جلد اول: درس‌نامه + آزمون‌های مبحثی و جامع

جامع ریاضیات تجربی

+ موج آزمون ویراست دوم

کاظم اجلالی، ارشک حمیدی

نشرالگو

فهرست

آزمون ۱

آزمون فصل تابع (۱)

۱- اگر تابع $f(x)=ax^{۲}-bx+b+c$ تابع همانی باشد، تابع $g(x)=۲^{ax}+bx+c$ چگونه است؟

۱) ثابت　　۲) خطی　　۳) همانی　　۴) نمایی

۲- اگر $f(\frac{۱}{x})=\frac{x+۲}{۲x^{۲}+۱}$، ضابطهٔ تابع f برای هر $x\neq ۰$ کدام است؟

۱) $f(x)=\frac{۲x^{۲}+x}{x^{۲}+۲}$　　۲) $f(x)=\frac{۲x^{۲}}{x^{۲}+۱}$　　۳) $f(x)=\frac{x^{۲}+x}{x^{۲}+۱}$　　۴) $f(x)=\frac{x^{۲}+۲x}{x^{۲}+۲}$

۳- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt[۳]{\frac{x-۱}{x-۳}}-\sqrt{\frac{x-۷}{۲-x}}$ به‌صورت $(a,b]-\{c\}$ است. مقدار $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۸　　۲) ۹　　۳) ۱۱　　۴) ۱۲

۴- دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x+۱}{m^{۲}x^{۲}+۳x+۱}$ به‌صورت $\mathbb{R}-\{n\}$ است. چند مقدار مختلف برای n وجود دارد؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

۵- دو تابع $f(x)=\frac{۵}{x+۲}$ و $g(x)=\frac{ax+b}{x^{۲}+cx+۴}$ با هم برابرند. مقدار abc کدام است؟

۱) ۱۰۰　　۲) ۲۰۰　　۳) ۱۰۰-　　۴) ۲۰۰-

۶- اگر $f=\{(۱,-۱),(۴,۲),(۳,۲),(۵,۱)\}$، مجموع اعضای برد تابع $g(x)=\frac{۳f(x)}{۲-f(x)}$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

۷- اگر $D_f=[۱,۴]$، $f(x)=x^{۲}+x$ و $D_g=[-۵,۴]$، $g(x)=|x-۱|$، چند عدد صحیح در دامنهٔ تابع fog قرار دارد؟

۱) ۵　　۲) ۶　　۳) ۷　　۴) ۸

۸- تابع درجهٔ دوم $f(x)=(k+۲)x^{۲}+۲x+۱$ با دامنهٔ $(-\infty,۴]$ صعودی است. حدود k کدام است؟

۱) $k<-۲$　　۲) $k\geq -\frac{۹}{۴}$　　۳) $-\frac{۹}{۴}\leq k<-۲$　　۴) $-۲<k<-۱$

۹- اگر نمودار تابع وارون تابع $f(x)=\frac{۱}{۱۶}x^{۳}+\sqrt[۳]{x}+۲a$ از نقطهٔ $(۴,۸)$ عبور کند، مقدار $f(۰)$ کدام است؟

۱) ۱۲-　　۲) ۱۵-　　۳) ۲۰-　　۴) ۳۰-

۱۰- اگر تابع‌های f و g با دامنهٔ $\mathbb{R}$، وارون‌پذیر باشند، $f(۲x+۱)=۲g(۳x)-۱$ و $f^{-۱}(۲)=۵$، مقدار $g(۶)$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) $\frac{۲}{۳}$　　۳) $\frac{۳}{۲}$　　۴) ۲

سؤال	گام
۱	۸ ۹
۲	۵ ۲۹۰
۳	۲۱ ۳۲۴
۴	۲۱ ۳۰۰
۵	۲۱ ۲۳ ۳۰۰
۶	۲۵
۷	۲۸ ۳۳۱
۸	۵۲
۹	۶۱
۱۰	۶۱

آزمون ۲

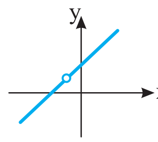
آزمون فصل تابع (۲)

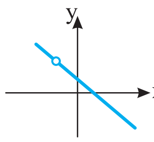
سؤال	گام
۱۱	۵
۱۲	۹ ۲۱
۱۳	۲۱ ۳۱۷ ۳۱۸
۱۴	۲۱ ۷۴
۱۵	۷ ۲۵ ۳۳۶
۱۶	۲۶
۱۷	۲۷
۱۸	۴۲ ۳۴۲
۱۹	۶۳ ۳۱۲
۲۰	۳۲ ۳۴ ۶۲

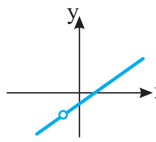
۱۱- اگر $f(\frac{x^2+1}{x})=3x^2+\frac{3}{x^2}-4$، مقدار $f(5)$ کدام است؟

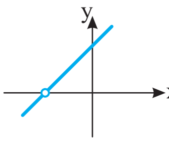
۱) ۷۱ ۲) ۷۰ ۳) ۶۵ ۴) ۶۰

۱۲- اگر $f(x)=\frac{x^2+mx+4}{x+2}$ ضابطهٔ تابع خطی f باشد، نمودار این تابع کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۳- اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{(a+3)x^2-ax+b}$ بازهٔ $[4,+\infty)$ باشد، مقدار b کدام است؟

۱) -6 ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) -12

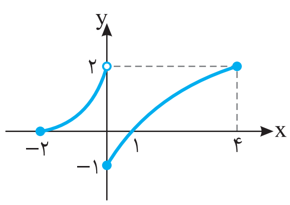
۱۴- دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{\sqrt{\pi^2-x^2}}{\sqrt{\sin x}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۵- اگر $f(x)=|x-1|$ و $g(x)=|x|$، در بازه‌ای که تابع $f-g$ ثابت نیست ضابطهٔ تابع $f+g$ کدام است؟

۱) $y=1$ ۲) $y=-1$ ۳) $y=2x-1$ ۴) $y=-2x+1$

۱۶- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. اگر $(fof)(4)=k$، آن‌گاه $f(\frac{k}{2})$ در کدام مجموعه می‌تواند باشد؟



۱) $(0,2)$ ۲) $(0,1)$

۳) $(-1,0)$ ۴) $(1,2)$

۱۷- اگر $g(x)=2x+1$ و $(fog)(x)=8(x^2-4x+5)$، ضابطهٔ تابع f کدام است؟

۱) $f(x)=2x^2+10x+58$ ۲) $f(x)=2x^2-10x+58$

۳) $f(x)=2x^2-20x+58$ ۴) $f(x)=2x^2+20x+58$

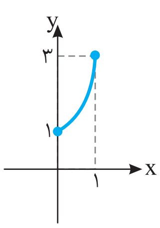
۱۸- تابع $f(x)=ax+[x]$ یک‌به‌یک است. a کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -1 ۴) -2

۱۹- نمودار تابع $f(x)=\frac{x+4}{x+2}$ نمودار وارون خود را در دو نقطه قطع می‌کند. حاصل‌ضرب طول این نقطه‌ها کدام است؟

۱) -1 ۲) -4 ۳) ۴ ۴) ۱

۲۰- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=-f^{-1}(-x)$ چند نقطهٔ مشترک با نمودار تابع $g(x)=\frac{x+1}{2}$ دارد؟



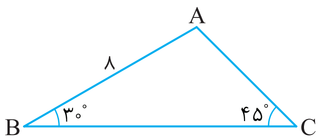
۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

آزمون ۳

آزمون فصل مثلثات (۱)

۲۱- در شکل مقابل طول ضلع BC چقدر است؟



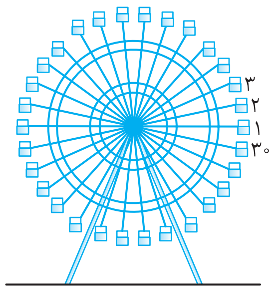
۱) $۴(\sqrt{۳}-۱)$

۲) $۴(\sqrt{۳}+۱)$

۳) $۴\sqrt{۳}$

۴) $۸\sqrt{۳}$

۲۲- چرخ‌وفلکی مطابق شکل ۳۰ کابین دارد که از شمارهٔ ۱ تا ۳۰ شماره‌گذاری شده‌اند. این چرخ‌وفلک در هر دقیقه ۲ دور می‌چرخد. اگر چرخ‌وفلک ۱۸۴ ثانیه بچرخد، کابین شمارهٔ یک به محل کدام کابین منتقل می‌شود؟



