

روش دوم: توجه کنید که

$$S = \frac{1}{(x_1+1)^3} + \frac{1}{(x_2+1)^3} = \left(\frac{1}{x_1+1}\right)^3 + \left(\frac{1}{x_2+1}\right)^3 = \frac{x_1^3}{125} + \frac{x_2^3}{125} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{125}$$

اکنون از اتحاد $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ استفاده می‌کنیم. چون $x_1 + x_2 = -1$ و $x_1 x_2 = -5$ پس

$$S = \frac{(x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)}{125} = \frac{(-1)^3 - 3(-5)(-1)}{125} = -\frac{16}{125}$$

از طرف دیگر،

$$P = \frac{1}{(x_1+1)^3} \times \frac{1}{(x_2+1)^3} = \left(\frac{1}{x_1+1}\right)^3 \times \left(\frac{1}{x_2+1}\right)^3 = \frac{x_1^3}{5^3} \times \frac{x_2^3}{5^3} = \frac{(x_1 x_2)^3}{5^3 \times 5^3}$$

چون $x_1 x_2 = -5$ پس $P = \frac{(-5)^3}{5^3 \times 5^3}$ یعنی $P = -\frac{1}{125}$. در نتیجه معادله مورد

نظر به صورت $x^2 + \frac{16}{125}x - \frac{1}{125} = 0$ است، که اگر دو طرف آن را در 125 ضرب کنیم، می‌شود $125x^2 + 16x - 1 = 0$.

روش اول: ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{36}\right) &= 16 \cos^2 \frac{3\pi}{36} \cos^2 \frac{6\pi}{36} \cos^2 \frac{12\pi}{36} \cos^2 \frac{24\pi}{36} \\ &= 16 \cos^2 \frac{\pi}{12} \cos^2 \frac{\pi}{6} \cos^2 \frac{\pi}{3} \cos^2 \frac{2\pi}{3} \\ &= 16 \cos^2 \frac{\pi}{12} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \cos^2 \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

اکنون برای اینکه مقدار $\cos^2 \frac{\pi}{12}$ را حساب کنیم، از اتحاد مثلثاتی

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$f\left(\frac{\pi}{36}\right) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} (1 + \cos \frac{2\pi}{12}) = \frac{3}{8} (1 + \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{3}{8} \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2}\right) = \frac{6 + 3\sqrt{3}}{16}$$

روش دوم: عبارت داده شده را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = 16 (\cos 3x \cos 6x \cos 12x \cos 24x)^2$$

اکنون عبارت داخل پرانتز را در $\sin 3x$ ضرب و تقسیم می‌کنیم

$$f(x) = 16 \frac{(\sin 3x \cos 3x \cos 6x \cos 12x \cos 24x)^2}{\sin^2 3x}$$

از اتحاد مثلثاتی $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ به دست می‌آید

$$\sin 3x \cos 3x = \frac{1}{2} \sin 6x$$

$$f(x) = 16 \left(\frac{\frac{1}{2} \sin 6x \cos 6x \cos 12x \cos 24x}{\sin 3x} \right)^2$$

به طور مشابه $\sin 6x \cos 6x = \frac{1}{2} \sin 12x$ پس

$$f(x) = 16 \left(\frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin 12x \cos 12x \cos 24x}{\sin 3x} \right)^2$$

به طور مشابه با انجام دو مرحله دیگر عبارت را به ساده‌ترین صورت می‌نویسیم.

$$f(x) = 16 \left(\frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin 24x \cos 24x}{\sin 3x} \right)^2$$

$$= 16 \left(\frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin 48x}{\sin 3x} \right)^2 = \frac{\sin^2 48x}{16 \sin^2 3x}$$

پاسخ کنکور سراسری ۱۴۰۰

۲۰۶۱ عبارت مورد نظر را A می‌نامیم. در این صورت

$$\begin{aligned} A &= (a^2 + b^2 - 2ab)^2 (a^2 + b^2 + 2ab)^2 = ((a-b)^2)^2 ((a+b)^2)^2 \\ &= (((a-b)(a+b))^2)^2 \end{aligned}$$

از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم.

اکنون توجه کنید که

$$a^2 = (\sqrt{\sqrt{6}-2})^2 = \sqrt{6}-2, \quad b^2 = (\sqrt{\sqrt{6}+2})^2 = \sqrt{6}+2$$

$$a^2 b^2 = (\sqrt{\sqrt{6}-2})^2 \times (\sqrt{\sqrt{6}+2})^2 = \sqrt{6-2} \times \sqrt{6+2}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)} = \sqrt{6-4} = \sqrt{2}$$

$$A = (a^4 - 2a^2 b^2 + b^4)^2 = (\sqrt{6}-2-2\sqrt{2}+\sqrt{6}+2)^2$$

بنابراین

$$= (2\sqrt{6}-2\sqrt{2})^2 = 4(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2 = 4(6+2-2\sqrt{12})$$

$$A = 4(8-4\sqrt{3}) = 16(2-\sqrt{3})$$

چون $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ پس

۲۰۶۲ فرض می‌کنیم $\sqrt{x} = t$. در این صورت معادله مورد نظر به شکل

$$(t^2 + \frac{1}{t^2} + 1)(t^2 - 1) = 2t \Rightarrow \left(\frac{t^4 + 1 + t^{-2}}{t^2}\right)(t^2 - 1) = 2t$$

مقابل در می‌آید:

برای اینکه معادله را ساده کنیم، دو طرف آن را در t^2 ضرب می‌کنیم

$$(t^4 + t^2 + 1)(t^2 - 1) = 2t^3$$

اکنون توجه کنید که می‌توانیم سمت چپ معادله را به کمک اتحاد جاق و لاغر ساده

$$(t^4 + t^2 + 1)(t^2 - 1) = 2t^3 \Rightarrow (t^4 - 1) + (t^2 - 1) = 2t^3 \quad (*)$$

کنیم

چون $\sqrt{x} = t$ پس $x = t^2$ ، در نتیجه معادله (*) می‌شود $x^2 - 2x - 1 = 0$ که

$$\text{مجموع جواب‌های آن برابر است با } -\frac{(-2)}{1} = 2$$

۲۰۶۳ روش اول: توجه کنید که چون x_1 و x_2 جواب‌های معادله

$$x^2 + x - 5 = 0$$

مجموع جواب‌های معادله جدید را به صورت زیر حساب کنیم:

$$S = \frac{1}{(x_1+1)^3} + \frac{1}{(x_2+1)^3} \xrightarrow{\text{مرخ مشترک}} S = \frac{(x_1+1)^3 + (x_2+1)^3}{(x_1+1)^3 (x_2+1)^3}$$

از اتحاد $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ استفاده می‌کنیم و صورت کسر را

به صورت زیر می‌نویسیم:

$$S = \frac{(x_1 + 1 + x_2 + 1)^3 - 3(x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_1 + 1 + x_2 + 1)}{((x_1 + 1)(x_2 + 1))^3}$$

$$= \frac{(x_1 + x_2 + 2)^3 - 3(x_1 + x_2 + x_1 x_2 + 1)(x_1 + x_2 + 2)}{(x_1 + x_2 + x_1 x_2 + 1)^3}$$

$$= \frac{(-1+2)^3 - 3(-1-5+1)(-1+2)}{(-1-5+1)^3} = \frac{1-3(-5)(1)}{(-5)^3} = -\frac{16}{125}$$

همچنین حاصل ضرب جواب‌های معادله جدید به صورت زیر به دست می‌آید:

$$P = \frac{1}{(x_1+1)^3} \times \frac{1}{(x_2+1)^3} = \frac{1}{((x_1+1)(x_2+1))^3}$$

$$= \frac{1}{(x_1 + x_2 + x_1 x_2 + 1)^3} = \frac{1}{(-1-5+1)^3} = -\frac{1}{125}$$

بنابراین معادله مورد نظر به صورت $x^2 + \frac{16}{125}x - \frac{1}{125} = 0$ است، که اگر دو طرف آن

را در 125 ضرب کنیم، می‌شود $125x^2 + 16x - 1 = 0$.

بنابراین

اکنون مقدار $\sin \alpha$ را به دست می آوریم

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{1 - \sin^2 \alpha} \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{9}{16}}$$

$$= 1 - \frac{1}{\frac{25}{16}} = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

چون انتهای کمان α در ناحیه سوم مثلثاتی است، پس $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ در نتیجه

عبارت مورد نظر می شود

$$\frac{2(-\frac{3}{5})(2(-\frac{3}{5})-1)}{5} = \frac{-\frac{6}{5}(-\frac{6}{5}-1)}{5} = \frac{\frac{6}{5} \times \frac{11}{5}}{5} = \frac{66}{125}$$

$$1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} \quad \frac{7}{16} \quad \frac{7}{16}$$

می توان نوشت **۲۰۶۶**

$$\cos^2 x - \sin^2 x \cos 2x = 1 \Rightarrow 1 - \cos^2 x + \sin^2 x \cos 2x = 0$$

$$\sin^2 x + \sin^2 x \cos 2x = 0 \Rightarrow \sin^2 x (1 + \cos 2x) = 0$$

$$\begin{cases} \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \cos 2x = -1 \Rightarrow 2x = (2k+1)\pi \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

برای اینکه جواب های در بازه $[0, 2\pi]$ را پیدا کنیم، جدول زیر را تشکیل می دهیم:

k	۰	۱	۲	۳
$k\pi$	۰	π	2π	$\cancel{3\pi}$
$\frac{(2k+1)\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{2}$

از این جدول معلوم می شود که جواب های مورد نظر $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ و 2π هستند، که تعداد آن ها پنج تا است.**۲۰۶۷** روش اول:توجه کنید که $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ که در آن $g(x) = \log_4(x^2 - x - 2)$ و
 $h(x) = \sqrt{x^2 - 1} + 1$ برای پیدا کردن دامنه تابع f ، دامنه تابع های g و h را به دست می آوریم، از آن ها اشتراک می گیریم و در آخر جواب های معادله $h(x) = 0$ را از آن حذف می کنیم، یعنی

$$D_f = (D_g \cap D_h) - \{x \mid x \in D_h, h(x) = 0\}$$

برای پیدا کردن دامنه تابع g باید نامعادله $x^2 - x - 2 > 0$ را حل کنیم:

$$x^2 - x - 2 > 0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (x-2)(x+1) > 0 \Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 2$$

پس $D_g = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$. از طرف دیگر، برای پیدا کردن دامنه تابع h باید

$$x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1$$

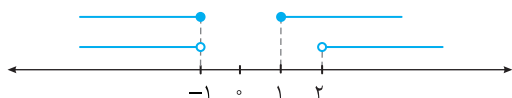
پس نامعادله $x^2 - 1 \geq 0$ را حل کنیم: $D_h = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. توجه کنید که معادله $h(x) = 0$ جواب ندارد، زیرا

$$\sqrt{x^2 - 1} + 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 1} = -1$$

بنابراین همواره مثبت است.

