac{۱}{۳})^n)\Rightarrow a_n=\frac{۳}{۲}(۱-(\frac{۱}{۳})^n)$$

افزایش n موجب کاهش $(\frac{۱}{۳})^n$ خواهد شد پس $-(\frac{۱}{۳})^n$ افزایش می‌یابد، در نتیجه جملات a_n نیز افزایش می‌یابند، لذا دنباله‌ی a_n صعودی است. از طرفی داریم:

$$\lim_{x\to\infty}a_n=\lim_{x\to\infty}\frac{۳}{۲}(۱-(\frac{۱}{۳})^n)=\frac{۳}{۲}$$

پس a_n یک دنباله‌ی صعودی و همگراست، بنابراین کران‌دار است. زیرا هر دنباله‌ی همگرا، کراندار است.

۱۷- گزینه‌ی ۳ ابتدا معادله را ساده می‌کنیم:

$$۲+\cos ۲x=\sin^۲ x\Rightarrow ۲+۱-۲\sin^۲ x=\sin^۲ x\Rightarrow ۳\sin^۲ x=۳\Rightarrow \sin^۲ x=۱\Rightarrow \sin x=\pm ۱$$

پس $x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۲}$ جواب کلی معادله است که البته $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$ هم همان جواب را نشان می‌دهد.

۱۸- گزینه‌ی ۲ در ابتدا تابع f را پیدا می‌کنیم:

$$(fog)(x)=\frac{۳x}{۶x-۵}\Rightarrow f(۳x-۲)=\frac{۳x}{۶x-۵}\Rightarrow f(۳x-۲)=\frac{(۳x-۲)+۲}{۲(۳x-۲)-۱}\Rightarrow f(x)=\frac{x+۲}{۲x-۱}$$

اگر $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$، آن‌گاه $f^{-۱}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$، پس:

$$f^{-۱}(x)=\frac{x+۲}{۲x-۱}$$

۱۹- گزینه‌ی ۴ ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=e^{x-۱}+\ln x^{\frac{-۱}{۲}}=e^{x-۱}-\frac{۱}{۲}\ln x$$

سپس مشتق اول و دوم تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=e^{x-۱}-\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{x}\quad,\quad f''(x)=e^{x-۱}+\frac{۱}{۲x^۲}\Rightarrow f''(۱)=e^{۰}+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

۲۰- گزینه‌ی ۴ برای آن‌که تابع اکسترمم نسبی نداشته باشد باید معادله‌ی $f'=۰$ ریشه‌ی ساده نداشته باشد.

$$y'=۳x^۲+۲ax+۲\xrightarrow{\text{ریشه‌ی ساده ندارد}}\Delta\le ۰\Rightarrow (۲a)^۲-۴(۳)(۲)\le ۰\Rightarrow a^۲-۶\le ۰\Rightarrow |a|\le\sqrt{۶}\Rightarrow a\in[-\sqrt{۶},\sqrt{۶}]$$

۲۱- گزینه‌ی ۱ چون طول نقطه‌ی بحرانی مثبت می‌باشد در ابتدا فرض می‌کنیم $x>۰$ و در نتیجه $f(x)=x^۳-۳x^۲+۸$، لذا برای یافتن نقطه‌ی بحرانی ریشه‌های $f'(x)=۰$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=۳x^۲-۶x=۰\begin{cases}x=۰ & \text{غ.ق.ق}\\ x=۲\end{cases}$$

x		۲	
f'	−	۰	+
f	↘	min	↗

بخشی از جدول تغییرات را در همسایگی $x=۲$ مشخص می‌کنیم. پس نقطه‌ی $x=۲$ طول مینیمم نسبی f است.

۲۲- گزینه‌ی ۳ با توجه به شکل حد تابع در $x=۱$ وجود دارد. پس بایستی $x=۱$ ریشه‌ی صورت نیز باشد، یعنی:

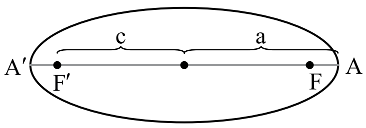
$$x^۳+a=۰\xrightarrow{x=۱}۱+a=۰\Rightarrow a=-۱$$

عرض نقطه‌ی A برابر حد تابع در $x=۱$ است، پس داریم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۳-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x^۲+x+۱)}{(x-۱)}=۱+۱+۱=۳$$

۲۳- گزینه‌ی ۴ ابتدا معادله‌ی بیضی را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$(x^۲-۴x)+۲(y^۲-۴y)=۴\Rightarrow (x-۲)^۲+۲(y-۲)^۲=۴+۴+۲\times ۴=۱۶\Rightarrow\frac{(x-۲)^۲}{۱۶}+\frac{(y-۲)^۲}{۸}=۱\Rightarrow\begin{cases}a=۴\\ b=\sqrt{۸}\end{cases},c^۲=a^۲-b^۲$$



$$\Rightarrow c^۲=۱۶-۸=۸\Rightarrow c=\sqrt{۸}$$

در یک بیضی فاصله‌ی کانون از دورترین رأس برابر طول $A'F$ یا AF' می‌باشد که برابر $a+c$ است. پس در این بیضی جواب برابر $۴+۲\sqrt{۲}$ می‌باشد.

۲۴- گزینه‌ی ۳ در هر هذلولی قدرمطلق تفاضل فواصل نقطه‌ی دلخواه M روی هذلولی از دو کانون آن برابر $۲a$ می‌باشد. داریم:

$$\frac{x^۲}{۴}-\frac{y^۲}{۲}=۱\Rightarrow a=۲$$

$$|MF-MF'|=۲a=۲\times ۲=۴$$

۲۵- گزینه‌ی ۳ مطابق قضیه‌ی بنیادی اول داریم:

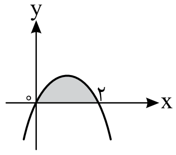
$$g(x)=\int_a^x f(t)dt\Rightarrow g'(x)=f(x)$$

سپس مشتق تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=x\times\int_۱^x\frac{dt}{t^۲+۲t}\Rightarrow f'(x)=\int_۱^x\frac{dt}{t^۲+۲t}+x\times\frac{۱}{x^۲+۲x}\Rightarrow f'(۱)=\int_۱^۱\frac{dt}{t^۲+۲t}+\frac{۱}{۱+۲}=۰+\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۳}$$

۲۶- گزینه‌ی ۱ ابتدا محل تقاطع منحنی و محور xها را می‌یابیم:

$$۲x-x^{۲}=۰\Rightarrow x(۲-x)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\x=۲\end{cases}$$



با توجه به شکل مقابل، در فاصله‌ی $[۰,۲]$ داریم $y>۰$، بنابراین:

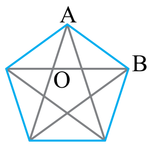
$$S=\int_{۰}^{۲}(۲x-x^{۲})dx=(x^{۲}-\frac{x^{۳}}{۳})\Big|_{۰}^{۲}=۴-\frac{۸}{۳}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow S=\frac{۴}{۳}$$

۲۷- گزینه‌ی ۱ تعداد قطرهای یک n ضلعی محدب برابر $\frac{n(n-۳)}{۲}$ است، پس:

$$\frac{n(n-۳)}{۲}=n\Rightarrow\frac{n-۳}{۲}=۱\Rightarrow n=۵$$

در یک چند ضلعی منتظم زاویه‌ی هر رأس برابر است با:

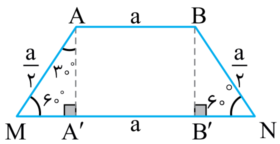
$$\frac{(n-۲)۱۸۰^{\circ}}{n}\xrightarrow{n=۵}\frac{۳\times۱۸۰^{\circ}}{۵}=۱۰۸^{\circ}$$



با توجه به شکل روبه‌رو، در مثلث ABO داریم:

$$\hat{O}=۱۸۰^{\circ}-\hat{A}-\hat{B}=۱۸۰^{\circ}-\frac{۲}{۳}\times۱۰۸^{\circ}-\frac{۱}{۳}\times۱۰۸^{\circ}=۱۸۰^{\circ}-۱۰۸^{\circ}=۷۲^{\circ}$$

۲۸- گزینه‌ی ۳ طول ضلع ۶ ضلعی را a می‌نامیم.
با توجه به شکل روبه‌رو در مثلث AMA' داریم:



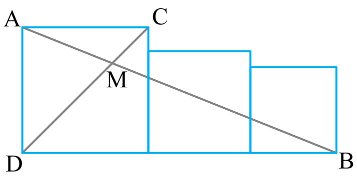
$$MA'=\frac{۱}{۲}AM=\frac{a}{۴}\quad,\quad AA'=\frac{\sqrt{۳}}{۲}AM=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a$$

$$S_{AMNB}=\frac{۱}{۲}\times AA'\times(AB+MN)=\frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۴}a\times(a+a+۲\times\frac{a}{۴})=\frac{\sqrt{۳}}{۸}a\times\frac{۵}{۲}a=\frac{۵\sqrt{۳}}{۱۶}a^{۲}$$

چون مساحت شش ضلعی منتظم برابر $\frac{۶\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$ است، نسبت خواسته شده برابر است با:

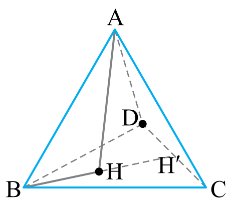
$$\frac{\frac{۵\sqrt{۳}}{۱۶}a^{۲}}{\frac{۶\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}}=\frac{۴\times۵}{۶\times۱۶}=\frac{۵}{۲۴}$$

۲۹- گزینه‌ی ۱ با توجه به قضیه‌ی موازی مورب، زوایای مثلث AMC و BMD برابر هستند، پس دو مثلث متشابهند و داریم:



$$\frac{MB}{AM}=\frac{BD}{AC}=\frac{۳+۲+۱}{۳}=۲$$

۳۰- گزینه‌ی ۱ هر ۴ وجه یک چهار وجهی منتظم مثلث‌های متساوی‌الاضلاع هستند. پای ارتفاع در چهار وجهی منتظم همان مرکز ثقل (محل تلاقی میانه‌ها یا ارتفاع‌های) مثلث است. پس اگر طول هر یال را برابر a بنامیم داریم:



$$BH=\frac{۲}{۳}BH'=\frac{۲}{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}a=\frac{\sqrt{۳}}{۳}a\xrightarrow{BH=\sqrt{۳}}\frac{\sqrt{۳}}{۳}a=\sqrt{۳}\Rightarrow a=۳$$

$$\overset{\Delta}{ABH}:AB^{۲}=BH^{۲}+AH^{۲}\Rightarrow ۳^{۲}=(\sqrt{۳})^{۲}+AH^{۲}\Rightarrow AH=\sqrt{۶}$$

$$\Rightarrow V=\frac{۱}{۳}AH\times S_{BCD}=\frac{۱}{۳}\times\sqrt{۶}\times\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times(۳)^{۲}=\frac{۹\sqrt{۲}}{۴}=۲/۲۵\times\sqrt{۲}$$

پاسخ تشریحی آزمون ۱۰۵

۱- گزینه‌ی ۲ در دنباله‌ی حسابی می‌دانیم $a_m-a_n=(m-n)d$، پس با فرض $a_۱=x+۱$، $a_۲=۲x-۱$ و $a_۴=۵x+۲$ داریم:

$$\begin{cases}a_۴-a_۲=۵x+۲-(۲x-۱)=۳x+۳=۲d\\a_۲-a_۱=۲x-۱-(x+۱)=x-۲=d\end{cases}\Rightarrow ۳x+۳=۲(x-۲)\Rightarrow x=-۷\Rightarrow a_۱=-۶,a_۲=-۱۵,a_۴=-۳۳$$

بنابراین جمله‌ی سوم برابر است با:

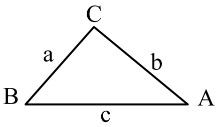
$$a_۳=\frac{a_۴+a_۲}{۲}\Rightarrow a_۳=\frac{-۳۳-۱۵}{۲}=-۲۴$$

۲- گزینه‌ی ۱ با توجه به فرض مسأله در بازه‌ی $[a, b]$ داریم $y \le -۴$، بنابراین:

$$۲x^۲ - ۷x + ۱ \le -۴ \Rightarrow ۲x^۲ - ۷x + ۵ \le ۰ \Rightarrow ۲(x-۱)(x-\frac{۵}{۲}) \le ۰ \Rightarrow ۱ \le x \le \frac{۵}{۲} \Rightarrow b - a = \frac{۵}{۲} - ۱ = \frac{۳}{۲}$$

۳- گزینه‌ی ۴ ابتدا کسینوس زاویه‌ی C را محاسبه می‌کنیم:

$$\sin \hat{C} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \cos \hat{C} = -\frac{۴}{۵}$$



مطابق رابطه‌ی کسینوس‌ها داریم:

$$c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab\cos \hat{C} = ۴^۲ + ۵^۲ - ۲(۴)(۵)(-\frac{۴}{۵}) = ۱۶ + ۲۵ + ۳۲ = ۷۳$$

توجه: چون c اندازه‌ی ضلع بزرگ‌تر است، $\hat{C}$ را منفرجه در نظر می‌گیریم و در نتیجه $\cos \hat{C} = -\frac{۴}{۵}$ قابل قبول است.

۴- گزینه‌ی ۳ ابتدا ۴ واحد را از بین ۱۰ واحد انتخاب می‌کنیم، در هر کدام از این واحدها ۲ انتخاب داریم (زن یا شوهر). بنابراین تعداد انتخاب شورای ۴ نفری با شرایط مسأله برابر است با:

$$\binom{۱۰}{۴} \times \binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱} = ۲۱۰ \times ۱۶ = ۳۳۶۰$$

۵- گزینه‌ی ۲ در هر یک از دو طرف جعبه ۵ داده ($\frac{۱}{۴}$ داده‌ها) و درون جعبه ۱۰ داده ($\frac{۱}{۲}$ داده‌ها) قرار می‌گیرد. بنابراین میانگین کل داده‌ها برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{۱۳ \times ۵ + ۱۶/۵ \times ۱۰ + ۱۹ \times ۵}{۲۰} = ۱۶/۲۵$$

همچنین می‌توان میانگین را به صورت زیر نیز به دست آورد:

$$\bar{x} = \frac{۱}{۴}(۱۳) + \frac{۱}{۲}(۱۶/۵) + \frac{۱}{۴}(۱۹) = \frac{۱۳ + ۳۳ + ۱۹}{۴} = \frac{۶۵}{۴} = ۱۶/۲۵$$

۶- گزینه‌ی ۳ می‌دانیم جمع انحراف از میانگین داده‌های آماری همیشه صفر است و با توجه به این که انحراف از میانگین ۷ داده، اعداد زوج متوالی هستند، آن‌ها به صورت روبه‌رو می‌باشد:

$$x_i - \bar{x} : -۶, -۴, -۲, ۰, ۲, ۴, ۶$$

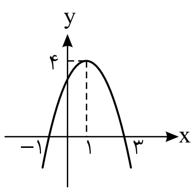
$$\sigma^۲ = \frac{۳۶ + ۱۶ + ۴ + ۰ + ۴ + ۱۶ + ۳۶}{۷} = ۱۶$$

تذکر: مقدار $x_i - \bar{x}$ را انحراف از میانگین می‌نامیم.

۷- گزینه‌ی ۲ می‌دانیم $n(S) = ۶^۲ = ۳۶$، فرض کنیم A پیشامد آن باشد که ضرب دو عدد ظاهر شده مضرب ۶ باشد. در این صورت داریم:

$$A = \left\{ \begin{matrix} (۲,۳),(۱,۶),(۲,۶),(۴,۳),(۶,۳),(۶,۴),(۶,۵) \\ (۳,۲),(۶,۱),(۶,۲),(۳,۴),(۳,۶),(۴,۶),(۵,۶) \end{matrix}, (۶,۶) \right\} \qquad P(A) = \frac{۱۵}{۳۶} = \frac{۵}{۱۲}$$

۸- گزینه‌ی ۳ با توجه به فرضیات مسأله $x = ۳$ و $x = -۱$ ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲ + bx + c = ۰$ می‌باشند. بنابراین:



$$y = ax^۲ + bx + c \xrightarrow[y(-۱)=۰]{y(۳)=۰} y = a(x-۳)(x+۱)$$

از طرفی $y(۱) = ۴$ پس:

$$y(۱) = a(-۲)(۲) = -۴a = ۴ \Rightarrow a = -۱ \Rightarrow y = -(x-۳)(x+۱)$$

عرض محل برخورد با محور yها برابر با $y(۰) = ۳$ است.

تذکر: چون $x = ۱$ وسط ۲ ریشه است، پس نقطه‌ی $A(۱, ۴)$ رأس سهمی می‌باشد.

۹- گزینه‌ی ۲ ابتدا دامنه‌ی توابع f و g را پیدا می‌کنیم، دقت کنید که f و g توابع کسری هستند و برای یافتن دامنه بایستی ریشه‌های مخرج را به‌دست آوریم:

$$D_f : x^۲ - ۱ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱ \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{\pm ۱\}$$

$$D_g : x^۳ - ۱ = ۰ \Rightarrow (x-۱)(x^۲ + x + ۱) = ۰ \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{۱\}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) - \{x | g(x) = ۰\} = ((\mathbb{R} - \{\pm ۱\}) \cap (\mathbb{R} - \{۱\})) - \{۳\} = \mathbb{R} - \{\pm ۱, ۳\}$$

پس دامنه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ شامل ۳ نقطه از $\mathbb{R}$ نیست.

۱۰- گزینه‌ی ۴ می‌دانیم $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ وقتی $x \to 0$ و در حالت کلی $1-\cos^m ax \sim \frac{m}{2}a^2x^2$ وقتی $x \to 0$، با توجه به این نکته داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^{\frac{3}{2}} x}{x\tan x}\xrightarrow{\text{هم‌ارزی}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{3}{4}$$

۱۱- گزینه‌ی ۱ ابتدا $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1-3}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)}{x^2+x+1}=\frac{3}{3}=1$$

پس برای پیوستگی تابع f در $x=1$ لازم است که $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$ بنابراین $a=1$.

۱۲- گزینه‌ی ۳ در ابتدا دقت کنید چون حاصل حد برابر $-\infty$ شده است، لازم است -2 ریشه‌ی مخرج باشد. از طرفی داریم:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x-2}{x^2+ax+b}=\frac{-4}{4+b-2a}=-\infty$$

پس مخرج باید 0^+ باشد، بنابراین $x^2+ax+b=(x+2)^2$ یعنی مخرج ریشه‌ی مضاعف دارد. در نتیجه $a=4$ و $b=4$. حال $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{ax^2+x+1}{2x-bx^2}$

مطابق قاعده‌ی پرتوان برابر است با $\frac{-a}{b}$ و داریم:

$$\frac{a}{-b}=-\frac{4}{4}=-1$$

۱۳- گزینه‌ی ۴ کافی است مشتق تابع را به‌دست آوریم:

$$y'=3\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(-\sin\sqrt{x})\cos^2\sqrt{x}\xrightarrow{x=\frac{\pi^2}{9}}y'=\frac{3}{2(\frac{\pi}{3})}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{-9\sqrt{3}}{16\pi}$$

۱۴- گزینه‌ی ۲ آهنگ متوسط تابع f بر بازه‌ی $[a,b]$ برابر $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ می‌باشد و آهنگ آنی آن در نقطه‌ی $x=\alpha$ برابر $f'(\alpha)$ است.

$$y=x-\sqrt{x}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=1-\frac{1}{2\sqrt{x}}\xrightarrow{x=\frac{1}{4}}y'\left(\frac{1}{4}\right)=1-\frac{1}{2(\frac{1}{2})}=0$$

$$\text{آهنگ متوسط در فاصله‌ی } [1,4]=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{(4-2)-0}{3}=\frac{2}{3}$$

پس آهنگ لحظه‌ای در نقطه‌ی $x=\frac{1}{4}$، به میزان $\frac{2}{3}$ کم‌تر از آهنگ متوسط در بازه‌ی $[1,4]$ است.

۱۵- گزینه‌ی ۳ مطابق قضایای احتمال داریم:

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{4}{5}=\frac{15+10-24}{30}=\frac{1}{30}$$

$$P(B|A')=\frac{P(B\cap A')}{P(A')}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{1-P(A)}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{30}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{9}{30}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{5}$$

۱۶- گزینه‌ی ۴ احتمال جوانه زدن بذر که برابر $\frac{7}{10}$ می‌باشد همان احتمال پیروزی در توزیع دوجمله‌ای است $(p=0/7)$.

$$P(X\le 2)=1-P(X=3)=1-\binom{3}{3}(0/7)^3(0/3)^0=1-0/343=0/657$$

۱۷- گزینه‌ی ۱ باید معادله‌ی $t^۲+(m-۲)t+m-۴=۰$ که با جایگزینی $x^۲=t$ به‌دست آمده، یک ریشه‌ی مثبت داشته باشد. پس دو حالت داریم:

الف) معادله‌ی فوق یک ریشه‌ی مثبت و یک ریشه‌ی منفی دارد:

$$\frac{c}{a}<۰\Rightarrow m-۴<۰\Rightarrow m<۴$$

ب) معادله‌ی فوق یک ریشه‌ی مضاعف مثبت دارد:

$$\Delta=۰\ ,\ -\frac{b}{۲a}\geq۰\Rightarrow(m-۲)^۲-۴(m-۴)=m^۲-۴m+۴-۴m+۱۶=m^۲-۸m+۲۰=۰$$ ریشه ندارد

بنابراین $m<۴$ تنها جواب قابل قبول است.

۱۸- گزینه‌ی ۲ ابتدا جملات a_n را به فرم ســاده‌تری می‌نویســیم، صورت کســر مجموع جملات دنباله‌ی حســابی $۱,۳,۵,\dots,۲n-۱$ می‌باشد که جمله‌ی اول آن برابر ۱ و جمله‌ی nاُم برابر $۲n-۱$ می‌باشد، بنابراین مجموع آن‌ها برابر است با:

$$۱+۳+۵+\cdots+۲n-۱=\frac{n}{۲}(۱+۲n-۱)=n^۲$$

لذا خواهیم داشت:

$$a_n=\frac{n^۲}{n^۲+n}=\frac{n}{n+۱}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=۱$$

پس این دنباله یک دنباله‌ی همگرا به ۱ می‌باشد. از طرفی داریم:

$$a_{n+۱}-a_n=\frac{n+۱}{n+۲}-\frac{n}{n+۱}=\frac{n^۲+۲n+۱-n^۲-۲n}{(n+۱)(n+۲)}=\frac{۱}{(n+۱)(n+۲)}>۰\Rightarrow a_{n+۱}-a_n>۰\Rightarrow a_{n+۱}>a_n$$

بنابراین a_n یک دنباله‌ی صعودی است.

۱۹- گزینه‌ی ۱ نقطه‌ای به طول ۱ هم روی تابع است هم روی خط مماس پس نقطه‌ی $A(۱,۲)$ در معادله‌ی تابع صدق می‌کند. داریم:

$$y=۳x-۱\xrightarrow{x=۱}\begin{cases}y(۱)=۳-۱=۲\\y'(۱)=۳\end{cases}$$

از طرفی شیب خط مماس همان $y'(۱)$ می‌باشد، پس $y'(۱)=۳$.

$$y=ax^۲+bx\Rightarrow\begin{cases}y(۱)=a+b=۲\\y'(۱)=۲a+b=۳\end{cases}\Rightarrow a=b=۱$$

۲۰- گزینه‌ی ۳ ابتدا نقاط بحرانی f را پیدا می‌کنیم. با توجه به پیوستگی تابع می‌توانیم مقادیر اکسترمم مطلق را بیابیم.

$$y=\cos^۲x-\sin x\Rightarrow y'=۲(-\sin x)\cos x-\cos x=\cos x(-۲\sin x-۱)=۰\Rightarrow\cos x=۰\ \text{یا}\ \sin x=-\frac{۱}{۲}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\cos x=۰\Rightarrow\sin x=\pm۱\Rightarrow y=۰^۲-(\pm۱)=\mp۱\\\sin x=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow\cos^۲x=\frac{۳}{۴}\Rightarrow y=\frac{۳}{۴}-(-\frac{۱}{۲})=\frac{۵}{۴}\end{array}\right.\Rightarrow y_{max}=\frac{۵}{۴}$$

۲۱- گزینه‌ی ۲ می‌توانیم به کمک جدول، تغییر علامت y' را در مجاورت $x=۱$ بررسی کنیم.

$$y'=۳x^۲-۴x+۱,\ y'=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۳},۱$$ نقاط بحرانی

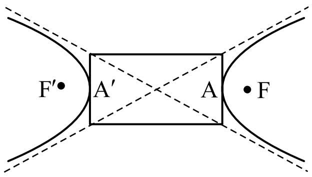
x	$-\infty$		$\frac{۱}{۳}$		۱		$+\infty$
y'		+	۰	−	۰	+	
y		↗	Max	↘	Min	↗	

پس تابع در $x=۱$ مینیمم نسبی دارد.

۲۲- گزینه‌ی ۳ شیب این خط برابر $m_۱=\frac{-(k+۱)}{-۲k}$ است و باید بر خط $۳x+۲y=۱$ عمود باشد. لذا:

$$m_۲=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow m_۱=\frac{۲}{۳}=\frac{k+۱}{۲k}\Rightarrow۴k=۳k+۳\Rightarrow k=۳$$

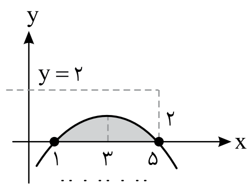
پس خط مورد نظر $۴x-۶y=۹$ است که عرض از مبدأ آن $-\frac{۹}{۶}$ یا $-\frac{۳}{۲}$ است.



۲۳- گزینه‌ی ۱ اندازه‌ی ضلع کوچک‌تر مستطیل مطابق شکل $۲b$ و اندازه‌ی ضلع بزرگ‌تر $۲a$ می‌باشد، پس:

$$\begin{cases} \text{طول ضلع مماس} = ۲b = ۳ \Rightarrow b = \frac{۳}{۲} \\ \text{طول ضلع غیر مماس} = ۲a = ۴ \Rightarrow a = ۲ \end{cases} \Rightarrow c^۲ = a^۲ + b^۲ = ۲^۲ + (\frac{۳}{۲})^۲ = \frac{۲۵}{۴} \Rightarrow c = \frac{۵}{۲}$$

$FF' = ۲c$ فاصله‌ی کانونی و $AA' = ۲a$ فاصله‌ی دو رأس است. بنابراین: $FF' - AA' = ۲c - ۲a = ۲(c-a) = ۲(\frac{۵}{۲} - ۲) = ۱$



۲۴- گزینه‌ی ۲ با توجه به تقارن سهمی طول رأس سهمی برابر ۳ می‌باشد. بنابر تعریف سهمی واضح است که $F(۳,۰)$ کانون خواهد بود، زیرا نقاط $(۱,۰)$ و $(۵,۰)$ از خط هادی به فاصله‌ی ۲ هستند و از نقطه‌ی $F(۳,۰)$ نیز ۲ واحد فاصله دارند. چون رأس سهمی از کانون و خط هادی به یک فاصله می‌باشد، پس مختصات رأس $S(۳,۱)$ می‌باشد.

۲۵- گزینه‌ی ۱ مطابق قضیه‌ی بنیادی اگر $f(x) = \int_a^x g(t)dt$، آن‌گاه $f'(x) = g(x)$ و داریم:

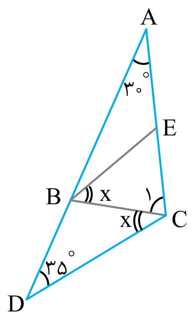
$$f'(x) = \frac{۱}{\sqrt{x^۲+۳}} \quad , \quad f(۱) = ۰ \quad , \quad f'(۱) = \frac{۱}{۲}$$

از طرفی:

$$y = xf(x) \Rightarrow y'(x) = f(x) + xf'(x) \xrightarrow{x=۱} y'(۱) = f(۱) + f'(۱) = ۰ + \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

۲۶- گزینه‌ی ۳

$$\int \sqrt{x - ۲\sqrt{x} + ۱}\,dx = \int \sqrt{(\sqrt{x}-۱)^۲}\,dx = \int |\sqrt{x}-۱|\,dx \xrightarrow[\sqrt{x}<۱]{۰<x<۱} \int (۱-\sqrt{x})dx = x - \frac{۲}{۳}x\sqrt{x} + c = x(۱ - \frac{۲}{۳}\sqrt{x}) + c$$

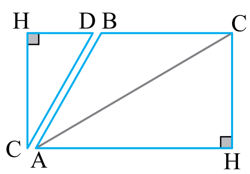


۲۷- گزینه‌ی ۴ مثلث ABC متساوی الساقین است، پس:

$$C_۱ = \frac{۱۸۰^\circ - \hat{A}}{۲} = \frac{۱۵۰^\circ}{۲} = ۷۵^\circ$$

ضمناً با استفاده از قضیه‌ی موازی مورب در مثلث ACD مطابق شکل داریم:

$$\hat{A} + \hat{D} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow C_۱ + x = ۱۸۰ - ۳۰ - ۳۵ \Rightarrow x = ۱۱۵^\circ - ۷۵^\circ = ۴۰^\circ$$



۲۸- گزینه‌ی ۴ با توجه به این‌که ABCD متساوی الساقین است، اگر مثلث CHD را از ذوزنقه جدا کرده و به شکل مقابل کنار شکل باقی مانده قرار دهیم. شکل حاصل یک مستطیل است که مساحت آن با مساحت ذوزنقه‌ی اصلی برابر است. واضح است که مساحت مستطیل حاصل دو برابر مساحت مثلث ACH یعنی $۲ \times ۱۲ = ۲۴$ است.