۱) کابین سوم

۲) کابین پنجم

۳) کابین هفتم

۴) کابین نهم

۲۳- اگر $۳۰^\circ \le \alpha \le ۱۲۰^\circ$، آن‌گاه $\sin\alpha$ در بازهٔ $[a,b]$ است، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{۱+\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۱

۲۴- اگر $\cot\alpha-\cos\alpha<۰$ و $\cos\alpha\cot\alpha>۰$، انتهای کمان نظیر زاویهٔ α در کدام ناحیهٔ مثلثاتی قرار دارد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۲۵- مقدار عبارت $A=\sin\frac{۴۹\pi}{۱۰}+\sin\frac{۷\pi}{۵}-\sin\frac{۱۸\pi}{۵}+\cos\frac{۸\pi}{۵}$ کدام است؟

۱) $۲\sin\frac{\pi}{۱۰}$ ۲) $۲\cos\frac{\pi}{۱۰}$ ۳) $-۲\sin\frac{\pi}{۱۰}$ ۴) $-۲\cos\frac{\pi}{۱۰}$

۲۶- اگر $\alpha-\beta=\frac{۵\pi}{۲}$، حاصل عبارت $A=\frac{۳\sin^۳\alpha+\cos^۳\beta}{\cos^۳\alpha+۲\sin^۳\beta}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}\cot^۳\beta$ ۲) $۴\cot^۳\beta$ ۳) $۴\tan^۳\alpha$ ۴) $\frac{۱}{۴}\tan^۳\alpha$

۲۷- مقدار عبارت $A=\sin x\cos x(۱-۲\sin^۲ x)$ به ازای $x=\frac{\pi}{۱۶}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۶}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۸}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۱۶}$

۲۸- مقدار $\cos^۴\frac{\pi}{۱۲}-\sin^۴\frac{\pi}{۱۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۲۹- جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos(۲x-\frac{\pi}{۹})=\sin(\pi+۲x)$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $\frac{k\pi}{۲}+\frac{۷\pi}{۳۶}$ ۲) $\frac{k\pi}{۲}-\frac{۷\pi}{۳۶}$ ۳) $\frac{k\pi}{۲}-\frac{۷\pi}{۷۲}$ ۴) $\frac{k\pi}{۲}+\frac{۷\pi}{۷۲}$

۳۰- مجموع جواب‌های معادلهٔ $۲\cos^۲ ۲x+۳\cos ۲x+۱=۰$ در بازهٔ $[۰,\pi]$ کدام است؟

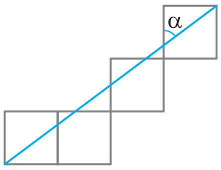
۱) π ۲) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۳) ۲π ۴) $\frac{۵\pi}{۲}$

سؤال	گام
۲۱	۶۹
۲۲	۸۶
۲۳	۷۸ ۱۰۰
۲۴	۷۴ ۷۶
۲۵	۹۰
۲۶	۹۰
۲۷	۹۳
۲۸	۹۳ ۲۸۲
۲۹	۱۰۶ ۱۰۹
۳۰	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۱۰ ۱۱۳ ۱۱۵

آزمون ۴
آزمون فصل مثلثات (۲)

سؤال	گام
۳۱	۶۹
۳۲	۸۱
۳۳	۸۱ ۲۸۱
۳۴	۹۳ ۱۰۳
۳۵	۱۰۰ ۱۰۱ ۱۰۳
۳۶	۷۴ ۹۰ ۹۳
۳۷	۸۱ ۹۳ ۹۸
۳۸	۹۳ ۲۸۱
۳۹	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۱۰
۴۰	۱۰۱ ۱۰۷ ۱۱۳

۳۱- در شکل روبه‌رو طول ضلع مربع‌های کوچک برابر ۱ است. مقدار $\sin\alpha-\tan\alpha$ کدام است؟



۱) $-\frac{۷}{۴}$ ۲) $-\frac{۱۳}{۶}$ ۳) $-\frac{۸}{۱۵}$ ۴) $-\frac{۹}{۱۴}$

۳۲- اگر $\tan\alpha=\frac{۱}{۲m}$ و $\cot\alpha=m+۲$، مقدار $\sin^۲\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱۶}{۱۷}$ ۳) $\frac{۱}{۱۷}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

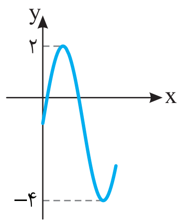
۳۳- اگر $\tan x-۳\cot x=۲$، حاصل $\tan^۴ x+۸۱\cot^۴ x$ کدام است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۸۲ ۳) ۹۲ ۴) ۷۰

۳۴- اگر دورهٔ تناوب تابع $f(x)=۳-۴\sin^۲(۲+ax)$ برابر $\frac{\pi}{۶}$ باشد، مقدار $|a|$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۸

۳۵- در شکل مقابل، قسمتی از نمودار کدام تابع رسم شده است؟



۱) $y=۳\cos(۲x)-۴$

۲) $y=۳\sin(۲x)-۱$

۳) $y=-۳\sin(۳x)-۱$

۴) $y=-۲\cos(۳x)+۱$

۳۶- اگر $\cos(۷\pi+\alpha)=\frac{۱}{۳}$ و $\pi<\alpha<\frac{۳\pi}{۲}$، مقدار $\sin ۲\alpha$ کدام است؟

۱) $-\frac{۴\sqrt{۲}}{۹}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۹}$ ۳) $\frac{۴\sqrt{۲}}{۹}$ ۴) $-\frac{۲\sqrt{۲}}{۹}$

۳۷- اگر $\sin x=۲\cos x$، حاصل $\cos ۲x$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $-\frac{۲}{۵}$

۳۸- اگر $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{۲}{۳}$، مقدار $\sin^۲ ۲\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۶}{۲۵}$ ۲) $\frac{۲۵}{۸۱}$ ۳) $\frac{۹}{۱۶}$ ۴) $\frac{۴۹}{۸۱}$

۳۹- معادلهٔ $۲\sin ۲x-۱=۰$ چند جواب در بازهٔ $(۰,\frac{۳\pi}{۲})$ دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

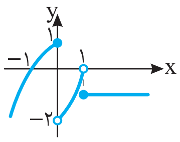
۴۰- تابع $f(x)=-۲\cos ۴x+۳$ در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ چند بار به حداقل مقدار خود می‌رسد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

آزمون ۵

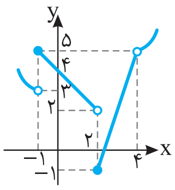
آزمون فصل حد و پیوستگی (۱)

۴۱- نمودار تابع f در شکل مقابل آمده است. حاصل $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(۱-x^۲) - \lim\limits_{x\to ۱^+} f(۱-x^۲)$ کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

۴۲- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\lim\limits_{x\to ۲^-} (fof)(x)$ کدام است؟



۱) -۱
۲) صفر
۳) ۲
۴) ۳

۴۳- اگر حد تابع‌های f و g در نقطهٔ $x=۱$ وجود داشته باشد، $\lim\limits_{x\to ۱}(f-۲g)(x)=۲$ و $\lim\limits_{x\to ۱}(۲f+۳g)(x)=۱۸$، مقدار $\lim\limits_{x\to ۱}(\frac{f}{g})(x)$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۴۴- مقدار $\lim\limits_{x\to ۱^-} \frac{[۲x](x+۲)}{x[-x]+|۱-x|}$ کدام است؟

۱) -۲
۲) -۳
۳) $-\frac{۵}{۲}$
۴) $-\frac{۳}{۲}$

۴۵- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} \sqrt{۲}\sin ۲x & x\le \frac{\pi}{۸} \\ a\cos ۲x+۲ & x>\frac{\pi}{۸} \end{cases}$ در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۸}$ حد داشته باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۳) $\sqrt{۲}$
۴) $-\sqrt{۲}$

۴۶- مقدار $\lim\limits_{x\to -۲} \frac{۲x^۲-۸}{x^۲+۳x+۲}$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۸
۴) ۱۶

۴۷- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} ax^۲+۱ & x<۲ \\ b-۱ & x=۲ \\ ۴ax+۲۱ & x>۲ \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، مقدار b کدام است؟

۱) -۱۲
۲) -۱۴
۳) -۱۶
۴) -۱۸

۴۸- اگر $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{x^۲-x}{x^۳+ax^۲+۳x+b}=+\infty$، مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) -۱
۲) -۲
۳) -۳
۴) -۴

۴۹- حاصل $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^۲+(x-۱)^۲+\cdots+(x-۹)^۲}{۵x^۲-۶x+۱}$ کدام است؟