$$D_f = ((-\infty, -1) \cup (2, +\infty)) \cap ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$$

$$= (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$$



$$f\left(\frac{\pi}{36}\right) = \frac{\sin^2 \frac{4\pi}{36} \sin^2 \frac{4\pi}{36} \sin^2(\pi + \frac{\pi}{36})}{16 \sin^2 \frac{2\pi}{36} 16 \sin^2 \frac{2\pi}{36} 16 \sin^2 \frac{2\pi}{36}} \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$f\left(\frac{\pi}{36}\right) = \frac{(-\sin \frac{\pi}{36})^2 \sin^2 \frac{\pi}{36} (\sqrt{3})^2}{16(1 - \cos \frac{2\pi}{36})^2 16(1 - \cos \frac{2\pi}{36}) 16(1 - \cos \frac{2\pi}{36})} = \frac{3}{4(2 - \sqrt{3})}$$

در نهایت صورت و مخرج را در مزدوج $2 - \sqrt{3}$ ، یعنی $2 + \sqrt{3}$ ضرب می کنیم

$$f\left(\frac{\pi}{36}\right) = \frac{3}{16(2 - \sqrt{3})} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{3(2 + \sqrt{3})}{16(4 - 3)} = \frac{6 + 3\sqrt{3}}{16}$$

روش سوم: عبارت $f(x)$ را به شکل زیر ساده می کنیم:

$$f(x) = (2 \cos^2 3x)(2 \cos^2 6x)(2 \cos^2 12x)(2 \cos^2 24x)$$

$$= (1 + \cos 6x)(1 + \cos 12x)(1 + \cos 24x)(1 + \cos 48x)$$

بنابراین

$$f\left(\frac{\pi}{36}\right) = (1 + \cos \frac{6\pi}{36})(1 + \cos \frac{12\pi}{36})(1 + \cos \frac{24\pi}{36})(1 + \cos \frac{48\pi}{36})$$

$$= (1 + \cos \frac{\pi}{6})(1 + \cos \frac{\pi}{3})(1 + \cos \frac{2\pi}{3})(1 + \cos \frac{4\pi}{3})$$

$$= (1 + \frac{\sqrt{3}}{2})(1 + \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{2}) = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{6 + 3\sqrt{3}}{16}$$

۲۰۶۵ روش اول:

$$\cos(2\alpha - \frac{\pi}{4}) = \sin 2\alpha, \quad \cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$$

توجه کنید که

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{\sin 2\alpha - \cos \alpha}{\cot 2\alpha}$. اکنون مقادیر $\cos \alpha$ و $\sin 2\alpha$ را حساب می کنیم. می توان نوشت

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \xrightarrow{\tan \alpha = \frac{3}{4}} 1 + \frac{9}{16} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25}$$

چون انتهای کمان α در ناحیه سوم مثلثاتی است، پس $\cos \alpha < 0$. یعنی $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ از طرف دیگر،

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{2(\frac{3}{4})}{1 + \frac{9}{16}} = \frac{24}{25}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1 - \frac{9}{16}}{1 + \frac{9}{16}} = \frac{7}{25}, \quad \cot 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{7}{24}$$

$$\frac{\sin 2\alpha - \cos \alpha}{\cot 2\alpha} = \frac{\frac{24}{25} + \frac{4}{5}}{\frac{7}{24}} = \frac{106}{175}$$

در نتیجه، عبارت مورد نظر برابر است با

$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1 + \tan^2 \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

بنابراین عبارت داده شده را می توان این طور نوشت

$$\frac{\cos(2\alpha - \frac{\pi}{4}) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha - \cos \alpha}{\cot 2\alpha}$$

$$= \tan 2\alpha (2 \sin \alpha \cos \alpha - \cos \alpha)$$

$$= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \times \cos \alpha (2 \sin \alpha - 1) = \frac{2 \sin \alpha (2 \sin \alpha - 1)}{1 - \tan^2 \alpha}$$

بنابراین نقطه برخورد منحنی‌ها $(\sqrt{6}, 3)$ است، که فاصله‌اش از مبدأ برابر است با

$$\sqrt{(\sqrt{6})^2 + 3^2} = \sqrt{6+9} = \sqrt{15}$$

روش دوم: با توجه به ضابطه منحنی $X = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3}$ ، متوجه می‌شویم که

$y \geq 3$. اکنون اگر در ضابطه‌های داده شده قرار دهیم $y = 3$ ، برای هر دو به دست می‌آید

$X = \sqrt{6}$. یعنی $(\sqrt{6}, 3)$ نقطه تلاقی دو منحنی است که فاصله آن از مبدأ مختصات

$$\text{برابر است با } \sqrt{(\sqrt{6})^2 + 3^2} = \sqrt{15}.$$

۲۰۷۰ در صورت از 3^x و در مخرج از 2^{x-2} فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{3^x(1+3+3^2+3^3+3^4+3^5)}{2^{x-2}(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5)} = 52 \Rightarrow \frac{3^x \times 364}{2^{x-2} \times 63} = 52$$

$$\frac{3^{x-2} \times 9 \times 52 \times 7}{2^{x-2} \times 9 \times 7} = 52 \Rightarrow \frac{3^{x-2}}{2^{x-2}} = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x-2} = 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^0$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

۲۰۷۱ توجه کنید که

$$y = 2|\sin x| \xrightarrow{\text{به راست}} y = 2\left|\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right|$$

توجه کنید که $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$ پس

$$y = 2|-\cos x| = 2|\cos x| \xrightarrow{\text{به پایین}} y = 2|\cos x| - \frac{3}{2}$$

برای پیدا کردن تعداد نقاط برخورد نمودار تابع بالا با محور X در فاصله $[0, \pi]$ ، باید تعداد

جواب‌های معادله $2|\cos x| - \frac{3}{2} = 0$ را در این فاصله پیدا کنیم. اکنون با استفاده از

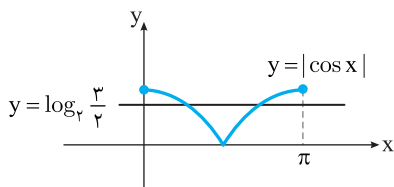
تعریف تابع لگاریتم داریم

$$2|\cos x| - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow 2|\cos x| = \frac{3}{2} \Rightarrow |\cos x| = \log_2 \frac{3}{2}$$

توجه کنید که $\log_2 1 < \log_2 \frac{3}{2} < \log_2 2$ ، پس $0 < \log_2 \frac{3}{2} < 1$. اکنون تعداد نقاط

برخورد خط $y = \log_2 \frac{3}{2}$ و نمودار تابع $y = |\cos x|$ را روی بازه $[0, \pi]$ از روی شکل

زیر پیدا می‌کنیم، که دو تا است.



۲۰۷۲ اگر فرض کنیم $a = \log_x y$ ، آن‌گاه $\frac{1}{a} = \log_y x$. بنابراین از

تساوی داده شده به دست می‌آید

$$a - 2\left(\frac{1}{a}\right) = 1 \xrightarrow{\times a} a^2 - 2 = a \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0$$

به کمک اتحاد جمله مشترک عبارت بالا را تجزیه می‌کنیم

$$(a+1)(a-2) = 0 \Rightarrow a = -1, a = 2$$

چون $x, y > 1$ ، پس $a = \log_x y > 0$. در نتیجه فقط $a = 2$ قابل قبول است، پس

$$\log_x y = 2 \Rightarrow y = x^2$$

روش دوم: توجه کنید که عدد ۳ در دامنه تابع f است، زیرا

$$f(3) = \frac{\log_f(9-3-2)}{\sqrt{9-1+1}} = \frac{\log_f 4}{\sqrt{8+1}} = \frac{1}{2\sqrt{2+1}}$$

پس گزینه‌های (۲) و (۴) حذف می‌شوند، زیرا عدد ۳ عضو آن‌ها نیست. از طرف دیگر، چون عدد ۲ عضو مجموعه گزینه (۱) نیست، ولی عضو مجموعه گزینه (۳) است، پس کافی است ببینیم ۲ در دامنه تابع f هست یا خیر. توجه کنید که

$$f(2) = \frac{\log_f(4-2-2)}{\sqrt{4-1+1}} = \frac{\log_f 0}{\sqrt{3+1}}$$

چون $\log_f 0$ تعریف نشده است، پس عدد ۲ در دامنه تابع f نیست، یعنی گزینه (۳) نیز حذف می‌شود. بنابراین گزینه (۱) دامنه تابع f است.

۲۰۶۸ **روش اول:** توجه کنید که

$$-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \xrightarrow{\times 2} -1 \leq 2x < 1$$

بنابراین

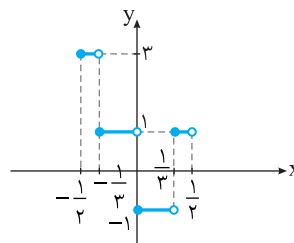
$$-\frac{1}{2} \leq 2x < 1 \Rightarrow \begin{cases} [2x] = -1 \\ -1 \leq 2x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 2|-1|-1 = 1$$

$$-\frac{1}{2} \leq 2x < 0 \Rightarrow \begin{cases} [2x] = 0 \\ 0 \leq 2x < \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow f(x) = 2|0|-1 = -1$$

$$0 \leq 2x < \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} [2x] = 1 \\ \frac{1}{2} \leq 2x < 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 2|1|-1 = 1$$

$$1 \leq 2x < \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} [2x] = -1 \\ 1 \leq 2x < \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow f(x) = 2|-1|-1 = -1$$

در نتیجه نمودار تابع f به صورت زیر است:



روش دوم: توجه کنید که اگر $x \rightarrow 0^-$ ، آن‌گاه $3^x \rightarrow 0^-$ ، پس $[3^x] = -1$. در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2|[3^x]| - 1) = 2|-1| - 1 = 1$$

همچنین اگر $x \rightarrow 0^+$ ، آن‌گاه $3^x \rightarrow 0^+$ ، پس $[3^x] = 0$. در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2|[3^x]| - 1) = 2|0| - 1 = -1$$

فقط گزینه (۲) این شرایط را دارد.

۲۰۶۹ **روش اول:**

$$\begin{cases} 2y = x^2 \\ \text{نقطه برخورد منحنی‌ها جواب دستگاه مقابل است:} \\ x = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3} \end{cases}$$

دو طرف معادله دوم را به جای x^2 قرار می‌دهیم:

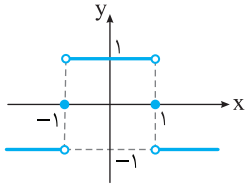
$$x^2 = (\sqrt{y+3} - \sqrt{y-3})^2 \Rightarrow 2y = y+3+y-3-2\sqrt{(y+3)(y-3)}$$

$$2y = 2y - 2\sqrt{y^2-9} \Rightarrow -2\sqrt{y^2-9} = 0 \Rightarrow y^2-9=0 \Rightarrow y=3$$

توجه کنید که چون $2y = x^2 \geq 0$ ، پس فقط $y=3$ قابل قبول است. در نتیجه

$$x = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3} = \sqrt{6} - \sqrt{0} = \sqrt{6}$$

پس نمودار تابع $g \circ f$ به صورت زیر است، که در نقاط $x = \pm 1$ ناپیوسته است.