۲۹- گزینه‌ی ۳ با توجه به برابری دو زاویه‌ی MNC و ABC و مشترک بودن زاویه‌ی C در هر دو مثلث داریم:

$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{MNC} \Rightarrow \frac{AC}{MC} = \frac{BC}{NC} \Rightarrow \frac{AN+NC}{۳} = \frac{۳+۴}{NC} \xrightarrow{AN=NC} \frac{۲NC}{۳} = \frac{۷}{NC} \Rightarrow NC = \sqrt{\frac{۲۱}{۲}}$$

می‌دانیم نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر مجذور نسبت تشابه دو مثلث است. پس:

$$\frac{S_۱}{S_۲} = (\frac{BC}{NC})^۲ = (\frac{۷}{\sqrt{\frac{۲۱}{۲}}})^۲ = \frac{۴۹}{\frac{۲۱}{۲}} = \frac{۱۴}{۳}$$

۳۰- گزینه‌ی ۳ اگر طول یال‌ها را c ،b و a بنامیم طول قطر برابر $\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}$ و مساحت کل آن برابر $۲(ab+bc+ca)$ است، پس:

$$(a+b+c)^۲ = a^۲ + b^۲ + c^۲ + ۲ab + ۲bc + ۲ca = ۷^۲ + ۳۲ = ۸۱ \Rightarrow a+b+c = ۹$$

هر مکعب مستطیل ۱۲ یال دارد که ۴ تا برابر a، ۴ تا برابر b و ۴ تا برابر c هستند، پس مقدار خواسته شده برابر است با: $۴(a+b+c) = ۴ \times ۹ = ۳۶$

پاسخ تشریحی آزمون ۱۰۶

۱- گزینه‌ی ۲ در دنباله‌ی عددی داریم $a_n=a_1+(n-1)d$، پس:

$$\begin{cases}\begin{cases}a_4=a_1+3d\\ a_1=a_1\end{cases}\Rightarrow a_1+a_4=2a_1+3d=11\\ \\ \begin{cases}a_2=a_1+d\\ a_6=a_1+5d\end{cases}\Rightarrow 2a_1+6d=20\Rightarrow a_1+3d=10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=1\\ d=3\end{cases}$$

از طرفی در دنباله‌ی عددی $S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$، پس:

$$S_9=\frac{9}{2}(2\times1+8\times3)\Rightarrow S_9=\frac{9}{2}(26)=9\times13=117$$

۲- گزینه‌ی ۱ ابتدا ماتریس‌های A^2 و X را به‌دست می‌آوریم:

$$A^2=\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&8\\0&9\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}3&0\\1&0\end{bmatrix}-A^2=\begin{bmatrix}3&0\\1&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&8\\0&9\end{bmatrix}\Rightarrow X=\begin{bmatrix}2&-8\\1&-9\end{bmatrix}$$

از طرفی می‌دانیم اگر $X=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$، با شرط $ad-bc\neq0$ داریم:

$$X^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}2&-8\\1&-9\end{bmatrix}\Rightarrow X^{-1}=\frac{1}{-18+8}\begin{bmatrix}-9&8\\-1&2\end{bmatrix}=-\frac{1}{10}\begin{bmatrix}-9&8\\-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0/9&-0/8\\0/1&-0/2\end{bmatrix}\Rightarrow X^{-1}\text{جمع درایه های }=0$$

۳- گزینه‌ی ۲ با توجه به ویژگی‌های تابع نمایی داریم:

$$8^{1-a}=(2^3)^{1-a}=2^{3-3a}\quad,\quad 4\sqrt{2}=2^2\times2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{5}{2}}$$

بنابراین:

$$2^{3-3a}=2^{\frac{5}{2}}\Rightarrow 3-3a=\frac{5}{2}\Rightarrow 3a=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{6}\Rightarrow 3a+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=3$$

$$\Rightarrow\log_{\sqrt[3]{9}}(3a+\frac{5}{2})=\log_{\sqrt[3]{9}}3=\log_{3^{\frac{2}{3}}}3=\frac{3}{2}\log_3 3=\frac{3}{2}$$

۴- گزینه‌ی ۴ در ابتدا معادله‌ی $x(x-2)=3$ را به فرم استاندارد می‌نویسیم:

$$x^2-2x-3=0$$

اگر دقت کنید ریشه‌ها -1 و ۳ می‌باشند، پس:

$$\begin{cases}\frac{1}{\alpha}=-1\Rightarrow\alpha=-1\\ \frac{1}{\beta}=3\Rightarrow\beta=\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{2}\\ \frac{\beta}{2}=\frac{1}{6}\end{cases}$$

معادله‌ای می‌خواهیم که ریشه‌های آن $\frac{\alpha}{2}$ و $\frac{\beta}{2}$ باشند، پس کافی است جمع و ضرب آن‌ها را به‌دست آوریم:

$$\begin{cases}S=\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=-\frac{1}{3}\\ P=\frac{\alpha}{2}\times\frac{\beta}{2}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=-\frac{1}{12}\end{cases}\Rightarrow x^2-Sx+P=0\Rightarrow x^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{12}=0\Rightarrow 12x^2+4x-1=0$$:معادله‌ی مورد نظر

۵- گزینه‌ی ۴ نمودار تابع از مبدأ عبور می‌کند و دارای مجانب افقی $y=-۲$ است، پس:

$$\begin{cases} f(۰)=۰\Rightarrow a+\frac{۱}{b}=۰ \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-۲\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} a+b^{x-۱}=-۲\xrightarrow{۰<b<۱} a=-۲ \end{cases}\Rightarrow b=\frac{۱}{۲}$$

دقت کنید که $۰<b<۱$، زیرا اگر $b>۱$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to+\infty} b^{x-۱}=+\infty$.

۶- گزینه‌ی ۲ ابتدا مسأله را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

$$|x^۲-۲x|=|x||x-۲|<x$$

$$x>۰\Rightarrow|x-۲|<۱\Rightarrow-۱<x-۲<۱\Rightarrow۱<x<۳$$

$x<۰\Rightarrow-x|x-۲|<x\Rightarrow-|x-۲|>۱$ غقق

جواب نهایی بازه‌ی $(۱,۳)$ می‌باشد، پس $b-a=۲$.

۷- گزینه‌ی ۳ با توجه به رابطه‌ی $S=\frac{۱}{۲}bc\sin\hat{A}$ داریم:

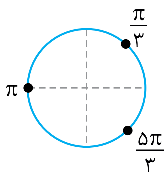
$$S=\frac{۱}{۲}\times۲\times\sqrt{۳}\times\sin\hat{A}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\sin\hat{A}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\cos\hat{A}=\frac{۱}{۲}$$

اکنون بنابر قضیه‌ی کسینوس‌ها داریم:

$$(BC)^۲=(AB)^۲+(AC)^۲-۲AB\times AC\times\cos\hat{A}\Rightarrow(BC)^۲=۳+۴-۴\sqrt{۳}\times\frac{۱}{۲}\Rightarrow(BC)^۲=۷-۲\sqrt{۳}\Rightarrow BC=\sqrt{۷-۲\sqrt{۳}}$$

۸- گزینه‌ی ۳ ابتدا معادله را حل می‌کنیم:

$$\cos۲x=-\cos x\Rightarrow\cos۲x=\cos(\pi-x)\Rightarrow\begin{cases}۲x=۲k\pi+\pi-x\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۳}\\ ۲x=۲k\pi+x-\pi\Rightarrow x=۲k\pi-\pi\end{cases}$$



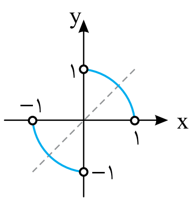
اگر جواب‌ها را بر روی دایره‌ی مثلثاتی نمایش دهیم، آن‌گاه شکل مقابل را خواهیم داشت. به عبارتی جواب‌ها رئوس مثلث متساوی‌الاضلاع می‌باشند، زیرا سه کمان مساوی با طول $\frac{۲\pi}{۳}$ روی دایره‌ی مثلثاتی جدا شده است.

۹- گزینه‌ی ۳ برای راحتی در کار ابتدا به جای متغیر x عبارت $x+۴$ قرار می‌دهیم و داریم:

$$f(x-۲)=x^۲-۴x\Rightarrow f(x+۴-۲)=(x+۴)^۲-۴(x+۴)\Rightarrow f(x+۲)=x^۲+۸x+۱۶-۴x-۱۶\Rightarrow f(x+۲)=x^۲+۴x$$

بنابراین $y=x^۲+۴x$ و تنها نقطه‌ی $A(-۱,-۳)$ در این معادله صدق می‌کند.

۱۰- گزینه‌ی ۴ اگر از رسم نمودار کمک بگیریم، سؤال راحت‌تر حل می‌شود:



$x>۰: f(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ ربع دایره

$x<۰: f(x)=-\sqrt{۱-x^۲}$ ربع دایره

چون نمودار f و $f^{-۱}$ نسبت به نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم قرینه‌ی هم می‌باشند، پس $f^{-۱}(x)=f(x)$.

۱۱- گزینه‌ی ۳ اولاً کلمه‌ی داده شده پنج حرفی است، پس تعداد کل حالات $۵!$ است. اما دو حرف A و دو حرف R یکسان داریم، بنابراین $n(S)=\frac{۵!}{۲!\times۲!}$. حالتی که حروف یکسان کنار هم می‌باشند را در نظر می‌گیریم: (AA و RR ، D). در این حالت جابه‌جایی R با R یا A با A اثری ندارد.

پس در واقع باید جایگشت سه حرف را حساب کنیم که تعداد آن برابر $۳!$ است. بنابراین احتمال مطلوب برابر است با:

$$P(A)=\frac{۳!}{\frac{۵!}{۲!\times۲!}}=\frac{۱}{۵}$$

۱۲- گزینه‌ی ۲ ابتدا اختلاف دو عدد را می‌یابیم، یعنی $۰/۱۵=۰/۲۱-۰/۳۶$، عدد به‌دست آمده فراوانی نسبی دسته‌ی سوم است. با توجه به رابطه‌ی زیر داریم:

$$\theta_۳=\frac{۳۶۰^\circ}{\sum f_i}\times f_۳\Rightarrow\theta_۳=\underbrace{\frac{f_۳}{\sum f_i}}_{\text{فراوانی نسبی دسته‌ی سوم}}\times۳۶۰^\circ=\frac{۱۵}{۱۰۰}\times۳۶۰^\circ=۵۴^\circ$$

یعنی در نمودار دایره‌ای زاویه‌ی دسته‌ی سوم ۵۴° است.

۱۳- گزینه‌ی ۲ می‌دانیم ضریب تغییرات برابر است با $CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}$. وقتی تمام داده‌ها با عدد ثابتی جمع می‌شوند، انحراف معیار عوض نمی‌شود، اما میانگین با همان عدد جمع می‌شود، بنابراین:

$$\begin{cases} CV_۱=\frac{\sigma}{۷} \\ CV_۲=\frac{\sigma}{۲۸} \end{cases} \Rightarrow \frac{CV_۲}{CV_۱}=\frac{\frac{\sigma}{۲۸}}{\frac{\sigma}{۷}}=\frac{۱}{۴}$$

۱۴- گزینه‌ی ۳ چون در محاسبه‌ی $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ به ابهام $\frac{۰}{۰}$ می‌رسیم و صورت و مخرج هر دو مشتق‌پذیر می‌باشند، از قاعده‌ی هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲} f(x)=\lim_{x\to ۲}\frac{\sin \pi x}{۲-\sqrt{۲x}} \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to ۲}\frac{\pi\cos\pi x}{-\frac{۲}{۲\sqrt{۲x}}}=\frac{\pi}{-\frac{۱}{۲}}=-۲\pi$$

پس برای پیوستگی در $x=۲$ کافی است $a=-۲\pi$ در نظر گرفته شود:

$$f(۲)=\lim_{x\to ۲} f(x)\Rightarrow a=-۲\pi$$

۱۵- گزینه‌ی ۴ برای رفع ابهام $\infty-\infty$ ابتدا عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x+۱۲-۲(x+۵)}{(x-۲)(x+۵)}=\lim_{x\to ۲}\frac{-x+۲}{(x-۲)(x+۵)}=\lim_{x\to ۲}\frac{-(x-۲)}{(x-۲)(x+۵)}=\lim_{x\to ۲}\frac{-۱}{x+۵}=-\frac{۱}{۷}$$

۱۶- گزینه‌ی ۱ تابع یک مجانب مایل و یک مجانب قائم دارد و محل تلاقی آن‌ها همان نقطه‌ی A است: چون صورت و مخرج کسر چندجمله‌ای هستند و درجه‌ی صورت یک واحد از درجه‌ی مخرج بزرگ‌تر است، مجانب مایل همان خارج قسمت تقسیم می‌باشد، بنابراین:

$$\begin{array}{r|l} x^۳+۳x^۲ & x^۲-۲x+۱ \\ \cline{2-2} -x^۳+۲x^۲-x & x+۵ \\ \hline ۵x^۲-x & \\ -۵x^۲+۱۰x-۵ & \\ \hline ۹x-۵ & \end{array}$$

پس مجانب مایل $y=x+۵$ است. از طرفی مجانب قائم ریشه‌ی مخرج می‌باشد یعنی $x=۱$. اکنون محل تقاطع دو مجانب را می‌یابیم:

$$\begin{cases} y=x+۵ : \text{مجانب مایل} \\ x=۱ : \text{مجانب قائم} \end{cases} \Rightarrow \text{نقطه‌ی تلاقی مجانب‌ها}: A(۱,۶)$$

معادله‌ی نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم به صورت $y-x=۰$ است. پس فاصله‌ی نقطه‌ی A از این خط برابر است با:

$$d=\frac{|۶-۱|}{\sqrt{۲}}=\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}$$

تذکر: فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x_۰,y_۰)$ از خط $ax+by+c=۰$ برابر با $\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ است.

۱۷- گزینه‌ی ۳ شرط لازم برای مشتق‌پذیری تابع در $x=۱$، پیوستگی در این نقطه است، لذا ابتدا پیوستگی در $x=۱$ را بررسی کنیم:

$$f(۱)=\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^+} f(x)$$

پس به این ترتیب داریم:

$$۲=a+b : \text{شرط پیوستگی} \qquad (۱)$$

از طرفی اگر تابع در $x=۱$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه در تمام $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر خواهد بود:

$$f'(x)=\begin{cases} -\frac{۱}{x\sqrt{x}} & x>۱ \\ ۳ax^۲+b & x<۱ \end{cases} \xrightarrow{f'_+(۱)=f'_-(۱)} -۱=۳a+b \qquad (۲)$$

با توجه به روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} a+b=۲ \\ ۳a+b=-۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{۳}{۲} \\ b=\frac{۷}{۲} \end{cases} \Rightarrow a-b=-\frac{۱۰}{۲}=-۵$$

۱۸- گزینه‌ی ۴ ابتدا ضابطه‌ی تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=e^{x}\times e^{۲\ln x}=e^{x}\times e^{\ln x^{۲}}=x^{۲}e^{x}$$

بنابراین:

$$f'(x)=۲xe^{x}+e^{x}x^{۲}=xe^{x}(۲+x) \qquad x>۰$$
$$f'(۲)=۸e^{۲}$$

تذکر: به شرط $x>۰$ داریم $e^{\ln u}=u$.

۱۹- گزینه‌ی ۲ آهنگ متوسط تابع f بر بازه‌ی $[a,b]$ برابر است با $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ و آهنگ لحظه‌ای f در $x=\alpha$، یعنی $f'(\alpha)$، پس:

$$\begin{cases}\overline{f}=\dfrac{f(۲)-f(۱)}{۲-۱}=\dfrac{(۲+۱)-(۱+۲)}{۲-۱}=۰\\ f'(x)=۱-\dfrac{۲}{x^{۲}}\Rightarrow f'(۱)=-۱\end{cases}\Rightarrow \overline{f}-f'(۱)=۰-(-۱)=۱$$

۲۰- گزینه‌ی ۱ آنچه لازم است بدانیم این است که باید تابع در دو شرط $f'<۰$ و $f''<۰$ صدق کند:

$$f'(x)=\frac{-۲x}{(x^{۲}+۳)^{۲}}<۰\Rightarrow x>۰$$

$$f''(x)=\frac{-۲(x^{۲}+۳)^{۲}-۲\times ۲x(x^{۲}+۳)(-۲x)}{(x^{۲}+۳)^{۴}}=\frac{-۲(x^{۲}+۳)+۸x^{۲}}{(x^{۲}+۳)^{۳}}=\frac{۶x^{۲}-۶}{(x^{۲}+۳)^{۳}}<۰\Rightarrow x^{۲}<۱\Rightarrow -۱<x<۱$$

$$\begin{cases}f'<۰\Rightarrow x>۰\\ f''<۰\Rightarrow -۱<x<۱\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}}۰<x<۱\Rightarrow b-a=۱$$

۲۱- گزینه‌ی ۳ اولاً تابع مجانب افقی $y=۰$ را دارد، پس درجه‌ی صورت کم‌تر از درجه‌ی مخرج است، پس:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=۰\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{ax^{۲}}{x^{۲}}=۰\Rightarrow a=۰$$

ثانیاً تابع فقط یک مجانب قائم دارد، پس مخرج ریشه‌ی مضاعف دارد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\text{مخرج}: x^{۲}+cx+۱=۰\xrightarrow{\Delta=۰}c^{۲}-۴=۰\Rightarrow\begin{cases}c=۲\Rightarrow x=-۱ & \text{مجانب قائم}\\ c=-۲\Rightarrow x=۱ & \text{مجانب قائم}\end{cases}$$

با توجه به شکل طول مجانب قائم منفی است، لذا فقط $c=۲$ قابل قبول است.

ثالثاً تابع یک اکسترمم روی محور عرض‌ها دارد، پس $f'(۰)=۰$، بنابراین:

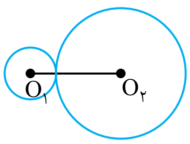
$$f(x)=\frac{bx-۲}{(x+۱)^{۲}}\Rightarrow f'(x)=\frac{b(x+۱)^{۲}-۲(x+۱)(bx-۲)}{(x+۱)^{۴}}\xrightarrow{f'(۰)=۰}b+۴=۰\Rightarrow b=-۴$$

۲۲- گزینه‌ی ۴ ابتدا معادله‌ی دو دایره را استاندارد می‌کنیم:

$$x^{۲}-۲x+y^{۲}=۰\Rightarrow (x-۱)^{۲}+y^{۲}=۱\Rightarrow O_{۱}(۱,۰)\ ,\ \ R_{۱}=۱$$
$$x^{۲}+۲x+y^{۲}=a\Rightarrow (x+۱)^{۲}+y^{۲}=a+۱\Rightarrow O_{۲}(-۱,۰),R_{۲}=\sqrt{a+۱}$$

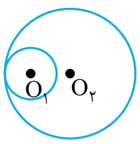
دو دایره بر هم مماس می‌باشند. پس دو حالت رخ می‌دهد:

حالت اول: دو دایره مماس خارج باشند. در این حالت بایستی $O_{۱}O_{۲}=R_{۱}+R_{۲}$، بنابراین:



$$O_{۱}O_{۲}=۲\Rightarrow ۲=۱+\sqrt{a+۱}\Rightarrow a+۱=۱\Rightarrow a=۰$$

حالت دوم: دو دایره مماس داخل باشند. در این حالت خواهیم داشت:



$$O_{۱}O_{۲}=|R_{۲}-R_{۱}|\Rightarrow ۲=|\sqrt{a+۱}-۱|\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{a+۱}=۳\Rightarrow a+۱=۹\Rightarrow a=۸\\ ۱-\sqrt{a+۱}=۲\Rightarrow\sqrt{a+۱}=-۱\ \text{غ‌ق‌ق}\end{cases}$$

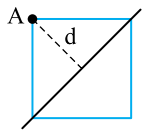
پس $a=۰$ یا $a=۸$.

۲۳- گزینه‌ی ۳ اگر معادله‌ی هذلولی را به‌صورت استاندارد بنویسیم، آن‌گاه داریم:

$$4y^2+8y+4-4-x^2-4x-4+4=1\Rightarrow 4(y+1)^2-(x+2)^2=1\Rightarrow \frac{(y+1)^2}{\frac{1}{4}}-\frac{(x+2)^2}{1}=1\Rightarrow \begin{cases} a^2=\frac{1}{4} \\ b^2=1 \end{cases}$$

$$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}\Rightarrow e=\sqrt{1+\frac{1}{\frac{1}{4}}}=\sqrt{5}$$

۲۴- گزینه‌ی ۲ ابتدا فاصله‌ی نقطه‌ی A تا خط داده شده را پیدا می‌کنیم. این مقدار نصف اندازه‌ی قطر مربع است. برای این منظور داریم:



$$3y-4x-7=0$$

$$d=\frac{|6-4-7|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{5}{5}=1$$

پس اندازه‌ی قطر مربع ۲ است. چون مساحت مربع نصف مربع اندازه‌ی قطر است، پس $S_{\text{مربع}}=2$.

نکته: اگر اندازه‌ی قطر مربع برابر k باشد، طول ضلع مربع $\frac{k\sqrt{2}}{2}$ و مساحت مربع $\frac{k^2}{2}$ می‌باشد.

۲۵- گزینه‌ی ۲ ابتدا با توجه به توابع جزء صحیح و قدرمطلق انتگرال را به صورت مجموع چند انتگرال می‌نویسیم:

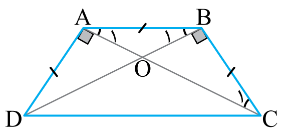
$$\int_{-1}^{2}|x-1|[x]dx=\int_{-1}^{0}-(x-1)(-1)dx+\int_{0}^{1}0dx+\int_{1}^{2}(x-1)\times 1dx=\int_{-1}^{0}(x-1)dx+\int_{1}^{2}(x-1)dx=\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_{1}^{2}=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=-1$$

۲۶- گزینه‌ی ۴ معادله‌ی خطی که از نقاط $A(2,0)$ و $B(0,2)$ عبور می‌کند، $x+y=2$ می‌باشد، بنابراین طول نقطه‌ی برخورد این خط و منحنی $y=x^2$ برابر است با:

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=2-x \end{cases}\Rightarrow x^2=2-x\Rightarrow x^2+x-2=0\Rightarrow x=1$$

$$S=\int_{0}^{1}x^2dx+\int_{1}^{2}(2-x)dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_{0}^{1}+\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{1}^{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$$

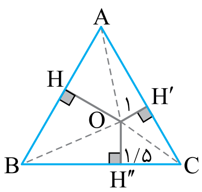
۲۷- گزینه‌ی ۳ با توجه به این‌که ذوزنقه‌ی روبه‌رو متساوی الساقین است و $AB=BC$، پس سه زاویه‌ی $\hat{A}_1$ و $\hat{B}_1$ و $\hat{C}_1$ برابرند، در مثلث ABC داریم:



$$\overset{\Delta}{ABC}:\hat{A}_1+\hat{B}_1+90+\hat{C}_1=180^\circ\Rightarrow 3\hat{A}_1=90^\circ\Rightarrow \hat{A}_1=30^\circ$$

$$\overset{\Delta}{OAB}:\hat{A}_1+\hat{B}_1+\hat{O}=180^\circ\Rightarrow 30^\circ+30^\circ+\hat{O}=180^\circ\Rightarrow \hat{O}=120^\circ$$

۲۸- گزینه‌ی ۲ مجموع مساحت ۳ مثلث OAC، OBC و OAB، برابر مساحت مثلث ABC است، پس:



$$S_{ABC}=S_{AOC}+S_{BOC}+S_{AOB}\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}(3\sqrt{3})^2=\frac{1\times 3\sqrt{3}}{2}+\frac{1/5\times 3\sqrt{3}}{2}+\frac{OH\times 3\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}\times 27=3\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1/5}{2}+\frac{OH}{2}\right)\Rightarrow 2/5+OH=\frac{9}{2}\Rightarrow OH=4/5-2/5=2$$

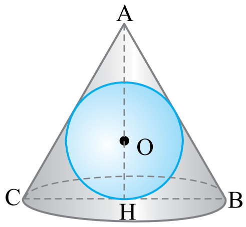
۲۹- گزینه‌ی ۳ با طرفین وسطین کردن رابطه‌ی داده شده داریم:

$$\frac{a+2b}{2a-b}=4\Rightarrow a+2b=8a-4b\Rightarrow 6b=7a\Rightarrow b=\frac{7}{6}a$$

از طرفی داریم:

$$\frac{a+mb}{ma-b}=\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{a+\frac{7}{6}ma}{ma-\frac{7}{6}a}=\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{1+\frac{7}{6}m}{m-\frac{7}{6}}=\frac{1}{2}\Rightarrow 2+\frac{7}{3}m=m-\frac{7}{6}\Rightarrow \frac{4}{3}m=-\frac{7}{6}-2\Rightarrow \frac{4}{3}m=\frac{-19}{6}\Rightarrow m=\frac{-19}{8}$$

۳۰- گزینه‌ی ۴ طول هر ضلع مثلث ABC را a می‌نامیم. شعاع قاعده‌ی مخروط برابر $\frac{a}{۲}$ و ارتفاع آن برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ است پس حجم مخروط برابر است با:



$$V=\frac{۱}{۳}\pi r^۲h=\frac{۱}{۳}\times\pi(\frac{a}{۲})^۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}a=\frac{\sqrt{۳}\pi a^۳}{۲۴}$$

از طرفی با توجه به تقارن، نقطه‌ی O مرکز کره، محل تلاقی ارتفاع‌ها و در نتیجه میانه‌های مثلث ABC است، پس داریم:

$$OH=\frac{۱}{۳}\times AH=\frac{۱}{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}a=\frac{\sqrt{۳}}{۶}a$$

و حجم کره برابر است با:

$$V'=\frac{۴}{۳}\pi(r')^۳=\frac{۴}{۳}\pi\times(\frac{\sqrt{۳}}{۶}a)^۳=\frac{\sqrt{۳}\pi a^۳}{۵۴}$$

پس نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{V'}{V}=\frac{\frac{\sqrt{۳}\pi a^۳}{۵۴}}{\frac{\sqrt{۳}\pi a^۳}{۲۴}}=\frac{۲۴}{۵۴}=\frac{۴}{۹}$$

پاسخ تشریحی آزمون ۱۰۷

۱- گزینه‌ی ۳ در دنباله‌ی هندسی $a_n=۲\times۳^{n-۱}$، داریم $a_۱=۲$ و $a_۲=۶$، پس می‌توان نتیجه گرفت $q=\frac{a_۲}{a_۱}=۳$. اکنون توجه کنید که در دنباله‌ی $a_۱, a_۳, a_۵, \ldots$، مقدار قدرنسبت برابر $q^۲$ است، پس می‌توان نوشت:

$$\underbrace{a_۱+a_۳+a_۵+\cdots+a_{۹۹}}_{\text{۵۰ جمله}}=\frac{a_۱(۱-(q^۲)^{۵۰})}{۱-q^۲}=\frac{۲(۱-۳^{۱۰۰})}{۱-۹}=\frac{۳^{۱۰۰}-۱}{۴}$$

۲- گزینه‌ی ۳ ابتدا از تساوی داده شده ماتریس X را محاسبه می‌کنیم:

$$۲X=\begin{bmatrix}۴&۰\\۰&۴\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۰&۲\\۲&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴&-۲\\-۲&۴\end{bmatrix}\Rightarrow X=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۴&-۲\\-۲&۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&-۱\\-۱&۲\end{bmatrix}$$

حال می‌توان وارون ماتریس X را محاسبه کرد:

$$X^{-۱}=\frac{۱}{۴-۱}\begin{bmatrix}۲&۱\\۱&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۲}{۳}&\frac{۱}{۳}\\\frac{۱}{۳}&\frac{۲}{۳}\end{bmatrix}$$

پس حاصل‌ضرب درایه‌های ماتریس $X^{-۱}$ برابر است با $\frac{۴}{۸۱}$.

۳- گزینه‌ی ۱ ابتدا می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}\log_۹\sqrt{۲}=\log_{۳^۲}۲^{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۴}\log_۳۲=a\Rightarrow\log_۳^۲=۴a\\ \log_{\sqrt{۳}}۵=b\Rightarrow۲\log_۳۵=b\Rightarrow\log_۳۵=\frac{b}{۲}\end{cases}$$

اکنون می‌توان نوشت: (توجه کنید که $\log_۲۵=\frac{\log_۳۵}{\log_۳۲}$)

$$\log_۴\sqrt{۱۲۵}=\log_{۲^۲}۵^{\frac{۳}{۲}}=\frac{۳}{۴}\log_۲۵=\frac{۳}{۴}\frac{\log_۳۵}{\log_۳۲}=\frac{۳}{۴}(\frac{\frac{b}{۲}}{۴a})=\frac{۳b}{۳۲a}$$

۴- گزینه‌ی ۴ در ابتدا ضابطه‌ی $y=(fog)(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$y=(fog)(x)=f(g(x))=g^2(x)-g(x)=(\frac{1}{2}x-1)^2-(\frac{1}{2}x-1)=\frac{1}{4}x^2-x+1-\frac{1}{2}x+1=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+2$$

حال نامعادله‌ی $\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+2<0$ را حل می‌کنیم:

$$x^2-6x+8<0\Rightarrow(x-2)(x-4)<0\Rightarrow 2<x<4$$

۵- گزینه‌ی ۱ با توجه به این که تابع f تابعی ثابت است می‌توان فهمید عرض همه‌ی نقاط واقع بر تابع f برابر ۲ است. پس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}x+y=2\\3x-y=2\end{cases}$$

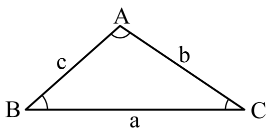
از حل دستگاه بالا خواهیم داشت $x=y=1$. اکنون با جای‌گذاری این مقادیر در گزینه‌ها، تنها گزینه‌ی (۱) به صورت $\{(1,1)\}$ خواهد شد که تابعی همانی است (توجه کنید که در تابع همانی همه‌ی زوج مرتب‌ها به صورت (a,a) هستند).