۱) صفر
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۲

۵۰- اگر $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{۶x^۲-۵x+۱-mx^۲}{(۳x-۲)^۲}=\frac{۱}{۲}$، مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۷}{۲}$
۴) $\frac{۹}{۲}$

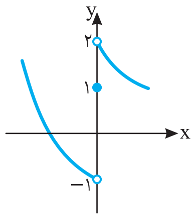
سؤال	گام
۴۱	۱۱۹ ۱۲۱
۴۲	۱۱۷ ۱۱۹
۴۳	۱۲۱
۴۴	۱۲۰ ۱۲۱
۴۵	۱۱۸ ۱۲۰ ۱۲۱
۴۶	۱۲۶
۴۷	۱۳۰ ۱۳۱
۴۸	۱۲۶ ۱۳۹ ۳۱۸
۴۹	۱۴۵
۵۰	۱۴۵

آزمون ۶

آزمون فصل حد و پیوستگی (۲)

سؤال	گام
۵۱	۱۱۹ ، ۱۲۱
۵۲	۱۱۹ ، ۱۲۱
۵۳	۱۱۹ ، ۱۲۱
۵۴	۱۱۸ ، ۱۲۰ ، ۱۲۱
۵۵	۱۲۳
۵۶	۱۲۸
۵۷	۱۲۰ ، ۱۳۰
۵۸	۱۲۰ ، ۱۴۵
۵۹	۱۳۹ ، ۳۱۸
۶۰	۱۴۵

-۵۱ نمودار تابع f به شکل مقابل است. مقدار $\lim\limits_{x\to 0} f(x^3-x^2)$ کدام است؟



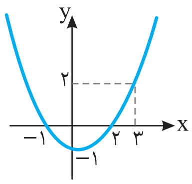
۱) ۱

۲) -۱

۳) ۲

۴) وجود ندارد.

-۵۲ نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(f(x-3))+1}{xf(x-1)+2}$ کدام است؟



۱) ۳ ۲) ۲

۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{3}$

-۵۳ اگر حد تابع‌های $f+g$ و f^2-g^2 در نقطهٔ $x=2$ به‌ترتیب برابر ۳ و ۲۱ باشد، مقدار $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(2x^2)}{g(x+1)}$ کدام است؟

۱) $-\frac{5}{2}$ ۲) $-\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{2}{5}$ ۴) $\frac{5}{2}$

-۵۴ برای چه مقدار m تابع $f(x)=x[-x]+m[x^2]$ در نقطهٔ $x=3$ حد دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

-۵۵ تابع $f(x)=(x^2-1)[x]$ در چند نقطه از بازهٔ $(-2,3)$ حد ندارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

-۵۶ اگر $\dfrac{3}{4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{ax^2+bx+2}$ ، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) $-\frac{11}{3}$ ۲) -3 ۳) $-\frac{7}{3}$ ۴) $-\frac{5}{3}$

-۵۷ تابع $f(x)=[\frac{x}{2}]-[\frac{x}{3}]$ در نقطهٔ $x=12$:

۱) پیوسته است. ۲) فقط از چپ پیوسته است.

۳) فقط از راست پیوسته است. ۴) نه از چپ پیوسته است و نه از راست.

-۵۸ حاصل $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2[-\frac{1}{x}]-1}{4x^2+x+1}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) صفر ۴) $-\infty$

-۵۹ اگر $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+3}{4x^3+ax^2+bx}=-\infty$ ، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۳۲ ۴) ۴۸

-۶۰ اگر $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(b-2)x^2+2x+1}{(a-3)x^3+(b^2-3a)x^2+x+2}=-\infty$ ، مقدار ab کدام است؟

۱) ۳ ۲) -3 ۳) ۹ ۴) -9

آزمون ۷

آزمون فصل مشتق (۱)

۶۱- اگر $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{x+2\sqrt{x}}{x^2-4\sqrt{x}}$ ، مقدار $f'(4)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۲- اگر $f(1)=3$ و $f'(x)=\frac{6x}{x+1}$ مقدار $\lim_{h\to 0}\frac{f^3(1+h)-27}{h}$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۲۷ ۳) ۵۴ ۴) ۸۱

۶۳- اگر $f(x)=x+2\sqrt{4x^2-x^4}$ ، مقدار $f'_+(0)+f'_-(0)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲− ۳) ۴ ۴) ۴−

۶۴- اگر $f(x)=\sqrt{1+x+x^2+\cdots+x^{24}}$ ، مقدار $f'(1)$ کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۷ ۳) ۳۰ ۴) ۳۵

۶۵- اگر $f(x)=x^2|x-3|\sqrt{x^2-3x}$ ، مقدار $f'(4)$ کدام است؟

۱) ۶۸− ۲) ۷۲− ۳) ۶۸ ۴) ۷۲

۶۶- اگر $f(x)=|x^2-3x|-|x^2+3x|$ ، مقدار $f'(0)$ کدام است؟

۱) ۲− ۲) ۲ ۳) صفر ۴) وجود ندارد.

۶۷- تابع $f(x)=x|x^2-x|$ در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۶۸- اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ و $g(x)=\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$ ، حاصل $g'(x)f'(g(x))$ کدام است؟

۱) ۱− ۲) ۱ ۳) x ۴) $\frac{1}{2}x$

۶۹- محیط هر مربع تابعی از مساحت آن است. آهنگ تغییر لحظه‌ای محیط یک مربع در لحظه‌ای برابر ۴ است. در این لحظه مساحت مربع چقدر است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۷۰- نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2-ax+9}{x^2+9}$ بر محور طول‌ها مماس است. حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برابر a کدام است؟

۱) ۹− ۲) ۱۲− ۳) ۱۶− ۴) ۳۶−

سؤال	گام
۶۱	۱۶۱
۶۲	۱۴۷، ۱۵۱، ۲۸۷
۶۳	۱۵۳، ۱۶۲، ۱۶۳، ۱۶۷
۶۴	۱۶۲، ۱۶۳، ۱۶۷، ۲۵۶
۶۵	۱۶۲، ۱۶۳، ۱۶۴، ۱۶۷
۶۶	۱۴۸، ۱۶۲، ۱۶۳، ۱۶۴
۶۷	۱۷۲، ۱۷۴
۶۸	۲۶، ۱۶۲، ۱۶۶
۶۹	۱۶۲، ۱۸۱
۷۰	۱۶۲، ۱۶۳، ۱۷۶

آزمون ۸

آزمون فصل مشتق (۲)

۷۱- اگر $f(x)=\frac{x^۲+۱}{x^۴+۱}$، مقدار $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-۱}{h^۲-۴h}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۷۲- اگر $f(x)=\frac{x^۲+ax}{x+۱}$ و $f'(۲)=\frac{۱۱}{۹}$، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۳- اگر $f(x)=\frac{\sqrt{x^۲-۶x+۹}}{x-\sqrt[۳]{x+۵}}$، مقدار $f'_-(۳)$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۷۴- اگر $f(x)=\begin{cases} x^۲+۱ & x>۱ \\ ۳x & x=۱ \\ ۲x & x<۱ \end{cases}$، آن‌گاه

۱) $f'(۱)=۰$ ۲) $f'(۱)=۲$

۳) $f'(۱)=۳$ ۴) تابع f در $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست.

۷۵- اگر $f(x^۳-x)=۴x\sqrt{x+۱}$، مقدار $f'(۲۴)$ کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۲۶}$ ۲) $\frac{۱۱}{۲۶}$ ۳) $\frac{۱۳}{۲}$ ۴) $\frac{۱۵}{۲۶}$

۷۶- اگر $f(x)=\frac{x^۵+۱}{x+۱}$، مقدار $f''(۲)$ کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۶ ۳) ۳۸ ۴) ۴۰

۷۷- شیب خط مماس در نقطهٔ $(۲,۳)$ روی نمودار تابع‌های f و g به‌ترتیب برابر ۱ و ۲ است. اگر $h(x)=\frac{f(x)+x}{g(x)-x}$، مقدار $h'(۲)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۳ ۴) -۳

۷۸- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\sqrt{۱-x}$ در بازهٔ $[a,۱]$ برابر $-\frac{۱}{۴}$ است. آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در $x=a$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۸}$ ۳) $-\frac{۱}{۱۶}$ ۴) $-\frac{۱}{۳۲}$

۷۹- در چند نقطه از نمودار تابع $f(x)=x^۲-۴\sqrt{x^۲+۳}$ خط مماس بر نمودار موازی محور طول‌هاست؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۰- خط $y=-\frac{۱}{۴}x+\frac{۳}{۴}$ بر نمودار تابع $g(x)=-x^۲-bx$ مماس است. مجموع مقادیر ممکن برای b کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