توجه کنید که ۲۰۷۷

$$f(x) = \begin{cases} x^2(x^2-4) & x^2 \geq 4 \\ x^2-1 & x^2 < 4 \\ -x^2(x^2-4) & x^2 \leq 4, x \neq \pm 1 \end{cases}$$

از طرف دیگر، اگر $g(x) = \frac{x^2(x^2-4)}{x^2-1} = \frac{x^4-4x^2}{x^2-1}$ ، آن گاه

$$g'(x) = \frac{(4x^3-8x)(x^2-1) - (x^4-4x^2)(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{2x((x^2-1)^2+3)}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = \begin{cases} g'(x) & x > 2 \text{ یا } x < -2 \\ -g'(x) & -2 < x < 2, x \neq \pm 1 \end{cases} \quad \text{بنابراین}$$

توجه کنید که تابع f در نقطه‌های ۲ و -۲ مشتق پذیر نیست، زیرا این عددها ریشه‌های ساده عبارت داخل قدرمطلق هستند. همچنین،

$$f'(x) = 0 \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

پس نقاط بحرانی تابع f نقطه‌های ۲، -۲ و صفر هستند، که مطابق جدول زیر هر سه طول نقاط اکسترمم نسبی تابع f هستند ($x \neq \pm 1$):

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	-	+

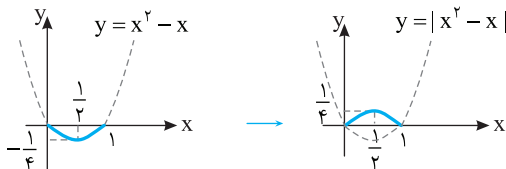
اگر مختصات نقطه A واقع بر سهمی $f(x) = x^2$ به صورت (x, x^2)

باشد، مختصات نقطه A' ، یعنی قرینه A نسبت به نیمساز نواحی اول و سوم، به صورت (x^2, x) است. بنابراین

$$AA' = \sqrt{(x-x^2)^2 + (x^2-x)^2} = \sqrt{2(x^2-x)^2} = \sqrt{2}|x^2-x| \\ = \sqrt{2} \left| x - \frac{1}{x} \right|$$

از طرف دیگر، چون طول نقطه A بین دو طول متوالی از محل برخورد تابع f با خط نیمساز نواحی اول و سوم (خط $y=x$)، یعنی نقاط $(0,0)$ و $(1,1)$ قرار دارد، پس باید ماکزیمم AA' را در بازه $(0,1)$ پیدا کنیم. برای پیدا کردن ماکزیمم تابع

$y = |x^2 - x|$ در بازه $(0,1)$ از روش رسم نمودار تابع استفاده می‌کنیم.



بنابراین بیشترین مقدار AA' در بازه $(0,1)$ به ازای $x = \frac{1}{2}$ به دست می‌آید، که برابر

$$AA' = \sqrt{2} \left| \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right| = \sqrt{2} \times \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$
 می‌شود یا

ابتدا توجه کنید که ۲۰۷۹

$$(f \circ g)' \left(\frac{3}{\sqrt{\lambda}} \right) = g' \left(\frac{3}{\sqrt{\lambda}} \right) f' \left(g \left(\frac{3}{\sqrt{\lambda}} \right) \right)$$

عبارت \sqrt{x} را در پرانتز ضرب می‌کنیم و حد می‌گیریم.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(\sqrt{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x}} - \sqrt{\frac{x}{x^2} - \frac{x}{x^2+1}} \right) = \sqrt{1+1} - \sqrt{0-0} = \sqrt{2}$$

روش اول ۲۰۷۴

اگر $x \rightarrow \frac{\pi}{6}^-$ ، آن گاه $\sin x \rightarrow \frac{1}{2}^-$ و در نتیجه $2 \sin x \rightarrow 1^-$ ، پس

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^-} [2 \sin x - 1] = -1 \quad \text{یعنی} \quad [2 \sin x - 1] = -1 \quad \text{بنابراین} \quad 2 \sin x - 1 \rightarrow 0^-$$

روش دوم

چون به ازای هر x و هر عدد صحیح k ، $[x+k] = [x] + k$ ، پس $[2 \sin x - 1] = [2 \sin x] - 1$. اکنون به نمودار تابع $y = 2 \sin x$ در شکل مقابل توجه کنید. از روی این نمودار معلوم می‌شود که

$$x \rightarrow \frac{\pi}{6}^- \Rightarrow 0 < 2 \sin x < 1 \Rightarrow [2 \sin x] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^-} ([2 \sin x] - 1) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^-} (0 - 1) = -1 \quad \text{بنابراین}$$

روش اول ۲۰۷۵

ابتدا توجه کنید که برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون، x را بر حسب y به دست می‌آوریم

$$f(x) = y = 2 + \sqrt{x-1} \Rightarrow y - 2 = \sqrt{x-1} \rightarrow \text{به توان دو}$$

$$(y-2)^2 = x-1 \Rightarrow x = (y-2)^2 + 1$$

بنابراین $f^{-1}(x) = (x-2)^2 + 1$. اگر این نمودار را ۲ واحد در جهت مثبت محور x و سپس

۳ واحد در جهت منفی محور y انتقال دهیم، نمودار تابع $g(x) = f^{-1}(x-2) - 3$ به دست

$$\text{می‌آید. بنابراین} \quad g(4) = f^{-1}(4-2) - 3 = f^{-1}(2) - 3 = (2-2)^2 + 1 - 3 = -2$$

روش دوم: قرینه نمودار تابع $f(x) = 2 + \sqrt{x-1}$ نسبت به خط $y=x$ نمودار تابع

f^{-1} است. بنابراین $g(x) = f^{-1}(x-2) - 3$. قرار می‌دهیم $g(4) = a$ و از تعریف

تابع معکوس استفاده می‌کنیم. در نتیجه

$$g(4) = f^{-1}(4-2) - 3 = a \Rightarrow f^{-1}(2) = a+3 \rightarrow \text{تعریف تابع وارون}$$

$$f(a+3) = 2$$

$$2 + \sqrt{a+3-1} = 2 \Rightarrow \sqrt{a+2} = 0 \Rightarrow a = -2$$

پس

۲۰۷۶

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} 1 & f(x) > 0 \\ 0 & f(x) = 0 \\ -1 & f(x) < 0 \end{cases} \quad \text{توجه کنید که}$$

از طرف دیگر، جدول تعیین علامت $f(x)$ به صورت زیر است:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$1-x^2$		-	+	-

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 1 & x \in (-1, 1) \\ 0 & x = \pm 1 \\ -1 & x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \end{cases} \quad \text{بنابراین}$$

۲۰۸۳ ابتدا توجه کنید که چون a ، b و c مثبت هستند، پس $\Delta = b^2 - 4a(-c) = b^2 + 4ac > 0$. بنابراین معادله مورد نظر همواره جواب دارد. اکنون توجه کنید که چون مجموع جواب‌های هر معادله از حاصل ضرب آن‌ها دو واحد بیشتر است، پس

$$- \frac{b}{a} = - \frac{c}{a} + 2 \xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } a} -b = -c + 2a \Rightarrow c - b = 2a$$

چون $2a$ عددی زوج است، پس b و c یا هر دو زوج هستند یا هر دو فرد. همچنین چون $c - b = 2a > 0$ ، پس $c > b$. توجه کنید که در مجموعه $\{1, 2, \dots, 9\}$ ، اعداد

$2, 4, 6, 8$ زوج هستند. پس دو عدد زوج را به $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ طریق می‌توانیم انتخاب کنیم

(که عدد بزرگ‌تر را c و عدد کوچک‌تر را b در نظر می‌گیریم). همین‌طور، در مجموعه $\{1, 2, \dots, 9\}$ عددهای $1, 3, 5, 7, 9$ فرد هستند. پس دو عدد فرد را به $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

طریق می‌توانیم انتخاب کنیم (که باز هم عدد بزرگ‌تر را c و عدد کوچک‌تر را b در نظر می‌گیریم). با معلوم شدن b و c ، عدد a نیز به‌طور خودکار معلوم می‌شود. بنابراین طبق

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 6 + 10 = 16 \quad \text{اصل جمع. پاسخ مسئله برابر است با}$$

۲۰۸۴ **روش اول:** دانش‌آموزان باید یکی در میان بنشینند. ابتدا، مثلاً، چهار دانش‌آموز پایه یازدهم را دور میز گرد می‌نشانیم. این کار به $6 = (4-1)!$ حالت امکان‌پذیر است. اکنون چهار صندلی خالی بین آن‌ها داریم که چهار دانش‌آموز پایه دوازدهم به $4!$ حالت می‌توانند روی آن‌ها بنشینند. بنابراین طبق اصل ضرب، پاسخ مسئله برابر است با $6 \times 4! = 144$.

روش دوم: ابتدا فرض کنید این دانش‌آموزان بخواهند در یک ردیف کنار هم و به‌صورت یکی در میان بنشینند. در این صورت طبق تعمیم اصل ضرب، تعداد راه‌های قرار گرفتن آن‌ها برابر است با $4! \times 4! = 24 \times 24$. اکنون اگر این دانش‌آموزان دور یک میز گرد قرار بگیرند، چون نفرات ابتدا و انتها برای آن‌ها معنی ندارد، پس تعداد راه‌های قرار گرفتن آن‌ها $\frac{1}{8}$ برابر حالت قبل خواهد بود. در نتیجه پاسخ مسئله برابر است با

$$\frac{1}{8} \times 24 \times 24 = 144$$

۲۰۸۵ تعداد کل عضوهای زیرمجموعه مورد نظر، یعنی S به این صورت به‌دست می‌آید. واضح است که تعداد اعداد طبیعی یک‌رقمی که با ارقام ۱ تا ۵ می‌توان ساخت، ۵ تاست. برای به‌دست آوردن تعداد اعداد دورقمی (بدون تکرار ارقام) دو جایگاه یکان و دهگان به‌صورت $\bigcirc \bigcirc$ در نظر می‌گیریم. برای جایگاه دهگان ۵ انتخاب یکان دهگان

(هریک از ارقام ۱ تا ۵) و برای جایگاه یکان ۴ انتخاب وجود دارد. توجه کنید رقمی را که برای دهگان انتخاب شد، برای یکان نمی‌توان انتخاب کرد. در نتیجه بنا بر اصل ضرب، تعداد اعداد دورقمی با شرایط مورد نظر برابر $5 \times 4 = 20$ است. برای به‌دست آوردن تعداد اعداد سه‌رقمی سه جایگاه $\bigcirc \bigcirc \bigcirc$ را در نظر می‌گیریم که برای جایگاه اول ۵ انتخاب، برای جایگاه دوم ۴ انتخاب (عدد جایگاه اول را نمی‌توانیم انتخاب کنیم) و برای جایگاه سوم ۳ انتخاب (عددهای جایگاه‌های اول و دوم را نمی‌توانیم انتخاب کنیم) وجود دارد. پس بنا بر تعمیم اصل ضرب، تعداد اعداد سه‌رقمی با شرایط مورد نظر برابر است با $5 \times 4 \times 3 = 60$. به‌طور مشابه تعداد اعداد چهاررقمی و پنج‌رقمی به‌ترتیب برابر $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ و $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ است. خلاصه توضیح بالا در جدول زیر آمده است:

تعداد رقم‌ها	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد عددها	۵	5×4	$5 \times 4 \times 3$	$5 \times 4 \times 3 \times 2$	$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$$n(S) = 5 + 20 + 60 + 120 + 120 = 325 \quad \text{بنابراین طبق تعمیم اصل جمع،}$$