۶- گزینه‌ی ۳ با توجه به شکل داده شده می‌توان فهمید سهمی رو به بالاست، پس $a>0$. از طرفی عرض از مبدأ نمودار منفی است، بنابراین $f(0)=c<0$. در نتیجه $ac<0$، پس گزینه‌ی (۱) درست است. در ضمن نمودار تابع در دو نقطه محور xها را قطع کرده است، پس $\Delta>0$ که در نتیجه $b^2-4ac>0$. اکنون توجه کنید که $f(2)=4a+2b+c$ که با توجه به نمودار داده شده مقدار $f(2)$ باید منفی باشد، پس $4a+2b+c<0$ (توجه کنید که با توجه به نمودار $f(4)>0$، پس $16a+4b+c>0$).

۷- گزینه‌ی ۴ ابتدا طرفین تساوی $\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ را به توان ۲ می‌رسانیم (توجه کنید که $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$):

$$(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2})^2=(\frac{\sqrt{2}}{2})^2\Rightarrow\underbrace{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}_{1}-\underbrace{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}_{\sin x}=\frac{1}{2}\Rightarrow 1-\sin x=\frac{1}{2}\Rightarrow\sin x=\frac{1}{2}$$

۸- گزینه‌ی ۲ می‌دانیم در مثلث ABC روابط زیر برقرار است: (روابط تصویر)



$$a=b\cos\hat{C}+c\cos\hat{B}$$
$$b=a\cos\hat{C}+c\cos\hat{A}$$
$$c=a\cos\hat{B}+b\cos\hat{A}$$

اکنون می‌توان نتیجه گرفت:

$$a\cos\hat{B}=7-b\cos\hat{A}\Rightarrow\underbrace{a\cos\hat{B}+b\cos\hat{A}}_{c}=7\Rightarrow c=7$$

پس طول ضلع AB برابر ۷ می‌باشد.

۹- گزینه‌ی ۱ ابتدا دقت کنید که با توجه به دامنه‌ی تابع لگاریتم بایستی داشته باشیم $\sin x>0$ و $\cos x>0$ (پس x تنها متعلق به ناحیه‌ی اول دایره‌ی مثلثاتی است). اکنون می‌توان نوشت:

$$\log_2\sin x-\log_2\cos x=\log_2\sqrt{3}\Rightarrow\log_2\tan x=\log_2\sqrt{3}\Rightarrow\tan x=\sqrt{3}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{3}$$

با توجه به این که x در ناحیه‌ی اول است و $0\le x\le 3\pi$، جواب‌های $x_1=\frac{\pi}{3}$ و $x_2=2\pi+\frac{\pi}{3}$ قابل قبول هستند. پس:

$$x_1+x_2=\frac{\pi}{3}+2\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{8\pi}{3}$$

۱۰- گزینه‌ی ۲ در کیسه ۵ مهره‌ی قرمز و ۴ مهره‌ی سیاه قرار دارد. پس تعداد کل حالت‌هایی که می‌توان ۳ مهره از این کیسه برداشت برابر است با $n(S)=\binom{9}{3}$. اکنون برای آن که تعداد مهره‌های سیاه ۲ برابر تعداد مهره‌های قرمز باشد باید ۲ مهره‌ی سیاه و ۱ مهره‌ی قرمز برداریم. پس تعداد اعضای پیشامد مورد نظر برابر است با:

$$n(A)=\binom{4}{2}\binom{5}{1}$$

بنابراین احتمال پیشامد مطلوب برابر است با:

$$P(A)=\frac{\binom{4}{2}\binom{5}{1}}{\binom{9}{3}}=\frac{6\times5}{84}=\frac{5}{14}$$

۱۱- گزینه‌ی ۲ ابتدا توجه کنید که $P(X=۴)$ به معنای احتمال آن اســت که در ۵ بار پرتاب تاس، ۴ بار عدد زوج ظاهر شــود که این احتمال برابر است با: (توجه کنید که در هر پرتاب تاس، احتمال آمدن عدد زوج برابر $\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$ است.)

$$\binom{۵}{۴}(\frac{۱}{۲})^{۴}(\frac{۱}{۲})^{۱}=\frac{۵}{۳۲}=\frac{۵}{۲^{۵}}\times\frac{۵^{۵}}{۵^{۵}}=\frac{۵^{۶}}{۱۰^{۵}}=\frac{۱۵۶۲۵}{۱۰^{۵}}=۰/۱۵۶۲۵$$

۱۲- گزینه‌ی ۳ ابتدا توجه کنید که در یک بررســی آماری مجموع فراوانی‌های نســبی برابر ۱ اســت، پس اگر فراوانی نســبی دسته‌ی D را با x نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۱۲}+x=۱\Rightarrow x=\frac{۵}{۱۲}$$

پس زاویه‌ی مربوط به دسته‌ی D در نمودار دایره‌ای برابر است با:

$$\theta=\text{فراوانی نسبی دسته‌ی D}\times ۳۶۰^{\circ}=\frac{۵}{۱۲}\times ۳۶۰^{\circ}=۱۵۰^{\circ}$$

۱۳- گزینه‌ی ۳ ابتــدا توجــه کنید که اگر از همه‌ی داده‌هــا مقداری ثابت را کم کنیم (یا اضافه کنیم)، واریانس داده‌ها تغییری نمی‌کند. اکنون با توجه به این مطلب، می‌توانیم از همه‌ی داده‌ها عبارت $۱۳۹۵+x^{۲}$ را کم کنیم. در این صورت کافی است واریانس داده‌های ساده شده‌ی صفر، ۲، ۴ و ۶ را بیابیم:

$$\bar{x}=\frac{۰+۲+۴+۶}{۴}=۳\Rightarrow\sigma^{۲}=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^{۲}}{n}=\frac{۹+۱+۱+۹}{۴}=۵$$

۱۴- گزینه‌ی ۴ ابتدا از تساوی $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(a+۱)x^{n}+۳x^{۲}-۱}{۲x^{۳}-x+۵}=۳$ می‌توان نتیجه گرفت:

$$n=۳\ ,\ \frac{a+۱}{۲}=۳\Rightarrow a+۱=۶\Rightarrow a=۵$$

اکنون با جای‌گذاری مقادیر n و a می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to ۵}\frac{۲-n}{(x-a)^{۲}}=\lim_{x\to ۵}\frac{۲-۳}{(x-۵)^{۲}}=\lim_{x\to ۵}\frac{-۱}{(x-۵)^{۲}}=\frac{-۱}{۰^{+}}=-\infty$$

۱۵- گزینه‌ی ۲ برای آن که تابع f در نقطه‌ی $x=۰$ پیوسته باشد باید مقدار تابع با حد تابع در این نقطه برابر باشد، پس می‌توان نوشت:

$$f(۰)=۰-۰-۱=-۱$$

$$\lim_{x\to ۰}f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۰^{+}}f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^{+}}\frac{\sin ax}{x}=\lim\limits_{x\to ۰^{+}}\frac{ax}{x}=a\\ \lim\limits_{x\to ۰^{-}}f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^{-}}([x]+\frac{\tan bx}{۲x})=-۱+\frac{b}{۲}\end{cases}$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}a=-۱\\ -۱+\frac{b}{۲}=-۱\Rightarrow b=۰\end{cases}\Rightarrow a+b=-۱$$

۱۶- گزینه‌ی ۱ ابتدا شیب خط مماس را محاسبه می‌کنیم:

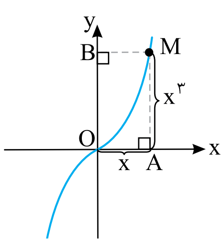
$$y-e^{x}-e^{y}-\ln(۲y+۱)+۲=۰$$

$$y'=-\frac{-e^{x}}{۱-e^{y}-\frac{۲}{۲y+۱}}=\frac{e^{x}}{۱-e^{y}-\frac{۲}{۲y+۱}}\Rightarrow \text{شیب خط مماس}:y'(۰,۰)=\frac{۱}{-۲}=-\frac{۱}{۲}$$

پس معادله‌ی خط مماس در نقطه‌ی $(۰,۰)$ به صورت مقابل می‌باشد:

$$y-۰=-\frac{۱}{۲}(x-۰)\Rightarrow ۲y+x=۰$$

۱۷- گزینه‌ی ۲ در شــکل مقابل نمودار تابع f رســم شده است. با توجه به این شکل، مساحت مستطیل OAMB برابر است با:



$$S=OA\times OB=x\times x^{۳}=x^{۴}$$

پس آهنگ تغییر مساحت مستطیل نسبت به x برابر است با:

$$S'=۴x^{۳}$$

۱۸- گزینه‌ی ۲ دامنه‌ی تعریف تابع $\mathbb{R}$ می‌باشد. برای یافتن نقاط بحرانی، مشتق تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=x^{\frac{۴}{۳}}-x^{\frac{۱}{۳}}\Rightarrow f'(x)=\frac{۴}{۳}x^{\frac{۱}{۳}}-\frac{۱}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}$$

$$f'(x)=\frac{۴\sqrt[۳]{x}}{۳}-\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}=\frac{۴x-۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ x=\frac{۱}{۴}\end{cases}$$ نقاط بحرانی

۱۹- گزینه‌ی ۲ می‌دانیم برای تعیین نقاط عطف تابع باید f'' را تعیین علامت کنیم. اکنون می‌توان نوشت:

$$f(x)=(x^۲-۷x+۱۴)e^x\Rightarrow f'(x)=(۲x-۷)e^x+(x^۲-۷x+۱۴)e^x=e^x(۲x-۷+x^۲-۷x+۱۴)=e^x(x^۲-۵x+۷)$$

$$\Rightarrow f''(x)=(۲x-۵)e^x+(x^۲-۵x+۷)e^x=e^x(۲x-۵+x^۲-۵x+۷)=e^x(x^۲-۳x+۲)$$

اکنون واضح است که طول نقاط عطف، ریشه‌های معادله‌ی $f''(x)=۰$ است که می‌توان نوشت:

$$(x^۲-۳x+۲)e^x=۰\Rightarrow x^۲-۳x+۲=۰\Rightarrow x_A=۱\ ,\ x_B=۲$$

پس $x_A+x_B=۳$.

۲۰- گزینه‌ی ۲ این تابع دارای یک مجانب قائم به معادله‌ی $x=۱$ می‌باشد. از طرفی در این تابع وقتی $x\to\infty$ داریم $y\to\infty$. پس این تابع شرط لازم برای مجانب مایل را دارد. اکنون با تقسیم صورت بر مخرج، مجانب مایل را می‌یابیم:

$$\begin{array}{r|l} ۲x^۲-x-۳ & x-۱ \\ \cline{2-2} -۲x^۲+۲x & ۲x+۱ \\ \cline{1-1} x-۳ & \\ -x+۱ & \\ \cline{1-1} -۲ & \end{array}$$

$\Rightarrow$ مجانب مایل: $y=۲x+۱$

اکنون می‌توان فهمید نقطه‌ی تقاطع دو خط $x=۱$ و $y=۲x+۱$، نقطه‌ی $A(۱,۳)$ است که در نتیجه‌ی فاصله‌ی نقطه‌ی A تا مبدأ مختصات برابر است با:

$$OA=\sqrt{x^۲+y^۲}=\sqrt{۱+۹}=\sqrt{۱۰}$$

۲۱- گزینه‌ی ۲ ابتدا توجه کنید که طبق شکل، طول نقطه‌ی عطف برابر صفر است و شیب تابع در نقطه‌ی عطف نیز صفر است. پس می‌توان نوشت $f'(۰)=f''(۰)=۰$. اکنون خواهیم داشت:

$$f'(x)=۶x^۲+۲ax+b\Rightarrow f'(۰)=۰\Rightarrow b=۰$$

$$f''(x)=۱۲x+۲a\Rightarrow f''(۰)=۰\Rightarrow a=۰$$

پس $a+b=۰$.

۲۲- گزینه‌ی ۲ می‌دانیم شرط آن که دستگاه $\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$ دارای بی‌شمار جواب باشد آن است که $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$. اکنون می‌توان نوشت:

$$\frac{a-۲}{۱۵}=\frac{b-a}{-۳}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow\begin{cases}\frac{a-۲}{۱۵}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow a-۲=۶\Rightarrow a=۸\\ \frac{b-a}{-۳}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow ۵b-۵a=-۶\xrightarrow{a=۸}b=\frac{۳۴}{۵}\end{cases}\Rightarrow ab=\frac{۲۷۲}{۵}$$

۲۳- گزینه‌ی ۳ اگر نقطه‌ای از مکان هندسی مورد نظر را به صورت $A(X,Y)$ در نظر بگیریم، طبق صورت سؤال می‌توان نوشت:

$$Y=\frac{۴}{۵}y\Rightarrow y=\frac{۵}{۴}Y$$

اکنون کافی است تساوی $y=\frac{۵}{۴}Y$ را در معادله‌ی $x^۲+y^۲=۲۵$ جای‌گذاری کنیم:

$$x^۲+\frac{۲۵}{۱۶}Y^۲=۲۵\Rightarrow\frac{x^۲}{۲۵}+\frac{Y^۲}{۱۶}=۱$$

پس مکان هندسی مورد نظر یک بیضی افقی است که در آن $a=۵$. پس طول قطر بزرگ این بیضی برابر ۱۰ است.

۲۴- گزینه‌ی ۱ ابتدا معادله‌ی هذلولی را به شکل استاندارد می‌نویسیم:

$$۴(x^۲-۴x)-۵(y^۲-۲y)+۳۱=۰\Rightarrow۴((x-۲)^۲-۴)-۵((y-۱)^۲-۱)+۳۱=۰\Rightarrow۴(x-۲)^۲-۱۶-۵(y-۱)^۲+۵+۳۱=۰$$

$$\Rightarrow۴(x-۲)^۲-۵(y-۱)^۲=-۲۰\Rightarrow\frac{(y-۱)^۲}{۴}-\frac{(x-۲)^۲}{۵}=۱\xrightarrow{\text{هذلولی قائم}}\begin{cases}a^۲=۴\\ b^۲=۵\end{cases}\Rightarrow c^۲=a^۲+b^۲=۹$$

پس خروج از مرکز هذلولی برابر است با:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{۳}{۲}$$

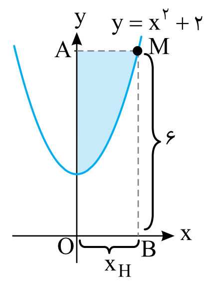
۲۵- گزینه‌ی ۳ ابتدا عبارت جلوی انتگرال را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{1-\sin x\cos x}=\frac{(\sin x+\cos x)(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)}{1-\sin x\cos x}=\frac{(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)}{1-\sin x\cos x}=\sin x+\cos x$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$f(x)=\int(\sin x+\cos x)dx=-\cos x+\sin x+c\Rightarrow f(\frac{\pi}{4})-f(0)=(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+c)-(-1+0+c)=1$$

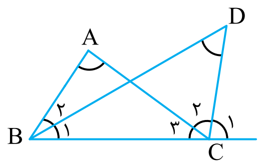
۲۶- گزینه‌ی ۴ با توجه به شکل مقابل می‌توان نوشت:



$$y_M=6\Rightarrow x^2+2=6\Rightarrow x=\pm 2\Rightarrow x_M=2$$

اکنون می‌توان مساحت قسمت هاشورخورده را محاسبه کرد:

$$S_{\text{هاشورخورده}}=\text{OAMB مساحت مستطیل}-\int_0^2(x^2+2)dx=6\times 2-(\frac{x^3}{3}+2x)\Big|_0^2=12-((\frac{8}{3}+4)-(0+0))=\frac{16}{3}$$



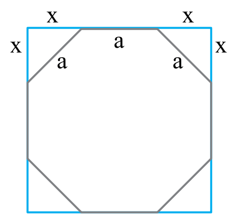
۲۷- گزینه‌ی ۳ در مثلث ABC می‌دانیم:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ\Rightarrow 50^\circ+2\hat{B}_1+\hat{C}_3=180^\circ\Rightarrow 2\hat{B}_1+180^\circ-2\hat{C}_1=180^\circ-50^\circ$$

$$\Rightarrow 2(\hat{B}_1-\hat{C}_1)=-50^\circ\Rightarrow \hat{C}_1-\hat{B}_1=25^\circ$$

ضمناً در مثلث BCD، $\hat{C}_1$ زاویه‌ی خارجی است، پس:

$$\hat{C}_1=\hat{D}+\hat{B}_1\Rightarrow \hat{D}=\hat{C}_1-\hat{B}_1=25^\circ$$



۲۸- گزینه‌ی ۲ با توجه به شکل روبه‌رو می‌دانیم $a=x\sqrt{2}$، از جایی که ضلع مربع برابر ۶ است، داریم:

$$x+x\sqrt{2}+x=6\Rightarrow x(2+\sqrt{2})=6\Rightarrow x=\frac{6}{2+\sqrt{2}}\times\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{6(2-\sqrt{2})}{2}=6-3\sqrt{2}$$

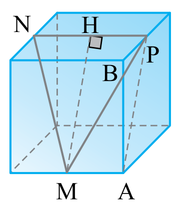
بنابراین مساحت ۸ ضلعی برابر است با:

$$S=6^2-4\times\frac{x^2}{2}=36-2(6-3\sqrt{2})^2=36-2(36+18-36\sqrt{2})=-36-36+72\sqrt{2}=72(\sqrt{2}-1)$$

۲۹- گزینه‌ی ۳ مساحت مثلث با اضلاع a و b و زاویه‌ی α بین آن‌ها از رابطه‌ی $S=\frac{1}{2}ab\sin\alpha$ به‌دست می‌آید، پس:

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}\times 2\times 2/5\times\sin\alpha}{\frac{1}{2}\times 3/5\times 5\times\sin\alpha}=\frac{5}{3/5\times 5}=\frac{1}{\frac{7}{2}}=\frac{2}{7}$$

۳۰- گزینه‌ی ۴ اگر طول هر یال مکعب را a بنامیم، در مثلث MNP قاعده‌ی NP برابر a اســت. ضمناً با توجه به این‌که چهارضلعی MHPA یک مستطیل است، ارتفاع MH برابر AP است. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABP داریم:



$$\overset{\Delta}{ABP}:B=90^\circ\Rightarrow AP^2=BP^2+AB^2\Rightarrow AP^2=(\frac{a}{2})^2+a^2\Rightarrow AP=\frac{\sqrt{5}}{2}a$$

مساحت مثلث MNP برابر است با:

$$S_{\overset{\Delta}{MNP}}=\frac{1}{2}MH\times NP=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{2}a\times a=\frac{\sqrt{5}}{4}a^2$$

بنابراین نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{\frac{\sqrt{5}}{4}a^2}{6a^2}=\frac{\sqrt{5}}{24}$$

پاسخ تشریحی آزمون ۱۰۸

۱- گزینه‌ی ۳ اگر a، b و c جملات متوالی دنباله‌ی حسابی باشند، داریم $۲b=a+c$ پس:

$$۲\times۲^x=۲^{x-۳}+۲^{x+۱}-۱\Rightarrow۲\times۲^x-۲^{x-۳}-۲^{x+۱}=-۱\Rightarrow۲^x(۲-\frac{۱}{۸}-۲)=-۱\Rightarrow۲^x=۸\Rightarrow x=۳\Rightarrow a_۱=۱\ ,\ a_۲=۸\Rightarrow d=۷$$

$$a_n=a_۱+(n-۱)d\Rightarrow۲^{x+۳}=۱+(n-۱)\times۷\Rightarrow۶۴=۱+۷(n-۱)\Rightarrow۷(n-۱)=۶۳\Rightarrow n-۱=۹\Rightarrow n=۱۰$$

۲- گزینه‌ی ۱ اگر نمودار $y=\sqrt{x-۱}$ را نسبت به محور yها قرینه کنیم، به $y=\sqrt{-x-۱}$ تبدیل خواهد شد و اگر این نمودار را ۴ واحد به سمت xهای مثبت ببریم، به $y=\sqrt{-(x-۴)-۱}$ خواهیم رسید. پس داریم:

$$\sqrt{-(x-۴)-۱}=\sqrt{x-۱}\Rightarrow\sqrt{۳-x}=\sqrt{x-۱}\Rightarrow۳-x=x-۱\Rightarrow x=۲\Rightarrow y=۱$$

۳- گزینه‌ی ۲ اگر ریشه‌ها را $x_۱$ و $x_۲$ فرض کنیم، داریم:

$$x_۲=۲x_۱+۳$$

$$x_۱+x_۲=\frac{-b}{a}=۴\Rightarrow۲x_۱+۳+x_۱=۴\Rightarrow x_۱=\frac{۱}{۳}\ ,\ x_۲=\frac{۱۱}{۳}$$

$$x_۱x_۲=\frac{c}{a}=۲m\Rightarrow\frac{۱۱}{۹}=۲m\Rightarrow m=\frac{۱۱}{۱۸}$$

۴- گزینه‌ی ۳ اگر $x<۰$، واضح است که نامعادله جواب ندارد. پس دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$۰\le x\le۴\Rightarrow۴x-x^۲\le x\Rightarrow۳x-x^۲\le۰\Rightarrow x(۳-x)\le۰\Rightarrow x\le۰\ \text{یا}\ x\ge۳$$

که با اشتراک با شرط $۰\le x\le۴$، خواهیم داشت $x\in[۳,۴]\cup\{۰\}$.

$$x>۴\Rightarrow x^۲-۴x\le x\Rightarrow x^۲-۵x\le۰\Rightarrow x(x-۵)\le۰\Rightarrow۰\le x\le۵$$

در این حالت نیز با اشتراک با شرط مربوطه، داریم $x\in(۴,۵]$. بنابراین مجموعه جواب نامعادله شامل ۴ عدد صحیح ۰، ۳، ۴ و ۵ خواهد بود.

۵- گزینه‌ی ۲ عبارت را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$A=[\sqrt[۳]{n^۳+۶n^۲+۱۲n-۹۰}]=[\sqrt[۳]{(n+۲)^۳-۹۸}]$$

به ازای $n\ge۱۰$ داریم:

$$[\sqrt[۳]{(n+۱)^۳}]<A<[\sqrt[۳]{(n+۲)^۳}]\Rightarrow A=n+۱$$

۶- گزینه‌ی ۲ یا به ۲ سؤال از ۵ سؤال اول پاسخ می‌دهیم و به ۲ سؤال از ۵ سؤال دوم پاسخ می‌دهیم:

$$\binom{۵}{۲}\times\binom{۵}{۲}$$

یا به ۳ سؤال از ۵ سؤال اول پاسخ می‌دهیم و به ۱ سؤال از ۵ سؤال دوم پاسخ می‌دهیم:

$$\binom{۵}{۳}\times\binom{۵}{۱}$$

یا به ۴ سؤال از ۵ سؤال اول پاسخ می‌دهیم:

$$\binom{۵}{۴}$$

$$\text{تعداد کل حالت ها}=\binom{۵}{۲}\times\binom{۵}{۲}+\binom{۵}{۳}\times\binom{۵}{۱}+\binom{۵}{۴}=۱۰\times۱۰+۱۰\times۵+۵=۱۵۵$$

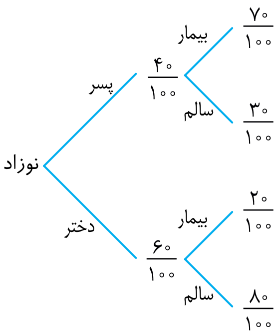
۷- گزینه‌ی ۲ فضای نمونه دارای ۶×۶ عضو می‌باشد که به صورت (x,y) هستند. اگر x عدد ظاهر شده روی تاس سفید و y عدد ظاهر شده روی تاس مشکی باشد، پیشامد مورد نظر دارای عضوهای زیر است:

$$A=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۱,۵),(۱,۶),(۲,۲),(۲,۴),(۲,۶),(۳,۳),(۳,۶),(۴,۴),(۵,۵),(۶,۶)\}\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۴}{۳۶}=\frac{۷}{۱۸}$$

۸- گزینه‌ی ۴ ابتدا احتمال بیمار بودن نوزاد را حساب می‌کنیم:

$$P(\text{بیمار بودن نوزاد})=\frac{60}{100}\times\frac{20}{100}+\frac{40}{100}\times\frac{70}{100}=\frac{12}{100}+\frac{28}{100}=\frac{4}{10}$$

حال در توزیع دوجمله‌ای اگر بخواهیم از بین ۳ نوزاد انتخابی فقط یکی بیمار باشد، داریم:



$$P(X=1)=\binom{3}{1}\left(\frac{4}{10}\right)\left(\frac{6}{10}\right)^2=3\times\frac{4}{10}\times\frac{36}{100}=\frac{432}{1000}=0/432$$

۹- گزینه‌ی ۴ اگر فراوانی مطلق داده را f_i فرض کنیم، داریم:

$$\text{فراوانی نسبی}=\frac{f_i}{n}=\frac{2}{10}\Rightarrow n=5f_i$$

پس از ۵ برابر کردن فراوانی داده داریم:

$$\text{فراوانی نسبی جدید}=\frac{5f_i}{n+4f_i}=\frac{5f_i}{5f_i+4f_i}=\frac{5}{9}$$

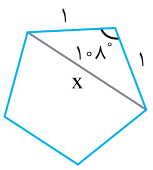
۱۰- گزینه‌ی ۳ اگر داده‌ها را با x_i نمایش دهیم، داده‌های جدید به صورت $x_i-\frac{10}{100}x_i=\frac{9}{10}x_i$ خواهند بود. بنابراین داده‌ها در $\frac{9}{10}$ ضرب شده‌اند، در نتیجه واریانس آن‌ها در $\frac{81}{100}$ ضرب خواهد شد.

$$\text{واریانس جدید}=\frac{81}{100}\times10=8/1$$

۱۱- گزینه‌ی ۴ از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\overbrace{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}^{1}(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=-\cos2\alpha=2\sin^2\alpha-1=2(\sqrt{2}-1)^2-1=2(2+1-2\sqrt{2})-1=5-4\sqrt{2}$$

۱۲- گزینه‌ی ۴ اندازه‌ی زوایای داخلی یک پنج‌ضلعی منتظم برابر 108° است. با توجه به قضیه‌ی کسینوس‌ها داریم:



$$x^2=1^2+1^2-2\times1\times1\times\cos108^\circ\Rightarrow x^2=2-2\cos108^\circ=2(1-\cos108^\circ)\Rightarrow x^2=2\times2\sin^2\frac{108^\circ}{2}\Rightarrow x^2=4\sin^2 54^\circ$$

$$\Rightarrow x=2\sin54^\circ$$

تذکر: اندازه‌ی زوایای داخلی یک n ضلعی منتظم برابر $\frac{(n-2)}{n}180^\circ$ می‌باشد.

۱۳- گزینه‌ی ۴

$$\sin2x=(1+\cos x)(2-2\cos x)=2(1-\cos^2x)\Rightarrow\sin2x=2\sin^2x\Rightarrow2\sin x\cos x=2\sin^2x\xrightarrow{\sin x\neq0}\cos x=\sin x\Rightarrow\tan x=1\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}$$

نقاط پایانی جواب‌های معادله بر روی دایره‌ی مثلثاتی تشکیل یک پاره‌خط می‌دهند.

توجه کنیم که چون در صورت سؤال $\sin2x$ در مخرج قرار گرفته است پس $\sin2x\neq0$، بنابراین نتیجه می‌گیریم که $\sin x$ هم مخالف صفر است.

۱۴- گزینه‌ی ۴ برای محاسبه‌ی حد مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}+\frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{(1+\sqrt{x})(x+\sqrt{x})+(1-\sqrt{x})(x-\sqrt{x})}{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})}=\lim_{x\to0^+}\frac{x+\sqrt{x}+x\sqrt{x}+x+x-\sqrt{x}-x\sqrt{x}+x}{x^2-x}=\lim_{x\to0^+}\frac{4x}{x^2-x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{4x}{x(x-1)}=\lim_{x\to0^+}\frac{4}{x-1}=-4$$

۱۵- گزینه‌ی ۴ مقادیر حد چپ و راست و مقدار تابع در $x=۴$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(۴)=۲+a-۴=a-۲ \quad , \quad \lim_{x\to ۴^+} f(x)=۲+a-۴=a-۲ \quad , \quad \lim_{x\to ۴^-} f(x)=۱+۰-۴=-۳$$

مقادیر فوق باید یکسان باشند تا تابع در $x=۴$ پیوسته گردد:

$$a-۲=-۳\Rightarrow a=-۱$$

۱۶- گزینه‌ی ۴ ابتدا شرط پیوستگی تابع را در $x=۱$ بررسی می‌کنیم:

$$f(۱)=\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^-} f(x)\Rightarrow a-b=\sqrt{۶+۳}\Rightarrow a-b=۳$$

$$f'(x)=\begin{cases} ۳ax^۲-۲bx & x\geq ۱ \\ \dfrac{۳}{\sqrt{۶x+۳}} & x<۱ \end{cases} \xrightarrow{f'_+(۱)=f'_-(۱)} ۳a-۲b=۱$$

از حل دستگاه $\begin{cases} a-b=۳ \\ ۳a-۲b=۱ \end{cases}$ خواهیم داشت $a=-۵$ و $b=-۸$.

۱۷- گزینه‌ی ۲ ابتدا در ضابطه‌ی fog ، ضابطه‌ی g را قرار می‌دهیم:

$$f(x^۳+x)=۲x^۲+۴x-۳$$

اکنون از طرفین رابطه‌ی فوق مشتق می‌گیریم، داریم:

$$(۳x^۲+۱)f'(x^۳+x)=۴x+۴ \xrightarrow{x=۱} ۴f'(۲)=۸\Rightarrow f'(۲)=۲$$

۱۸- گزینه‌ی ۲ آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای را محاسبه می‌کنیم:

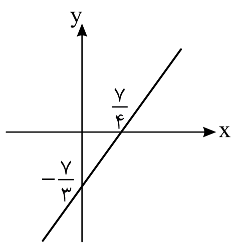
$$\text{آهنگ متوسط}=\frac{f(۱)-f(\frac{۱}{۴})}{۱-\frac{۱}{۴}}=\frac{۱-۴}{\frac{۳}{۴}}=-۴ \quad , \quad \text{آهنگ لحظه‌ای}=f'(x)=-\frac{۱}{x^۲}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای}=\frac{۹}{۴}\times(\text{آهنگ متوسط})\Rightarrow \frac{-۱}{x^۲}=\frac{۹}{۴}\times(-۴)\Rightarrow x=\pm\frac{۱}{۳}$$

تنها $x=\frac{۱}{۳}$ در گزینه‌ها آمده است.