سؤال	گام
۷۱	۱۴۷ ۱۶۲ ۱۶۳
۷۲	۱۶۲ ۱۶۳
۷۳	۱۴۸
۷۴	۱۳۰ ۱۷۰
۷۵	۱۶۳ ۱۶۶ ۱۶۷
۷۶	۱۶۲ ۱۶۳ ۱۸۲ ۲۸۸
۷۷	۱۴۹ ۱۶۲ ۱۶۳
۷۸	۱۶۷ ۱۸۰ ۱۸۱
۷۹	۱۶۲ ۱۶۳ ۱۶۷ ۱۷۶
۸۰	۱۶۲ ۱۶۳ ۱۷۶ ۱۷۹

آزمون ۹

آزمون فصل کاربردهای مشتق (۱)

۸۱- به ازای کدام مقدار k تابع $f(x)=\frac{x+k}{x^2+x+1}$ روی بازهٔ $[-\frac{4}{5},2]$ صعودی است؟

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $-\frac{2}{5}$ ۴) $-\frac{3}{5}$

۸۲- تابع $f(x)=2\sqrt{x+4}-\sqrt{x-2}$ روی بازهٔ $[a,b]$ نزولی است. حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{3}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $2\sqrt{5}$

۸۳- تابع $f(x)=\begin{cases}2-x^2 & x>0\\ x^3-1 & x\leq 0\end{cases}$ چند نقطهٔ ماکزیمم نسبی و چند نقطهٔ مینیمم نسبی دارد؟

۱) فقط یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد. ۲) فقط یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی دارد.

۳) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد. ۴) نه نقطهٔ ماکزیمم نسبی دارد و نه نقطهٔ مینیمم نسبی.

۸۴- نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع $f(x)=\frac{x^2+x}{x^2+1}$ در کدام ناحیهٔ صفحهٔ مختصات قرار دارد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۸۵- تابع $f(x)=2x^3+ax^2+x$ اکسترمم نسبی ندارد. حدود a کدام است؟

۱) $|a|>\sqrt{3}$ ۲) $|a|>\sqrt{6}$ ۳) $|a|\leq\sqrt{6}$ ۴) $|a|\leq\sqrt{3}$

۸۶- اگر $f(x)=|x|(x^3-4)$، فاصلهٔ نقاط بحرانی تابع f از یکدیگر کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $\sqrt{10}$

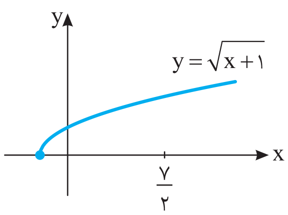
۸۷- مقدار مینیمم مطلق تابع $f(x)=-5x^3+x|x-1|$ با دامنهٔ $[0,2]$ کدام است؟

۱) -38 ۲) -39 ۳) -40 ۴) -41

۸۸- نسبت بیشترین مقدار به کمترین مقدار تابع $f(x)=x+\sqrt{4-x^2}$ کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) $-\sqrt{2}$ ۴) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

۸۹- نزدیک‌ترین نقطه روی نمودار تابع $y=\sqrt{x+1}$ به نقطهٔ $A(\frac{7}{2},0)$ کدام نقطه است؟



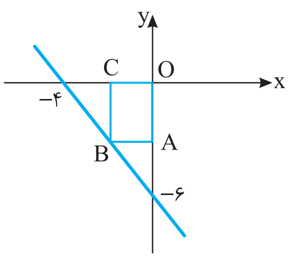
۱) $(3,2)$

۲) $(1,\sqrt{2})$

۳) $(2,\sqrt{3})$

۴) $(\frac{1}{3},\frac{2}{\sqrt{3}})$

۹۰- در شکل مقابل بیشترین مقدار ممکن مساحت مستطیل $OABC$ کدام است؟



۱) ۴

۲) ۶

۳) ۸

۴) ۹

سؤال	گام
۸۱	۱۸۴ ۱۸۵ ۳۱۸
۸۲	۱۸۴ ۱۸۵ ۳۲۲
۸۳	۱۹۱
۸۴	۱۸۸ ۳۱۸
۸۵	۱۸۸ ۳۱۹
۸۶	۱۷۰ ۱۸۶
۸۷	۱۷۰ ۱۹۳
۸۸	۲۱ ۱۹۳
۸۹	۱۸۶ ۱۹۵
۹۰	۲۴ ۱۸۶ ۱۹۵

آزمون ۱۰ — آزمون فصل کاربردهای مشتق (۲)

سؤال	گام
۹۱	۱۸۴ ۱۸۵ ۳۱۸
۹۲	۱۸۴ ۱۸۵
۹۳	۲۱ ۱۹۱ ۳۴۰
۹۴	۱۸۸ ۳۰۰
۹۵	۱۹۰
۹۶	۲۹ ۳۰ ۳۷ ۱۸۶
۹۷	۱۸۷ ۱۹۱ ۱۹۲
۹۸	۱۸۶ ۱۹۴ ۱۹۵
۹۹	۲۴ ۱۸۶ ۱۹۵
۱۰۰	۲۴ ۱۸۶ ۱۹۵

-۹۱ تابع $f(x)=\frac{x+۱}{x^۲+۱}$ روی بازهٔ $[a,b]$ صعودی است. حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $۲\sqrt{۵}$

-۹۲ تابع $f(x)=x+\sqrt{k-x}$ روی بازهٔ $[a,b]$ نزولی است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

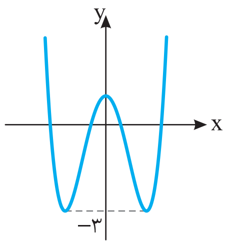
-۹۳ تابع $f(x)=x+\sqrt{۲-[x]^۲}$ چند نقطهٔ مینیمم نسبی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

-۹۴ a عددی مثبت است و تابع $f(x)=\frac{x^۲+۲x}{x^۲+a}$ دو نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد. مجموعهٔ مقادیر a کدام است؟

۱) $(۰,+\infty)$ ۲) $(۰,۲)$ ۳) $(۱,+\infty)$ ۴) $(۲,+\infty)$

-۹۵ نمودار تابع $f(x)=x^۴+ax^۲+bx+۱$ به‌صورت مقابل است. طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f کدام است؟



۱) $\pm\sqrt{۲}$
۲) ±۱
۳) ±۲
۴) $\pm\sqrt{۵}$

-۹۶ تابع $f(x)=\left|x^۲|x|-۱\right|$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

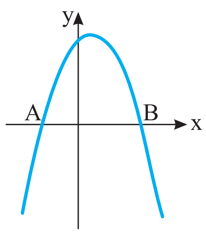
-۹۷ تابع $f(x)=\begin{cases}|x^۲-۴| & x\neq ۰\\ k & x=۰\end{cases}$ در نقطهٔ $x=۰$ مینیمم نسبی دارد ولی مینیمم مطلق ندارد. حدود k کدام است؟

۱) $۰<k<۴$ ۲) $k<۴$ ۳) $۰<k<۲$ ۴) $k<۲$

-۹۸ اگر $x+y=۲$، کمترین مقدار ممکن $x^۳+y^۳$ کدام است؟

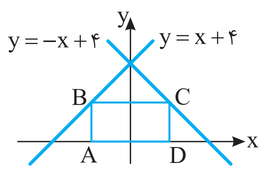
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

-۹۹ نمودار تابع $f(x)=(m^۲-۲)x^۲+(۳-۲m)x+۳$ در شکل مقابل رسم شده است. کمترین مقدار ممکن x_A+x_B کدام است؟



۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۳ ۴) $\frac{۱}{۴}$

-۱۰۰ در شکل مقابل بیشترین مقدار ممکن مساحت مستطیل ABCD کدام است؟



۱) ۱۶
۲) ۱۲
۳) ۸
۴) ۶

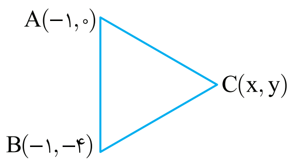
آزمون ۱۱

آزمون فصل هندسهٔ تحلیلی

۱۰۱- اگر نقطه‌های $A(۱,۲)$ ، $B(-۱,-۲)$ و $C(-۳,۱)$ رأس‌هایی از متوازی‌الاضلاع ABCD باشـند، مساحت این متوازی‌الاضلاع چقدر است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۲۱

۱۰۲- در شکل مقابل اگر مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد، عرض نقطهٔ C کدام است؟