توجه کنید که $g\left(\frac{3}{\sqrt{\lambda}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{\lambda}}\right)^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{\lambda} - 1}} = 2$. پس باید مقدار $g\left(\frac{3}{\sqrt{\lambda}}\right) f'\left(\frac{3}{\sqrt{\lambda}}\right)$ را به‌سادگی می‌توان حساب کرد

$$g(x) = (x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow g'(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)(2x)(x^2 - 1)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{x}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$g'\left(\frac{3}{\sqrt{\lambda}}\right) = -\frac{\frac{3}{\sqrt{\lambda}}}{\left(\frac{9}{\lambda} - 1\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{3}{\lambda \sqrt{\lambda}}$$

برای پیدا کردن مقدار $f'(2)$ ابتدا ضابطه تابع f را در یک همسایگی نقطه $x = 2$ پیدا می‌کنیم.

$$x \rightarrow 2 \Rightarrow x^2 \rightarrow 4 \Rightarrow 4 < x^2 + \frac{1}{x} < 5 \Rightarrow \left[x^2 + \frac{1}{x}\right] = 4$$

در نتیجه $f(x) = (4x)^2 + 1 = 16x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 32x \Rightarrow f'(2) = 64$

$$(f \circ g)'\left(\frac{3}{\sqrt{\lambda}}\right) = (-8\sqrt{2})(64) = -512\sqrt{2} \quad \text{بنابراین}$$

۲۰۸۰ توجه کنید که $g'(x) = 2ax + b$ و $g''(x) = 2a$. از طرف دیگر،

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq k \\ g'(x) & x < k \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} g'(x) & x \geq k \\ g''(x) & x < k \end{cases}$$

چون تابع f در نقطه $x = k$ مشتق‌پذیر است، پس

$$g(k) = g'(k) \Rightarrow ak^2 + bk + c = 2ak + b$$

$$g'(k) = g''(k) \Rightarrow 2ak + b = 2a \Rightarrow b = 2a - 2ak$$

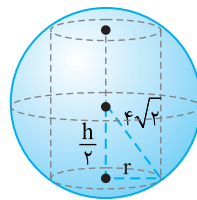
اکنون از تساوی $b = 2a - 2ak$ و شرط $b + c = a$ می‌توان نتیجه گرفت

$$ak^2 + bk + a - b = 2a \Rightarrow ak^2 + (2a - 2ak)k + a - (2a - 2ak) = 2a$$

$$a(k^2 + 2k - 2k^2 + 1 - 2 + 2k) = 2a \xrightarrow{a \neq 0} -k^2 + 4k - 1 = 2$$

$$k^2 - 4k + 3 = 0 \xrightarrow{\text{انحاد جمله مشترک}} (k-1)(k-3) = 0 \Rightarrow k = 1, k = 3$$

پس بیشترین مقدار k برابر با ۳ است.



۲۰۸۱ شکل مقابل را ببینید. مساحت

جانبی استوانه برابر است با $S = 2\pi rh$. از طرف

دیگر، بنا بر قضیه فیثاغورس،

$$r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = (4\sqrt{2})^2 \Rightarrow r^2 = 32 - \frac{h^2}{4}$$

$$r = \sqrt{32 - \frac{h^2}{4}}$$

$$S = 2\pi \sqrt{32 - \frac{h^2}{4}} \times h = 2\pi \sqrt{(128 - h^2)h^2} = \pi \sqrt{-h^4 + 128h^2}$$

برای اینکه S ماکزیمم باشد، باید $-h^4 + 128h^2$ ماکزیمم باشد. توجه کنید که

$$y = -h^4 + 128h^2 \Rightarrow y' = -4h^3 + 256h$$

$$y' = 0 \Rightarrow -4h(h^2 - 64) = 0 \Rightarrow h^2 = 64$$

بنابراین ماکزیمم S به‌ازای $h^2 = 64$ به‌دست می‌آید. که برابر است با

$$S = \pi \sqrt{-64^2 + 128 \times 64} = 64\pi$$

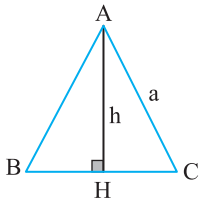
۲۰۸۲ فرض می‌کنیم A پیشامد این باشد که دانش‌آموز در امتحان اول قبول

شود و B پیشامد این باشد که دانش‌آموز در امتحان دوم قبول شود. در این صورت

$$P(A \cap B) = 0/85 \quad \text{و} \quad P(A) = P(B) = 0/9$$

می‌خواهیم $P(A|B)$ را حساب کنیم. توجه کنید که طبق فرمول احتمال شرطی می‌توان نوشت

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0/85}{0/9} = \frac{85}{90} = \frac{17}{18}$$



۲۰۸۷ (۲) توجه کنید که $\sqrt{\frac{3}{4}}a = h$ ، پس

$$3a = \frac{3 \times 2h}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}h \quad \text{در نتیجه } a = \frac{2}{\sqrt{3}}h$$

یعنی $3a = 2\sqrt{3}h$ محیط مثلث. از طرف دیگر، چون محیط مثلث برابر $\sqrt{270}$ است، پس

$$2\sqrt{3}h = \sqrt{270} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{270}}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{2}\sqrt{10}$$

اگر مختصات نقطه A به صورت (a, b) باشد، آن گاه

$$h = AH = \frac{|3a - b - 5|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{|3a - b - 5|}{\sqrt{10}} = \frac{3}{2}\sqrt{10}$$

$$|3a - b - 5| = \frac{3}{2}\sqrt{10} \times \sqrt{10} = 15 \quad (*)$$

از طرف دیگر، شیب خطی که ضلع BC روی آن است، برابر ۳ است. پس شیب خطی که ارتفاع AH روی آن است، برابر $-\frac{1}{3}$ است. به این ترتیب،

$$\frac{b-1}{a-2} = -\frac{1}{3} \Rightarrow 3b - 3 = 2 - a \Rightarrow a = 5 - 3b$$

بنابراین اگر در تساوی (*) به جای a قرار دهیم $5 - 3b$ ، به دست می‌آید

$$|3(5 - 3b) - b - 5| = 15$$

$$|10 - 10b| = 15 \Rightarrow \begin{cases} 10 - 10b = 15 \\ 10 - 10b = -15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{13}{2} \\ b = \frac{5}{2} \Rightarrow a = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

در نتیجه A می‌تواند یکی از نقطه‌های $(\frac{13}{2}, -\frac{1}{2})$ و $(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$ باشد.

۲۰۸۸ (۱)

توجه کنید که

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{معادله دوم را از معادله اول کم می‌کنیم}}$$

$$2y - 3 - (2x - 3) = 0 \Rightarrow 2y - 2x = 0 \Rightarrow y = x$$

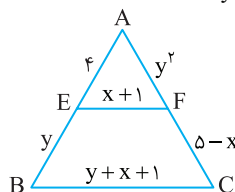
۲۰۸۹ (۱)

بنابر تعمیم قضیه تالس،

$$\frac{4}{4+y} = \frac{x+1}{y+x+1} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{4}{y} = \frac{x+1}{y} \Rightarrow 4 = x+1 \Rightarrow x = 3$$

$$\frac{4}{y} = \frac{y^2}{5-x} \xrightarrow{x=3} \frac{4}{y} = \frac{y^2}{2} \Rightarrow y^3 = 8 \Rightarrow y = 2$$

بنابراین $y - 2x = 2 - 6 = -4$.

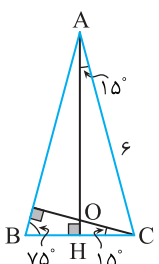


۲۰۹۰ (۴) روش اول:

ابتدا توجه کنید که چون مثلث ABC متساوی الساقین است، پس $\hat{ACB} = \hat{ABC} = 75^\circ$ ، در نتیجه در مثلث قائم‌الزاویه AHC،

$$\hat{HAC} = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$$

$$\sin 15^\circ = \frac{HC}{AC} \Rightarrow HC = 6 \sin 15^\circ$$



اکنون اگر A این پیشامد باشد که عضو انتخابی بر ۴ بخش پذیر باشد، آن گاه تعداد اعضای A به این صورت به دست می‌آید. از میان اعداد یک‌رقمی ۱ تا ۵، فقط عدد ۴ بر ۴ بخش پذیر است. از میان اعداد دورقمی عضو S، فقط اعداد ۱۲، ۲۴، ۳۲ و ۵۲ بر ۴ بخش پذیرند. توجه کنید که یک عدد زمانی بر ۴ بخش پذیر است که عدد حاصل از دو رقم سمت راست آن بر ۴ بخش پذیر باشد، پس برای به دست آوردن تعداد اعداد سه‌رقمی، چهاررقمی و پنج‌رقمی عضو S و بخش پذیر بر ۴ دو رقم سمت راست را اعداد ۱۲، ۲۴، ۳۲ و ۵۲ در نظر می‌گیریم، سپس تعداد انتخاب‌های جایگاه‌های دیگر را می‌شماریم. مثلاً برای به دست آوردن تعداد اعداد چهاررقمی بخش پذیر بر ۴ که دو رقم سمت راست آن ۱۲ است، باید تعداد انتخاب‌های دو جایگاه را به دست آوریم: 0012 برای جایگاه اول انتخاب وجود دارد چون رقم‌های ۱ و ۲ را نمی‌توانیم انتخاب کنیم. برای جایگاه دوم ۲ انتخاب وجود دارد چون رقم‌های ۱ و ۲ رقمی را که برای جایگاه اول انتخاب شد، نمی‌توانیم انتخاب کنیم. در نتیجه بنابر اصل ضرب، تعداد اعداد چهاررقمی بخش پذیر بر ۴ که دو رقم سمت راست آن‌ها ۱۲ است، برابر 3×2 است. توضیح بالا در جدول زیر جمع بندی شده است:

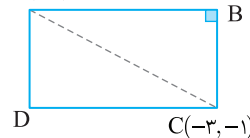
تعداد رقم‌ها	۱	۲	۳	۴	۵
شکل کلی عدد	۴	۱۲	۰۱۲	۰۰۱۲	۰۰۰۱۲
		۲۴	۰۲۴	۰۰۲۴	۰۰۰۲۴
		۳۲	۰۳۲	۰۰۳۲	۰۰۰۳۲
		۵۲	۰۵۲	۰۰۵۲	۰۰۰۵۲
تعداد عددها	۱	۴	4×3	$4 \times 3 \times 2$	$4 \times 3 \times 2 \times 1$

$$n(A) = 1 + 4 + 12 + 24 + 24 = 65$$

بنابراین طبق تعمیم اصل جمع،

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{65}{325} = \frac{1}{5}$$

A(۲, ۴)



۲۰۸۶ (۳) روش اول:

ابتدا معادله خطی را که ضلع AB روی آن است، می‌نویسیم

$$y - 4 = 3(x - 2) \Rightarrow 3x - y - 2 = 0$$

فاصله نقطه C از خط به دست آمده برابر

$$CB = \frac{|3(-3) - (-1) - 2|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

است با

$$AC = \sqrt{(2+3)^2 + (4+1)^2} = \sqrt{50}$$

از طرف دیگر،

اکنون با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث ABC، طول AB به دست می‌آوریم

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow AB^2 + 10 = 50 \Rightarrow AB = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

پس محیط مستطیل برابر است با $2(\sqrt{10} + 2\sqrt{10}) = 6\sqrt{10}$.