۱۹- گزینه‌ی ۳ از طرفین رابطه نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$۳x^۲+۳y^۲+۶xyy'-۶xy-۳x^۲y'=۰ \xrightarrow[x=۱\ ,\ y=-۱]{\text{با جای‌گذاری}} ۳+۳-۶y'+۶-۳y'=۰\Rightarrow y'=\frac{۴}{۳}$$



بنابراین شیب خط مماس برابر $\frac{۴}{۳}$ است و داریم:

$$\text{معادله‌ی خط مماس}: y+۱=\frac{۴}{۳}(x-۱)\Rightarrow y=\frac{۴}{۳}x-\frac{۷}{۳}$$

پس خط مماس از ناحیه‌ی دوم عبور نمی‌کند.

۲۰- گزینه‌ی ۳ اولاً نقطه‌ی عطف در معادله‌ی تابع صدق می‌کند پس:

$$f(۱)=۱\Rightarrow a+b\underbrace{\ln ۱}_{۰}=۱\Rightarrow a=۱$$

از طرفی $y''(۱)=۰$ پس:

$$y'=۲x+\frac{b}{x}\Rightarrow y''=۲-\frac{b}{x^۲} \xrightarrow{y''(۱)=۰} ۲-b=۰\Rightarrow b=۲ \xrightarrow{a=۱} a+b=۳$$

۲۱- گزینه‌ی ۲ نمودار بر محور x ها مماس است، پس تابع دارای ریشه‌ی مضاعف است.

$$x^۲+ax+۴=۰ \xrightarrow{\Delta=۰} a^۲-۱۶=۰\Rightarrow \begin{cases} a=۴\Rightarrow x=-۲ \ \text{غ ق ق} \\ a=-۴\Rightarrow x=۲ \end{cases}$$

تابع دارای مجانب افقی به معادله‌ی $y=\frac{۱}{b}$ است که در نقطه‌ای به طول $\frac{۱}{۲}$ نمودار تابع را قطع کرده است:

$$\frac{x^۲-۴x+۴}{bx^۲+۱}=\frac{۱}{b} \xrightarrow{x=\frac{۱}{۲}} \frac{\frac{۹}{۴}}{\frac{b}{۴}+۱}=\frac{۱}{b}\Rightarrow ۹b=b+۴\Rightarrow b=\frac{۱}{۲}$$

۲۲- گزینه‌ی ۱ از معادله‌ی $y-ax=0$ داریم $y=ax$ که با جای‌گذاری آن در معادله‌ی $(a+1)x-y-1=0$ خواهیم داشت:

$$ax+x-y-1=0\Rightarrow ax+x-ax-1=0\Rightarrow x=1$$

$$3y+x-7=0\xrightarrow{x=1}3y+1-7=0\Rightarrow y=2\Rightarrow A(1,2)$$

با جایگزینی نقطه‌ی $A(1,2)$ در معادله‌ی خط $y=ax$ ، $a=2$ به‌دست می‌آید. بنابراین با شرط $a=2$ ، ۳ خط در نقطه‌ی A یک‌دیگر را قطع می‌کنند و در اصطلاح می‌گوییم ۳ خط همرسند.

۲۳- گزینه‌ی ۱ دو دایره را تلاقی می‌دهیم تا معادله‌ی وتر مشترک به‌دست آید:

$$\begin{cases}x^2+y^2-4x-6y=14\\ x^2+y^2+6x+8y=0\end{cases}\Rightarrow -4x-6y-14=6x+8y\Rightarrow 10x+14y+14=0\Rightarrow 5x+7y+7=0$$

البته شرط لازم برای آن‌که دو دایره وتر مشترک داشته باشند آن است که دو دایره متقاطع باشند یعنی $|R_1-R_2|<O_1O_2<R_1+R_2$.

۲۴- گزینه‌ی ۲ اگر معادله را به فرم استاندارد بنویسیم، داریم:

$$3x^2-6x-4y^2=9\Rightarrow 3(x-1)^2-4y^2=12\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$$

در هر هذلولی فاصله‌ی هر کانون تا خط مجانب برابر b می‌باشد پس در این‌جا چون $b^2=3$ پس $b=\sqrt{3}$.

۲۵- گزینه‌ی ۲ با توجه به قاعده‌ی مشتق‌گیری داریم:

$$y'(1)=f'(1)$$

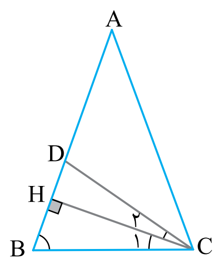
$$f(x)=\int_1^x\frac{t}{\sqrt{3+t^2}}dt\Rightarrow f(1)=\int_1^1\frac{t}{\sqrt{t^2+3}}dt=0$$

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\Rightarrow f'(1)=\frac{1}{2}$$

۲۶- گزینه‌ی ۴ ابتدا عبارت جلوی انتگرال را ساده می‌کنیم:

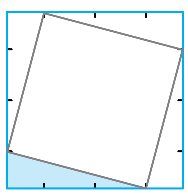
$$\sqrt{(1+\sqrt[4]{x})^2-4\sqrt[4]{x}}=\sqrt{(1-\sqrt[4]{x})^2}=|1-\sqrt[4]{x}|\ ,\ 1\le x\le 16\Rightarrow 1\le\sqrt[4]{x}\le 2\Rightarrow 1-\sqrt[4]{x}\le 0$$

$$\int_1^{16}|1-\sqrt[4]{x}|dx=\int_1^{16}(\sqrt[4]{x}-1)dx=\left(\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}-x\right)\Big|_1^{16}=\left(\frac{4}{5}\times16\times2-16\right)-\left(\frac{4}{5}-1\right)=\frac{128-4}{5}-15=\frac{124-75}{5}=\frac{49}{5}=9/8$$



۲۷- گزینه‌ی ۲ با توجه به این‌که مجموع زوایای داخلی مثلث برابر 180° است، پس زاویه‌ی C نیز 70° است، پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

$$\begin{cases}\overset{\Delta}{BHC}:\hat{B}+B\hat{H}C+\hat{C}_1=180^\circ\Rightarrow\hat{C}_1=180^\circ-90^\circ-70^\circ\Rightarrow\hat{C}_1=20^\circ\\ \text{نیمساز } CD\Rightarrow\hat{C}_1+\hat{C}_2=\frac{1}{2}\hat{C}=\frac{1}{2}\times70^\circ=35^\circ\end{cases}\Rightarrow C_2=35^\circ-20^\circ=15^\circ$$



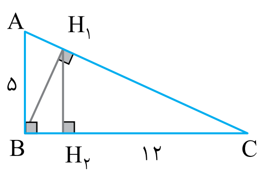
۲۸- گزینه‌ی ۳ اگر اندازه‌ی هر قسمت کوچک را a بنامیم، با توجه به این‌که مساحت مثلث رنگ شده برابر ۶ است، داریم:

$$\frac{a\times3a}{2}=6\Rightarrow 3a^2=12\Rightarrow a^2=4$$

ضمناً با توجه به قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث رنگ شده، طول ضلع مربع کوچک‌تر برابر است با:

$$x=\sqrt{a^2+(3a)^2}=\sqrt{10a^2}=\sqrt{10\times4}=\sqrt{40}$$

بنابراین مساحت مربع برابر $x^2=40$ است.

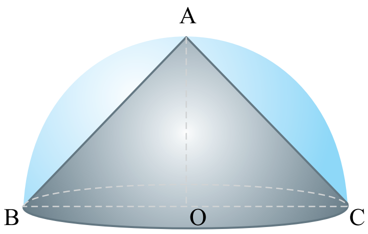


۲۹- گزینه‌ی ۲ دو مثلث AH_1B و ABC متشابه هستند، پس:

$$\frac{AH_1}{AB}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow AH_1\times AC=AB^2\Rightarrow AH_1\times\sqrt{5^2+12^2}=5^2\Rightarrow AH_1=\frac{25}{13}$$

ضمناً با توجه به قضیه‌ی تالس در مثلث ABC داریم:

$$H_1H_2||AB\Rightarrow\frac{H_1H_2}{AB}=\frac{CH_1}{AC}\Rightarrow\frac{H_1H_2}{5}=\frac{13-\frac{25}{13}}{13}\Rightarrow\frac{H_1H_2}{5}=\frac{144}{169}\Rightarrow H_1H_2=\frac{720}{169}$$



۳۰- گزینه‌ی ۴ ارتفاع و شعاع قاعده‌ی مخروط هر دو، برابر شعاع نیم‌کره هستند، پس حجم مخروط برابر است با:

$$V=\frac{۱}{۳}\pi r^۲h=\frac{۱}{۳}\pi\times ۲^۲\times ۲=\frac{۸\pi}{۳}$$

ضمناً حجم نیم‌کره، نصف حجم کره است، پس:

$$V'=\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۳}\pi r^۳=\frac{۲}{۳}\pi\times ۲^۳=\frac{۱۶\pi}{۳}$$

بنابراین اختلاف این دو مقدار برابر $V'-V=\frac{۸\pi}{۳}$ است.

پاسخ تشریحی آزمون ۱۰۹

۱- گزینه‌ی ۲ اگر $a, b, c, \dots$ جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند، آن‌گاه $b^۲=ac$ پس:

$$x^۲=\frac{۳}{۲}\times\frac{۱}{۶}\Rightarrow x^۲=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{۱}{۲}\\ x=-\frac{۱}{۲}\end{cases}$$ (دنباله‌ی هندسی نزولی است.) غ ق ق

$$q=\frac{b}{a}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۲}}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow \text{حد مجموع جملات}=\frac{a}{۱-q}=\frac{\frac{۳}{۲}}{۱-\frac{۱}{۳}}=\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۲}{۳}}\Rightarrow \text{حد مجموع جملات}=\frac{۹}{۴}$$

۲- گزینه‌ی ۲ چون نمودار محور xها را در $x=-۱$ قطع کرده است، پس:

$$y(-۱)=۰\Rightarrow -۱-b+c=۰\Rightarrow c-b=۱\Rightarrow c=۱+b$$

از طرفی مقدار اکسترمم نسبی برابر با ۹ می‌باشد یعنی $-\frac{\Delta}{۴a}=۹$، پس:

$$\Delta=b^۲+۴c\,,\ \frac{-\Delta}{۴a}=\frac{-(b^۲+۴c)}{-۴}=۹\Rightarrow b^۲+۴c=۳۶\Rightarrow b^۲+۴b+۴-۳۶=۰\Rightarrow b^۲+۴b-۳۲=۰\Rightarrow (b+۸)(b-۴)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}b=-۸\Rightarrow c=-۷ \text{ غ ق ق } (c=f(۰)>۰)\\ b=۴\Rightarrow c=۵\end{cases}$$

بنابراین مقدار $b+c$ برابر ۹ خواهد بود.

۳- گزینه‌ی ۱ دستگاه داده شده به صورت $(gof)(۲x)=۴x$ معنی می‌شود که همان ترکیب توابع است. اگر قرار دهیم $x=۱$، آن‌گاه $(gof)(۲)=۴$، یعنی $g(f(۲))=۴$ چون $g(۱)=۴$ پس $f(۲)=۱$.

۴- گزینه‌ی ۱ با توجه به ویژگی‌های لگاریتم، معادله را ساده می‌کنیم:

$$\begin{cases}\log(۲x-۱)+\log(x+۳)=\log(۲x-۱)(x+۳)\\ \log ۳۰-\log ۲=\log ۱۵\end{cases}\xrightarrow[\text{تابعی یک به یک است}]{\text{لگاریتم}}(۲x-۱)(x+۳)=۱۵\Rightarrow ۲x^۲+۵x-۱۸=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=۲\\ x=-\frac{۹}{۲}\end{cases}$$ غ ق ق (عبارت جلوی لگاریتم منفی می‌شود.)

با جای‌گذاری $x=۲$ خواهیم داشت:

$$\log_۸ ۲x=\log_۸ ۴=\log_{۲^۳} ۲^۲=\frac{۲}{۳}\log_۲ ۲=\frac{۲}{۳}$$

۵- گزینه‌ی ۳ در بین هفت رقم داده شده، دو رقم ۴ و دو رقم ۳ یکسان می‌باشند. بنابراین تعداد جایگشت‌های این هفت رقم برابر $\frac{۷!}{۲!\times ۲!}$ می‌باشد.

حال برای این‌که ارقام مشـابه کنار هم قرار بگیرند آن‌ها را یکی فرض کرده و به صورت ۴۴، ۳۳، ۵، ۲ و ۱ در نظر می‌گیریم. در نتیجه تعداد حالات مطلوب مسأله برابر $n(A)=۵!$ می‌باشد. پس:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۵!}{\frac{۷!}{۲!\times ۲!}}=\frac{۲!\times ۲!}{۷\times ۶}=\frac{۴}{۴۲}=\frac{۲}{۲۱}$$

۶- گزینه‌ی ۴ اگر گروه خونی AB را پیروزی فرض کنیم، آن‌گاه $p=\frac{1}{4}$ و در حالتی که افراد ۵ نفر باشند و بخواهیم حداکثر یک پیروزی داشته باشیم، آن‌گاه:

$$P(X=0)+P(X=1)=\binom{5}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^5+\binom{5}{1}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^4=1\times\left(\frac{3}{4}\right)^5+\frac{5}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^4=\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{4}\right)=2\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{162}{256}=\frac{81}{128}$$

۷- گزینه‌ی ۱ ابتدا ریشه‌های تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=0\Rightarrow|2x-1|-5=0\Rightarrow|2x-1|=5\Rightarrow\begin{cases}2x-1=5\Rightarrow x=3\\ 2x-1=-5\Rightarrow x=-2\end{cases}$$

چون ریشه‌ی منفی برابر $x=-2$ می‌باشد، پس اگر نمودار تابع را حداقل ۲ واحد به سمت راست انتقال دهیم، آن‌گاه تابع دیگر ریشه‌ی منفی نخواهد داشت. آن‌گاه ریشه‌ی منفی برابر صفر خواهد شد. (یا به عبارت دیگر نمودار قسمت منفی محور xها را قطع نخواهد کرد.)

۸- گزینه‌ی ۲ ابتدا تابع را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}3x-1-3x+6=5 & x>2\\ 3x-1+3x-6=6x-7 & x\le 2\end{cases}$$

بدیهی است در حالتی که $x>2$ تابع ثابت است و معکوس‌پذیر نمی‌باشد اما وقتی $x\le 2$ داریم:

$$f(x)=6x-7\Rightarrow y=6x-7\Rightarrow x=\frac{y+7}{6}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+7}{6}\quad,\quad x\le 2\Rightarrow 6x\le 12\Rightarrow 6x-7\le 5\Rightarrow y\le 5$$

پس $f^{-1}(x)=\frac{x+7}{6}$ ، $x\le 5$.

۹- گزینه‌ی ۲ برای آن‌که بدانیم نمودار تابع f چندبار محور xها را قطع می‌کند باید معادله‌ی $f(x)=0$ را حل کنیم.

$$f(x)=0\Rightarrow 3\cos(x-\frac{\pi}{4})-\sin(x+\frac{\pi}{4})=0\Rightarrow 3\cos(x-\frac{\pi}{4})=\sin(x+\frac{\pi}{4})\Rightarrow 3\cos(x-\frac{\pi}{4})=\cos(\frac{\pi}{2}-x-\frac{\pi}{4})\Rightarrow 3\cos(x-\frac{\pi}{4})=\cos(\frac{\pi}{4}-x)$$

اما $\cos(\frac{\pi}{4}-x)=\cos(x-\frac{\pi}{4})$ پس:

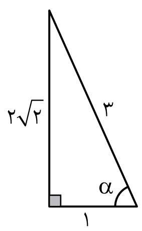
$$2\cos(x-\frac{\pi}{4})=0\Rightarrow\cos(x-\frac{\pi}{4})=0\Rightarrow x-\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=k\pi+\frac{3\pi}{4}\xrightarrow{x\in(-\pi,\pi)}\begin{cases}x=\frac{3\pi}{4}\\ x=-\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

پس تابع در بازه‌ی $(-\pi,\pi)$، دو ریشه دارد.

۱۰- گزینه‌ی ۳ با توجه به ویژگی‌های مقدماتی در مثلثات داریم:

$$\tan(x+\frac{\pi}{3})=\tan(x-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2})=-\cot(x-\frac{\pi}{6})$$

اگر فرض کنیم $x-\frac{\pi}{6}=\alpha$، بنابر فرض مسأله خواهیم داشت $\cos\alpha=\frac{1}{3}$. بنابراین مطابق مثلث مقابل داریم $\cot\alpha=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ پس:



$$\tan(x+\frac{\pi}{3})=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

دقت کنید که در راه حل بالا α را حاده در نظر گرفتیم. در صورتی‌که α منفرجه باشد، خواهیم داشت $\cot\alpha=\frac{-1}{2\sqrt{2}}$ و در این‌صورت $\tan(x+\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{2}}{4}$ که در گزینه‌ها نمی‌باشد.

۱۱- گزینه‌ی ۳ فرض کنیم از این ۳۰ داده‌ی جدید x تا در دسته‌ی پنجم قرار بگیرد و فراوانی مطلق قبلی آن f_i باشد پس:

$$\text{فراوانی نسبی قبل از افزایش}=\frac{f_i}{80}\quad,\quad\text{فراوانی نسبی بعد از افزایش}=\frac{f_i+x}{80+30}$$

$$\frac{f_i}{80}=\frac{f_i+x}{110}\Rightarrow 11f_i==8f_i+8x\Rightarrow 3f_i=8x\Rightarrow\frac{x}{f_i}=\frac{3}{8}$$

۱۲- گزینه‌ی ۴ در محاسبه‌ی واریانس ۲ فرمول داریم:

$$\sigma^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}\quad,\quad\sigma^2=\frac{\sum x_i^2}{n}-(\bar{x})^2$$

که هرکدام به تنهایی با توجه به شرایط مسأله قابل استفاده است. در این سؤال داریم:

$$\bar{x}=\frac{100}{25}=4\quad,\quad\sum x_i^2=625$$

با توجه به فرمول دوم، واریانس را محاسبه می‌کنیم:

$$\sigma^2=\frac{625}{25}-(4)^2=\frac{625-400}{25}=\frac{225}{25}=9$$

بنابراین ضریب تغییرات برابر است با:

$$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{3}{4}=0/75$$

۱۳- گزینه‌ی ۳ نوع ابهام $\infty-\infty$ می‌باشد. برای رفع ابهام مخرج مشترک می‌گیریم و آن را ساده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x-4}{x(x-2)}-\frac{x+2}{x(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{(3x-4)(x+1)-(x+2)(x-2)}{x(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-x-4-x^2+4}{x(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2-x}{x(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(2x-1)}{x(x+1)(x-2)}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$$

۱۴- گزینه‌ی ۲ با توجه به ویژگی‌های تابع جزء صحیح می‌دانیم $f(x)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ پس:

$$g(x)=\begin{cases}0+a & x\in\mathbb{Z}\\ -1-a & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

برای آن‌که g روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد باید داشته باشیم:

$$a=-1-a\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

۱۵- گزینه‌ی ۲ اولاً می‌دانیم $\{a_n\}$ همگرا به ۱ می‌باشد زیرا:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n=\lim_{n\to+\infty} n-(n-1)=1$$

ثانیاً اگر $\lim_{n\to\infty} a_n=1$، آن‌گاه:

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n}=1$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}(a_{2n}-2a_n)=\lim_{n\to\infty} a_{2n}-2\lim_{n\to\infty} a_n=1-2\times 1=-1$$

تذکر: وقتی $n\to+\infty$، $\sqrt{n^2+bn}\sim(n+\frac{b}{2})$.

۱۶- گزینه‌ی ۱ ضابطه‌ی مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\begin{cases}1-\frac{a}{x^2} & x\geq 1\\ 2x+1 & x<1\end{cases}$$

شرط پیوستگی: $1+a=1+1+b\Rightarrow a=1+b$ ، شرط مشتق پذیری: $1-a=2+1\Rightarrow a=-2\Rightarrow b=-3$

$$f(1+\sqrt{2})=1+\sqrt{2}-\frac{2}{1+\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}-\frac{2(1-\sqrt{2})}{1-2}=1+\sqrt{2}+2-2\sqrt{2}=3-\sqrt{2}$$

۱۷- گزینه‌ی ۲ ابتدا مشتق تابع $g(x)=f(2x-f(x))$ را به‌دست می‌آوریم:

$$g'(x)=(2-f'(x))f'(2x-f(x))$$

حالا $x=1$ را جایگزین می‌کنیم:

$$g'(1)=(2-\underbrace{f'(1)}_{-2})f'(2-\underbrace{f(1)}_{1})\Rightarrow g'(1)=4f'(1)=-8$$

۱۸- گزینه‌ی ۴ آهنگ متوسط تابع $y=2x+\sqrt{x}$ بر بازه‌ی $[1,4]$ یعنی $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}$ پس:

$$\text{آهنگ متوسط}=\frac{(8+2)-(2+1)}{3}=\frac{7}{3}$$

از طرفی آهنگ لحظه‌ای f در $x=1$ یعنی $f'(1)$ پس:

$$f'(x)=2+\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow f'(1)=\frac{5}{2}$$

بنابراین آهنگ متوسط $f(x)$ به مقدار $\frac{7}{3}-\frac{5}{2}=\frac{14-15}{6}=-\frac{1}{6}$ از آهنگ لحظه‌ی بیش‌تر است.

۱۹- گزینه‌ی ۳ برای آن‌که تابعی نزولی باشد باید $f'(x)\leq 0$ پس:

$$f(x)=(x-3)x^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{3}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}\quad,\quad D_f=[0,+\infty)$$

$$f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})=\frac{3}{2}(\frac{x-1}{\sqrt{x}})\leq 0\Rightarrow x\in(0,1]$$

برای آن‌که تقعر تابع رو به بالا باشد باید $f''(x)>0$ پس:

$$f''(x)=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{3}{4}x^{-\frac{3}{2}}=\frac{3}{4}(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}})>0$$

بنابراین تابع f در بازه‌ی $(0,1]$ نزولی با تقعر رو به بالاست، در نتیجه در زیرمجموعه‌ای از این بازه یعنی $(0,1)$ نیز دارای ویژگی بیان شده می‌باشد.

۲۰- گزینه‌ی ۴ برای آن‌که اکسترمم نسبی تابع را پیدا کنیم داریم:

$$D_f=\mathbb{R}\ ,\quad y'=2xe^{-x}-e^{-x}x^2 \Rightarrow y'=(2x-x^2)e^{-x}=0\Rightarrow x=0,2$$

حال با توجه به جدول تعیین علامت نقطه‌ی $A(0,0)$ ، نقطه‌ی مینیمم نسبی تابع می‌باشد. بنابراین فاصله‌ی نقطه‌ی A تا مبدأ مختصات صفر می‌باشد. (A دقیقاً روی مبدأ قرار گرفته است.)

x		۰		۲	
y'	−	۰	+	۰	−
y	↘	۰	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘
		min		max	

۲۱- گزینه‌ی ۱ با توجه به شکل $x=2$ مجانب قائم تابع است پس $x=2$ ریشه‌ی مخرج است یعنی $d=-2$. با توجه به آن‌که مجانب مایل هم از نقطه‌ی $A(2,2)$ و هم از مبدأ عبور کرده پس $y=x$ مجانب مایل است. یعنی خارج‌قسمت تقسیم صورت بر مخرج خط $y=x$ می‌باشد. بنابراین طبق تقسیم روبه‌رو داریم:

$$\begin{array}{l|l} ax^2+bx+c & x-2 \\ \hline \underline{-ax^2+2ax} & ax+b+2a \\ (b+2a)x+c & \\ \underline{-(b+2a)x+2(b+2a)} & \\ \qquad c+2(b+2a) & \end{array}\qquad \begin{cases} a=1 \\ b+2a=0\Rightarrow b=-2 \end{cases}$$

اما در انتها با توجه به شکل، نمودار بر محور xها مماس است پس صورت کسر ریشه‌ی مضاعف دارد، یعنی در عبارت صورت مقدار $\Delta=b^2-4ac$ برابر صفر است.

$$b^2-4ac=0\Rightarrow 4-4\times1\times c=0\Rightarrow c=1$$

$$f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x-2}\Rightarrow f(-1)=\frac{4}{-3}=-\frac{4}{3}$$

۲۲- گزینه‌ی ۲ فرض کنیم $M(\alpha,\alpha)$ نقطه‌ی مورد نظر باشد، باید $(MA)^2=(MB)^2$ پس:

$$(\alpha-0)^2+(\alpha-4)^2=(\alpha-4)^2+(\alpha-2)^2\Rightarrow\alpha^2=\alpha^2-4\alpha+4\Rightarrow\alpha=1\Rightarrow M(1,1)\Rightarrow OM=\sqrt{2}$$

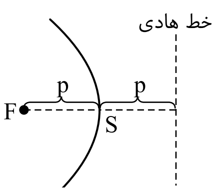
۲۳- گزینه‌ی ۳ ابتدا معادله‌ی دو دایره را به فرم استاندارد تبدیل می‌کنیم:

$$x^2-4x+y^2=0\Rightarrow(x-2)^2+y^2=4\qquad,\qquad x^2+y^2-4y=0\Rightarrow x^2+(y-2)^2=4$$

$$\left.\begin{array}{l}(x-2)^2+y^2=4\Rightarrow O_1(2,0)\ ,\ R_1=2\\ x^2+(y-2)^2=4\Rightarrow O_2(0,2)\ ,\ R_2=2\end{array}\right.\Rightarrow O_1O_2=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

با توجه به این‌که رابطه‌ی $|R_1-R_2|<O_1O_2<R_1+R_2$ برقرار است بنابراین دو دایره متقاطع می‌باشند.

۲۴- گزینه‌ی ۳ ابتدا معادله‌ی سهمی را به فرم استاندارد تبدیل می‌کنیم:



$$y^2-4y=-2x-\frac{a}{2}\Rightarrow(y-2)^2=-2x-\frac{a}{2}+4=-2(x-2+\frac{a}{4})$$

این سهمی افقی است و دهانه‌ی آن به سمت چپ باز می‌شود و رأس آن نقطه‌ی $(2-\frac{a}{4},2)$ می‌باشد.بنابراین داریم:

$$4p=2\Rightarrow p=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_F+\frac{1}{2}=x_S\\ x_F=2\end{cases}\Rightarrow x_S=\frac{5}{2}$$

در نتیجه $2-\frac{a}{4}=\frac{5}{2}$، پس $a=-2$.

۲۵- گزینه‌ی ۲ ابتدا عبارت داخل انتگرال را تفکیک می‌کنیم و جداگانه انتگرال‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\int(\frac{2x}{\sqrt[3]{x}}-\frac{3}{\sqrt[3]{x}})dx=\int(2x^{\frac{2}{3}}-3x^{-\frac{1}{3}})dx=2\times\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}-3\times\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+c=\frac{6x^2}{5\sqrt[3]{x}}-\frac{9x}{2\sqrt[3]{x}}+c=\frac{\frac{6}{5}x^2-\frac{9}{2}x}{\sqrt[3]{x}}+c$$

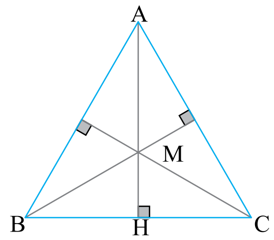
با مقایسه‌ی جواب انتگرال با صورت سؤال، $f(x)=\frac{6}{5}x^2-\frac{9}{2}x$ به‌دست می‌آید.