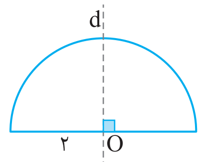


۱) ۲
۲) -۲
۳) -۱
۴) ۳

۱۰۳- دو ضلع یک مربع روی دو خط $۳x=۲y+۵$ و $۴y=۶x+۳$ هستند. مساحت این مربع کدام است؟

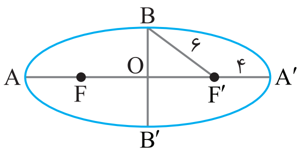
۱) $\frac{۱۰}{۳}$ ۲) $\frac{۹}{۴}$ ۳) $\frac{۱۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱۳}{۳}$

۱۰۴- نیم‌دایـرهٔ به مرکز O در شـکل مقابل را حول خط d دوران می‌دهیم. مسـاحت کل جسم حاصل چقدر است؟



۱) ۸π ۲) ۱۲π
۳) ۱۴π ۴) ۱۶π

۱۰۵- در شـکل مقابل نقطه‌هـای F و F' کانون‌های بیضی هسـتند و BB' قطر کوچک بیضی است. طول BB' چقدر است؟



۱) $۸\sqrt{۲}$ ۲) $۶\sqrt{۲}$
۳) $۱۰\sqrt{۲}$ ۴) $۱۲\sqrt{۲}$

۱۰۶- اختلاف طول قطر بزرگ و طول قطر کوچک یک بیضی برابر ۴ و خروج از مرکز آن برابر $\frac{۳}{۵}$ است. طول قطر بزرگ این بیضی چقدر است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

۱۰۷- یک سر قطری از دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۶y-۱۵=۰$ نقطهٔ $(-۲,۱)$ است. سر دیگرش کدام نقطه است؟

۱) $(۵,-۶)$ ۲) $(-۳,۰)$ ۳) $(۱,۲)$ ۴) $(۴,-۷)$

۱۰۸- معادلهٔ دایره‌ای که از نقطه‌های $(۰,۱)$ و $(۰,۹)$ می‌گذرد و بر محور x مماس است کدام است؟

۱) $(x-۲)^۲+(y-۵)^۲=۲۰$ ۲) $(x-۱)^۲+(y-۵)^۲=۱۷$
۳) $(x-۳)^۲+(y-۵)^۲=۲۵$ ۴) $(x-۴)^۲+(y-۵)^۲=۳۲$

۱۰۹- خط‌های $۳x-۴y+۳=۰$ و $۹x-۱۲y-۱=۰$ بر دایره‌ای مماس‌اند. شعاع این دایره چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۱۱۰- اگر دو دایرهٔ $x^۲+y^۲+۴x-۲y=k$ و $x^۲+y^۲-۴x+۴y=۸$ بر هم مماس بیرونی باشند، مقدار k کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۴ ۴) -۴

سؤال	گام
۱۰۱	۱۹۶، ۱۹۹، ۲۰۲
۱۰۲	۱۹۷، ۲۰۰
۱۰۳	۲۰۳
۱۰۴	۲۰۴
۱۰۵	۲۰۷، ۲۰۹
۱۰۶	۲۰۷، ۲۰۹، ۲۱۰
۱۰۷	۱۹۷، ۲۱۲
۱۰۸	۲۱۱، ۲۱۲، ۲۱۷
۱۰۹	۲۰۳
۱۱۰	۱۹۶، ۲۱۲، ۲۱۸

آزمون ۱۲

آزمون فصل آمار و احتمال (۱)

۱۱۱- چند عدد چهار رقمی بزرگ‌تر از ۳۳۰۰ می‌توان نوشت که ارقام آن کوچک‌تر از ۶ و متمایز باشند؟

۱) ۱۱۰ ۲) ۱۲۴ ۳) ۱۴۴ ۴) ۱۶۰

۱۱۲- با رقم‌های ۳، ۴، ۵ و ۶ همهٔ عددهای چهاررقمی ممکن را که رقم تکراری ندارند، می‌نویسیم. مجموع رقم‌های یکان این عددها چقدر است؟

۱) ۱۰۴ ۲) ۱۰۸ ۳) ۱۱۲ ۴) ۱۱۶

۱۱۳- در چند جایگشت پنج‌حرفی از حروف کلمهٔ logarithm حرف t در ابتدا و حرف g در انتها قرار می‌گیرد؟

۱) ۲۱۰ ۲) ۴۲۰ ۳) ۶۶۰ ۴) ۸۴۰

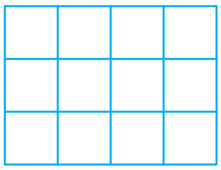
۱۱۴- سکه‌ای را شش بار پشت سر هم پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه حداکثر سه بار رو بیاید چقدر است؟

۱) $\frac{27}{64}$ ۲) $\frac{25}{64}$ ۳) $\frac{21}{32}$ ۴) $\frac{23}{32}$

۱۱۵- اگر A، B و C پیشامدهایی دوبه‌دو ناسازگار باشند و $P(A)=2x$، $P(B)=3x$، $P(C)=4x$ و $P(A\cup B\cup C)=1-x$، مقدار $P(A\cup B)+P(A\cup C)$ کدام است؟

۱) ۰/۸ ۲) ۰/۹ ۳) ۱/۱ ۴) ۱/۲

۱۱۶- اگر در شکل روبه‌رو یک مستطیل انتخاب کنیم، احتمال اینکه مربع باشد چقدر است؟



۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{11}{45}$

۳) $\frac{13}{45}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۱۱۷- اگر A و B مستقل از هم باشند، $P(A\cap B')=\frac{1}{4}$ و $P(A'\cap B)=\frac{1}{6}$، مقدار $P(A\cup B)-P(A\cap B)$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{12}$ ۲) $\frac{7}{12}$ ۳) $\frac{5}{6}$ ۴) $\frac{7}{24}$

۱۱۸- جعبهٔ A شامل هفت مهره با شماره‌های ۲ تا ۸ و جعبهٔ B شامل پنج مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ است. یک جعبه به تصادف انتخاب و مهره‌ای از آن خارج می‌کنیم. اگر شمارهٔ این مهره زوج باشد، مهرهٔ دیگری از همان جعبه و اگر فرد باشد، مهره‌ای از جعبهٔ دیگر بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه روی هر دو مهره عدد زوج نوشته شده باشد، چقدر است؟

۱) $\frac{23}{140}$ ۲) $\frac{4}{125}$ ۳) $\frac{8}{125}$ ۴) $\frac{27}{140}$

۱۱۹- در جعبه‌ای دو مهرهٔ قرمز، سه مهرهٔ آبی و پنج مهرهٔ سبز وجود دارد. یک مهره از جعبه بیرون می‌آوریم، رنگ آن را می‌بینیم و آن را به جعبه برمی‌گردانیم. سپس یک مهرهٔ دیگر از جعبه بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه رنگ مهره‌ها با هم فرق کند چقدر است؟

۱) ۰/۶۲ ۲) ۰/۶۴ ۳) ۰/۶۶ ۴) ۰/۶۸

۱۲۰- ضریب تغییرات داده‌های x_1، ...، x_n دو برابر ضریب تغییرات داده‌های $5x_1+1$، ... و $5x_n+1$ است. میانگین داده‌های x_1، ... و x_n برابر کدام است؟

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۸

سؤال	گام
۱۱۱	۲۲۲
۱۱۲	۲۲۲، ۲۲۵
۱۱۳	۲۲۶
۱۱۴	۲۲۷، ۲۳۱
۱۱۵	۲۳۲
۱۱۶	۲۱۹، ۲۲۷، ۲۳۱
۱۱۷	۲۳۵، ۲۳۶
۱۱۸	۲۳۱، ۲۳۳، ۲۳۸
۱۱۹	۲۳۱، ۲۳۲، ۲۳۳، ۲۳۸
۱۲۰	۲۴۲، ۲۴۳

آزمون ۱۳

آزمون فصل آمار و احتمال (۲)

۱۲۱- در یک صفحهٔ شطرنجی 8×8 چند مستطیل افقی یا عمودی با ابعاد ۲ و ۴ وجود دارد؟

۱) ۳۵ ۲) ۶۴ ۳) ۷۰ ۴) ۸۱

۱۲۲- در چند جایگشت از حروف کلمهٔ logarithm حروف صدادار کنار هم و حروف بی‌صدا کنار هم قرار می‌گیرند؟

۱) $2\times6!$ ۲) $6\times6!$ ۳) $9\times6!$ ۴) $12\times6!$

۱۲۳- اگر $\binom{4}{n}^{-1}=\binom{6}{n}^{-1}+\binom{5}{n}^{-1}$ ، مقدار $\binom{n+3}{2}$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۸ ۳) ۱۰۵ ۴) ۱۵۳