روش دوم: ابتدا معادلات اضلاع AB و BC را می‌نویسیم

$$AB: 3x - y - 2 = 0$$

$$BC \perp AB \Rightarrow m_{BC} = -\frac{1}{m_{AB}} = -\frac{1}{3} \Rightarrow y - (-1) = -\frac{1}{3}(x - (-3))$$

$$BC: x + 3y + 6 = 0$$

محل تلاقی اضلاع AB و BC همان نقطه B است.

$$\begin{cases} 3x - y - 2 = 0 \\ x + 3y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(0, -2)$$

اکنون طول پاره‌خط‌های AB و BC را به دست می‌آوریم و سپس محیط مستطیل را محاسبه می‌کنیم.

$$AB = \sqrt{(2-0)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$BC = \sqrt{(0+3)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$\text{محیط مستطیل} = 2(AB + BC) = 2(2\sqrt{10} + \sqrt{10}) = 6\sqrt{10}$$

در نتیجه

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$a^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{a^{\frac{1}{4}}} + 2 = (\sqrt{3} - 4\sqrt{3}) + (\sqrt{3} + 4\sqrt{3}) + 2 = 16$$

روش دوم: ابتدا توجه کنید که

$$a = \sqrt[4]{\sqrt{3} - 4\sqrt{3}} = \sqrt[4]{(\sqrt{3} - \sqrt{3})^2} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} \Rightarrow a^2 = 2 - \sqrt{3}$$

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 + \sqrt{3}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} (a + \frac{1}{a})^2 + (a - \frac{1}{a})^2 &= ((a + \frac{1}{a})^2 - (\frac{1}{a})^2) + (a^2 + \frac{1}{a^2} - 2) \\ &= (a^2 + \frac{1}{a^2})^2 = (2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3})^2 = 16 \end{aligned}$$

۲۰۹۲ ۳ فرض می‌کنیم پول اولیه علی X و پول اولیه اکرم Y باشد. در این صورت

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ (x - 10)(y + 10) = 475 \end{cases}$$

از معادله اول به دست می‌آید $x = 100 - y$ و در نتیجه معادله دوم را می‌توان این‌طور نوشت

$$(100 - y - 10)(y + 10) = 475 \Rightarrow (90 - y)(y + 10) = 475$$

$$100(y + 10) - (y + 10)^2 = 475 \Rightarrow (y + 10)^2 - 100(y + 10) + 475 = 0$$

اگر فرض کنیم $y + 10 = A$ ، معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$A^2 - 100A + 475 = 0$$

از اتحاد جمله مشترک استفاده و سمت چپ معادله را تجزیه می‌کنیم.

$$(A - 5)(A - 95) = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 5 \Rightarrow y + 10 = 5 \Rightarrow y = -5 \text{ (غ.ق.)} \\ A = 95 \Rightarrow y + 10 = 95 \Rightarrow y = 85 \text{ تومان} \end{cases}$$

۲۰۹۳ ۱ **روش اول:** توجه کنید که چون x_1 و x_2 جواب‌های معادله

$$x^2 - x - 4 = 0 \text{ هستند، پس } x_1 + x_2 = 1 \text{ و } x_1 x_2 = -4 \text{ . اکنون می‌توانیم مجموع}$$

جواب‌های معادله جدید را به صورت زیر حساب کنیم:

$$S = (x_1^2 + \frac{1}{x_1}) + (x_2^2 + \frac{1}{x_2}) = x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$

با استفاده از اتحاد $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ و نیز مخرج مشترک گرفتن،

عبارت را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$S = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = 1 - 2(-4) + \frac{1}{-4} = \frac{51}{4}$$

همچنین حاصل ضرب جواب‌های معادله جدید به صورت زیر به دست می‌آید:

$$P = (x_1^2 + \frac{1}{x_1})(x_2^2 + \frac{1}{x_2}) = x_1^2x_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{x_1x_2}$$

$$= (x_1x_2)^2 + (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + \frac{1}{x_1x_2}$$

$$= (-4)^2 + 1 - 2(-4) + \frac{1}{-4} = -\frac{221}{4}$$

بنابراین معادله مورد نظر به صورت $x^2 - \frac{51}{4}x - \frac{221}{4} = 0$ است. که اگر دو طرف آن

را در ۴ ضرب کنیم، می‌شود $4x^2 - 51x - 221 = 0$

روش دوم: توجه کنید که

$$x = x^2 - 4 \Rightarrow x^2 = x + 4 \xrightarrow{\times x} x^3 = x^2 + 4x = (x + 4) + 4x = 5x + 4$$

بنابراین $x_1^3 = 5x_1 + 4$ و $x_2^3 = 5x_2 + 4$ از طرف دیگر،

$$x_1x_2 = -4 \Rightarrow \frac{1}{x_1} = -\frac{x_2}{4}, \quad \frac{1}{x_2} = -\frac{x_1}{4}$$

همین‌طور، چون $\hat{B} = 75^\circ$ ، پس $\hat{O}CB = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$. در نتیجه در مثلث

$$\tan 15^\circ = \frac{OH}{HC} \Rightarrow OH = HC \times \tan 15^\circ \quad \text{قائم‌الزاویه OHC می‌توان نوشت}$$

اکنون توجه کنید که

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \sin^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos^2 15^\circ = 1 - \sin^2 15^\circ = 1 - \frac{2 - \sqrt{3}}{4} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \Rightarrow \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

در نتیجه

صورت و مخرج کسر زیر رادیکال را در مزدوج $2 + \sqrt{3}$ ، یعنی $2 - \sqrt{3}$ ضرب

$$\tan 15^\circ = \frac{\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2}}{4 - 3} = 2 - \sqrt{3} \quad \text{می‌کنیم. به دست می‌آید}$$

بنابراین

$$HC = 6 \sin 15^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = 3\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$OH = HC \times \tan 15^\circ = 3\sqrt{2 - \sqrt{3}} \times (2 - \sqrt{3})$$

در نتیجه

$$S_{OHC} = \frac{1}{2} HC \times OH = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2 - \sqrt{3}} \times 3\sqrt{2 - \sqrt{3}}(2 - \sqrt{3})$$

$$= \frac{9}{2} (2 - \sqrt{3})^2 = \frac{9}{2} (4 - 4\sqrt{3} + 3)$$

عدد به دست آمده به این صورت در گزینه‌ها نیست. بنابراین آن را در مزدوج

$7 + 4\sqrt{3}$ ، یعنی $7 - 4\sqrt{3}$ ضرب و تقسیم می‌کنیم. پس

$$S_{OHC} = \frac{9(49 - 48)}{2(7 + 4\sqrt{3})} = \frac{9}{2(7 + 4\sqrt{3})}$$

روش دوم: مثلث‌های OHC و CHA به حالت (زز) متشابه هستند و نسبت تشابه آن‌ها برابر

$$\frac{OH}{CH} \text{ است. از طرف دیگر، } \tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3} \text{ می‌دانیم. بنابراین}$$

$$\frac{\text{مساحت (OHC)}}{\text{مساحت (CHA)}} = \left(\frac{OH}{CH}\right)^2 = (2 - \sqrt{3})^2$$

اما مساحت مثلث CHA برابر است با

$$\text{مساحت (CHA)} = \frac{CH \times AH}{2} = \frac{6 \sin 15^\circ \times 6 \cos 15^\circ}{2} = 9 \sin 30^\circ = \frac{9}{2}$$

بنابراین مساحت مثلث OHC برابر است با

$$\text{مساحت (OHC)} = \text{مساحت (CHA)} \times (2 - \sqrt{3})^2 = \frac{9}{2} (7 - 4\sqrt{3})$$

عدد به دست آمده به این صورت در گزینه‌ها نیست. بنابراین آن را در مزدوج

$7 + 4\sqrt{3}$ ، یعنی $7 - 4\sqrt{3}$ ضرب و تقسیم می‌کنیم. پس

$$\text{مساحت (OHC)} = \frac{9(49 - 48)}{2(7 + 4\sqrt{3})} = \frac{9}{2(7 + 4\sqrt{3})}$$

۲۰۹۱ ۲ **روش اول:** با استفاده از اتحاد مزدوج می‌توان نوشت

$$(a + \frac{1}{a} + \sqrt{2})^2 (a + \frac{1}{a} - \sqrt{2})^2 = ((a + \frac{1}{a})^2 - (\sqrt{2})^2)^2$$

$$= (a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 - 2)^2 = (a^2 + \frac{1}{a^2})^2 = a^4 + \frac{1}{a^4} + 2$$

$$a = \sqrt[4]{\sqrt{3} - 4\sqrt{3}} \Rightarrow a^4 = \sqrt{3} - 4\sqrt{3}$$

اکنون توجه کنید که

$$\frac{1}{a^4} = \frac{1}{\sqrt{3} - 4\sqrt{3}} \times \frac{7 + 4\sqrt{3}}{7 + 4\sqrt{3}} = \frac{7 + 4\sqrt{3}}{49 - 48} = 7 + 4\sqrt{3}$$

بنابراین

توجه کنید که ۳۰۹۵

$$\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos \alpha, \quad \sin(\alpha - \pi) = -\sin \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \quad \text{از طرف دیگر.}$$

چون انتهای کمان α در ناحیه چهارم مثلثاتی است، پس $\sin \alpha < 0$ ، یعنی

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{در نتیجه } \sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با

$$\cos \alpha + \sin \alpha = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2 - \sqrt{5}}{3} = \frac{4(2 - \sqrt{5})}{12}$$

$$|\tan^2 \alpha - 1| = \left| \frac{5}{4} - 1 \right| = \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$$

معادله را به صورت زیر می‌نویسیم: ۳۰۹۶

$$5 \sin^2 x + 2 \cos^2 x + 2 = 0 \Rightarrow 5 \sin^2 x + 2(\cos^2 x + 1) = 0$$

$$5 \sin^2 x + 2(2 \cos^2 \frac{x}{2}) = 0 \Rightarrow 5 \sin^2 x + 4 \cos^2 \frac{x}{2} = 0$$

چون $5 \sin^2 x$ و $4 \cos^2 \frac{x}{2}$ غیرمنفی‌اند، باید هر دو برابر صفر باشند. بنابراین جواب‌هایمشترک معادله‌های $5 \sin^2 x = 0$ و $\cos^2 \frac{x}{2} = 0$ جواب‌های مورد نظر هستند:

$$\sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \cos \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$

برای اینکه جواب‌های در بازه $[-\pi, \pi]$ را پیدا کنیم، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

k	-2	-1	0	1	2
$k\pi$	$-\pi$	$-\pi$	0	π	π
$(2k+1)\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$

از این جدول معلوم می‌شود که جواب‌های مورد نظر $x = \pi$ و $x = -\pi$ هستند که تعداد آن‌ها دوتا است.توجه کنید که همواره $|x^2 - 2| \geq 0$ ، پس تمام x ‌های منفی و نیز $x = 0$ در این نامعادله صدق می‌کنند: ۳۰۹۷

$$|x^2 - 2| - x > 0 \Rightarrow |x^2 - 2| > x$$

اکنون فرض می‌کنیم x مثبت باشد.

$$|x^2 - 2| > x \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2 > x \Rightarrow x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2) > 0 \\ x^2 - 2 < -x \Rightarrow x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (2, +\infty) & (2) \\ x \in (0, 1) & (3) \end{cases}$$