۲۶- گزینه‌ی ۴ ابتدا نقطه‌ی تلاقی دو تابع را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{1}{x^2}=\sqrt{x}\Rightarrow x=1$$

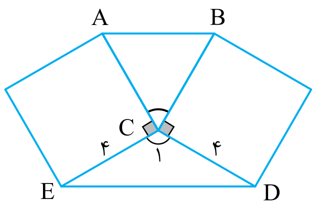
مساحت ناحیه‌ی مورد نظر با مقدار انتگرال زیر برابر است:

$$S=\int_0^1\sqrt{x}dx+\int_1^2\frac{1}{x^2}dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1-\frac{1}{x}\Big|_1^2=(\frac{2}{3}-0)+(-\frac{1}{2}+1)=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}$$



۲۷- گزینه‌ی ۴ M محل تلاقی عمودمنصف‌های مثلث ABC اســت. چون مثلث ABC متســاوی‌الاضلاع است، M محل تلاقی میانه‌ها نیز می‌باشد، می‌دانیم میانه‌ها یک‌دیگر را به نسبت ۱ به ۲ قطع می‌کنند، پس:

$$\frac{AM}{AH}=\frac{2}{3}\Rightarrow AM=\frac{2}{3}\times AH=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}AB=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6\sqrt{3}=6$$



۲۸- گزینه‌ی ۱ اندازه‌ی زاویه‌ی C_1 برابر است با:

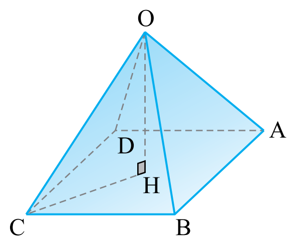
$$360^\circ-(2\times 90^\circ+60^\circ)=120^\circ$$

طبق قضیه‌ی مساحت در مثلث ECD داریم:

$$S=\frac{1}{2}EC\times CD\times\sin 120^\circ=\frac{1}{2}\times 4\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$$

۲۹- گزینه‌ی ۲ اگر طول ضلع لوزی را a بنامیم، با توجه به قضیه‌ی تالس داریم:

$$MN||AP\Rightarrow MN||AB\Rightarrow\frac{MN}{AB}=\frac{CM}{AC}\Rightarrow\frac{a}{6}=\frac{4-a}{4}\Rightarrow 4a=24-6a\Rightarrow 10a=24\Rightarrow a=2/4$$



۳۰- گزینه‌ی ۲ طول تمامی یال‌ها با هم برابر است، پس آن را a می‌نامیم. مثلث OHC یک مثلث قائم‌الزاویه است که در آن HC برابر نصف قطر مربع ABCD یعنی $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ است، پس:

$$OC^2=OH^2+HC^2\Rightarrow a^2=OH^2+\frac{a^2}{2}\Rightarrow OH=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

بنابراین حجم هرم برابر است با:

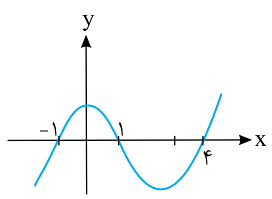
$$V=\frac{1}{3}OH\times S_{ABCD}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}a\times a^2=\frac{\sqrt{2}}{6}a^3\xrightarrow{V=\frac{16}{3}}\frac{\sqrt{2}}{6}a^3=\frac{16}{3}\Rightarrow a^3=16\sqrt{2}\Rightarrow a^3=2^{4/5}\Rightarrow a=2^{1/5}\Rightarrow a=2\sqrt{2}$$

پاسخ تشریحی آزمون ۱۱۰

۱- گزینه‌ی ۴ چون سه جمله‌ی متوالی به‌صورت a_1,a_2,a_3 از یک دنباله‌ی هندسی داده شده است پس می‌توانیم بنویسیم:

$$a_2^2=a_1a_3\Rightarrow(2x-1)^2=x(\frac{x+7}{2})\Rightarrow 4x^2-4x+1=\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{2}x\Rightarrow 8x^2-8x+2=x^2+7x\Rightarrow 7x^2-15x+2=0\Rightarrow x=\frac{15\pm\sqrt{225-56}}{14}$$

$$\Rightarrow x=\frac{15\pm 13}{14}\Rightarrow\begin{cases}x=2\Rightarrow \text{جملات ابتدایی}:2,3,\frac{9}{2}\Rightarrow\text{جمع سه جمله}:a_1+a_2+a_3=\frac{19}{2}\\ x=\frac{1}{7}\ \text{غ ق ق}\ \ (\text{دنباله صعودی است})\end{cases}$$



۲- گزینه‌ی ۱ نمودار داده شــده $y=f(x+2)$ می‌باشــد. اگر آن را ۲ واحد به سمت راست انتقال دهیم، یعنی x را به $x-2$ تبدیل کنیم نمودار f به شکل مقابل مشخص خواهد شد و داریم:

$$-xf(x)\geq 0\Rightarrow\begin{cases}x\geq 0\Rightarrow f(x)\leq 0\Rightarrow x\in[1,4]\\ x\leq 0\Rightarrow f(x)\geq 0\Rightarrow x\in[-1,0]\end{cases}\Rightarrow D_y=[-1,0]\cup[1,4]$$

۳- گزینه‌ی ۳ با توجه به فرض مسأله باید دو ماتریس $A-I$ و B وارون یک‌دیگر باشند تا $B(A-I)=I$ برقرار باشد، پس وارون $A-I$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A-I=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۷ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۴ & ۶ \end{bmatrix}\Rightarrow B=(A-I)^{-۱}=\frac{۱}{۶-۴\times ۳}\begin{bmatrix} ۶ & -۳ \\ -۴ & ۱ \end{bmatrix}=\frac{۱}{۶}\begin{bmatrix} -۶ & ۳ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}$$

۴- گزینه‌ی ۱ با توجه به آن‌که میانگین ده داده برابر ۶ می‌باشد، داریم:

$$\frac{\sum x_i}{۱۰}=۶\Rightarrow \sum x_i=۶۰$$

پس وقتی داده‌های ۱۰ و ۲ را حذف می‌کنیم جمع داده‌های جدید $\sum y_i=۴۸$ خواهد شد. از طرفی داریم:

$$\sigma^۲=\frac{\sum x_i^۲}{۱۰}-(\bar{x})^۲\xrightarrow{\sigma=۲}۴=\frac{\sum x_i^۲}{۱۰}-۳۶\Rightarrow \sum x_i^۲=۴۰۰\Rightarrow \sum y_i^۲=۴۰۰-(۱۰۰+۴)=۲۹۶$$

واریانس ۸ داده: $\sigma_y^۲=\frac{\sum y_i^۲}{۸}-(\bar{y})^۲=\frac{۲۹۶}{۸}-(\frac{۴۸}{۸})^۲=\frac{۲۹۶}{۸}-۳۶=\frac{۲۹۶-۲۸۸}{۸}\Rightarrow \sigma_y^۲=\frac{۸}{۸}=۱$

در واقع ابتدا مجموع ده داده و مجموع مربع آن‌ها را پیدا کردیم و از بین آن‌ها داده‌های ۲ و ۱۰ را حذف می‌کنیم، سپس جمع ۸ داده و مجموع مربع ۸ داده باقی مانده را یافته و واریانس را به‌دست می‌آوریم.

۵- گزینه‌ی ۱ میانگین محیط مربع‌ها برابر ۴۲ است، پس میانگین اضلاع ۱۰/۵ می‌شود. از طرفی میانگین مساحت‌ها ۱۲۲/۵ می‌شود، پس داریم:

$$\sigma_x^۲=\frac{\sum x_i^۲}{n}-(\bar{x})^۲=۱۲۲/۵-(۱۰/۵)^۲=۱۲/۲۵\Rightarrow \sigma_x=۳/۵$$

۶- گزینه‌ی ۱ ابتدا ضابطه‌ی تابع g را به دست می‌آوریم:

$$(gof)(x)=\frac{x}{۲}\Rightarrow g(\frac{x}{۲-x})=\frac{x}{۲}$$

اکنون با فرض $\frac{x}{۲-x}=t$ داریم:

$$\frac{x}{۲-x}=t\Rightarrow x=۲t-xt\Rightarrow x=\frac{۲t}{t+۱}\Rightarrow g(t)=\frac{t}{t+۱}\Rightarrow g(x)=\frac{x}{x+۱}$$

اما می‌دانیم اگر $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ که آن را هموگرافیک می‌نامیم، آن‌گاه $y^{-۱}=\frac{-dx+b}{cx-a}$، بدین ترتیب $g^{-۱}(x)=\frac{-x}{x-۱}$.

۷- گزینه‌ی ۴ چون دنباله عددی است و $۲a_۹=a_۵$، پس:

$$۲(a_۱+۸d)=a_۱+۴d\Rightarrow a_۱+۱۲d=۰\Rightarrow a_۱=-۱۲d \qquad (۱)$$

طبق فرض مسأله مجموع $a_۱,\dots,a_n$ برابر صفر است، در این‌صورت خواهیم داشت:

$$S_n=۰\Rightarrow \frac{n}{۲}(a_۱+a_n)=۰\Rightarrow a_۱+a_n=۰\Rightarrow ۲a_۱+(n-۱)d=۰\Rightarrow a_۱=\frac{(۱-n)d}{۲} \qquad (۲)$$

با مقایسه‌ی روابط (۱) و (۲) داریم:

$$-۱۲d=\frac{(۱-n)d}{۲}\xrightarrow{d\neq ۰}۲۴=(n-۱)\Rightarrow n=۲۵$$

پس جمع ۲۵ جمله‌ی ابتدایی این دنباله برابر صفر است.

۸- گزینه‌ی ۳ با توجه به آن‌که $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$، لذا نقاط بحرانی آن $x=۱$ و $x=\frac{۱}{۲}$ می‌باشد. مقدار تابع در این دو نقطه را محاسبه می‌کنیم. مقدار کوچک‌تر برابر حداقل تابع است.

$$\begin{cases} f(۱)=۲ \\ f(\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۲} \end{cases}\Rightarrow R_f=[\frac{۱}{۲},+\infty)\Rightarrow \min f=\frac{۱}{۲}$$

۹- گزینه‌ی ۲ جمع اعداد ظاهر شده کم‌تر از ۸ می‌باشد، پس تعداد کل حالات برابر است با:

$$n(S)=\underset{\text{جمع ۲ باشد}}{\underset{\uparrow}{۱}}+\underset{\text{جمع۳باشد}}{\underset{\uparrow}{۲}}+\underset{\text{جمع۴باشد}}{\underset{\uparrow}{۳}}+\underset{\text{جمع۵باشد}}{\underset{\uparrow}{۴}}+\underset{\text{جمع۶باشد}}{\underset{\uparrow}{۵}}+\underset{\text{جمع۷باشد}}{\underset{\uparrow}{۶}}=۲۱$$

اگر بخواهیم هر دو تاس فرد باشد، آن‌گاه:

$$A=\{(۱,۱),(۱,۳),(۱,۵),(۳,۱),(۵,۱),(۳,۳)\}\Rightarrow n(A)=۶$$

پس احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۲۱}=\frac{۲}{۷}$$

۱۰- گزینه‌ی ۲ با توجه به آن‌که بحث حد در بی‌نهایت است می‌توانیم از هم‌ارز تابع در بی‌نهایت کمک بگیریم:

$$\lim_{x\to-\infty} 2x+\sqrt{ax^2+6x+1}=\lim_{x\to-\infty}(2x-\sqrt{a}(x+\frac{6}{2a}))=\lim_{x\to-\infty}((2-\sqrt{a})x-\frac{3\sqrt{a}}{a})$$

چون مقدار حد بالا برابر $\frac{b}{2}$ شده است، پس بایستی ضریب x صفر باشد:

$$2-\sqrt{a}=0\Rightarrow a=4\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} 2x+\sqrt{ax^2+6x+1}=-\frac{3\times 2}{4}=-\frac{3}{2}=\frac{b}{2}\Rightarrow b=-3$$

با توجه به این‌که در گزینه‌ها بینهایت نداریم و حد مخرج کسر صفر است باید حد صورت آن نیز صفر باشد پس $c=-10$ است و داریم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{4x^2-3x+c}{x^2-4}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 2}\frac{8x-3}{2x}=\frac{13}{4}$$

۱۱- گزینه‌ی ۱ تابع $y=[\frac{x}{2}]$ در بازه‌ی داده شده فقط در $x=2$ به لحاظ پیوستگی مشکل دارد که آن هم ریشه‌ی $\sin\frac{\pi x}{2}=0$ می‌باشد، پس تابع در این بازه و همین‌طور در تمام $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۱۲- گزینه‌ی ۲ چون صورت کسر به ازای $x=2$ صفر می‌شود و مقدار حد کسر وجود دارد، پس بایستی $x=2$ ریشه‌ی مخرج نیز باشد، بنابراین: $f(2)-2=0\Rightarrow f(2)=2$ اکنون با توجه به قاعده‌ی هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{f(x)-2}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 2}\frac{2x}{f'(x)}=\frac{4}{f'(2)}=-2\Rightarrow f'(2)=-2$$

برای محاسبه‌ی مشتق $y=(fof)(x)$ در نقطه‌ی $x=2$ داریم:

$$y'=f'(x)\times f'(f(x))\Rightarrow y'(2)=f'(2)\times f'(f(2))=(-2)\times(-2)=4$$

۱۳- گزینه‌ی ۴ با کمک ویژگی‌های لگاریتم داریم:

$$\log_2 a+\log_2 b=6\Rightarrow \log_2 ab=6\Rightarrow ab=64$$

چون ضرب دو عدد مثبت a و b مقدار ثابت ۶۴ است، پس جمع آن‌ها هنگامی حداقل است که a و b با هم برابر باشند، پس:

$$a+b\geq 8+8\Rightarrow a+b\geq 16\Rightarrow (a+b)^2\geq 256\Rightarrow a^2+b^2+2ab\geq 256\Rightarrow a^2+b^2\geq 256-128\Rightarrow a^2+b^2\geq 128$$

۱۴- گزینه‌ی ۳ ابتدا مقدار $\tan\alpha$ را با توجه به فرض مسأله به‌دست می‌آوریم:

$$\tan(\alpha+\frac{3\pi}{4})=\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=2\Rightarrow \tan\alpha-1=2\tan\alpha+2\Rightarrow \tan\alpha=-3$$

اکنون به کمک اتحادهای مثلثاتی مقدار $\cos 2\alpha$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\cos 2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1-9}{1+9}=\frac{-8}{10}=-\frac{4}{5}$$

۱۵- گزینه‌ی ۲ اگر فرض کنیم $\sin x+\cos x=A$، آن‌گاه داریم:

$$(\sin x+\cos x)^2=A^2\Rightarrow 1+2\sin x\cos x=A^2\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{A^2-1}{2}$$

$$A+\frac{A^2-1}{2}+1=0\Rightarrow 2A+A^2-1+2=0\Rightarrow A^2+2A+1=0\Rightarrow A=-1\Rightarrow \cos x+\sin x=-1\Rightarrow \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=-1\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x\in(0,2\pi)\Rightarrow\begin{cases}x+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}\Rightarrow x=\pi\\ x+\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}\Rightarrow x=\frac{3\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow \text{جمع ریشه‌ها}=\frac{5\pi}{2}$$

۱۶- گزینه‌ی ۲ خانواده‌ی ۴ فرزندی ۱۶ حالت دارد. وقتی قرار است اختلاف فرزندان دختر و پسر کم‌تر از ۲ نباشد بهتر است از متمم استفاده کنیم. یعنی حالاتی را در نظر بگیریم که اختلاف صفر یا یک باشد.

$X=0\Rightarrow$ تعداد دختران و پسران برابر باشند $\Rightarrow$ ۶ حالت

$X=1\Rightarrow$ اختلاف تعداد دختر و پسر یک باشد $\Rightarrow$ امکان ندارد

$$\Rightarrow P(A)=1-\frac{6}{16}=\frac{5}{8}$$

۱۷- گزینه‌ی ۳ با توجه به آن‌که ضابطه‌ی قیمت محصول بر حسب زمان به صورت $f(t)=A\times e^{kt}$ می‌باشد، داریم:

$$\frac{1}{3}A_0=A\times e^{-0/2t}\Rightarrow \ln\frac{1}{3}=-0/2t\Rightarrow t=\frac{\ln 3}{0/2}\xrightarrow{\ln 3=1/2}t=\frac{1/2}{0/2}=6$$

۱۸- گزینه‌ی ۱ چون شیب خط مماس ۲ است، پس باید نقطه‌ای را بیابیم که مقدار مشتق تابع f در آن نقطه ۲ باشد:

$$f'(x)=1+e^x=2\Rightarrow e^x=1\Rightarrow x=0\Rightarrow A(0,1)$$

با توجه به معادله‌ی خط مماس، عرض از مبدأ یک است. معادله‌ی خط مماس: $y-1=2(x-0)\Rightarrow y=2x+1$

۱۹- گزینه‌ی ۱ در تابع درجه‌ی ۳ با ضابطه‌ی $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ طول نقطه‌ی عطف $\frac{-b}{3a}$ است، پس:

$$-1<\frac{m-1}{3}<1\Rightarrow -2<m<4$$

وضعیت یکنوایی تابع به کمک علامت مشتق تابع مشخص می‌شود، پس:

$$f'(x)=3x^2-2(m-1)x+3\Rightarrow \Delta_{y'}=(m-1)^2-9$$

با توجه به آن‌که $-2<m<4$، پس دلتای مشتق همواره منفی است و f' همواره مثبت است، پس تابع صعودی اکید است.

۲۰- گزینه‌ی ۲ تابع دارای مجانب افقی $y=0$ می‌باشد، پس $a=0$، از طرفی $f(0)=2$، لذا:

$$\frac{c}{4}=2\Rightarrow c=8$$

چون اکسترمم تابع روی محور عرض‌ها واقع شده است، پس $f'(0)=0$ بدین‌ترتیب:

$$f(x)=\frac{bx+8}{x^2+4}\Rightarrow f'(x)=\frac{b(x^2+4)-2x(bx+8)}{(x^2+4)^2}\xrightarrow{f'(0)=0} b=0$$

البته به این صورت نیز می‌توان گفت که چون تابع محور xها را قطع نکرده است، پس $f(x)=0$ فاقد ریشه است، لذا $b=0$.

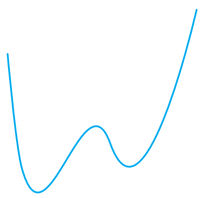
۲۱- گزینه‌ی ۳ ابتدا مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=4x^3+4x^2-8x=4x(x^2+x-2)=4x(x-1)(x+2)$$

طول نقاط اکسترمم نسبی $x=0$ ، $x=1$ و $x=-2$ می‌باشد زیرا ریشه‌ی ساده‌ی $y'=0$ می‌باشند، پس داریم:

x		-2		0		1	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	$\frac{-32}{3}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\frac{-5}{3}$	$\nearrow$

$\Rightarrow$ شکل تقریبی :



۲۲- گزینه‌ی ۴ چون دو ضلع مقابل یکدیگر می‌باشند، پس با هم موازی‌اند و داریم:

$$\begin{cases} ax-3y+2=0 \\ 4x-3y+3c=0 \end{cases}\Rightarrow a=4$$

چون مساحت مربع برابر ۴ است، پس فاصله‌ی ۲ ضلع یا دو خط موازی برابر ۲ می‌باشد. فاصله‌ی دو خط موازی فوق برابر است با $\frac{|3c-2|}{\sqrt{16+9}}$ پس:

$$\frac{|3c-2|}{5}=2\Rightarrow |3c-2|=10\Rightarrow \begin{cases} 3c-2=10\Rightarrow & c=4 \\ 3c-2=-10\Rightarrow & c=\frac{-8}{3} \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} a-c=4-4=0 \\ a-c=4+\frac{8}{3}=\frac{20}{3} \end{cases}$$

۲۳- گزینه‌ی ۱ مشخصاً نقطه‌ی داده شده کانون سهمی است و $x=\frac{9}{4}$ خط هادی سهمی است، پس سهمی افقی و به سمت چپ باز می‌شود به طوری‌که نقطه‌ی $S(\frac{1}{2},-2)$ رأس آن می‌باشد. پس:

$$2p=\frac{9}{4}+\frac{5}{4}=\frac{14}{4}\Rightarrow p=\frac{14}{8}\Rightarrow (y+2)^2=-\frac{14}{2}(x-\frac{1}{2})$$

$$y=0\Rightarrow x=\frac{-4}{7}+\frac{1}{2}=\frac{-1}{14}$$

۲۴- گزینه‌ی ۱ چون دو دایره مماس خارج می‌باشند، پس $d=R_1+R_2$ که d فاصله‌ی دو مرکز است:

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y+4)^2=-k+1+16 \\ (x+2)^2+y^2=4 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} R_1=\sqrt{17-k} \quad , \quad O_1(1,-4) \\ R_2=2 \quad , \quad O_2(-2,0) \end{cases}\Rightarrow O_1O_2=\sqrt{9+16}=5$$

پس $d=O_1O_2=5$ و خواهیم داشت:

$$d=R_1+R_2\Rightarrow 5=2+\sqrt{17-k}\Rightarrow 9=17-k\Rightarrow k=8$$

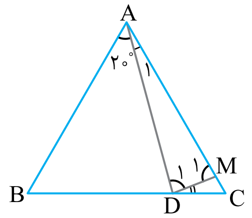
۲۵- گزینه‌ی ۳ ابتدا انتگرال را به دو قسمت تفکیک می‌کنیم و داریم:

$$\int_۰^۱ \frac{dx}{x^{[x]}}+\int_۱^۲ \frac{dx}{x^{[x]}}=\int_۰^۱\frac{dx}{۱}+\int_۱^۲\frac{dx}{x}=\int_۰^۱ dx+\int_۱^۲\frac{۱}{x}dx=۱+\ln x\Big|_۱^۲=۱+\ln ۲-\underbrace{\ln ۱}_{۰}=۱+\ln ۲=\ln e+\ln ۲=\ln ۲e$$

۲۶- گزینه‌ی ۴ مساحت قسمت رنگی از دو بخش تشکیل شده است. ابتدا نقطه‌ی تلاقی $y=۱$ و $y=\sqrt{x}$ را به‌دست می‌آوریم، داریم:

$$\sqrt{x}=۱\Rightarrow x=۱$$

$$S=\int_۰^۱(۱-\sqrt{x})\,dx+\int_۱^۴(\sqrt{x}-۱)\,dx=x-\frac{۲}{۳}x\sqrt{x}\Big|_۰^۱+\frac{۲}{۳}x\sqrt{x}-x\Big|_۱^۴=(۱-\frac{۲}{۳})+(\frac{۱۶}{۳}-۴-(\frac{۲}{۳}-۱))=\frac{۱}{۳}+\frac{۴}{۳}+\frac{۱}{۳}=\frac{۶}{۳}=۲$$



۲۷- گزینه‌ی ۲ در ابتدا فرض می‌کنیم اندازه‌ی زاویه‌ی M برابر x باشد، پس:

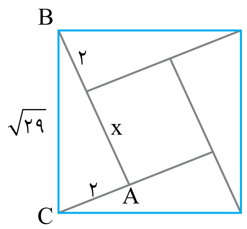
$$\hat{D}_۱=\hat{M}_۱=x\Rightarrow \hat{A}_۱=۱۸۰^\circ-۲x$$

از طرفی $\hat{A}=۲۰۰^\circ-۲x$ و چون مثلث ABC متساوی‌الساقین است، پس:

$$\hat{B}=\hat{C}=\frac{۱۸۰^\circ-\hat{A}}{۲}=\frac{۱۸۰^\circ-۲۰۰^\circ+۲x}{۲}=x-۱۰^\circ$$

در مثلث MDC برای زاویه‌ی خارجی $M_۱$ داریم:

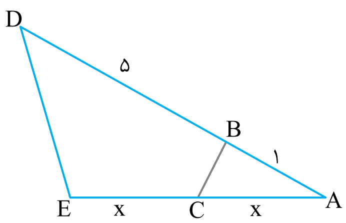
$$\hat{M}_۱=\hat{D}+\hat{C}\Rightarrow x=\hat{D}+x-۱۰^\circ\Rightarrow \hat{D}=۱۰^\circ$$



۲۸- گزینه‌ی ۳ چون مساحت مربع بزرگ‌تر ۲۹ می‌باشد، پس مطابق قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث ABC داریم:

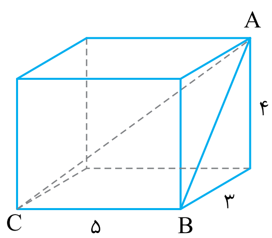
$$(x+۲)^۲+۴=۲۹\Rightarrow(x+۲)^۲=۲۵$$

$$\Rightarrow x+۲=۵\Rightarrow x=۳\Rightarrow S_{\text{مربع کوچک}}=۹$$



۲۹- گزینه‌ی ۲ دو مثلث ABC و ADE متشابهند، پس اگر فرض کنیم $AC=EC=x$ ، آن‌گاه:

$$\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AD}\Rightarrow\frac{۱}{۲x}=\frac{x}{۶}\Rightarrow x^۲=۳\Rightarrow x=\sqrt{۳}$$



۳۰- گزینه‌ی ۱ در واقع زاویه‌ی ACB مورد نظر است. مثلث ABC قائم‌الزاویه است به‌طوری‌که $\hat{B}=۹۰^\circ$، از طرفی با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس داریم $AB=۵$. پس در مثلث ABC اندازه‌ی دو ضلع AB و BC برابر است. بنابراین ABC یک مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است، در نتیجه $A\hat{C}B=۴۵^\circ$.

پاسخ تشریحی آزمون ۱۱۱

۱- گزینه‌ی ۴ با توجه به این‌که سه عدد داده شده، جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی هستند، نتیجه می‌گیریم:

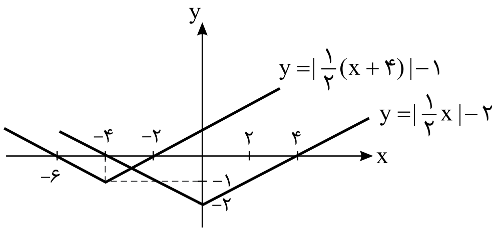
$$(۲x)^۲=(x^۲+۴)(x^۲-۲)\Rightarrow x^۴-۲x^۲-۸=۰\Rightarrow(x^۲-۴)(x^۲+۲)=۰\Rightarrow x^۲-۴=۰\Rightarrow x=\pm۲$$

با جای‌گذاری مقادیر بالا نتیجه می‌گیریم سه جمله‌ی اول دنباله ۲ ، ۴ ، ۸ یا ۲ ، ۴- ، ۸ هستند که چون دنباله نزولی است، حالت ۲ ، ۴ ، ۸ قابل قبول است.

پس قدر نسبت دنباله $\frac{۱}{۲}$ است و مجموع هفت جمله‌ی اول آن برابر است با:

$$S_۷=a_۱\frac{۱-q^۷}{۱-q}=۸\times\frac{۱-(\frac{۱}{۲})^۷}{۱-\frac{۱}{۲}}=۱۶(\frac{۲^۷-۱}{۲^۷})=\frac{۱۲۷}{۸}$$

۲- گزینه‌ی ۲ نمودار اولیه و نمودار انتقال یافته را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



با توجه به شکل واضح است که طول نقطه‌ی برخورد دو نمودار نقطه‌ی $x=-3$ است.

تذکر: می‌توانید برای اطمینان بیش‌تر معادله‌ی $|\frac{1}{2}(x+4)|-2+1=|\frac{1}{2}x|-2$ را حل کنید.

۳- گزینه‌ی ۲ با توجه به شکل داده شده، مقدار تابع در نقطه‌ی $x=0$ برابر ۳ است، پس $a=3$. همچنین دوره‌ی تناوب تابع با توجه به شکل برابر $5-1=4$ است، پس $\frac{2\pi}{|b\pi|}=4$، بنابراین $b=\pm\frac{1}{2}$ که با توجه به شکل $b=-\frac{1}{2}$ قابل قبول است (زیرا جهت صعود و نزول نمودار تابع برعکس جهت صعود و نزول تابع $y=\sin x$ است). بنابراین:

$$y=3+\sin(-\frac{\pi}{2}x)\xrightarrow{x=\frac{25}{3}}y=3+\sin(-\frac{25\pi}{6})=3-\sin(4\pi+\frac{\pi}{6})=3-\frac{1}{2}=2/5$$

۴- گزینه‌ی ۳ با توجه به $A\times B=I$، نتیجه می‌گیریم $B=A^{-1}$. بنابراین:

$$B=\frac{1}{2\times7-3\times4}\begin{bmatrix}7&-3\\-4&2\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}7&-3\\-4&2\end{bmatrix}\Rightarrow \text{مجموع درایه‌های سطر اول } B=\frac{1}{2}(7-3)=2$$

۵- گزینه‌ی ۳ اندازه‌ی زاویه‌ی مربوط به کارکنان ارشد، از حاصل‌ضرب فراوانی نسبی آن دسته در 360° به‌دست می‌آید:

$$\alpha=\frac{120}{30+90+180+120+30}\times360^\circ=\frac{120}{450}\times360^\circ=96^\circ$$

۶- گزینه‌ی ۴ در ۲۵ داده‌ی اول، واریانس برابر $64=8^2$ است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\sigma^2=\frac{1}{25}(x_1^2+\cdots+x_{25}^2)-\bar{x}^2\Rightarrow64=\frac{1}{25}(x_1^2+\cdots+x_{25}^2)-30^2\Rightarrow x_1^2+\cdots+x_{25}^2=964\times25$$

از طرفی می‌دانیم:

$$\bar{x}=\frac{1}{25}(x_1+\cdots+x_{25})\Rightarrow30=\frac{1}{25}(x_1+\cdots+x_{25})\Rightarrow x_1+\cdots+x_{25}=25\times30$$

حال در ۲۱ داده‌ی باقی‌مانده، پس از حذف ۴ داده‌ی ناجور ۱۰، ۱۵، ۴۵ و ۵۰، میانگین و واریانس را به‌دست می‌آوریم:

$$x_1+\cdots+x_{21}=25\times30-(50+45+15+10)=630\Rightarrow\bar{x}=\frac{x_1+\cdots+x_{21}}{21}=30$$

$$x_1^2+\cdots+x_{21}^2=964\times25-(50^2+45^2+15^2+10^2)=25(964-100-81-9-4)=25\times770$$

$$\sigma^2=\frac{1}{21}(x_1^2+\cdots+x_{21}^2)-\bar{x}^2=\frac{25\times770}{21}-30^2=16/66$$

۷- گزینه‌ی ۱ احتمال انتخاب هر ظرف $\frac{1}{3}$ است، پس طبق قانون احتمال کل می‌توان نوشت:

$$P=\frac{1}{3}\times\frac{\binom{4}{2}\binom{5}{2}}{\binom{9}{4}}+\frac{2}{3}\times\frac{\binom{6}{2}\binom{3}{2}}{\binom{9}{4}}=\frac{\frac{4\times3}{2}\times\frac{5\times4}{2}+2\times\frac{6\times5}{2}\times\frac{3\times2}{2}}{3\times\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}}=\frac{6\times10+30\times3}{9\times7\times6}=\frac{10+15}{9\times7}=\frac{25}{63}$$

۸- گزینه‌ی ۲ با استفاده از بسط $\cos(\alpha+\beta)$ به‌دست می‌آوریم:

$$\cos(x+\frac{\pi}{3})+\cos(x-\frac{\pi}{3})=2\cos x\cos\frac{\pi}{3}=\cos x\xrightarrow{\text{فرض سؤال}}\cos x=\frac{2}{3}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\cos2x=2\cos^2x-1=2\times(\frac{2}{3})^2-1=-\frac{1}{9}$$

۹- گزینه‌ی ۲ با استفاده از مخرج مشترک‌گیری عامل ابهام را حذف می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-2}\left(\frac{3}{(2x+1)(x+2)}-\frac{4}{(x+2)(x-2)}\right)=\lim_{x\to-2}\frac{3(x-2)-4(2x+1)}{(2x+1)(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to-2}\frac{-5(x+2)}{(2x+1)(x+2)(x-2)}=\frac{-5}{-3\times(-4)}=-\frac{5}{12}$$

۱۰- گزینه‌ی ۱ حد چپ و حد راست تابع در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{۴}$ باید با مقدار تابع در این نقطه برابر باشند:

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^-} f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^-}\frac{۱-\tan^۲ x}{\cos ۲x}=\frac{\frac{\cos^۲ x-\sin^۲ x}{\cos^۲ x}}{\cos^۲ x-\sin^۲ x}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^-}\frac{۱}{\cos^۲ x}=۲$$

$$f(\frac{\pi}{۴})=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^+} f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^+} a\cos ۳x=-\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$$

بنابراین باید $-\frac{a\sqrt{۲}}{۲}=۲$، در نتیجه $a=-۲\sqrt{۲}$.