۱۲۴- اگر A و B دو پیشامد ناتهی از فضای نمونه‌ای S باشند، کدام دو پیشامد زیر می‌توانند ناسازگار نباشند؟

۱) A' و B' ۲) $A-B$ و $B-A$

۳) B و $A-B$ ۴) $A'\cap B$ و $A\cap B$

۱۲۵- در کیسه‌ای پنج مهرهٔ قرمز و چهار مهرهٔ آبی وجود دارد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال اینکه حداکثر دو تا از آن‌ها قرمز باشند، چقدر است؟

۱) $\frac{37}{42}$ ۲) $\frac{5}{6}$ ۳) $\frac{31}{42}$ ۴) $\frac{29}{42}$

۱۲۶- اگر زیرمجموعه‌ای سه‌عضوی از مجموعهٔ $\{0,1,2,3,4,5\}$ انتخاب کنیم، احتمال اینکه مجموع عضوهای آن فرد باشد چقدر است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{3}{10}$ ۴) $\frac{7}{10}$

۱۲۷- اگر $P(A)=\frac{1}{3}$ ، $P(B')=\frac{1}{6}$ و A و B مستقل از هم باشند، مقدار $P(A'\cup B)$ کدام است؟

۱) $\frac{14}{15}$ ۲) $\frac{17}{18}$ ۳) $\frac{8}{9}$ ۴) $\frac{11}{12}$

۱۲۸- احتمال اینکه پگاه در رشتهٔ پزشکی قبول شود ۷۵٪ و احتمال اینکه او در رشتهٔ پزشکی قبول نشود اما در رشتهٔ دندانپزشکی قبول شود برابر ۲۴٪ است. احتمال اینکه پگاه در رشتهٔ دندانپزشکی قبول نشود چقدر است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۴۵ ۳) ۰/۰۳ ۴) ۰/۰۴

۱۲۹- در جعبه‌ای دو مهرهٔ قرمز و شش مهرهٔ آبی وجود دارد. در جعبه‌ای دیگر، پنج مهرهٔ قرمز و سه مهرهٔ آبی وجود دارد. اگر به تصادف یکی از جعبه‌ها را انتخاب کنیم و مهره‌ای از آن بیرون بیاوریم، احتمال اینکه آبی باشد چقدر است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{7}{16}$ ۴) $\frac{9}{16}$

۱۳۰- میانگین ۱۰ داده برابر ۱۷/۵ است. اگر به این داده‌ها ۴ دادهٔ ۱۳، ۱۹، ۲۹ و ۳۰ را اضافه کنیم، میانگین کل ۱۴ داده برابر کدام می‌شود؟

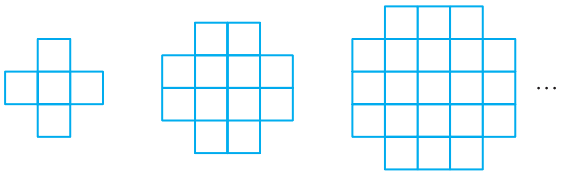
۱) ۱۸ ۲) ۱۸/۳ ۳) ۱۸/۷ ۴) ۱۹

سؤال	گام
۱۲۱	۲۱۹ ۲۲۷
۱۲۲	۲۱۹ ۲۲۵
۱۲۳	۲۲۷
۱۲۴	۲۳۱
۱۲۵	۲۲۲ ۲۲۷ ۲۳۱ ۲۳۲
۱۲۶	۲۲۲ ۲۲۹ ۲۳۱
۱۲۷	۲۳۲ ۲۳۵ ۲۳۶
۱۲۸	۲۳۲ ۲۳۵ ۲۳۶
۱۲۹	۲۳۱ ۲۳۳ ۲۳۸
۱۳۰	۲۴۱

آزمون ۱۴ آزمون فصل الگو و دنباله

۱۳۱- الگوی مقابل از مربع‌های ۱×۱ ساخته شده است. مساحت شکل هشتم کدام است؟

۱) ۶۴
۲) ۶۰
۳) ۹۶
۴) ۱۰۰



شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳)

۱۳۲- بزرگ‌ترین جملهٔ دنباله با جملهٔ عمومی $a_n=-۲n^۲+۱۹n+۱$ چقدر است؟

۱) ۴۵ ۲) ۴۶ ۳) ۴۷ ۴) ۴۸

۱۳۳- اگر جملهٔ عمومی دنباله‌ای به‌صورت $a_n=\frac{۲n-۱}{n+۲}$ باشد، چند جملهٔ این دنباله در بازهٔ $(\frac{۹}{۱۰},\frac{۱۱}{۱۰})$ هستند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۳۴- در دنباله‌ای حسابی $a_۳+a_۷=۰$ و $a_۳^۲+a_۷^۲=۱۲۸$. قدرنسبت دنباله کدام است؟

۱) ±۳ ۲) ±۲ ۳) ±۴ ۴) ±۶

۱۳۵- در دنباله‌ای حسابی مجموع جمله‌های سوم، هفتم، چهاردهم و هجدهم برابر با ۱۰ شده است. مجموع جملهٔ اول و جملهٔ بیستم دنباله چقدر است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۵ ۳) ۱۰ ۴) ۵

۱۳۶- اگر x واسطهٔ حسابی $\sin^۲\alpha$ و $\cos^۲\alpha$ و y واسطهٔ هندسی $\tan^۲\alpha$ و $\cot^۲\alpha$ باشد، مقدار $x+y$ کدام است؟ $(y>۰)$

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۵}{۲}$

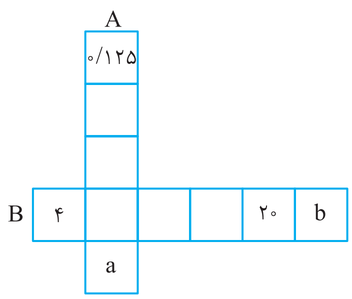
۱۳۷- اگر عددهای جدول زیر جملات متوالی دنباله‌ای هندسی باشند، مقدار xyz کدام است؟

x	$\frac{۱}{۲}$	y	z	۳۲

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۱۳۸- در جدول مقابل عددهای ستون A از بالا به پایین جمله‌های متوالی دنباله‌ای هندسی هستند و عددهای سطر B از چپ به راست جمله‌های متوالی دنباله‌ای حسابی. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۵۶
۲) ۵۸
۳) ۶۰
۴) ۶۲



۱۳۹- جمله‌های اول، دوم و چهارم یک دنبالهٔ هندسی غیرثابت جمله‌های متوالی یک دنبالهٔ حسابی‌اند. اگر قدرنسبت دنبالهٔ هندسی عددی مثبت باشد، مقدار آن کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}-۱}{۴}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}-۱}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۵}+۱}{۴}$

۱۴۰- مجموع جمله‌های دنبالهٔ حسابی a, b, c برابر ۱۵ است. اگر $a+۸, b+۶, c+۴$ دنباله‌ای هندسی باشد، مقدار ac کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۲۱ ۴) ۲۴

سؤال	گام
۱۳۱	۲۵۵
۱۳۲	۲۰ ۲۵۷
۱۳۳	۲۵۷ ۳۲۴
۱۳۴	۲۶۲
۱۳۵	۲۵۹ ۲۶۳
۱۳۶	۲۶۴ ۲۷۱
۱۳۷	۲۷۲
۱۳۸	۲۵۹ ۲۶۸
۱۳۹	۲۶۴ ۲۶۸
۱۴۰	۲۵۹ ۲۷۱

آزمون ۱۵ — آزمون فصل توان، ریشه، اتحاد، تجزیه و تقسیم (۱)

۱۴۱- عبارت $\dfrac{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}{\sqrt[6]{x\sqrt{x}}}$ برابر کدام است؟

۱) $\sqrt[6]{x}$ ۲) $\sqrt[3]{x}$ ۳) $\sqrt[3]{x^2}$ ۴) $\sqrt{x}$

۱۴۲- اگر $\sqrt[4]{x^5}=\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{\frac{1}{2}}}}$ ، مقدار x کدام است؟

۱) $\sqrt[5]{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt[5]{4}$

۱۴۳- اگر $a+\frac{2}{a}=25$ ، مقدار $\dfrac{(a^2-4)(a^2-1)}{a^2}$ کدام است؟

۱) ۶۰۰ ۲) ۶۰۶ ۳) ۶۱۲ ۴) ۶۱۶

۱۴۴- اگر $a=3+\sqrt{3}$ و $b=3-\sqrt{3}$ ، مقدار $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۲۶