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله مورد نظر، یعنی دامنه تابع f برابر اجتماع جواب‌های (۱)، (۲) و (۳) است:

$$D_f = (-\infty, 0] \cup (0, 1) \cup (2, +\infty) = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$$

$$S = (x_1^2 + \frac{1}{x_1}) + (x_2^2 + \frac{1}{x_2}) = (\Delta x_1 + 4 - \frac{x_1}{4}) + (\Delta x_2 + 4 - \frac{x_2}{4})$$

$$= \frac{19}{4}(x_1 + x_2) + 8 = \frac{19}{4}(1) + 8 = \frac{51}{4}$$

$$P = (x_1^2 + \frac{1}{x_1})(x_2^2 + \frac{1}{x_2}) = (\Delta x_1 + 4 - \frac{x_1}{4})(\Delta x_2 + 4 - \frac{x_2}{4})$$

$$= (\frac{19}{4}x_1 + 4)(\frac{19}{4}x_2 + 4) = (\frac{19}{4})^2 x_1 x_2 + 19(x_1 + x_2) + 16$$

$$= -\frac{19^2}{4} + 19 + 16 = -\frac{221}{4}$$

بنابراین معادله مورد نظر به صورت زیر است:

$$x^2 - \frac{51}{4}x - \frac{221}{4} = 0 \Rightarrow 4x^2 - 51x - 221 = 0$$

می‌توان نوشت: ۳۰۹۸

$$f(\frac{\pi}{12}) = 32 \cos^2 \frac{\pi}{12} \cos^2 \frac{2\pi}{12} \cos^2 \frac{4\pi}{12} \cos^2 \frac{8\pi}{12} \cos^2 \frac{16\pi}{12}$$

$$= 32 \cos^2 \frac{\pi}{12} \cos^2 \frac{\pi}{6} \cos^2 \frac{\pi}{3} \cos^2 \frac{2\pi}{3} \cos^2 \frac{4\pi}{3}$$

$$= 32 \cos^2 \frac{\pi}{12} (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 (\frac{1}{2})^2 (-\frac{1}{2})^2 (-\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{8} \cos^2 \frac{\pi}{12}$$

اکنون برای اینکه $\cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1}{3}(1 + \cos 2\alpha)$ را حساب کنیم، از اتحاد

استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$f(\frac{\pi}{12}) = \frac{3}{8} \cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{3}{8} (\frac{1}{3}(1 + \cos \frac{\pi}{6})) = \frac{3}{16} (1 + \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$= \frac{6 + 3\sqrt{3}}{32} = \frac{6 + \sqrt{27}}{32}$$

روش دوم:

$$f(x) = 32(\cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x \cos 16x)^2$$

اکنون عبارت داخل پرانتز را در $\sin x$ ضرب و تقسیم می‌کنیم

$$f(x) = 32 \left(\frac{\sin x \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x \cos 16x}{\sin x} \right)^2$$

از اتحاد مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ به دست می‌آید

$$f(x) = 32 \left(\frac{\frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x \cos 4x \cos 8x \cos 16x}{\sin x} \right)^2$$

به طور مشابه $\sin 2x \cos 2x = \frac{1}{2} \sin 4x$ ، پس

$$f(x) = 32 \left(\frac{\frac{1}{4} \sin 4x \cos 4x \cos 8x \cos 16x}{\sin x} \right)^2$$

به طور مشابه با انجام سه مرحله دیگر عبارت را به ساده‌ترین صورت می‌نویسیم.

$$f(x) = 32 \left(\frac{\frac{1}{8} \sin 8x \cos 8x \cos 16x}{\sin x} \right)^2 = 32 \left(\frac{1}{16} \frac{\sin 16x \cos 16x}{\sin x} \right)^2$$

$$= 32 \left(\frac{\frac{1}{32} \sin 32x}{\sin x} \right)^2 = \frac{\sin^2 32x}{32 \sin^2 x}$$

بنابراین

$$f(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sin^2 \frac{32\pi}{12}}{32 \sin^2 \frac{\pi}{12}} = \frac{\sin^2 (3\pi - \frac{\pi}{2})}{32 \sin^2 \frac{\pi}{12}} = \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2}}{32 \times \frac{1}{4} (1 - \cos \frac{2\pi}{12})}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}}{16(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{3}{32(2 - \sqrt{3})} = \frac{3(2 + \sqrt{3})}{32(4 - 3)} = \frac{6 + \sqrt{27}}{32}$$

۱ ۲۱۰۱ به تبدیلات زیر توجه کنید:

$$y = 2^{x+|x|} \xrightarrow{\text{واحد به جب}} y = 2^{x+3+|x+3|}$$

$$\xrightarrow{\text{واحد به پایین}} y = 2^{x+3+|x+3|} - 2$$

بنابراین باید جواب معادله زیر را پیدا کنیم:

$$2^{x+3+|x+3|} - 2 = 0 \Rightarrow 2^{x+3+|x+3|} = 2^1 \Rightarrow x+3+|x+3| = 1$$

$$|x+3| = -x-2 \Rightarrow \begin{cases} x+3 = -x-2 \Rightarrow x = -\frac{5}{2} \\ -(x+3) = -x-2 \Rightarrow \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

۳ ۲۱۰۲ روش اول: مقدار x را برابر ۹ قرار می‌دهیم و معادله را ساده می‌کنیم.

$$2 \log_a a + \log_a \sqrt{9} = 2 \Rightarrow 2 \log_a a + \log_a 3 = 2$$

$$2 \times \left(\frac{1}{2} \log_a a\right) + \log_a 3 = 2 \Rightarrow \log_a a + \frac{1}{\log_a a} = 2$$

دو طرف معادله را در $\log_a a$ ضرب می‌کنیم:

$$(\log_a a)^2 + 1 = 2 \log_a a \Rightarrow (\log_a a)^2 - 2 \log_a a + 1 = 0$$

اکنون با استفاده از اتحاد مربع تفاضل دو جمله می‌توان نوشت

$$(\log_a a - 1)^2 = 0 \Rightarrow \log_a a = 1 \Rightarrow a = 3^1 = 3$$

روش دوم: می‌توان نوشت

$$2 \log_x a + \log_a \sqrt{x} = 2 \Rightarrow \log_{\frac{1}{x^2}} a + \log_a \sqrt{x} = 2$$

$$\log_{\sqrt{x}} a + \log_a \sqrt{x} = 2 \Rightarrow \log_{\sqrt{x}} a + \frac{1}{\log_{\sqrt{x}} a} = 2$$

چون مجموع $\log_{\sqrt{x}} a$ و معکوسش برابر ۲ شده است و هر عدد حقیقی با معکوش هم علامت است، پس $\log_{\sqrt{x}} a > 0$. بنابراین

$$\log_{\sqrt{x}} a = 1 \xrightarrow{x=9} \log_{\sqrt{9}} a = 1 \Rightarrow \log_3 a = 1 \Rightarrow a = 3^1 = 3$$

۴ ۲۱۰۳ می‌توان نوشت

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 - x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1} - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 + \sqrt{x^2 - x^2}}}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2| + |x| - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} = -1$$

۳ ۲۱۰۴ روش اول: چون خط $x = 2$ محور تقارن سهمی است و سهمی از نقطه

$(0, 0)$ می‌گذرد، پس سهمی از نقطه $(4, 0)$ نیز می‌گذرد (شکل را ببینید). بنابراین معادله سهمی به صورت $y = a(x-0)(x-4)$ یا $y = ax(x-4)$ است. چون این سهمی از نقطه $(2, 1)$ نیز می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در معادله سهمی صدق می‌کنند. بنابراین

$$1 = a \times 2(2-4) \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

در نتیجه $f(x) = -\frac{1}{4}x(x-4)$. از طرف دیگر، چون خط راست مورد نظر از نقطه‌های $(0, 1)$ و $(4, 0)$ می‌گذرد، معادله آن به صورت زیر است:

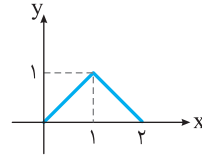
$$y - 0 = \frac{0-1}{4-0}(x-4) \Rightarrow y = -\frac{1}{4}(x-4)$$

بنابراین $g(x) = -\frac{1}{4}(x-4)$. اکنون توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{f(x)+g(x)}{4-x} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-\frac{1}{4}x(x-4) - \frac{1}{4}(x-4)}{4-x} \\ = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-\frac{1}{4}(x-4)(x+1)}{-(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x+1}{4} = \frac{5}{4}$$

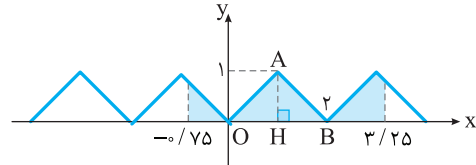
روش دوم: توجه کنید که عدد ۲ در دامنه تابع f نیست، زیرا $f(2) = \log_4(|4-2|-2) = \log_4 0$. بنابراین گزینه‌های (۲) و (۳) حذف می‌شوند. زیرا عدد ۲ عضو آن‌ها هست. همچنین عدد صفر در دامنه تابع f هست، زیرا $f(0) = \log_4(|0-2|-0) = \log_4 2 = \frac{1}{2}$. بنابراین گزینه (۱) حذف می‌شود، زیرا عدد صفر عضو آن نیست. در نتیجه گزینه (۴) درست است.

۱ ۲۰۹۸ ابتدا نمودار تابع f را در بازه $[0, 2]$



رسم می‌کنیم:

چون تابع f متناوب با دوره تناوب ۲ است، پس نمودار آن در بازه‌هایی به طول ۲ تکرار می‌شود.



از روی این شکل معلوم است که مساحت مورد نظر، دو برابر مساحت مثلث OAB است. بنابراین

$$S = 2S_{OAB} = 2 \left(\frac{1}{2} AH \times OB\right) = 1 \times 2 = 2$$

۲ ۲۰۹۹ ابتدا نشان می‌دهیم تابع $f(x) = \sqrt{x+3} - 1$ با دامنه

$D_f = [-3, +\infty)$ اکیداً صعودی است. می‌توان نوشت

$$x_1, x_2 \geq -3: x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 3 < x_2 + 3 \Rightarrow \sqrt{x_1 + 3} < \sqrt{x_2 + 3} \\ \sqrt{x_1 + 3} - 1 < \sqrt{x_2 + 3} - 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

چون تابع f اکیداً صعودی است، پس نمودار تابع f نمودار تابع وارون خود را روی خط $y = x$ قطع می‌کند. در نتیجه باید معادله $\sqrt{x+3} - 1 = x$ را حل کنیم تا طول نقطه M به دست بیاید:

$$\sqrt{x+3} - 1 = x \Rightarrow \sqrt{x+3} = x+1 \xrightarrow{\text{دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم}}$$

$$x+3 = (x+1)^2 \Rightarrow x+3 = x^2 + 2x+1 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (x-1)(x+2) = 0 \Rightarrow x=1, x=-2$$

توجه کنید که $x = -2$ در معادله مورد نظر صدق نمی‌کند. بنابراین $x = 1$ و عرض نقطه M هم برابر ۱ می‌شود ($f(1) = \sqrt{1+3} - 1 = 2 - 1 = 1$). در نتیجه فاصله نقطه M از مبدأ مختصات برابر است با $OM = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