۱۱- گزینه‌ی ۲ آهنگ متوسط تغییر تابع از $x=۴$ تا $x=۱۲$ برابر است با:

$$\frac{f(۱۲)-f(۴)}{۱۲-۴}=\frac{۲۵^{\frac{-۱}{۲}}-۹^{\frac{-۱}{۲}}}{۸}=\frac{\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۳}}{۸}=-\frac{۱}{۱۵\times۴}=-\frac{۱}{۶۰}$$

از طرفی با توجه به $f'(x)=-(۲x+۱)^{\frac{-۳}{۲}}$، آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در $x=۴$ برابر اســت با $f'(۴)=-۹^{\frac{-۳}{۲}}=-\frac{۱}{۲۷}$. پس اختلاف مورد نظر سـؤال $-\frac{۱}{۶۰}-(-\frac{۱}{۲۷})=\frac{۱۱}{۵۴۰}$ می‌شود.

۱۲- گزینه‌ی ۳ با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ی مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=۲\sin^۲(\frac{\pi}{۶}-\frac{x}{۴})\Rightarrow f'(x)=۴\sin(\frac{\pi}{۶}-\frac{x}{۴})\cos(\frac{\pi}{۶}-\frac{x}{۴})\times\frac{-۱}{۴}$$

$$\xrightarrow{\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha} f'(x)=-\frac{۱}{۲}\sin(\frac{\pi}{۳}-\frac{x}{۲})\Rightarrow f'(\frac{\pi}{۳})=-\frac{۱}{۲}\sin(\frac{\pi}{۶})=-\frac{۱}{۴}$$

۱۳- گزینه‌ی ۲ احتمال انتقال یافتن بیماری $\frac{۲}{۱۰}$ و احتمال انتقال نیافتن آن $\frac{۸}{۱۰}$ است، بنابراین احتمال موردنظر برابر است با:

$$\binom{۵}{۳}\times(\frac{۲}{۱۰})^۳\times(\frac{۸}{۱۰})^۲=۱۰\times\frac{۸\times۶۴}{۱۰^۵}=\frac{۵۱۲}{۱۰^۴}=۰/۰۵۱۲$$

۱۴- گزینه‌ی ۱ اگر دو ریشه را $x_۱$ و $x_۲$ بنامیم، از معادله نتیجه می‌گیریم $x_۱+x_۲=\frac{m+۳}{m}$ و $x_۱x_۲=\frac{۵}{m}$. حال داریم:

$$x_۱^۲+x_۲^۲=۶\Rightarrow(x_۱+x_۲)^۲-۲x_۱x_۲=۶\Rightarrow(\frac{m+۳}{m})^۲-\frac{۱۰}{m}=۶\Rightarrow ۵m^۲+۴m-۹=۰\Rightarrow m_۱=۱\ ,\ m_۲=-\frac{۹}{۵}$$

به ازای $m=۱$، داریم $\Delta=۱۶-۲۰<۰$، پس ریشه‌های معادله غیرحقیقی خواهند بود. بنابراین $m=-\frac{۹}{۵}$ قابل قبول است.

۱۵- گزینه‌ی ۳ با استفاده از فرض‌های سؤال مقادیر a و b را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} f(۱)=۱۱\Rightarrow ab-۱=۱۱\Rightarrow ab=۱۲\Rightarrow a=\frac{۱۲}{b} \\ f(-\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{a}{\sqrt{b}}-۱=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{۳}{۲}\end{cases}\Rightarrow\frac{۱۲}{b\sqrt{b}}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow b\sqrt{b}=۸\Rightarrow b=۴$$

پس $b=۴$، $a=۳$ و $f(x)=۳\times۴^x-۱$، بنابراین $f(-۱)=-\frac{۱}{۴}$.

۱۶- گزینه‌ی ۴ معادله‌ی صورت سؤال را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\log_x(x^۲+۴)=\log_x(۵x)\Rightarrow x^۲+۴=۵x\Rightarrow(x-۴)(x-۱)=۰\Rightarrow x_۱=۱\ ,\ x_۲=۴$$

می‌دانیم $x=۱$ غیر قابل قبول است، پس $x=۴$ و در نتیجه $\log_۲ x=۲$.

۱۷- گزینه‌ی ۲ با استفاده از اتحاد $\cos ۲x=\cos^۲ x-\sin^۲ x$، معادله به‌صورت زیر قابل نوشتن است:

$$\sin ۲x(\sin x+\cos x)-(\cos^۲ x-\sin^۲ x)(\cos x-\sin x)=۰$$

$$\Rightarrow (\sin x+\cos x)(\sin ۲x-(\cos x-\sin x)^۲)=۰$$

$$\Rightarrow (\sin x+\cos x)(\sin ۲x-(۱-\sin ۲x))=۰ \Rightarrow (\sin x+\cos x)(۲\sin ۲x-۱)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x=-\cos x \xrightarrow{x\in[۰,\pi]} x_۱=\frac{۳\pi}{۴} \\ \sin ۲x=\frac{۱}{۲} \xrightarrow{x\in[۰,۲\pi]} ۲x_۲=\frac{\pi}{۶},\ ۲x_۳=\pi-\frac{\pi}{۶} \Rightarrow x_۲=\frac{\pi}{۱۲},\ x_۳=\frac{۵\pi}{۱۲} \end{cases}$$

بنابراین مجموع ریشه‌های موردنظر برابر $\frac{۳\pi}{۴}+\frac{\pi}{۱۲}+\frac{۵\pi}{۱۲}=\frac{۵\pi}{۴}$ است.

۱۸- گزینه‌ی ۴ برای به‌دست آوردن شیب خط مماس از مشتق‌گیری ضمنی استفاده می‌کنیم.

$$F(x,y)=۴\sqrt{xy}+\frac{۱}{y}-۲x-۱$$

$$y'_x=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{\frac{۴\sqrt{y}}{۲\sqrt{x}}-۲}{\frac{۴\sqrt{x}}{۲\sqrt{y}}-\frac{۱}{y^۲}} \xrightarrow{(x,y)=(۴,۱)} m=-\frac{\frac{۴}{۴}-۲}{\frac{۸}{۲}-۱}=\frac{۱}{۳}$$

بنابراین معادله‌ی خط مماس بر منحنی عبارت است از:

$$y-۱=\frac{۱}{۳}(x-۴) \Rightarrow ۳y-x=-۱$$

۱۹- گزینه‌ی ۱ از فرض سؤال نتیجه می‌گیریم تابع در $x=\frac{\pi}{۴}$ پیوسته است. بنابراین:

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^+} f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^-} f(x) \Rightarrow a\tan\frac{\pi}{۴}+b\sin\frac{\pi}{۲}=\sin^۲(\frac{\pi}{۴})-\cos\frac{\pi}{۲} \Rightarrow a+b=\frac{۱}{۲}$$

حال با فرض پیوستگی تابع در $x=\frac{\pi}{۴}$ می‌توان نوشت:

$$f'(x)=\begin{cases} \sin ۲x+۲\sin ۲x & ۰<x<\frac{\pi}{۴} \\ a(۱+\tan^۲ x)+۲b\cos ۲x & \frac{\pi}{۴}<x<\frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

که برای مشتق‌پذیری f در $x=\frac{\pi}{۴}$ باید داشته باشیم:

$$۳\sin\frac{\pi}{۲}=a(۱+\tan^۲(\frac{\pi}{۴}))+۲b\cos\frac{\pi}{۲} \Rightarrow ۳=۲a \Rightarrow a=\frac{۳}{۲} \xrightarrow{a+b=\frac{۱}{۲}} b=-۱$$

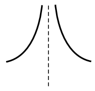
۲۰- گزینه‌ی ۱ باید بازه‌ای را بیابیم که در آن $f'(x)<۰$ و $f''(x)>۰$. می‌توان نوشت:

$$f'(x)=-۴x^۳+۲۴x^۲-۳۶x=-۴x(x^۲-۶x+۹)=-۴x(x-۳)^۲$$

$$f''(x)=-۱۲x^۲+۴۸x-۳۶=-۱۲(x^۲-۴x+۳)=-۱۲(x-۳)(x-۱)$$

x		۰		۱		۳	
$f'(x)$	+	۰	−		−	۰	−
$f''(x)$			−	۰	+	۰	−
					جواب		

بنابراین بازه‌ی $(۱,۳)$ جواب مسأله است.

۲۱- گزینه‌ی ۴ با توجه به آن که نمودار تابع فقط یک مجانب قائم دارد که در اطراف آن نمودار به‌صورت  است، پس مخرج کسر ریشه‌ی مضاعف دارد. بنابراین:

$$b^{۲}-۱۶=۰ \Rightarrow b=\pm ۴$$

با توجه به آن که مجانب نمودار در سمت راست محور y ها قرار دارد، پس $b=-۴$. از طرفی نمودار تابع محور y ها را با عرض مثبت قطع می‌کند، پس $\frac{a}{۴}>۰$، بنابراین $a>۰$.

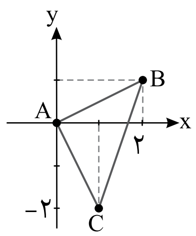
۲۲- گزینه‌ی ۲ برای آن‌که دستگاه معادلات مورد نظر بی‌شمار جواب داشته باشد، باید داشته باشیم:

$$\frac{m}{۳}=\frac{۱}{m-۲}=\frac{m-۱}{۴-۲m}$$

از معادله‌ی $\frac{m}{۳}=\frac{۱}{m-۲}$ نتیجه می‌گیریم:

$$m(m-۲)=۳ \Rightarrow (m-۳)(m+۱)=۰ \Rightarrow m_۱=۳ \ , \ m_۲=-۱$$

از دو مقدار بالا فقط $m=-۱$ در معادله‌ی دیگر $\frac{m}{۳}=\frac{m-۱}{۴-۲m}$ صدق می‌کند.



۲۳- گزینه‌ی ۱ با توجه به شکل روبه‌رو که سه نقطه در آن مشخص شده‌اند، مثلث ABC قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است $(m_{AB}\times m_{AC}=-۱)$، پس مرکز دایره‌ای که از این سه نقطه می‌گذرد وسط وتر مثلث خواهد بود. در نتیجه شعاع دایره نصف طول وتر است.

$$BC=\sqrt{(۲-۱)^{۲}+(۱-(-۲))^{۲}}=\sqrt{۱۰} \Rightarrow R=\frac{۱}{۲}BC=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰}$$

۲۴- گزینه‌ی ۳ ابتدا معادله‌ی هذلولی را به صورت استاندارد بیان می‌کنیم تا مقادیر a و b به دست آیند:

$$۳x^{۲}-۴y^{۲}-۶x-۹=۰ \Rightarrow ۳(x^{۲}-۲x+۱)-۴y^{۲}=۱۲ \Rightarrow \frac{(x-۱)^{۲}}{۴}-\frac{y^{۲}}{۳}=۱$$

پس $a^{۲}=۴$ و $b^{۲}=۳$. حال می‌دانیم طول وتر کانونی هذلولی برابر $\frac{۲b^{۲}}{a}=\frac{۲\times۳}{۲}=۳$ است.

۲۵- گزینه‌ی ۳ حوزه‌ی انتگرال‌گیری را به صورتی تفکیک می‌کنیم که مقدار جزء صحیح در هر بازه عددی ثابت شود:

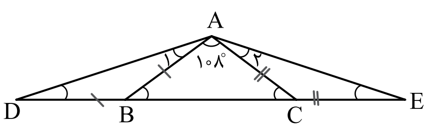
$$\int_{-۱}^{۳}(x+[x])dx=\int_{-۱}^{۳}xdx+\int_{-۱}^{۰}(-۱)dx+\int_{۱}^{۲}dx+\int_{۲}^{۳}۲dx=\frac{۱}{۲}x^{۲}\Big|_{-۱}^{۳}-x\Big|_{-۱}^{۰}+x\Big|_{۱}^{۲}+۲x\Big|_{۲}^{۳}$$

$$=\frac{۱}{۲}(۹-۱)-(۰+۱)+(۲-۱)+۲(۳-۲)=۶$$

۲۶- گزینه‌ی ۴ کسر را تفکیک می‌کنیم:

$$\int\frac{(۱+\sqrt{x})^{۳}-۱}{x}dx=\int\frac{۳\sqrt{x}+۳x+x\sqrt{x}}{x}dx=\int\frac{۳}{\sqrt{x}}dx+\int ۳dx+\int\sqrt{x}dx$$

$$=۶\sqrt{x}+۳x+\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}+c=۳\sqrt{x}\underbrace{(۲+\sqrt{x}+\frac{۲}{۹}x)}_{f(x)}+c$$



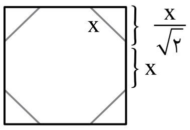
۲۷- گزینه‌ی ۳ با توجه به $AB=DB$ و $AC=CE$ نتیجه می‌گیریم $\hat{A}_۲=\hat{E}=\beta$ و $\hat{A}_۱=\hat{D}=\alpha$.

برای به دست آوردن کوچک‌ترین زاویه‌ی خارجی مثلث ADE، باید بزرگ‌ترین زاویه‌ی داخلی آن، یعنی $D\hat{A}E$ را به دست آوریم. در مثلث ADE می‌توان نوشت:

مجموع زاویه‌های داخلی $=۱۸۰^{\circ} \Rightarrow ۲\alpha+۲\beta+۱۰۸^{\circ}=۱۸۰^{\circ} \Rightarrow \alpha+\beta=۳۶^{\circ}$

$D\hat{A}E$ زاویه‌ی خارجی متناظر $=\hat{D}+\hat{E}=\alpha+\beta \Rightarrow$ کوچک‌ترین زاویه‌ی خارجی $=۳۶^{\circ}$

۲۸- گزینه‌ی ۴ اگر طول ضلع هشت ضلعی x باشد و طول ضلع مربع a، داریم:



$$a=x+\frac{۲x}{\sqrt{۲}}=x(۱+\sqrt{۲})$$

از طرفی طول ضلع مربع طبق سؤال برابر است با $۲\times۲+۲\sqrt{۲}=۲\sqrt{۲}(۱+\sqrt{۲})$، بنابراین:

$$۲\sqrt{۲}(۱+\sqrt{۲})=x(۱+\sqrt{۲}) \Rightarrow x=۲\sqrt{۲}$$

حال مساحت هشت ضلعی را از کم کردن مساحت چهار مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین از مساحت مربع به دست می‌آوریم:

$$\text{مساحت هشت‌ضلعی}=(۴+۲\sqrt{۲})^۲-۴\times\frac{۱}{۲}\times(\frac{x}{\sqrt{۲}})^۲=(۲\sqrt{۲}(۱+\sqrt{۲}))^۲-(۲\sqrt{۲})^۲=(۲\sqrt{۲})^۲((۱+\sqrt{۲})^۲-۱)=۸(۲\sqrt{۲}+۲)=۱۶+۱۶\sqrt{۲}$$

۲۹- گزینه‌ی ۱ زاویه‌های مثلث ۱۵°، ۷۵° و ۹۰° هستند. کوچک‌ترین ارتفاع مثلث نظیر بزرگ‌ترین ضلع آن، یعنی همان ارتفاع وارد بر وتر است.
می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه با زاویه‌ی ۱۵°، ارتفاع وارد بر وتر $\frac{۱}{۴}$ وتر است.

۳۰- گزینه‌ی ۳ قطر مکعب و قطر کره بر هم منطبق‌اند، بنابراین:

$$۲R=۲\sqrt{۳}\Rightarrow R=\sqrt{۳}\xrightarrow{S=۴\pi R^۲}S=۴\pi\times(\sqrt{۳})^۲=۱۲\pi$$

پاسخ تشریحی آزمون ۱۱۲

۱- گزینه‌ی ۴ برای آن‌که سه عدد α، β و γ تشکیل دنباله‌ی هندسی دهند، باید داشته باشیم $\beta^۲=\alpha\gamma$. پس:

$$(۱۲+x)(۸-x)=x^۲\Rightarrow -x^۲-۴x+۹۶=x^۲\Rightarrow x^۲+۲x-۴۸=۰\Rightarrow(x-۶)(x+۸)=۰$$

$$\begin{cases} x=-۸\Rightarrow ۴,-۸,۱۶ & \text{دنباله نزولی نیست، پس غ ق ق} \\ x=۶\Rightarrow ۱۸,۶,۲ & \text{دنباله نزولی است، پس ق ق} \end{cases}$$

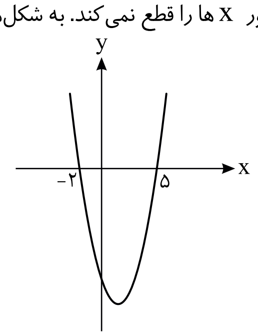
پس $q=\frac{۶}{۱۸}=\frac{۱}{۳}$. برای محاسبه‌ی حد مجموع داریم:

$$S=\frac{a_۱}{۱-q}=\frac{۱۸}{۱-\frac{۱}{۳}}=\frac{۱۸}{\frac{۲}{۳}}=۲۷$$

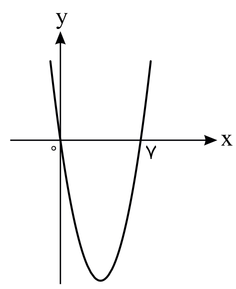
۲- گزینه‌ی ۳ ابتدا معادله‌ی $x^۲-۳x-۱۰=۰$ را حل می‌کنیم. داریم:

$$x^۲-۳x-۱۰=۰\Rightarrow x=-۲, x=۵$$

ریشه‌ی منفی $x=-۲$ می‌باشد. پس اگر حداقل نمودار را ۲ واحد به سمت راست انتقال دهیم جهت منفی محور x ها را قطع نمی‌کند. به شکل‌های زیر دقت کنید:



قبل از انتقال



بعد از انتقال

۳- گزینه‌ی ۳ با توجه به نمودار، $f(۶)=۰$. اما $x=۶$ دومین ریشه‌ی مثبت تابع است. پس $b\pi x$ به ازای $x=۶$ همان ۲π است.

$$۶b\pi=۲\pi\Rightarrow b=\frac{۱}{۳}$$

از طرفی بیش‌ترین مقدار تابع ۲ می‌باشد. پس $a=۲$. بدین ترتیب $a+b=۲+\frac{۱}{۳}=\frac{۷}{۳}$

۴- گزینه‌ی ۲ ابتدا ماتریس BA را به دست می‌آوریم:

$$BA=\begin{bmatrix}۳ & -۴\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۴ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱۰ & -۹\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

اما می‌دانیم $|X|\neq ۰$، آن‌گاه:

$$X=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\Rightarrow X^{-۱}=\frac{۱}{|X|}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}\Rightarrow (BA)^{-۱}=\frac{۱}{-۱۰}\begin{bmatrix}۱ & ۹\\ ۰ & -۱۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۰/۱ & -۰/۹\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

چون $(BA)^{-۱}=A^{-۱}B^{-۱}$ پس می‌توانستیم وارون ماتریس A را نیز از سمت چپ در وارون ماتریس B ضرب کنیم.

۵- گزینه‌ی ۱ تعداد کل داده‌ها ۲۰ می‌باشد به‌طوری که حداقل آن‌ها ۶۰ و حداکثر آن‌ها ۹۵ است.

برای آن‌که داده‌ها در ۵ دسته تقسیم شوند $\text{طول دسته}=\frac{۹۵-۶۰}{۵}=۷$

جدول دسته‌بندی داده‌ها به شرح زیر است:

حدود دسته	$[۶۰,۶۷)$	$[۶۷,۷۴)$	$[۷۴,۸۱)$	$[۸۱,۸۸)$	$[۸۸,۹۵]$
فراوانی	۳	۵	۲	۴	۶
فراوانی نسبی	$\frac{۳}{۲۰}$	$\frac{۵}{۲۰}$	$\frac{۲}{۲۰}$	$\frac{۴}{۲۰}$	$\frac{۶}{۲۰}$

در دسته‌ی $[۷۴,۸۱)$ نشان دسته یا مرکز آن ۷۷/۵ می‌باشد که بلندی میله‌ی آن ۰/۱ خواهد بود.

۶- گزینه‌ی ۳ ابتدا میانگین داده‌های جدید را به دست می‌آوریم:

$$\bar{y}=\frac{۱۸\times۲۵+۲۰+۲۷+۲۸}{۱۸+۳}\Rightarrow \bar{y}=۲۵$$

اما در محاسبه‌ی واریانس از فرمول زیر کمک می‌گیریم. در داده‌های قبلی داریم:

$$\sigma^۲=\frac{\sum x_i^۲}{n}-(\bar{x})^۲\Rightarrow ۹=\frac{\sum x_i^۲}{۱۸}-۶۲۵$$

$$\text{مجموع مربعات داده‌های قبلی}\ \sum x_i^۲=۱۸\times۶۳۴=۱۱۴۱۲\Rightarrow \text{مجموع مربعات داده‌های جدید}=۱۱۴۱۲+۲۰^۲+۲۷^۲+۲۸^۲=۱۳۳۲۵$$

$$\sigma^۲=\frac{\sum y_i^۲}{۲۱}-(۲۵)^۲=\frac{۱۳۳۲۵}{۲۱}-۶۲۵\simeq ۹/۵۲$$

۷- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول:** تعداد کل مهره‌ها ۹ عدد می‌باشد. پس

$$P(A)=\frac{\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۲}+\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۱}+\binom{۴}{۳}}{\binom{۹}{۳}}=\frac{۴\times۱۰+۶\times۵+۴}{۸۴}=\frac{۷۴}{۸۴}=\frac{۳۷}{۴۲}$$

راه‌حل دوم: با استفاده از احتمال پیشامد مکمل، احتمال آن راکه مهره‌ی آبی خارج نشود حساب می‌کنیم:

$$P(A)=۱-\frac{\binom{۵}{۳}}{\binom{۹}{۳}}=۱-\frac{۱۰}{۸۴}=\frac{۷۴}{۸۴}=\frac{۳۷}{۴۲}$$

۸- گزینه‌ی ۱ **راه حل اول:** ابتدا $\tan ۲\alpha$ را به دست می‌آوریم:

$$\tan ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}=\frac{۲\times۲}{۱-۴}=-\frac{۴}{۳}\Rightarrow \tan(۲\alpha-\beta)=\frac{\tan ۲\alpha-\tan\beta}{۱+\tan ۲\alpha\tan\beta}\Rightarrow \tan(۲\alpha-\beta)=\frac{-\frac{۴}{۳}-\frac{۱}{۳}}{۱+\frac{-۴}{۳}\times\frac{۱}{۳}}=\frac{-\frac{۵}{۳}}{\frac{۵}{۹}}=-۳$$

راه حل دوم: ابتدا $\tan(\alpha-\beta)$ رابه‌دست می‌آوریم:

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{۲-\frac{۱}{۳}}{۱+\frac{۲}{۳}}=\frac{\frac{۵}{۳}}{\frac{۵}{۳}}=۱\Rightarrow \tan(۲\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan(\alpha-\beta)}{۱-\tan\alpha\tan(\alpha-\beta)}=\frac{۲+۱}{۱-۲\times۱}=\frac{۳}{-۱}=-۳$$

۹- گزینه‌ی ۲ چون حدگیری به ابهام $\frac{۰}{۰}$ منجر می‌شود، پس می‌توانیم به کمک قاعده‌ی هوپیتال عبارت را رفع ابهام کنیم:

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲-\sqrt[۳]{x+۶}}{|x-۲|}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲-\sqrt[۳]{x+۶}}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{-\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x+۶)^۲}}}{۱}=-\frac{۱}{۱۲}$$

تذکر: می‌توانستیم صورت و مخرج را در عبارت چاق صورت ضرب و تقسیم کنیم تا رفع ابهام شود.

۱۰- گزینه‌ی ۲ شرط پیوستگی در نقطه‌ی $x=\pi$ برابری حد چپ و حد راست تابع در این نقطه با مقدار تابع در این نقطه می‌باشد. پس:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\pi^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\pi^+}\dfrac{\sqrt{۱+\cos x}}{x-\pi}=\lim\limits_{x\to\pi^+}\dfrac{\sqrt{۲\cos^۲\frac{x}{۲}}}{x-\pi}=\lim\limits_{x\to\pi^+}\dfrac{-\sqrt{۲}\cos\frac{x}{۲}}{x-\pi}=\lim\limits_{x\to\pi^+}\dfrac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin\frac{x}{۲}}{۱}=\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}\\ \lim\limits_{x\to\pi^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\pi^-} a\cos\dfrac{۲x}{۳}=-\dfrac{a}{۲}\end{cases}\Rightarrow a=-\sqrt{۲}$$

البته مقدار تابع هم با حد تابع در این نقطه برابر است. پس $a=-\sqrt{۲}$ قابل قبول است.

۱۱- گزینه‌ی ۱ آهنگ متوسط تغییر f بر $[۴\,,۶/۲۵]$ برابر است با:

$$\bar{f}=\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{\sqrt{۶/۲۵}-\sqrt{۴}}{۶/۲۵-۴}=\frac{۲/۵-۲}{۲/۲۵}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۹}{۴}}=\frac{۲}{۹}$$

اما آهنگ لحظه‌ای تابع در $x=۴$ برابر $f'(۴)$ می‌باشد.

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\Rightarrow f'(۴)=\frac{۱}{۴}$$

$$\text{حاصل}=\frac{۱}{۴}-\frac{۲}{۹}=\frac{۹-۸}{۳۶}=\frac{۱}{۳۶}$$

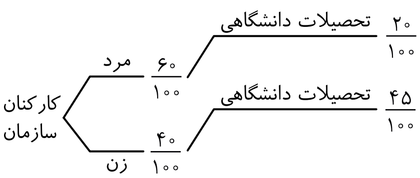
۱۲- گزینه‌ی ۳ مطابق قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:

$$y=\sin^۳ u\Rightarrow y'=۳\sin^۲ u.\cos u.u'$$

$$\Rightarrow y=\sin^۳\sqrt{۲x}\Rightarrow y'=۳\sin^۲\sqrt{۲x}\times\cos\sqrt{۲x}\times\frac{۲}{۲\sqrt{۲x}}$$

$$\Rightarrow y'(\frac{\pi^۲}{۱۸})=۳\sin^۲\frac{\pi}{۳}\times\cos\frac{\pi}{۳}\times\frac{۱}{\frac{\pi}{۳}}=۳\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{\pi}=\frac{۲۷}{۸\pi}$$

۱۳- گزینه‌ی ۱ اگر نمودار درختی را برای این مسأله رسم کنیم، داریم:



پس احتمال آن‌که فردی تحصیلات دانشگاهی داشته باشد، مطابق احتمال شرطی برابر است با:

$$P(\text{تحصیلات دانشگاهی})=\frac{۶۰}{۱۰۰}\times\frac{۲۰}{۱۰۰}+\frac{۴۰}{۱۰۰}\times\frac{۴۵}{۱۰۰}=\frac{۱۲۰۰+۱۸۰۰}{۱۰۰۰۰}=\frac{۳}{۱۰}$$

بنابراین احتمال پیروزی $P=\frac{۳}{۱۰}$ ، $n=۳$ و $X=۲$ پس مطابق توزیع دو جمله‌ای داریم:

$$P(X=۲)=\binom{۳}{۲}\times(P)^۲\times(۱-P)^۱\Rightarrow P(X=۲)=\binom{۳}{۲}\left(\frac{۳}{۱۰}\right)^۲\left(\frac{۷}{۱۰}\right)=۳\times\frac{۹}{۱۰۰}\times\frac{۷}{۱۰}=\frac{۱۸۹}{۱۰۰۰}=۰/۱۸۹$$

۱۴- گزینه‌ی ۱ شرط آن‌که یک تابع بر یک خط مماس باشد آن است که معادله‌ی حاصل از تلاقی آن‌ها ریشه‌ی مضاعف داشته باشد. پس:

$$\begin{cases}y=۲x^۲+(m+۱)x+m+۶\\ y=x\end{cases}\Rightarrow ۲x^۲+(m+۱)x+m+۶=x\Rightarrow ۲x^۲+mx+m+۶=۰$$

$$\Delta=۰\Rightarrow m^۲-۸(m+۶)=۰\Rightarrow m^۲-۸m-۴۸=۰\Rightarrow(m-۱۲)(m+۴)=۰\Rightarrow m=۱۲, m=-۴$$

$$\begin{cases}m=۱۲\Rightarrow ۲x^۲+۱۲x+۱۸=۰\Rightarrow x^۲+۶x+۹=۰\Rightarrow x=-۳ \quad \text{غ ق ق}\\ m=-۴\Rightarrow ۲x^۲-۴x+۲=۰\Rightarrow x^۲-۲x+۱=۰\Rightarrow x=۱\end{cases}$$

چون نمودار تابع بر نیمساز ناحیه‌ی اول مماس است، پس باید طول نقطه‌ی تماس مثبت باشد. پس $x=۱$ و در نتیجه $m=-۴$ قابل قبول است.