۱۴۵- اگر $\sqrt[3]{a+9}-\sqrt[3]{a-9}=3$ ، مقدار a^2 کدام است؟

۱) ۵۴ ۲) ۸۰ ۳) ۸۲ ۴) ۹۰

۱۴۶- اگر $f(x)=\dfrac{x^8-1}{(x^3+x)(x^6-x^4+x^2-1)}$ ، مقدار $f(-\frac{2}{3})$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{3}{4}$

۱۴۷- کدام عبارت در تجزیهٔ $x^2-2x+4y-y^2-3$ وجود دارد؟

۱) $x+y+1$ ۲) $x-y-3$ ۳) $x-y+1$ ۴) $x+y+3$

۱۴۸- مقدار $\dfrac{\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$ برابر کدام است؟

۱) $\sqrt[3]{4}-1$ ۲) $\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}$ ۳) $\sqrt[3]{2}-1$ ۴) $4-\sqrt[3]{2}$

۱۴۹- اگر $P(x+3)=x^3-mx^2+mx+2$ و باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x-3)$ بر $x-4$ برابر ۶ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) -3 ۲) -2 ۳) ۱ ۴) ۲

۱۵۰- $P(x)$ و $Q(x)$ چندجمله‌ای هستند و $P(x-1)=(3-2x)Q(1-x)$. اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+2$ برابر ۱۰ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $Q(x)$ بر $x-2$ چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰

سؤال	گام
۱۴۱	۲۷۸، ۲۷۹
۱۴۲	۲۷۸، ۲۷۹
۱۴۳	۲۸۱، ۲۸۴
۱۴۴	۲۸۱، ۲۸۲، ۲۸۷، ۲۹۱
۱۴۵	۲۸۵
۱۴۶	۲۸۲، ۲۸۸
۱۴۷	۲۸۱، ۲۸۲، ۲۸۹
۱۴۸	۲۸۲، ۲۸۷، ۲۹۱
۱۴۹	۲۹۳
۱۵۰	۲۹۳

آزمون ۱۶ — آزمون فصل توان، ریشه، اتحاد، تجزیه و تقسیم (۲)

سؤال	گام
۱۵۱	۲۷۸ ۲۷۹
۱۵۲	۲۷۸ ۲۷۹
۱۵۳	۲۷۸ ۲۷۹
۱۵۴	۲۸۳
۱۵۵	۲۸۱ ۲۸۷
۱۵۶	۲۸۱ ۲۸۵
۱۵۷	۲۸۹
۱۵۸	۲۸۱ ۲۸۲
۱۵۹	۲۸۱ ۲۸۲ ۲۸۷
۱۶۰	۲۹۳

۱۵۱- مقدار $\sqrt[۵]{\sqrt[۳]{۲^{۱۰}}}\times\sqrt[۶]{\sqrt{۲^{۴}}}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt[۳]{۲}$ ۳) $\sqrt[۶]{۲}$ ۴) $\sqrt[۱۰]{۲}$

۱۵۲- مقدار $\dfrac{\sqrt{۲\sqrt[۳]{۲\sqrt[۴]{۲}}}}{\sqrt[۴]{۲\sqrt{۲}}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۴]{۲}$ ۲) $\sqrt[۳]{۲}$ ۳) $\sqrt[۶]{۲}$ ۴) $\sqrt[۱۲]{۲}$

۱۵۳- اگر $\sqrt[۳]{۳\sqrt[۵]{۹}}=\sqrt[۵]{۲۷\sqrt[۳]{a}}$ ، مقدار $\sqrt[۴]{a}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\dfrac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\dfrac{\sqrt[۴]{۳}}{۳}$ ۴) $۳\sqrt{۳}$

۱۵۴- اگر $۲a^{۲}+b^{۲}+۳c^{۲}=۲۳$ ، $۲a^{۲}+۳b^{۲}+c^{۲}=۳۳$ و $ab+bc+ca=۱۱$ ، مقدار $|a+b+c|$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۵۵- اگر $\dfrac{۱}{a}-\dfrac{۱}{b}=۱$ و $\dfrac{۱}{a^{۲}}+\dfrac{۱}{b^{۲}}=۳$ ، مقدار $\dfrac{۱}{a^{۳}}-\dfrac{۱}{b^{۳}}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۵۶- اگر $a^{۲}+b^{۲}=\sqrt{۶}$ و $ab=۱$ ، مقدار $a^{۱۲}+b^{۱۲}$ کدام است؟

۱) ۵۲ ۲) ۵۳ ۳) ۵۴ ۴) ۵۵

۱۵۷- کدام گزینه عاملی از $۱۵x^{۱۰}+۱۳x^{۵}+۲$ است؟

۱) $۳x^{۵}-۲$ ۲) $۳x^{۵}-۱$ ۳) $۵x^{۵}+۱$ ۴) $۵x^{۵}-۲$

۱۵۸- مقدار $(\sqrt{۱۱}+\sqrt{۷})\sqrt{۹-\sqrt{۷۷}}$ برابر کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) $۴\sqrt{۲}$

۱۵۹- عبارت $\dfrac{x^{۱۸}-۱}{(x^{۶}+x^{۳}+۱)(x^{۶}-x^{۳}+۱)}$ برابر کدام است؟

۱) $x^{۲}-۱$ ۲) $x^{۴}-۱$ ۳) $x^{۶}-۱$ ۴) $x^{۸}-۱$

۱۶۰- باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای‌های $۲P(x)-۱$ و $Q(x)+x$ بر $x+۱$ به‌ترتیب برابر ۳ و -۳ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $(x-۳)P(۱-x)+Q(۳-۲x)$ بر $x-۲$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

آزمون ۱۷

آزمون فصل معادله، تعیین علامت و نامعادله

سؤال	گام
۱۶۱	۳۰۰
۱۶۲	۳۰۲ ۳۰۳
۱۶۳	۳۰۲ ۳۰۵
۱۶۴	۳۰۲ ۳۰۴
۱۶۵	۳۰۸ ۳۱۲
۱۶۶	۳۱۲ ۳۱۳
۱۶۷	۳۲۵ ۳۲۶
۱۶۸	۳۲۵ ۳۲۸
۱۶۹	۳۱۸ ۳۲۴
۱۷۰	۳۲۲ ۳۲۴

۱۶۱- اگر معادلهٔ $kx^2+(2k-8)x+k-7=0$ یک ریشهٔ مضاعف داشته باشد، معادلهٔ $x^2-kx+1=0$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) حداکثر ۱

۱۶۲- اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ $x^2-6x+4=0$ باشند، مقدار $x_1\sqrt{x_1}+x_2\sqrt{x_2}$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{10}$ ۲) $4\sqrt{10}$ ۳) $6\sqrt{5}$ ۴) $8\sqrt{5}$

۱۶۳- اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ $x^2-8x+2=0$ باشند، معادله‌ای که جواب‌هایش $x_1-\frac{3}{x_2}$ و $x_2-\frac{3}{x_1}$ هستند، کدام است؟

۱) $x^2-4x+1=0$ ۲) $x^2-8x+1=0$

۳) $2x^2+8x+1=0$ ۴) $2x^2-8x+1=0$

۱۶۴- اگر $x=\sqrt{2}-1$ یکی از جواب‌های معادلهٔ $x^2+\sqrt{2}mx+m=0$ باشد، جواب دیگر معادله کدام است؟

۱) $\frac{1-\sqrt{2}}{7}$ ۲) $\frac{1+\sqrt{2}}{7}$ ۳) $\frac{1-2\sqrt{2}}{7}$ ۴) $\frac{1+2\sqrt{2}}{7}$

۱۶۵- معادلهٔ $\frac{1}{x^3+1}+\frac{2}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}=0$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۶۶- به ازای چند مقدار a معادلهٔ $\frac{4}{x-1}=\frac{3}{x+a}+\frac{1}{x}$ جواب <u>ندارد</u>؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۶۷- معادلهٔ $x+1=\sqrt{x^4+2x-5}$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۶۸- حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $x\sqrt[3]{x}-4\sqrt[3]{x^2}+3=0$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۷ ۳) ۴۸ ۴) ۶۴

۱۶۹- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلات $3x^2-18\le x^2\le 2x^2-4$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۷۰- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{x+6}{x-4}\ge x$ به‌صورت $(-\infty,a]\cup(4,b]$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