۱ ۲۱۰۰ توجه کنید که هر بار که توپ بالا می‌رود، به همان اندازه هم پایین می‌آید. بنابراین مجموع مورد نظر برابر است با

$$S = 6 + 2 \left(\frac{0}{8} \times 6 + \left(\frac{0}{8}\right)^2 \times 6 + \dots + \left(\frac{0}{8}\right)^{99} \times 6\right) \\ = 6 + 2 \times 6 \left(\frac{0}{8} + \left(\frac{0}{8}\right)^2 + \dots + \left(\frac{0}{8}\right)^{99}\right)$$

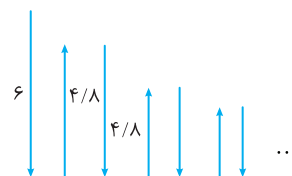
عبارت داخل پرانتز مجموع ۹۹ جمله نخست یک دنباله هندسی با جمله اول $\frac{0}{8}$

$$S = 6 + 12 \times \frac{0}{8} \times \frac{\left(\frac{0}{8}\right)^{99} - 1}{\frac{0}{8} - 1} \quad \text{و قدرنسبت } q = \frac{0}{8} \text{ است. بنابراین}$$

توجه کنید که می‌توانیم از $\left(\frac{0}{8}\right)^{99}$ صرف نظر کنیم، زیرا عددی بسیار کوچک است.

$$S = 6 + 12 \times \frac{0}{8} \times \frac{1}{1 - \frac{0}{8}} = 54 \text{ متر}$$

بنابراین



۲۱۰۴ اگر نقطه $A(x, \sqrt[3]{x-x})$ ، یعنی نقطه $(x, -\sqrt[3]{x-x})$ باشد، آن گاه A' ،

یعنی قرینه A نسبت به نیمساز نواحی دوم و چهارم نقطه $(\sqrt[3]{x}, -x)$ است. بنابراین

$$AA' = \sqrt{(x - \sqrt[3]{x})^2 + (-\sqrt[3]{x-x} + x)^2} = \sqrt{2(x - \sqrt[3]{x})^2} = \sqrt{2} |x - \sqrt[3]{x}|$$

چون $x \in [0, 1]$ پس $x \leq \sqrt[3]{x}$ و در نتیجه $AA' = \sqrt{2}(\sqrt[3]{x-x})$. بنابراین باید

ماکزیمم مطلق تابع $g(x) = \sqrt{2}(\sqrt[3]{x-x})$ را روی بازه $[0, 1]$ پیدا کنیم. توجه کنید که

$$g'(x) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - 1 \right)$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3}$$

چون $g(1) = g(0) = 0$ ، پس ماکزیمم مطلق تابع g به ازای $x = \frac{1}{3}$ به دست می‌آید

و برابر است با (توجه کنید که $\sqrt[3]{x^2} = \frac{1}{3}$ ، پس $\sqrt[3]{x} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$)

$$g\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{3}} \right) = \sqrt{2} \times \frac{2}{3\sqrt[3]{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt[3]{6}}$$

۲۱۰۵ ابتدا توجه کنید که وقتی $x \rightarrow \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^-$ ، آن گاه $g(x) \rightarrow 2^+$ ، پس

در یک همسایگی چپ $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ، ضابطه تابع f به صورت $f(x) = (2x)^2$ است،

اکنون می‌توان نوشت $(f \circ g)'_-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = g'_-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) f'_+\left(g\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right) = g'_-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) f'_+(2)$

مقدار $g'_-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ را به سادگی می‌توان حساب کرد

$$g(x) = (x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{2}(2x)(x^2 - 1)^{-\frac{3}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}$$

$$g'_-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{-\sqrt{5}}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

از طرف دیگر، $f(x) = (2x)^2 = 4x^2 \Rightarrow f'(x) = 8x \Rightarrow f'_+(2) = 16$ ،

پس $(f \circ g)'_-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = (-\frac{\sqrt{5}}{2}) \times 16 = -8\sqrt{5}$

یعنی $(f \circ g)'_-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ هشت برابر $-8\sqrt{5}$ است.

۲۱۱۰ توجه کنید که $g'(x) = 2ax + 5$ و $g''(x) = 2a$. از طرف دیگر،

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & x \leq 2 \\ g'(x) & x > 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} g'(x) & x \leq 2 \\ g''(x) & x > 2 \end{cases}$$

چون تابع f در نقطه $x = 2$ مشتق پذیر است، پس

$$g(2) = g'(2) \Rightarrow 4a + 10 + b = 4a + 5 \Rightarrow b = -5$$

$$g'(2) = g''(2) \Rightarrow 4a + 5 = 2a \Rightarrow a = -\frac{5}{2} \Rightarrow a + b = -\frac{15}{2}$$

۲۱۱۱ هر نقطه روی سهمی $y^2 = 4x$ به صورت $A\left(\frac{t^2}{4}, t\right)$ است. فاصله

نقطه A از نقطه $M(3, 0)$ برابر است با

$$AM = \sqrt{\left(\frac{t^2}{4} - 3\right)^2 + (t - 0)^2} = \sqrt{\frac{t^4}{16} - \frac{3}{2}t^2 + 9 + t^2}$$

$$= \sqrt{\frac{t^4 - 8t^2 + 144}{16}} = \frac{1}{4} \sqrt{(t^2 - 4)^2 + 128}$$

بنابراین کمترین مقدار AM به ازای $t^2 = 4$ به دست می‌آید و برابر است با

$$\frac{1}{4} \sqrt{128} = 2\sqrt{2}$$

روش دوم: چون $f(f) = g(f) = 0$ ، پس حد مورد نظر را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow f^-} \frac{f(x) + g(x)}{f - x} = - \lim_{x \rightarrow f^-} \frac{(f(x) - f(f)) + (g(x) - g(f))}{x - f}$$

$$= - \left(\lim_{x \rightarrow f^-} \frac{f(x) - f(f)}{x - f} + \lim_{x \rightarrow f^-} \frac{g(x) - g(f)}{x - f} \right) = -(f'_-(f) + g'_-(f))$$

از طرف دیگر، سهمی f و خط راست g همه‌جا مشتق پذیرند. پس مقدار حد مورد نظر

برابر است با $-(f'_-(f) + g'_-(f))$. اکنون توجه کنید که

$$f(x) = -\frac{1}{4}x(x-4) = -\frac{1}{4}x^2 + x \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow f'_-(f) = -1$$

$$g'(f) = m = -\frac{1}{f}$$

در نتیجه مقدار حد مورد نظر برابر است با $-(-1 - \frac{1}{f}) = \frac{f+1}{f}$.

۲۱۰۵ ابتدا ضابطه تابع f^{-1} را پیدا می‌کنیم. برای این کار x را بر حسب y

به دست می‌آوریم:

$$y = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} \Rightarrow \sqrt{x+1} = y\sqrt{x-1} \Rightarrow \sqrt{x-y^2x} = -y-1$$

$$\sqrt{x(1-y)} = -(y+1) \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{y+1}{y-1} \Rightarrow x = \left(\frac{y+1}{y-1}\right)^2$$

بنابراین $f^{-1}(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$. به این ترتیب

$$(f^{-1})'(x) = 2\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \left(\frac{-2}{(x-1)^2}\right) = \frac{-4(x+1)}{(x-1)^3}$$

$$\text{شیب خط مماس} = (f^{-1})'(2) = \frac{-4(2+1)}{(2-1)^3} = -12$$

۲۱۰۶ توجه کنید که

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} f(1) = 0 & x > 0 \\ f(0) = 0 & x = 0 \\ f(-1) = 0 & x < 0 \end{cases}$$

بنابراین همواره $(f \circ g)(x) = 0$. در نتیجه همواره

$$((f \circ g) \circ g)(x) = (f \circ (f \circ g))(x) = f((f \circ g)(x)) = f(0) = 0$$

یعنی $(f \circ g) \circ g$ تابع ثابت صفر است، پس نقطه ناپیوستگی ندارد.

۲۱۰۷ ابتدا توجه کنید که مطابق جدول تعیین علامت زیر، عبارت $3 - x^2$

روی بازه $[-1/\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ نامنفی است.

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$3 - x^2$		-	+	-	

بنابراین $|3 - x^2| = 3 - x^2$ و در نتیجه

اکنون توجه کنید که

$$f'(x) = 3 - 3x^2 = 3(1 - x^2), \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

بنابراین باید مقادیر $f(\sqrt{3})$ و $f(-1/\sqrt{3})$ ، $f(\pm 1)$ ، $f(0)$ را با هم مقایسه کنیم:

$$f(1) = 2, \quad f(-1) = -2, \quad f(-1/\sqrt{3}) = -\frac{9}{8}, \quad f(\sqrt{3}) = 0$$

در نتیجه مینیمم مطلق تابع f برابر است با $f(-1) = -2$ (توجه کنید که چون مقادیر f

به ازای عددهای مثبت، مثبت‌اند، پس کافی بود مقادیر تابع f را فقط برای عددهای منفی

حساب می‌کردیم).

$5 \times 4 \times 3$. به طور مشابه تعداد اعداد چهاررقمی و پنج رقمی به ترتیب برابر $5 \times 4 \times 3 \times 2$ و $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ است. خلاصه توضیح بالا در جدول زیر آمده است:

تعداد رقم‌ها	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد عددها	۵	5×4	$5 \times 4 \times 3$	$5 \times 4 \times 3 \times 2$	$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

بنابراین طبق تعمیم اصل جمع، $n(S) = 5 + 20 + 60 + 120 + 120 = 325$

اگر A این پیشامد باشد که عضو انتخابی بر ۳ بخش پذیر باشد، آن‌گاه تعداد اعضای A به این صورت به دست می‌آید. از میان اعداد یک رقمی ۱ تا ۵، فقط عدد ۳ بر ۳ بخش پذیر است. از میان اعداد دورقمی عضو S ، آن‌هایی بر ۳ بخش پذیرند که با ارقام ۱ و ۱، ۲ و ۵، ۳ و ۴ یا ۴ و ۴ ساخته می‌شوند. توجه کنید یک عدد زمانی بر ۳ بخش پذیر است که مجموع ارقامش بر ۳ بخش پذیر باشد. بنابراین تعداد اعداد دورقمی عضو S و بخش پذیر بر ۳ برابر است با $4 \times 2!$. به همین ترتیب، تعداد اعداد سه رقمی، چهاررقمی و پنج رقمی عضو S که بر ۳ بخش پذیرند، به دست می‌آید. مثلاً از میان اعداد چهاررقمی عضو S ، آن‌هایی بر ۳ بخش پذیرند که با ارقام ۱، ۲، ۴ و ۵ ساخته می‌شوند و تعدادشان برابر است با $4!$. توضیح بالا در جدول زیر جمع بندی شده است:

تعداد رقم‌ها	۱	۲	۳	۴	۵
رقم‌های به کار رفته	۳	۱، ۲	۱، ۲، ۳	۱، ۲، ۴، ۵	۱، ۲، ۳، ۴، ۵
تعداد عددها	۱	$4 \times 2!$	$4 \times 3!$	$4!$	$5!$

بنابراین طبق تعمیم اصل جمع، $n(A) = 1 + 8 + 24 + 24 + 120 = 177$

پس $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{177}{325}$

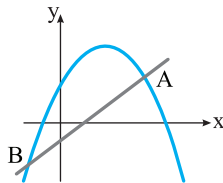
۲۱۱۶ ابتدا توجه کنید که چون عرض از مبدأ خط مورد نظر برابر -1 است، پس این خط از نقطه $(0, -1)$ می‌گذرد. بنابراین معادله این خط به صورت زیر است:

$$y - (-1) = \frac{0+1}{1-0}(x-0) \Rightarrow y = x - 1$$

طول نقطه‌های برخورد این خط و سهمی داده شده، یعنی A و B جواب‌های معادله زیر هستند:

$$-x^2 + 2x + 1 = x - 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow \text{اتحاد جمله مشترک}$$

$$(x+1)(x-2) = 0 \Rightarrow x_A = 2, x_B = -1$$



چون این نقطه‌ها روی خط $y = x - 1$ هستند، پس عرض آن‌ها برابر است با $y_A = 2 - 1 = 1$ و $y_B = -1 - 1 = -2$. بنابراین نقطه‌های مورد نظر $A(2, 1)$ و $B(-1, -2)$ هستند که

نقطه وسط آن‌ها $(\frac{2-1}{2}, \frac{1-2}{2})$ ، یعنی $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ است. از طرف دیگر، رأس سهمی

$y = -x^2 + 2x + 1$ نقطه $(1, 2)$ است. بنابراین فاصله مورد نظر برابر است با

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - 2\right)^2} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

پس این فاصله $\frac{1}{2}$ برابر $\sqrt{26}$ است.