۱۵- گزینه‌ی ۴ ابتدا دو منحنی را در یک دستگاه قطع می‌دهیم.

$$\begin{cases} y=۲^x \\ y=(\sqrt{۲})^{x+۱}+۴ \Rightarrow ۲^x=(\sqrt{۲})^{x+۱}+۴,\ (\sqrt{۲})^x=A \end{cases}$$

$$A^۲=\sqrt{۲}A+۴ \Rightarrow A^۲-\sqrt{۲}A-۴=۰ \Rightarrow A=\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۲+۱۶}}{۲}=\frac{\sqrt{۲}+۳\sqrt{۲}}{۲}=۲\sqrt{۲}$$

$$(\sqrt{۲})^x=۲\sqrt{۲}=(\sqrt{۲})^۳ \Rightarrow x=۳ \Rightarrow \text{نقطه‌ی تلاقی}\quad M(۳,۸)$$

پس AM فاصله‌ی دو نقطه‌ی A و M می‌باشد و داریم: $AM=\sqrt{۹+۱۶}=۵$

۱۶- گزینه‌ی ۳ دامنه‌ی معادله عبارت است از $(۶,\infty)$. حال مطابق ویژگی‌های لگاریتم داریم:

$$\log_x(۳x+۸)=۲-\log_x(x-۶) \Rightarrow \log_x(۳x+۸)+\log_x(x-۶)=۲ \Rightarrow \log_x(۳x+۸)(x-۶)=۲$$

$$\Rightarrow (۳x+۸)(x-۶)=x^۲ \Rightarrow ۳x^۲-۱۰x-۴۸=x^۲$$

$$x^۲-۵x-۲۴=۰ \quad \Rightarrow \quad (x-۸)(x+۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۸ \\ x=-۳ \ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\log_۴ x=\log_۴ ۸=\log_{۲^۲} ۲^۳=\frac{۳}{۲}$$

۱۷- گزینه‌ی ۴ کافی است صورت و مخرج برابر باشند به شرطی که مخرج صفر نباشد.

$$\sin ۳x=\cos(\frac{۳\pi}{۲}+x) \Rightarrow \sin ۳x=\sin x$$

$$\begin{cases} ۳x=۲k\pi+x \Rightarrow x=k\pi \ \text{غ ق ق} \quad , \quad k\in\mathbb{Z} \\ ۳x=۲k\pi+\pi-x \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴} \end{cases}$$

به ازای $x=k\pi$ مخرج کسر صفر می‌شود پس این جواب غیرقابل قبول است و جواب $x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$ است.

۱۸- گزینه‌ی ۴ ابتدا مقدار تابع را در نقطه‌ی $x=۲$ به‌دست می‌آوریم. چون نقطه روی تابع است پس $y(۲)=۲e^۰=۲$ و $A(۲,۲)$. برای به‌دست آوردن شیب خط قائم بر منحنی، مقدار مشتق تابع را در نقطه‌ی $x=۲$ به‌دست می‌آوریم:

$$y'=e^{x^۲-۴}+۲x^۲e^{x^۲-۴} \Rightarrow y'(۲)=۱+۸=۹$$

$$\text{مماس}\ m=۹ \Rightarrow \text{قائم}\ m=-\frac{۱}{۹} \Rightarrow y-۲=-\frac{۱}{۹}(x-۲)\quad \text{خط قائم}$$

برای یافتن محل تلاقی خط قائم با محور xها قرار می‌دهیم $y=۰$ و داریم:

$$۰-۲=-\frac{۱}{۹}(x-۲) \Rightarrow x=۲۰$$

۱۹- گزینه‌ی ۲ برای آن‌که تابع در $x=۱$ مشـتق‌پذیر باشـد، ابتدا لازم است در این نقطه پیوسته باشد و در ضمن، مشتقات چپ و راست تابع در این نقطه برابر باشند.

$$\text{شرط پیوستگی}:\ ۳-۵=۱+a+b \Rightarrow a+b=-۳$$

$$f'(x)=\begin{cases} -\frac{۳}{x^۲} & x>۱ \\ ۲x+a & x<۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(۱)=-۳ \\ f'_-(۱)=۲+a \end{cases} \Rightarrow ۲+a=-۳ \Rightarrow a=-۵ \Rightarrow b=۲$$

۲۰- گزینه‌ی ۱ برای آن‌که تابع صعودی و تقعر آن رو به پایین باشد کافی است:

$$\begin{cases} f'\geq ۰ \\ f''<۰ \end{cases}$$

$$\begin{cases} f''(x)=۳x^۲+۳x-۶<۰ \Rightarrow x^۲+x-۲<۰ \Rightarrow -۲<x<۱ \\ f'(x)=x^۳+\frac{۳}{۲}x^۲-۶x\geq ۰ \Rightarrow x(x^۲+\frac{۳}{۲}x-۶)\geq ۰ \Rightarrow x^۲+\frac{۳}{۲}x-۶=۰ \Rightarrow \Delta=\frac{۹}{۴}+۲۴=\frac{۱۰۵}{۴} \Rightarrow x=\dfrac{-\frac{۳}{۲}\pm\frac{\sqrt{۱۰۵}}{۲}}{۲}=\frac{-۳\pm\sqrt{۱۰۵}}{۴} \end{cases}$$

x		$\frac{-۳-\sqrt{۱۰۵}}{۴}$		۰		$\frac{-۳+\sqrt{۱۰۵}}{۴}$	
x	$-$		$-$	۰	$+$		$+$
$x^۲+\frac{۳}{۲}x-۶$	$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$
$f'(x)$	$-$	۰	$+$ ق ق	۰	$-$	۰	$+$ ق ق

$$\Rightarrow f'(x)>۰\,,\, f''(x)<۰ \Rightarrow -۲<x\leq ۰$$

۲۱- گزینه‌ی ۴ با توجه به نمودار، $x=۰$ مجانب قائم تابع است. پس $b=۰$. از طرفی:

مجانب مایل است. $y=\frac{x^۲+ax-۲}{x} \Rightarrow y=x+a-\frac{۲}{x} \Rightarrow y=x+a$

پس با توجه به آن‌که عرض از مبدأ مجانب مایل منفی است، داریم $a<۰$.

۲۲- گزینه‌ی ۴ اگر فاصله‌ی A تا ضلع مربع را به دست آوریم، حاصل نصف ضلع است. پس :

$$\text{نصف ضلع}=\frac{|-۳-۲-۵|}{\sqrt{۱+۴}}=\frac{۱۰}{\sqrt{۵}}=۲\sqrt{۵}$$

لذا ضلع مربع $۴\sqrt{۵}$ است. پس $S=۱۶\times ۵=۸۰$

۲۳- گزینه‌ی ۲ ابتدا دایره‌ی داده شده را به صورت استاندارد تبدیل می‌کنیم و داریم:

$$(x-۱)^۲+(y+۲)^۲=-۱+۱+۴ \Rightarrow (x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۴ \Rightarrow O_۱(۱,-۲) \quad , \quad R_۱=۲$$

چون دو دایره مماس خارج می‌باشند، پس $O_۱O_۲=R_۱+R_۲$. از طرفی: $O_۱O_۲=\sqrt{۹+۱۶}=۵$ ($O_۱O_۲$ طول خط‌المرکزین می‌باشد.)

$$\begin{cases} R_۱+R_۲=۵ \\ R_۱=۲ \end{cases} \Rightarrow R_۲=۳$$

۲۴- گزینه‌ی ۱ با توجه به تعریف هذلولی، مکان هندسی نقطه‌ی M یک هذلولی است به‌طوری که دو نقطه‌ی ثابت داده شده کانون‌ها و مقدار ثابت $2a$ می‌باشد پس:

$$F(۲,۶) \quad , \quad F'(۲,-۴) \quad \Rightarrow O(۲,۱)$$

$$FF'=۱۰ \Rightarrow \begin{cases} ۲c=۱۰ \Rightarrow c=۵ \\ ۲a=۶ \Rightarrow a=۳ \end{cases} \Rightarrow c^۲=b^۲+a^۲ \Rightarrow b^۲=۱۶$$

چون در کانون‌ها طول‌ها برابرند، پس هذلولی قائم است و ضابطه‌ی آن به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{(y-\beta)^۲}{a^۲}-\frac{(x-\alpha)^۲}{b^۲}=۱ \Rightarrow \frac{(y-۱)^۲}{۹}-\frac{(x-۲)^۲}{۱۶}=۱$$

اگر قرار دهیم $x=۵$، داریم:

$$\frac{(y-۱)^۲}{۹}=۱+\frac{۹}{۱۶} \Rightarrow (y-۱)^۲=\frac{۲۵\times ۹}{۱۶} \Rightarrow \begin{cases} y-۱=\frac{۵\times ۳}{۴} \\ y-۱=\frac{-۵\times ۳}{۴} \end{cases} \Rightarrow y=۱\pm\frac{۱۵}{۴}$$

۲۵- گزینه‌ی ۴ با توجه به وجود جزء صحیح، انتگرال را به قسمت‌های کوچک‌تر تقسیم می‌کنیم و داریم:

$$\int_{-۲}^{۱}(|x|-[x])dx=\int_{-۲}^{-۱}(-x+۲)dx+\int_{-۱}^{۰}(-x+۱)dx+\int_{۰}^{۱}(x-۰)dx$$

نکته‌ای داریم که در این حالت بسیار مفید است. به شرطی که f تابعی خطی باشد، داریم:

$$\int_{a}^{b}\underbrace{(mx+n)}_{f}dx=(b-a)f(\frac{a+b}{۲})$$

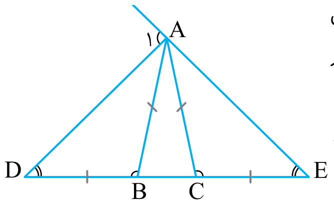
$$\int_{-۲}^{-۱}(-x+۲)dx=۱\times(\frac{۳}{۲}+۲)=\frac{۷}{۲}$$

$$\int_{-۱}^{۰}(-x+۱)dx=۱\times(\frac{۱}{۲}+۱)=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\int_{-۲}^{۱}(|x|-[x])dx=\frac{۷}{۲}+\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۲}=۵/۵$$

$$\int_{۰}^{۱}xdx=۱\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

۲۶- گزینه‌ی ۳ ابتدا انتگرال را تفکیک می‌کنیم:

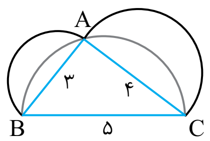
$$\int(\sqrt{x}-\frac{۱}{x})^{۲}dx=\int(x+\frac{۱}{x^{۲}}-\frac{۲}{\sqrt{x}})dx=\frac{۱}{۲}x^{۲}-\frac{۱}{x}-۴\sqrt{x}+C=\frac{x^{۳}-۲-۸x\sqrt{x}}{۲x}+C\Rightarrow f(x)=x^{۳}-۸x\sqrt{x}-۲$$



۲۷- گزینه‌ی ۳ با توجه به این که دو مثلث ABD و ACE به حالت دو ضلع و زاویه‌ی بین برابر هستند، پس AD=AE بنابراین مثلث ADE متساوی‌الساقین است و داریم: $\hat{D}=\hat{E}$. در مثلث ADE زاویه‌ی خارجی $A_{۱}$ برابر است با:

$$\hat{A}_{۱}=\hat{D}+\hat{E}\Rightarrow\hat{A}_{۱}=۲\hat{D}$$

بنابراین کوچک‌ترین زاویه‌ی خارجی ۲ برابر کوچک‌ترین زاویه‌ی داخلی می‌باشد.



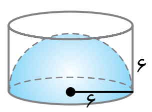
۲۸- گزینه‌ی ۲ اگر مساحت نیم‌دایره‌ی بزرگ را $S_{۱}$ و مساحت دو نیم‌دایره‌ی کوچک را $S_{۲}$ و $S_{۳}$ و مساحت مثلث را $S_{۴}$ بنامیم، مساحت ناحیه‌ی سایه زده برابر است با:

$$S=(S_{۲}+S_{۳}+S_{۴})-S_{۱}=\frac{۱}{۲}\times\pi\times(۱/۵)^{۲}+\frac{۱}{۲}\times\pi\times۲^{۲}+\frac{۱}{۲}\times۳\times۴-\frac{۱}{۲}\times\pi\times(۲/۵)^{۲}=\frac{۲/۲۵\pi+۴\pi+۱۲-۶/۲۵\pi}{۲}=\frac{۱۲}{۲}=۶$$

۲۹- گزینه‌ی ۱ اگر طول وتر را برابر x و ارتفاع وارد بر وتر را h بنامیم، داریم:

$$S=\frac{۱}{۲}x\times h\xrightarrow{S=\frac{۱}{۸}x^{۲}}\frac{۱}{۸}x^{۲}=\frac{۱}{۲}xh\Rightarrow h=\frac{x}{۴}$$

اگر در یک مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر $\frac{۱}{۴}$ وتر باشد، زوایای مثلث ۱۵° و ۷۵° هستند.



۳۰- گزینه‌ی ۴ مطابق شکل روبه‌رو ارتفاع کوچک‌ترین استوانه برابر شعاع نیم‌کره است، پس حجم محدود به نیم‌کره و استوانه برابر است با:

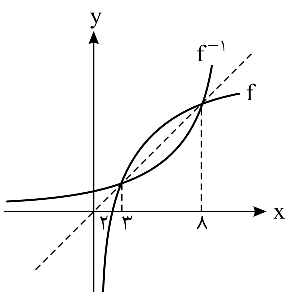
$$V=V_{\text{استوانه}}-V_{\text{نیم‌کره}}=\pi\times۶^{۲}\times۶-\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۳}\pi\times۶^{۳}=\pi\times۶^{۳}-\frac{۲}{۳}\pi\times۶^{۳}=\frac{۶^{۳}}{۳}\times\pi=۷۲\pi$$

پاسخ تشریحی آزمون ۱۱۳

۱- گزینه‌ی ۳ ابتدا می‌توان نوشت: $۱+۲+۳+...+۲۹=\frac{۲۹\times۳۰}{۲}=۲۹\times۱۵=۴۳۵$ = تعداد جملات تا دسته‌ی ۲۹ام

پس جمله‌ی اول دسته‌ی ۳۰ ام، ۴۳۶ امین عدد فرد و جمله‌ی آخر آن (۴۳۶+۲۹) امین عدد فرد می‌باشد. از طرفی جمله‌ی عمومی اعداد فرد به‌صورت $a_{n}=۲n-۱$ است پس می‌توان نوشت:

$$a_{۴۶۵}+a_{۴۳۶}=(۲(۴۶۵)-۱)+(۲(۴۳۶)-۱)=۲(۴۶۵+۴۳۶-۱)=۲(۹۰۰)=۱۸۰۰$$



۲- گزینه‌ی ۴ دامنه‌ی تابع $\sqrt{x-f^{-1}(x)}$ به صورت روبه‌رو تعیین می‌شود: $x-f^{-1}(x)\ge۰\Rightarrow x\ge f^{-1}(x)$

نمودار تابع f^{-1} را رسم می‌کنیم. برای این منظور نمودار f را نسبت به خط y=x قرینه می‌کنیم.

همان‌طور که در شکل ملاحظه می‌کنید در بازه‌ی [۳,۸]، نمودار خط y=x بالاتر از نمودار تابع f^{-1} است.

۳- گزینه‌ی ۱ می‌توان نوشت:

$$\frac{\cos(270^\circ+15^\circ)-\sin(270^\circ-15^\circ)}{\sin(540^\circ-15^\circ)-\sin(90^\circ+15^\circ)}=\frac{\sin 15^\circ+\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ-\cos 15^\circ}=\frac{\tan 15^\circ+1}{\tan 15^\circ-1}=\frac{0/28+1}{0/28-1}=\frac{1/28}{-0/72}=\frac{-128}{72}=\frac{-16}{9}$$

۴- گزینه‌ی ۴ ابتدا ماتریس $A-B$ را محاسبه کرده، سپس آن را معکوس می‌کنیم:

$$A-B=\begin{bmatrix}12 & -8\\ 10 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}10 & -6\\ 7 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 3 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow(A-B)^{-1}=\frac{1}{2\times2-((-2)\times3)}\begin{bmatrix}2 & 2\\ -3 & 2\end{bmatrix}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}2 & 2\\ -3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0/2 & 0/2\\ -0/3 & 0/2\end{bmatrix}$$

۵- گزینه‌ی ۳ ابتدا توجه کنید که از تعداد کل داده‌ها ۳ تا کم می‌شود پس تعداد کل داده‌ها برابر است با:

$$(9+13+17+21)-3=57$$

اکنون توجه کنید که دو تا از داده‌های دسته‌ی دوم کم می‌شود، پس تعداد داده‌های این دسته $21-2=19$ است که بیش‌ترین فراوانی را دارد. پس زاویه‌ی مرکزی مربوط به این دسته برابر است با:

$$\frac{19}{57}\times360^\circ=\frac{360^\circ}{3}=120^\circ$$

۶- گزینه‌ی ۱ تعداد داده‌ها ۲۵ می‌باشد پس $Q_1=55$، $Q_2=62$ و $Q_3=71$. بنابراین داده‌های بین چارک اول و چارک سوم عبارتند از:

۵۶,۵۷,۵۹ ,۵۹ ,۶۰ ,۶۰ ,۶۲,۶۳,۶۳,۶۵ ,۶۵ ,۶۶ ,۷۱

میانه‌ی این داده‌ها برابر ۶۲ است، اکنون میانگین آن‌ها را به کمک روش سریع، محاسبه می‌کنیم:

$$\text{میانگین}:\ 62+\frac{\overbrace{-6-5-3-3-2-2}^{-21}+0+\overbrace{1+1+3+3+4+9}^{21}}{13}=62+\frac{0}{13}=62$$

پس اختلاف میانگین و میانه داده‌های داخل جعبه برابر صفر است.

۷- گزینه‌ی ۳ با فرض این‌که $P(A)$ احتمال همرنگ نبودن دو مهره باشد، احتمال آن‌که دو مهره همرنگ باشند، برابر است با:

$$P(A')=\frac{\overbrace{\binom{3}{2}}^{\text{هر دو سفید}}+\overbrace{\binom{2}{2}}^{\text{هر دو سیاه}}+\overbrace{\binom{5}{2}}^{\text{هر دو قرمز}}}{\binom{10}{2}}=\frac{3+1+10}{45}=\frac{14}{45}$$

بنابراین احتمال همرنگ نبودن مهره‌ها برابر است با:

$$P(A)=1-P(A')=1-\frac{14}{45}=\frac{45-14}{45}=\frac{31}{45}$$

۸- گزینه‌ی ۲ ابتدا مقدار $\tan\alpha$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\tan\alpha=\tan\left[(\alpha-\beta)+\beta\right]=\frac{\tan(\alpha-\beta)+\tan\beta}{1-\tan(\alpha-\beta)\tan\beta}\xrightarrow[\tan\beta=\frac{1}{2}]{\tan(\alpha-\beta)=\tan\frac{\pi}{4}=1}\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}=3$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$\sin2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{2(3)}{1+9}=\frac{6}{10}=0/6$$

۹- گزینه‌ی ۴ ابتدا دامنه‌ی تابع f و g را محاسبه می‌کنیم:

$$D_f:3-x\geq0\Rightarrow x\leq3\qquad D_g:x^2+2x>0\Rightarrow x>0\ \text{یا}\ x<-2$$

از طرفی می‌دانیم:

$$D_{fog}=\{x\in D_g,\ g(x)\in D_f\}=\{x>0\ \text{یا}\ x<-2\ ,\ \log_2(x^2+2x)\leq3\}$$

حال می‌توان نوشت:

$$\log_2(x^2+2x)\leq3\Rightarrow x^2+2x\leq8\Rightarrow(x+4)(x-2)\leq0\Rightarrow-4\leq x\leq2$$

بنابراین داریم:

$$D_{fog}=\{x>0\ \text{یا}\ x<-2\,|\,-4\leq x\leq2\}=[-4,-2)\cup(0,2]$$

۱۰- گزینه‌ی ۱ ابتدا می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^n+15}{3x-\sqrt{4x^2+15x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^n}{3x-|2x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^n}{5x}=-1\Rightarrow\begin{cases}a=-5\\ n=1\end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to3}\frac{-5x+15}{3x-\sqrt{4x^2+15x}}=\lim_{x\to3}\frac{-5(x-3)(3x+\sqrt{4x^2+15x})}{9x^2-4x^2-15x}=\lim_{x\to3}\frac{-5(x-3)(18)}{5x(x-3)}=-6$$

۱۱- گزینه‌ی ۲ تابع f باید در نقطه‌ی $x=۶$ که تغییر ضابطه می‌دهد پیوسته باشد، پس می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to ۶^-} f(x)=f(۶)=\lim_{x\to ۶^+} f(x)\Rightarrow \sin\frac{\pi}{۶}=a+\cos^۲\frac{\pi}{۶}\Rightarrow \frac{۱}{۲}=a+\frac{۳}{۴}\Rightarrow a=-\frac{۱}{۴}$$

۱۲- گزینه‌ی ۱ آهنگ متوسط تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در $[۱,۱/۲۱]$ محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{۱/۲۱}-\sqrt{۱}}{۱/۲۱-۱}=\frac{۱/۱-۱}{۰/۲۱}=\frac{۰/۱}{۰/۲۱}=\frac{۱۰}{۲۱}$$

اکنون آهنگ لحظه‌ای f را در $x=۱$ محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\xrightarrow{x=۱} f'(۱)=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین اختلاف آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای برابر است با:

$$\frac{۱}{۲}-\frac{۱۰}{۲۱}=\frac{۲۱-۲۰}{۴۲}=\frac{۱}{۴۲}$$

۱۳- گزینه‌ی ۲ احتمال آن‌که در پرتاب یک تاس عدد زوج ظاهر شود، برابر $\frac{۳}{۶}$ است، بنابراین احتمال اصابت ۲ تیر برابر است با:

$$P=\underbrace{\frac{۳}{۶}}_{\text{تاس زوج}}\times\underbrace{\binom{۴}{۲}\left(\frac{۲}{۳}\right)^۲\left(\frac{۱}{۳}\right)^۲}_{\text{اصابت ۲ تیر از ۴ تیر}}+\underbrace{\frac{۳}{۶}}_{\text{تاس فرد}}\underbrace{\binom{۳}{۲}\left(\frac{۲}{۳}\right)^۲\left(\frac{۱}{۳}\right)}_{\text{اصابت ۲ تیر از ۳ تیر}}=\frac{۱}{۲}\times۶\times\frac{۴}{۹}\times\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۲}\times۳\times\frac{۴}{۹}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۴}{۲۷}+\frac{۶}{۲۷}=\frac{۱۰}{۲۷}$$

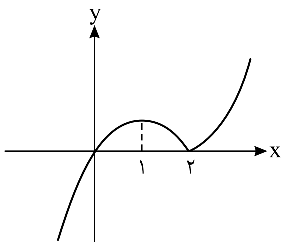
۱۴- گزینه‌ی ۴ ریشه‌های معادله‌ی جدید را $y_۱$ و $y_۲$ در نظر می‌گیریم و داریم:

$$\begin{cases}y_۱=\dfrac{۱}{x_۱}-۱\\[2mm] y_۲=\dfrac{۱}{x_۲}-۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_۱+y_۲=\dfrac{x_۱+x_۲}{x_۱x_۲}-۲=\dfrac{\frac{۳}{۲}}{-\frac{۱}{۲}}-۲=-۵\\[4mm] y_۱y_۲=\dfrac{۱}{x_۱x_۲}-\dfrac{۱}{x_۱}-\dfrac{۱}{x_۲}+۱=\dfrac{۱}{x_۱x_۲}-\dfrac{x_۱+x_۲}{x_۱x_۲}+۱=-۲+۳+۱=۲\end{cases}$$

بنابراین معادله‌ی موردنظر $x^۲+۵x+۲=۰$ است.

۱۵- گزینه‌ی ۳ ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

$$y=x|x-۲|=\begin{cases}x(x-۲) & x\geq ۲\\ -x(x-۲) & x\leq ۲\end{cases}$$



همان‌طور که مشاهده می‌کنید تابع f در $(۱,۲)$ اکیداً نزولی است. پس داریم:

$$y=-x(x-۲)=-(x^۲-۲x)=-(x-۱)^۲+۱\Rightarrow(x-۱)^۲=۱-y$$

$$\Rightarrow|x-۱|=\sqrt{۱-y}\xrightarrow{x-۱>۰}x-۱=\sqrt{۱-y}\Rightarrow x=۱+\sqrt{۱-y}$$

بنابراین تابع معکوس در بازه‌ی موردنظر برابر است با:

$$f^{-۱}(x)=۱+\sqrt{۱-x}\quad ,\quad ۰<x<۱$$

۱۶- گزینه‌ی ۴ حد دنباله را در بینهایت محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۷+۴^{n-۱}}{۲+۴^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{۴^{n-۱}}{۴^n}=\frac{۱}{۴}$$

با توجه به این‌که دنباله‌ی a_n همگراست، پس کران‌دار است. اکنون با توجه به گزینه‌ها چون دنباله یا نزولی و یا صعودی است، از طریق مقایسه‌ی جمله‌ی اول و مقدار همگرایی می‌توان وضعیت یکنوایی را تعیین کرد:

$$a_۱=\frac{۷+۱}{۲+۴}=\frac{۴}{۳}>\frac{۱}{۴}\Rightarrow \text{دنباله نزولی است}$$

۱۷- گزینه‌ی ۲ باید از معادله‌ی $f(t)=۷۰$، t را به‌دست آوریم:

$$f(t)=۷۰\Rightarrow۹۰-۴۰e^{-۰/۰۲t}=۷۰\Rightarrow۴۰e^{-۰/۰۲t}=۲۰\Rightarrow e^{-۰/۰۲t}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow-۰/۰۲t=\ln\frac{۱}{۲}\Rightarrow-۰/۰۲t=-\ln ۲\xrightarrow{\ln ۲=۰/۶۸}-۰/۰۲t=-۰/۶۸\Rightarrow t=\frac{۶۸}{۲}=۳۴$$

۱۸- گزینه‌ی ۱ معادله را به این‌صورت می‌توان نوشت:

$$(۲\cos^۲ x-۱)+۲\sin x\cos x=۰\Rightarrow\cos ۲x+\sin ۲x=۰\xrightarrow{\div\cos ۲x}\tan ۲x=-۱\Rightarrow ۲x=k\pi-\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۸}$$

۱۹- گزینه‌ی ۲ ابتدا ضابطه‌های f و g را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{۳}{۵}x & x\geq ۰\\ x & x\leq ۰\end{cases}\quad ,\quad g(x)=\begin{cases}۵x & x\geq ۰\\ ۳x & x\leq ۰\end{cases}$$

حال می‌توان نوشت:

$$(fog)(x)=f(g(x))=\begin{cases}f(۵x) & x\geq ۰\\ f(۳x) & x\leq ۰\end{cases}=\begin{cases}۳x & x\geq ۰\\ ۳x & x\leq ۰\end{cases}\Rightarrow(fog)'(x)=۳$$

۲۰- گزینه‌ی ۳ ابتدا نقطه‌ی مورد نظر را مشخص می‌کنیم: $x=۲\Rightarrow y=۲\Rightarrow$ نقطه‌ی مورد نظر $(۲,۲)$

اکنون با محاسبه‌ی مشتق تابع در این نقطه داریم: $y'=\frac{۲}{۲\sqrt{۲x}}e^{۲-x}-e^{۲-x}\sqrt{۲x}\Rightarrow$ شیب مماس $=y'(۲)=\frac{۱}{۲}-۲=-\frac{۳}{۲}$

معادله‌ی خط مماس : $y-۲=-\frac{۳}{۲}(x-۲)\xrightarrow{x=۰}y-۲=۳\Rightarrow y=۵$

۲۱- گزینه‌ی ۳ ابتدا شرط صعودی بودن تابع را بررسی می‌کنیم:

$$f'(x)=۳x^{۲}-۲(m+۲)x+۳\xrightarrow{\Delta\leq ۰}۴(m+۲)^{۲}-۳۶\leq ۰\Rightarrow -۳\leq m+۲\leq ۳\Rightarrow -۵\leq m\leq ۱$$

اکنون طول نقطه‌ی عطف را محاسبه می‌کنیم: $f''(x)=۶x-۲(m+۲)=۰\Rightarrow x=\frac{m+۲}{۳}$

حال از شرط $-۵\leq m\leq ۱$ خواهیم داشت $-۱\leq \frac{m+۲}{۳}\leq ۱$.

۲۲- گزینه‌ی ۲ باتوجه به ضابطه‌ی داده شده می‌توان نتیجه گرفت که تابع از نقطه‌ی $(۰,۲)$ می‌گذرد پس مجانب افقی تابع، خط $y=۲$ است لذا داریم:

$$۲=\lim_{x\to\infty}f(x)=a\Rightarrow a=۲$$

همچنین تابع $f(x)=\frac{۲x^{۲}+bx+۸}{x^{۲}+۴}$ بر محور xها مماس است، پس داریم: $f(x)=۰\Rightarrow ۲x^{۲}+bx+۸=۰\xrightarrow{\Delta=۰}b^{۲}-۶۴=۰\Rightarrow b=\pm ۸$

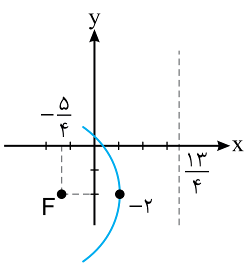
با توجه به شکل چون نقطه‌ی مماسی سمت راست محور y هاست، می‌توان نتیجه گرفت $b<۰$ پس مقدار $b=-۸$ قابل قبول است، لذا $a+b=-۶$.

۲۳- گزینه‌ی ۳ با توجه به این‌که خط هادی سهمی عمودی است، پس سهمی افقی است. هر پرتوای که از نقطه‌ی $F(-\frac{۵}{۴},-۲)$ بر سهمی بتابد در امتداد محور تقارن سهمی بازتاب می‌یابد، پس F کانون سهمی می‌باشد. بنابراین داریم:

$$۲P=\frac{۱۳}{۴}-(-\frac{۵}{۴})=\frac{۹}{۲}\Rightarrow P=\frac{۹}{۴}$$

پس مختصات رأس سهمی برابر است با:

$$S(\frac{-۵}{۴}+\frac{۹}{۴},-۲)=S(۱,-۲)$$



پس معادله‌ی این سهمی افقی رو به چپ به صورت روبه‌رو است:

$$(y-\beta)^{۲}=-۴P(x-\alpha)\Rightarrow (y+۲)^{۲}=-۹(x-۱)$$

برای یافتن محل تلاقی این سهمی با محور xها، y را برابر صفر قرار می‌دهیم:

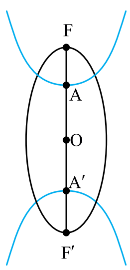
$$y=۰\Rightarrow ۴=-۹(x-۱)\Rightarrow x-۱=\frac{-۴}{۹}\Rightarrow x=\frac{۵}{۹}$$

۲۴- گزینه‌ی ۱ ابتدا معادله‌ی هذلولی را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$۵y^{۲}-۲۰y-۴x^{۲}=۰\Rightarrow ۵(y-۲)^{۲}-۴x^{۲}=۲۰\Rightarrow \frac{(y-۲)^{۲}}{۴}-\frac{x^{۲}}{۵}=۱$$

بنابراین هذلولی مورد نظر قائم است که مختصات مرکز آن $O(۰,۲)$ است و داریم:

$$a=۲,b=\sqrt{۵}\Rightarrow c=\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}=۳$$



بنابراین مطابق شکل روبه‌رو $OF=۳$ و $OA=۲$ پس در مورد بیضی داریم:

$$b'=\sqrt{۵}\ ,\ c'=۲\ ,\ a'=۳$$

پس معادله‌ی بیضی به صورت زیر است:

$$\frac{(x-۰)^{۲}}{۵}+\frac{(y-۲)^{۲}}{۹}=۱\Rightarrow ۹x^{۲}+۵(y^{۲}-۴y+۴)=۴۵\Rightarrow ۹x^{۲}+۵y^{۲}-۲۰y=۲۵$$

۲۵- گزینه‌ی ۲ می‌توان نوشت:

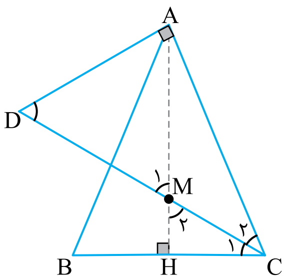
$$\int_{۰}^{\pi}\frac{dx}{\sqrt{۱+\tan^{۲}x}}=\int_{۰}^{\pi}\frac{dx}{\frac{۱}{|\cos x|}}=\int_{۰}^{\pi}|\cos x|dx=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\cos x dx-\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi}\cos x dx=\sin x\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi}=(۱-۰)-(۰-۱)=۲$$

۲۶- گزینه‌ی ۳ با انتگرال‌گیری از سمت چپ تساوی داریم:

$$\int \frac{۷x^{۲}-۴x}{\sqrt[۳]{x^{۲}}}dx=\int (۷x^{\frac{۴}{۳}}-۴x^{\frac{۱}{۳}})dx=۷\frac{x^{\frac{۷}{۳}}}{\frac{۷}{۳}}-۴\frac{x^{\frac{۴}{۳}}}{\frac{۴}{۳}}+c=۳x^{\frac{۷}{۳}}-۳x^{\frac{۴}{۳}}=۳\sqrt[۳]{x}(x^{۲}-x)+c$$

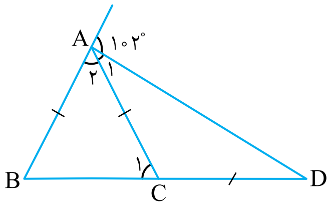
در نتیجه $f(x)=x^{۲}-x$.

۲۷- گزینه‌ی ۱ با توجه به شکل روبه‌رو، داریم:



$$\begin{cases}\overset{\Delta}{ADC}:\hat{D}+\hat{C}_{۲}=۹۰^{\circ}\\ \overset{\Delta}{MHC}:\hat{M}_{۲}+\hat{C}_{۱}=۹۰^{\circ}\\ \hat{C}_{۱}=\hat{C}_{۲}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\hat{D}=\hat{M}_{۲}\\ \hat{M}_{۱}=\hat{M}_{۲}\end{cases}\Rightarrow\hat{D}=\hat{M}_{۱}\Rightarrow \text{ متساوی الساقین است } \overset{\Delta}{AMD}\Rightarrow AD=AM$$

۲۸- گزینه‌ی ۴ در شکل مقابل با توجه به این‌که مثلث ACD متساوی‌الساقین است، $\hat{A}_{۱}=\hat{D}$، بنابراین زاویه‌ی خارجی $\hat{C}_{۱}$ از مثلث ACD برابر $۲\hat{A}_{۱}$ می‌باشد. پس:

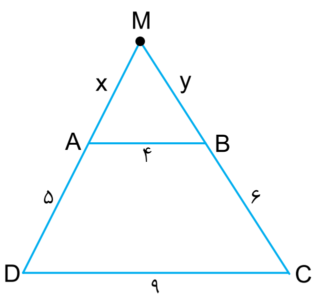


$$\overset{\Delta}{ABC}:\begin{cases}\hat{A}_{۲}+۲\hat{C}_{۱}=۱۸۰^{\circ}\\ \hat{C}_{۱}=۲\hat{A}_{۱}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\hat{A}_{۲}+۴\hat{A}_{۱}=۱۸۰^{\circ}\\ \hat{A}_{۱}+\hat{A}_{۲}=۱۸۰^{\circ}-۱۰۲^{\circ}=۷۸^{\circ}\end{cases}\Rightarrow\hat{A}_{۲}+۴(۷۸^{\circ}-\hat{A}_{۲})=۱۸۰^{\circ}$$

$$\Rightarrow ۳\hat{A}_{۲}=۱۳۲^{\circ}\Rightarrow\hat{A}_{۲}=۴۴^{\circ}$$

با توجه به این‌که دو زاویه‌ی دیگر مثلث ABC برابر $\frac{۱۸۰^{\circ}-۴۴^{\circ}}{۲}=۶۸^{\circ}$ هستند. کوچک‌ترین زاویه‌ی مثلث، همان $\hat{A}_{۲}=۴۴^{\circ}$ است.

۲۹- گزینه‌ی ۴ محل تلاقی امتداد ساق‌های ذوزنقه‌ی ABCD را M می‌نامیم، با توجه به قضیه‌ی تالس در مثلث MDC داریم:

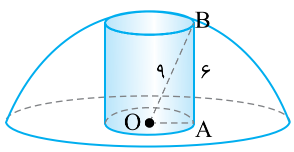


$$AB\|CD\Rightarrow\frac{AM}{MD}=\frac{MB}{MC}=\frac{۴}{۹}\Rightarrow\begin{cases}\frac{x}{۵+x}=\frac{۴}{۹}\Rightarrow ۹x=۴x+۲۰\Rightarrow x=۴\\ \frac{y}{۶+y}=\frac{۴}{۹}\Rightarrow ۹y=۲۴+۴y\Rightarrow y=۴/۸\end{cases}$$

بنابراین محیط مثلث AMB برابر است با:

$$P=x+y+۴=۴+۴/۸+۴=۱۲/۸$$

۳۰- گزینه‌ی ۴ برای آن‌که استوانه بیش‌ترین حجم را داشته باشد، می‌بایست مطابق شکل روبه‌رو، استوانه در وسط نیم‌کره قرار گیرد. با توجه به قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث OAB داریم:



$$OB^{۲}=OA^{۲}+AB^{۲}\Rightarrow ۹^{۲}=OA^{۲}+۶^{۲}\Rightarrow OA=\sqrt{۸۱-۳۶}=\sqrt{۴۵}$$

بنابراین حجم این استوانه برابر است با:

$$V=\pi r^{۲}h=\pi\times ۴۵\times ۶=۲۷۰\pi$$

پاسخ تشریحی آزمون ۱۱۴

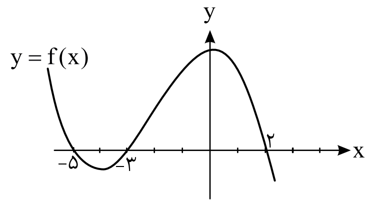
۱- گزینه‌ی ۱ در نوزده دسته‌ی ابتدایی از اعداد ۱ تا ۱۹۰ استفاده شده است، زیرا:

$$۱+۲+...+۱۹=\frac{۱۹\times ۲۰}{۲}=۱۹۰$$

پس دسته‌ی بیستم عبارت است از $(۱۹۱,۱۹۲,...,۲۱۰)$ و مجموع بیست جمله‌ی آن برابر است با:

$$(۱+۲+...+۲۱۰)-(۱+۲+...+۱۹۰)=\frac{۲۱۰\times ۲۱۱}{۲}-\frac{۱۹۰\times ۱۹۱}{۲}=\frac{۴۴۳۱۰}{۲}-\frac{۳۶۲۹۰}{۲}=\frac{۸۰۲۰}{۲}=۴۰۱۰$$

۲- گزینه‌ی ۴ برای این‌که از نمودار $y=f(x-2)$ به نمودار $y=f(x)$ برسـیم، کافی است آن را مطابق شکل دو واحد به چپ منتقل کنیم:



حال برای به‌دست آوردن دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{xf(x)}$، عبارت $xf(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم.

x		-5		-3		0		2	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
x	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$xf(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$$\Rightarrow D=[-5,-3]\cup[0,2]$$

۳- گزینه‌ی ۳ عبارت را بر حسب نسبت‌های مثلثاتی 20° می‌نویسیم:

$$A=\frac{\sin(270^\circ-20^\circ)+\sin(720^\circ-20^\circ)}{\cos(540^\circ+20^\circ)-\cos(90^\circ+20^\circ)}=\frac{-\cos 20^\circ-\sin 20^\circ}{-\cos 20^\circ+\sin 20^\circ}$$

سپس صورت و مخرج را بر $\cos 20^\circ$ تقسیم می‌کنیم:

$$A=\frac{\frac{-\cos 20^\circ-\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}}{\frac{-\cos 20^\circ+\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}}=\frac{-1-\tan 20^\circ}{-1+\tan 20^\circ}=\frac{-1-\frac{2}{5}}{-1+\frac{2}{5}}=\frac{\frac{-7}{5}}{\frac{-3}{5}}=\frac{7}{3}$$

۴- گزینه‌ی ۱ ابتدا ماتریس $A\times B$ را محاسبه کرده سپس آن را معکوس می‌کنیم:

$$A\times B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3 & -2\\ -5 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow (A\times B)^{-1}=\frac{1}{1\times 2-0}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0/5 & 0/5\end{bmatrix}$$

۵- گزینه‌ی ۴ با توجه به این‌که مجموع زوایا 360° است، α به دست می‌آید:

$$\alpha+70+10+80+65=360\Rightarrow \alpha=135^\circ$$

فراوانی این دسته ۳۷/۵ درصد جامعه است، زیرا:

$$\frac{135}{360}\times 100=\frac{3}{8}\times 100=37/5 \text{ درصد}$$

۶- گزینه‌ی ۲ اضلاع مربع‌ها را با x_i و مساحت‌های آن‌ها را با x_i^2 نمایش می‌دهیم. اگر n تعداد این مربع‌ها باشد داریم:

$$\begin{cases}\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}=8\\ \frac{\sum x_i^2}{n}=65/44\end{cases}\Rightarrow \sigma^2=\frac{\sum x_i^2}{n}-\bar{x}^2=65/44-64=1/44\Rightarrow \sigma=1/2\Rightarrow CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{1/2}{8}=0/15$$

۷- گزینه‌ی ۳ یا باید یک مهره قرمز و ۳ مهره سفید باشد یا یک مهره قرمز و ۲ مهره سفید و یک مهره سیاه، پس احتمال خواسته شده برابر است با:

$$P=\frac{\binom{2}{1}\binom{7}{3}+\binom{2}{1}\binom{7}{2}\binom{5}{1}}{\binom{14}{4}}=\frac{2\times\frac{7\times 6\times 5}{6}+2\times\frac{7\times 6}{2}\times 5}{\frac{14\times 13\times 12\times 11}{4\times 3\times 2}}=\frac{70+210}{7\times 13\times 11}=\frac{10+30}{13\times 11}=\frac{40}{143}$$

۸- گزینه‌ی ۳ ابتدا از رابطه‌ی $\cot\alpha-\tan\alpha=2\cot 2\alpha$، استفاده می‌کنیم:

$$\tan\frac{x}{2}-\cot\frac{x}{2}=-2\cot x\Rightarrow 1=-2\cot x\Rightarrow \cot x=\frac{-1}{2}\Rightarrow \tan x=-2$$

در مرحله‌ی بعد با داشتن مقدار $\tan x$، $\tan 2x$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\frac{2\times(-2)}{1-4}=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$$

۹- گزینه‌ی ۱ با توجه به این‌که $D_g=\mathbb{R}$، دامنه‌ی fog برابر است با مجموعه مقادیری از x که $g(x)$ در دامنه‌ی f قرار بگیرد. پس:

$$D_f=\{x|-x^2+x+2>0\}=\{x|(x+1)(x-2)<0\}\Rightarrow -1<x<2$$

$$g(x)\in D_f\Rightarrow -1<(\tfrac{1}{4})^x<2\Rightarrow (\tfrac{1}{4})^x<2\Rightarrow 2^{-2x}<2^1\Rightarrow -2x<1\Rightarrow x>\frac{-1}{2}$$

پس دامنه‌ی fog برابر است با $(\frac{-1}{2},+\infty)$.

۱۰- گزینه‌ی ۲ با توجه به حد تابع در $+\infty$ داریم:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x+\sqrt{x^۲}}{ax^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۳x}{ax^n}=\frac{-۱}{۲}\Rightarrow n=۱,a=-۶\Rightarrow f(x)=\frac{۲x+\sqrt{x^۲-۳x}}{-۶x-۶}$$

حال حد تابع در $x=-۱$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-۱} f(x)=\lim_{x\to-۱}\frac{۲x+\sqrt{x^۲-۳x}}{-۶(x+۱)}\times\frac{۲x-\sqrt{x^۲-۳x}}{۲x-\sqrt{x^۲-۳x}}=\lim_{x\to-۱}\frac{۴x^۲-x^۲+۳x}{۲۴(x+۱)}=\lim_{x\to-۱}\frac{۳x(x+۱)}{۲۴(x+۱)}=\frac{-۱}{۸}$$

۱۱- گزینه‌ی ۴ باید حد چپ و راست و مقدار تابع در $x=\frac{\pi}{۲}$ با هم برابر باشند، پس داریم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-}\dfrac{\cos ۳x}{\cos x}=\lim\limits_{t\to ۰}\dfrac{\cos ۳(t+\frac{\pi}{۲})}{\cos(t+\frac{\pi}{۲})}=\lim\limits_{t\to ۰}\dfrac{\sin ۳t}{-\sin t}=-۳ \\ f(\frac{\pi}{۲})=\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}(\sin ۵x-a)=۱-a\end{cases}\Rightarrow ۱-a=-۳\Rightarrow a=۴$$

۱۲- گزینه‌ی ۴ آهنگ متوسط تغییرات f در فاصله‌ی $[۱,۱+۰/۴۴]$ برابر است با:

$$\frac{f(۱/۴۴)-f(۱)}{۱/۴۴-۱}=\frac{\frac{۰/۴۴}{۱/۲}-۰}{۰/۴۴}=\frac{۵}{۶}$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در $x=۱$ نیز برابر است با:

$$f'(x)=(\sqrt{x}-\frac{۱}{\sqrt{x}})'=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}+\frac{۱}{۲x\sqrt{x}}\Rightarrow f'(۱)=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۱$$

اختلاف این دو مقدار $\frac{۱}{۶}$ است.

۱۳- گزینه‌ی ۲ احتمال اصابت فقط یک تیر برابر است با:

$$P=\underbrace{\frac{۱}{۲}}_{\text{رو آمدن سکه}}\times\underbrace{\binom{۵}{۱}(\frac{۳}{۵})^۱(\frac{۲}{۵})^۴}_{\text{اصابت یک تیر از ۵ تیر}}+\underbrace{\frac{۱}{۲}}_{\text{پشت آمدن سکه}}\times\underbrace{\binom{۳}{۱}(\frac{۳}{۵})^۱(\frac{۲}{۵})^۲}_{\text{اصابت یک تیر از ۳ تیر}}=\frac{۱}{۲}\times۵\times\frac{۳}{۵}\times\frac{۱۶}{۶۲۵}+\frac{۱}{۲}\times۳\times\frac{۳}{۵}\times\frac{۴}{۲۵}=\frac{۲۴+۱۸\times۵}{۶۲۵}=\frac{۲۴+۹۰}{۶۲۵}=\frac{۱۱۴}{۶۲۵}$$

۱۴- گزینه‌ی ۱ با توجه به این‌که جمع ضرایب برابر صفر است، $x=۱$ یکی از سه ریشه‌ی حقیقی متمایز مثبت است:

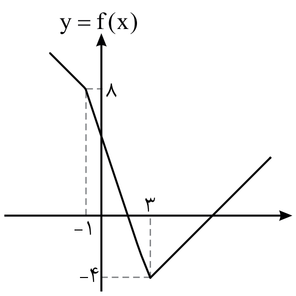
$$x^۳+(a-۱)x^۲+(۴-a)x-۴=۰\Rightarrow(x-۱)(x^۲+ax+۴)=۰$$

برای این‌که معادله‌ی داده شده سه ریشه‌ی حقیقی متمایز مثبت داشته باشد باید معادله‌ی $x^۲+ax+۴=۰$ دارای دو ریشه‌ی مثبت باشد:

$$\begin{cases}\Delta=a^۲-۱۶>۰\Rightarrow a>۴ \text{ یا } a<-۴\\ \text{جمع ریشه‌ها}=-a>۰\Rightarrow a<۰\\ \text{ضرب ریشه‌ها}=۴>۰\end{cases}\Rightarrow a<-۴$$

البته به ازای $a=-۵$، یکی از ریشه‌های مثبت معادله‌ی $x^۲+ax+۴=۰$ همان $x=۱$ است که این ریشه تکراری است. به همین علت $a=-۵$ باید از مجموعه جواب حذف می‌شد.

۱۵- گزینه‌ی ۳ نمودار تابع f با توجه به ضابطه‌ی آن به صورت روبه‌رو است:



$$f(x)=\begin{cases}x-۷ & x>۳\\ -۳x+۵ & -۱\le x\le ۳\\ -x+۷ & x<-۱\end{cases}$$

این تابع در فاصله‌ی $(۳,+\infty)$ صعودی و وارون‌پذیر است:

$$y=x-۷\xrightarrow{f^{-۱}}x=y+۷\Rightarrow y=x+۷, x>-۴$$

۱۶- گزینه‌ی ۲ این دنباله همگرا به ۳ است، پس کران‌دار است. در ضمن با توجه به جمله‌ی اول یعنی $a_۱=\frac{۲}{۳}$ این دنباله نزولی نخواهد بود. پس با توجه به گزینه‌ها این دنباله کران‌دار و صعودی است.

۱۷- گزینه‌ی ۴ جمعیت ابتدایی برابر $A=50000$ و نرخ رشد برابر $i=\frac{2/5}{100}$ است، برای یافتن مدت زمان رسیدن به جمعیت ۶۰۰۰۰ نفر باید معادله‌ی $f(t)=60000$ را حل کنیم:

$$f(t)=60000\Rightarrow 50000e^{0/025t}=60000\Rightarrow e^{0/025t}=1/2\Rightarrow 0/025t=\ln 1/2\xrightarrow{\ln 1/2=0/18}0/025t=0/18\Rightarrow t=\frac{180}{25}=7/2$$

۱۸- گزینه‌ی ۱ معادله را به صورت $\cos 3x=-\cos x=\cos(\pi-x)$ نوشته و حل می‌کنیم:

$$\begin{cases}3x=2k\pi+\pi-x\\3x=2k\pi-\pi+x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x=2k\pi+\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\\2x=2k\pi-\pi\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

با توجه به $\cos x\neq 0$، جواب $x=k\pi-\frac{\pi}{2}$ غیرقابل قبول است. پس جواب کلی $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ است.

۱۹- گزینه‌ی ۲ تابع را به صورت $f(x)=\begin{cases}x^3-4x & x\geq\sqrt{2}\\x^3-3x & x<\sqrt{2}\end{cases}$ بازنویسی می‌کنیم. این تابع در $x=\sqrt{2}$ پیوسته نیست و فقط پیوستگی راست دارد، بنابراین صحبت کردن در مورد مشتق چپ بی‌معنی است. اما احتمالاً موردنظر سؤال این بوده است که از تابع بالا به صورت زیر مشتق بگیریم:

$$f(x)=\begin{cases}3x^2-4 & x>\sqrt{2}\\3x^2-3 & x<\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow f'_+(\sqrt{2})-f'_-(\sqrt{2})=2-3=-1$$

۲۰- گزینه‌ی ۲ تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\ln\frac{\sqrt{4x+1}}{x^2-2x+3}$ از نقطه‌ی $(2,0)$ می‌گذرد. برای نوشتن معادله‌ی خط مماس در $x=2$، به مشتق تابع در این نقطه نیاز داریم:

$$f(x)=\frac{1}{2}\ln(4x+1)-\ln(x^2-2x+3)\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{4x+1}-\frac{2x-2}{x^2-2x+3}\Rightarrow f'(2)=\frac{-4}{9}$$

معادله‌ی خط گذرنده از نقطه‌ی $(2,0)$ با شیب $m=\frac{-4}{9}$ را می‌نویسیم:

$$y-0=\frac{-4}{9}(x-2)\Rightarrow y=\frac{-4}{9}x+\frac{8}{9}$$

با توجه به معادله‌ی به‌دست آمده عرض از مبدأ $\frac{8}{9}$ است.

۲۱- گزینه‌ی ۳ تابع مشتق که تابعی از درجه‌ی دوم است باید دارای دو ریشه‌ی منفی باشد:

$$f'(x)=2x^2-2(m-1)x+8\Rightarrow\begin{cases}\Delta>0:4(m-1)^2-64>0\Rightarrow(m-1)^2>16\Rightarrow m>5 \text{ یا } m<-3\\\frac{c}{a}>0:4>0\\\frac{-b}{a}<0:m-1<0\Rightarrow m<1\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک بازه‌ها}}m<-3$$

از طرفی طول نقطه‌ی عطف در $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ برابر است با $x=-\frac{b}{3a}$. بنابراین داریم:

$$x=\frac{-b}{3a}=\frac{m-1}{2}\xrightarrow{m<-3}\frac{m-1}{2}<-2\Rightarrow x<-2$$

۲۲- گزینه‌ی ۱ با توجه به این‌که نمودار تابع نسبت به مبدأ مختصات تقارن دارد، تابع فرد است یعنی باید ضریب x در مخرج کسر برابر صفر باشد. پس $b=0$، لذا:

$$f(x)=\frac{x}{ax^2+1}$$

از طرفی مخرج کسر باید دارای دو ریشه باشد، پس a عددی منفی است.

۲۳- گزینه‌ی ۲ بنابر اطلاعات داده شده نقطه‌ی $(0/9,-1)$ کانون سهمی است. بنابراین سهمی افقی و رو به راست است و داریم:

$$p=0/9-(-1/6)=2/5$$

پس معادله‌ی سهمی به صورت زیر است:

$$(y-\beta)^2=4p(x-\alpha)\Rightarrow(y+1)^2=4\times 2/5(x+1/6)\Rightarrow(y+1)^2=10x+16$$

برای یافتن محل تلاقی سهمی با محور yها کافی است x را برابر صفر قرار دهیم:

$$x=0\Rightarrow(y+1)^2=16\Rightarrow y+1=\pm 4\Rightarrow y=3 \text{ یا } y=-5$$

۲۴- گزینه‌ی ۳ خط مماس در نقطه‌ی $(۳,۰)$ افقی است، پس مشتق در این نقطه برابر صفر است، با استفاده از مشتق‌گیری ضمنی داریم:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{۲x+b}{۸y+a}\xrightarrow{(۳,۰)}۰=-\frac{۶+b}{a}\Rightarrow b+۶=۰\Rightarrow b=-۶$$

ضمناً دو نقطه‌ی $(۳,۰)$ و $(-۱,-۲)$ روی بیضی قرار دارند:

$$(۳,۰):۹+۳b+c=۰\xrightarrow{b=-۶}c=۹$$

$$(-۱,-۲):۱+۴\times۴-۲a-b+c=۰\xrightarrow[c=۹]{b=-۶}۱۷-۲a+۶+۹=۰\Rightarrow a=۱۶$$

با توجه به مقادیر a، b و c معادله‌ی بیضی را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$x^۲+۴y^۲+۱۶y-۶x+۹=۰\Rightarrow(x-۳)^۲+۴(y+۲)^۲=-۹+۹+۱۶$$

$$\Rightarrow\frac{(x-۳)^۲}{۱۶}+\frac{(y+۲)^۲}{۴}=۱\Rightarrow a'=۴\ ,\ b'=۲\Rightarrow c'=\sqrt{a'^۲-b'^۲}=\sqrt{۱۶-۴}=\sqrt{۱۲}$$

خروج از مرکز این بیضی برابر است با:

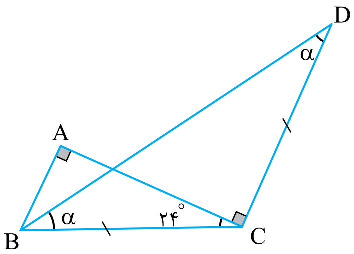
$$e=\frac{c'}{a'}=\frac{\sqrt{۱۲}}{۴}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۴}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۲۵- گزینه‌ی ۴ با استفاده از اتحاد $۱-\cos\alpha=۲\sin^۲\frac{\alpha}{۲}$ داریم:

$$\int_۰^{۲\pi}\sqrt{۲(۱-\cos x)}dx=\int_۰^{۲\pi}\sqrt{۴\sin^۲\frac{x}{۲}}dx=\int_۰^{۲\pi}۲|\sin\frac{x}{۲}|dx=\int_۰^{۲\pi}۲\sin\frac{x}{۲}dx=-۴\cos\frac{x}{۲}\Big|_۰^{۲\pi}=۴-(-۴)=۸$$

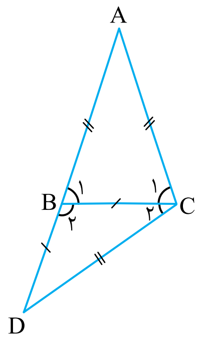
۲۶- گزینه‌ی ۳ ابتدا انتگرال نامعین را محاسبه می‌کنیم:

$$\int\frac{۴x^۲-۱}{\sqrt[۳]{x}}dx=\int(۴x^{\frac{۵}{۳}}-x^{\frac{-۱}{۳}})dx=\frac{۳}{۲}x^{\frac{۸}{۳}}-\frac{۳}{۲}x^{\frac{۲}{۳}}+c=\frac{۳}{۲}x^{\frac{۲}{۳}}(x^۲-۱)+c\Rightarrow f(x)=x^۲-۱$$



۲۷- گزینه‌ی ۱ با توجه به شکل روبه‌رو در مثلث متساوی‌الساقین BCD داریم:

$$B+D+C=۱۸۰^\circ\Rightarrow\alpha+\alpha+۲۴^\circ+۹۰^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow۲\alpha=۶۶^\circ\Rightarrow\alpha=۳۳^\circ$$



۲۸- گزینه‌ی ۴ با توجه به شـکل روبه‌رو، مثلث‌های ABC، ACD و BCD متساوی‌الساقین هستند.

در مثلث BCD، $B_۱$ زاویه‌ی خارجی است، پس:

$$\hat{B}_۱=\hat{C}_۲+\hat{D}\xrightarrow{\hat{C}_۲=\hat{D}}\hat{B}_۱=۲\hat{D}\xrightarrow{\hat{B}_۱=\hat{C}_۱}\hat{C}_۱=۲\hat{D}$$

ضمناً در مثلث ACD داریم:

$$ACD:\hat{A}+\hat{C}_۱+\hat{C}_۲+\hat{D}=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{A}+۲\hat{D}+\hat{D}+\hat{D}=۱۸۰^\circ\xrightarrow{\hat{A}=\hat{D}}۵\hat{A}=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{A}=۳۶^\circ$$

۲۹- گزینه‌ی ۱ طبق قضیه‌ی تالس در دو مثلث OBD و ODE داریم:

$$\begin{cases}AC||BD\Rightarrow\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}\\BC||DE\Rightarrow\frac{OB}{OE}=\frac{OC}{OD}\end{cases}\Rightarrow\frac{OA}{OB}=\frac{OB}{OE}\Rightarrow\frac{۳}{۳+۵}=\frac{۳+۵}{OE}\Rightarrow۳OE=۶۴\Rightarrow OE=\frac{۶۴}{۳}\Rightarrow BE+۸=\frac{۶۴}{۳}\Rightarrow BE=\frac{۴۰}{۳}=۱۳\frac{۱}{۳}$$

۳۰- گزینه‌ی ۴ قطر مکعب مستطیل محاط با قطر کره برابر است، پس داریم:

$$۲r=\sqrt{۳^۲+۴^۲+۵^۲}\Rightarrow r=\frac{\sqrt{۵۰}}{۲}=\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow S=۴\pi r^۲=۴\pi\times(\frac{۵\sqrt{۲}}{۲})^۲=۴\pi\times\frac{۲۵}{۲}=۵۰\pi$$