۲۱۱۷ فرض می‌کنیم مختصات نقطه A به صورت (a, b) باشد. چون مثلث

ABC متساوی الساقین است، پس میانه AM ارتفاع نیز هست، یعنی خط AM بر خط BC

عمود است. شیب خط BC برابر $-\frac{1}{3}$ است و شیب خط AM برابر با $\frac{b-2}{a-3}$ است.

$$-\frac{1}{3} \times \frac{b-2}{a-3} = -1 \Rightarrow b-2 = 3(a-3) \Rightarrow b = 3a - 4$$

بنابراین

۲۱۱۲ فرض کنید A پیشامد این باشد که یک خرگوش نر در اولین بارداری

مادر متولد شده باشد و B پیشامد این باشد که یک خرگوش نر در دومین بارداری مادر متولد شده باشد. در این صورت، $P(A) = P(B) = \frac{1}{7}$ و $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$.

می‌خواهیم $P(A|B)$ را حساب کنیم. طبق فرمول احتمال شرطی می‌توان نوشت

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{7}} = \frac{7}{6}$$

۲۱۱۳ ابتدا توجه کنید که چون a, b و c مثبت هستند، پس

$$\Delta = b^2 - 4a(-c) = b^2 + 4ac > 0$$

اکنون توجه کنید که چون فاصله حاصل ضرب جواب‌های هر معادله با مجموع جواب‌های آن معادله دو واحد است، پس

$$\left| -\frac{c}{a} - \left(-\frac{b}{a}\right) \right| = 2 \rightarrow \text{ضرب طرفین در } a \rightarrow |b-c| = 2|a| = 2a$$

چون $2a$ عددی زوج است، پس $b-c$ نیز زوج است. یعنی b و c یا هر دو زوج یا هر دو فرد هستند. اکنون توجه کنید که در مجموعه $\{1, 2, \dots, 9\}$ ، اعداد $2, 4, 6, 8$

زوج هستند. پس دو عدد زوج را به $\binom{4}{2}$ طریق می‌توانیم انتخاب کنیم و به دو حالت

می‌توانیم یکی را b و دیگری را c بگیریم. بنابراین طبق اصل ضرب، تعداد انتخاب در

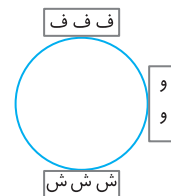
این حالت برابر است با $2 \times \binom{4}{2} = 6$. همین‌طور، در مجموعه $\{1, 2, \dots, 9\}$ ، اعداد $1, 3, 5, 7, 9$ فرد هستند. پس دو عدد فرد را به $2 \times \binom{5}{2} = 10$ طریق می‌توانیم انتخاب

کنیم. با معلوم شدن b و c ، عدد a نیز به طور خودکار معلوم می‌شود. بنابراین طبق اصل جمع، پاسخ مسئله برابر است با $2 \times \binom{4}{2} + 2 \times \binom{5}{2} = 16$.

۲۱۱۴ ۳ گروه داریم که می‌خواهند دور یک میز گرد قرار بگیرند، تعداد راه‌های

انجام این کار برابر است با $3! = 2!$. در گروه فوتبال افراد را به $3!$ در گروه والیبال افراد را به $2!$ و در گروه شنا افراد را به $3!$ طریق می‌توان مرتب کرد. بنابراین

طبق تعمیم اصل ضرب، پاسخ مسئله برابر است با $3! \times 2! \times 3! = 144$.



۲۱۱۵ تعداد کل عضوهای زیرمجموعه مورد نظر، یعنی S به این صورت

به دست می‌آید. واضح است که تعداد اعداد طبیعی یک رقمی که با ارقام ۱ تا ۵ می‌توان ساخت، ۵ تا است. برای به دست آوردن تعداد اعداد دورقمی (بدون تکرار ارقام) دو جایگاه

یکان و دهگان به صورت $\bigcirc \bigcirc$ در نظر می‌گیریم. برای جایگاه دهگان ۵ انتخاب

(هریک از ارقام ۱ تا ۵) و برای جایگاه یکان ۴ انتخاب وجود دارد. توجه کنید رقمی را که برای دهگان انتخاب شد، برای یکان نمی‌توان انتخاب کرد. در نتیجه بنا بر اصل ضرب،

تعداد اعداد دورقمی با شرایط مورد نظر برابر 5×4 است. برای به دست آوردن تعداد اعداد سه رقمی سه جایگاه $\bigcirc \bigcirc \bigcirc$ را در نظر می‌گیریم که برای جایگاه اول ۵ انتخاب،

برای جایگاه دوم ۴ انتخاب (عدد جایگاه اول را نمی‌توانیم انتخاب کنیم) و برای جایگاه سوم ۳ انتخاب (عددهای جایگاه‌های اول و دوم را نمی‌توانیم انتخاب کنیم) وجود دارد.

پس بنا بر تعمیم اصل ضرب، تعداد اعداد سه رقمی با شرایط مورد نظر برابر است با

از طرف دیگر، فاصله نقطه A از خط BC برابر با $5\sqrt{5}$ است. بنابراین

$$\frac{|a+2b-7|}{\sqrt{1^2+2^2}} = 5\sqrt{5} \xrightarrow{b=2a-4} \frac{|a+4a-8-7|}{\sqrt{5}} = 5\sqrt{5}$$

$$|5a-15| = 25 \Rightarrow \begin{cases} 5a-15=25 \\ 5a-15=-25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=8 \\ a=-2 \end{cases}$$

در نتیجه طول نقطه A هرکدام از دو مقدار ۸ و -۲ می‌تواند باشد که با توجه به گزینه‌ها، $a=-2$ درست است.

۲۱۱۸ مرکز دایره $x^2+y^2+2y=3$ نقطه $(0, -1)$ و شعاع آن برابر است

$$\text{با } 2 = \frac{1}{4}\sqrt{0^2+2^2-4(-3)} = \frac{1}{4}\sqrt{4+12} = \frac{1}{4}\sqrt{16} = 1$$

با $\frac{3}{4} \times 2 = 3$. بنابراین شعاع دایره مورد نظر برابر است با $\frac{3}{4} \times 2 = 3$. اگر مرکز این دایره نقطه (α, β) باشد، معادله آن به صورت $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=9$ است. چون نقطه $(0, -3)$ روی این دایره است، پس مختصات آن در معادله دایره

$$\text{صدق می‌کند، یعنی } (0-\alpha)^2+(-3-\beta)^2=9 \Rightarrow \alpha^2+(\beta+3)^2=9 \quad (1)$$

چون دایره‌ها مماس داخلی هستند، پس فاصله مرکزهای آن‌ها برابر با اختلاف شعاع‌هایشان

$$\text{است، یعنی } \sqrt{(\alpha-0)^2+(\beta+1)^2}=3-2 \Rightarrow \alpha^2+(\beta+1)^2=1 \quad (2)$$

اکنون اگر تساوی (۲) را از تساوی (۱) کم کنیم، نتیجه می‌شود

$$(\beta+3)^2-(\beta+1)^2=9-1 \Rightarrow 9+\beta^2+6\beta-\beta^2-2\beta-1=8 \Rightarrow \beta=0$$

از تساوی (۲) مقدار α را به دست می‌آوریم:

$$\alpha^2+(0+1)^2=1 \Rightarrow \alpha=0$$

بنابراین معادله دایره مورد نظر به صورت $x^2+y^2=9$ است.

۲۱۱۹ چون $CD \parallel EF$ ، پس بنابر قضیه اساسی تشابه مثلث‌های OCD و

$$\frac{OC}{OF} = \frac{CD}{FE} = \frac{OD}{OE} \Rightarrow \frac{OC}{3} = \frac{y}{1} = \frac{4}{y} \Rightarrow y=2, OC=6$$

بنابراین OFE متشابه‌اند. بنابرین $OC=6$ ، $OE=2$ ، $OC=6$

$$\frac{OD}{OB} = \frac{CD}{AB} \Rightarrow \frac{4}{4+x} = \frac{y}{2x} \Rightarrow \frac{4}{4+x} = \frac{2}{4+x} \Rightarrow 4x=4+x \Rightarrow x=\frac{4}{3}$$

در نتیجه بنابر قضیه تالس در مثل OAB می‌توان نوشت

$$CD \parallel AB \Rightarrow \frac{OC}{AC} = \frac{OD}{BD} \Rightarrow \frac{6}{AC} = \frac{4}{\frac{4}{3}} \Rightarrow AC=2$$

۲۱۲۰ توجه کنید

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \times 8 \times 8 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 16\sqrt{2}$$

از طرف دیگر،

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} CH \times AB \Rightarrow 16\sqrt{2} = \frac{1}{2} \times CH \times 8 \Rightarrow CH = \frac{16\sqrt{2}}{4} = 4\sqrt{2}$$

اکنون اگر فرض کنیم $BH=x$ ، آن‌گاه $AH=8-x$. در نتیجه بنابر قضیه فیثاغورس در مثل AHC،

$$AH^2+CH^2=AC^2 \Rightarrow (8-x)^2+32=64$$

$$(8-x)^2=32 \Rightarrow \sqrt{32}=4\sqrt{2} \Rightarrow 8-x=4\sqrt{2} \Rightarrow x=8-4\sqrt{2}$$

اکنون توجه کنید که در مثل قائم‌الزاویه ABH' ، چون $\hat{A}=45^\circ$ ، پس

$$ABH' = 45^\circ. \text{ بنابراین مثل قائم‌الزاویه } OBH \text{ متساوی‌الساقین نیز هست. پس}$$

$$\text{در نتیجه } OH=BH=8-4\sqrt{2}$$

$$S_{OBH} = \frac{1}{2} \times BH \times OH = \frac{1}{2} (8-4\sqrt{2})^2$$

$$= \frac{1}{2} (64-64\sqrt{2}+32) = 48-16\sqrt{2}$$

$$= \frac{16(9-8)}{3+2\sqrt{2}} = \frac{16}{3+2\sqrt{2}}$$