آزمون ۱۸ — آزمون فصل قدرمطلق و جزء صحیح

سؤال	گام
۱۷۱	۳۲۹ ۳۳۰
۱۷۲	۳۳۰
۱۷۳	۳۳۱
۱۷۴	۳۲۴ ۳۲۹ ۳۳۱
۱۷۵	۳۲۴ ۳۲۹ ۳۳۱
۱۷۶	۳۳۶
۱۷۷	۳۳۷ ۳۴۰
۱۷۸	۳۳۷ ۳۴۰
۱۷۹	۲۱ ۳۳۱ ۳۳۷
۱۸۰	۳۳۷ ۳۳۸

۱۷۱- معادلهٔ $||x+۱|-۲x|=۴$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۷۲- معادلهٔ $||x|-k|=۴$ جواب ندارد. حدود k کدام است؟

۱) $k<۴$ ۲) $k<-۴$ ۳) $k>۴$ ۴) $k>-۴$

۱۷۳- چند عدد صحیح در نامعادلهٔ $||x-۲|-۳|\le۴$ صدق می‌کنند؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) نامتناهی

۱۷۴- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|\frac{x+۲}{۲x-۱}|>۱$ کدام است؟

۱) $(-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۲})\cup(\frac{۱}{۲},۳)$ ۲) $(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})\cup(\frac{۱}{۲},۳)$ ۳) $(\frac{۱}{۲},۳)$ ۴) $(-\frac{۱}{۳},۳)$

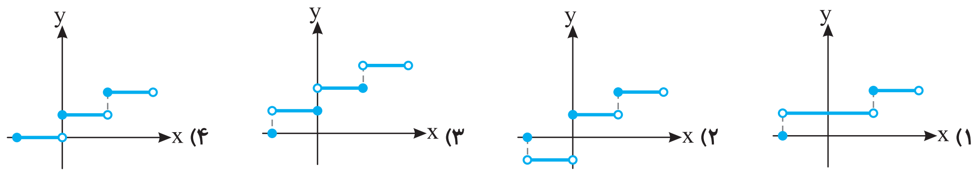
۱۷۵- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $x^۲+۲x<۱+|x+۱|$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

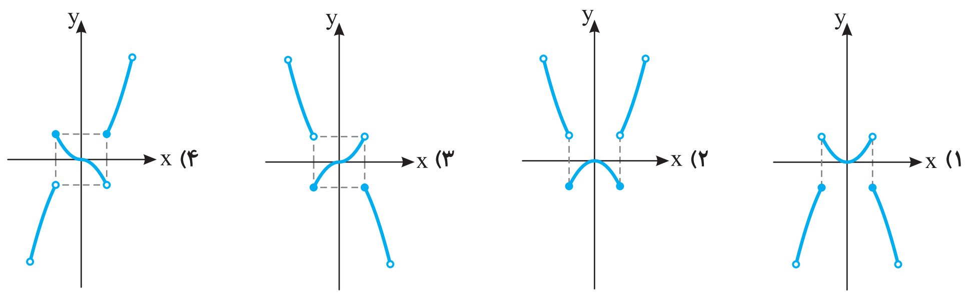
۱۷۶- اگر همهٔ نمودار تابع $y=|x-۱|+|x-۳|$ بالاتر از خط $y=a$ قرار نگیرد، حدود مقدارهای a کدام است؟

۱) $۰<a\le۴$ ۲) $a\ge۴$ ۳) $۰<a\le۲$ ۴) $a\ge۲$

۱۷۷- نمودار تابع f با دامنهٔ $[-۲,۴)$ و ضابطهٔ $f(x)=[\frac{x}{۲}+۱]$ کدام است؟



۱۷۸- نمودار تابع $f(x)=x^۲(-۱)^{[x]}$ روی بازهٔ $(-۲,۲)$ کدام است؟



۱۷۹- دامنهٔ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{۱-[|x+۳|]}$ بازهٔ (a,b) است. مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

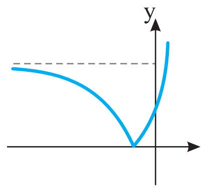
۱۸۰- اگر مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[\frac{۳x-a}{۲}]=۳$ بازهٔ $[-\frac{۲}{۳},۰)$ باشد، مقدار a کدام است؟

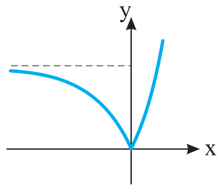
۱) -۴ ۲) -۶ ۳) -۸ ۴) -۱۰

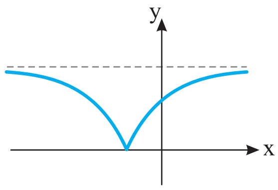
آزمون ۱۹

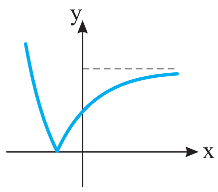
آزمون فصل توابع نمایی و لگاریتمی

۱۸۱- نمودار تابع $f(x)=|۲^{-x}-۲|$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۸۲- در مورد نقاط تلاقی نمودار توابع $y=|x^۲-۱|$ و $y=۱-۲^x$ کدام گزینه درست است؟

۱) یک نقطه با طول مثبت و یک نقطه با طول منفی.
۲) دو نقطه با طول‌های مثبت.
۳) دو نقطه با طول‌های منفی و یک نقطه با طول مثبت.
۴) دو نقطه با طول‌های منفی.

۱۸۳- معادلهٔ $۲^{x+۲}-۵^{x+۲}=۲^{x+۱}-۴\times۵^{x+۱}$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۸۴- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $(\frac{۲}{۳})^{۲x}+(\frac{۲}{۳})^{x+۱}>\frac{۸}{۹}$ به صورت $(-\infty,a)$ است. مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۸}{۹}$ ۴) $\frac{۹}{۸}$

۱۸۵- نمودار تابع $f(x)=\log_۳(ax+b)$ محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول -۱ و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. اگر دامنهٔ این تابع بازهٔ $(c,+\infty)$ باشد، حداقل مقدار c کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $-\frac{۵}{۲}$ ۴) $-\frac{۹}{۲}$

۱۸۶- اگر $\log ۵=a$، مقدار $\log_{\frac{۴}{۵}}\frac{۲}{۵}$ برحسب a کدام است؟

۱) $\frac{۱-۲a}{۲-۳a}$ ۲) $\frac{۱-۲a}{۱+۳a}$ ۳) $\frac{۱-۲a}{۱-۳a}$ ۴) $\frac{۱-۳a}{۲-۳a}$

۱۸۷- اگر $۲^x=۵^y=۱۰$، مقدار $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۱۰}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

۱۸۸- اگر k جواب معادلهٔ $۵^{\log_۲ x}+۴\times x^{\log_۲ ۵}=۱۲۵$ باشد، مقدار $\log_۲(k+۴)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۸۹- چند عدد طبیعی در نامعادلهٔ $\log_{\frac{۱}{۲}}(\log_۳(x+۱))<-۱$ صدق نمی‌کنند؟

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) ۶

۱۹۰- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\log_۳ x+۲\log_x ۳-۳}$ به‌صورت $(a,b]\cup[۹,+\infty)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

سؤال	گام
۱۸۱	۳۰، ۳۷، ۳۴۳
۱۸۲	۳۰، ۳۲، ۳۷، ۳۴۳
۱۸۳	۳۴۲، ۳۴۵
۱۸۴	۳۲۴، ۳۴۲، ۳۴۶
۱۸۵	۳۵۰، ۳۵۲
۱۸۶	۳۴۸
۱۸۷	۳۴۷، ۳۴۸
۱۸۸	۳۴۷، ۳۴۸، ۳۵۴
۱۸۹	۳۴۷، ۳۵۵
۱۹۰	۲۱، ۳۲۲، ۳۲۴، ۳۴۷، ۳۵۵

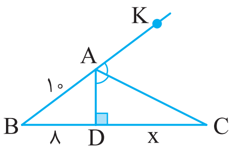
آزمون ۲۰
آزمون فصل استدلال و هندسه (۱)

سؤال	گام
۱۹۱	۳۶۰
۱۹۲	۳۵۹ ۳۷۲
۱۹۳	۳۶۰ ۳۶۲
۱۹۴	۳۶۰ ۳۶۲
۱۹۵	۳۶۰ ۳۶۲
۱۹۶	۳۶۴
۱۹۷	۳۶۹
۱۹۸	۳۶۹
۱۹۹	۳۶۹ ۳۷۲
۲۰۰	۳۶۰ ۳۶۸

۱۹۱- اگر $\frac{x}{۳}=\frac{y}{۵}=\frac{۴x-ky}{۷}$ ، مقدار k کدام است؟

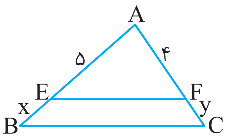
۱) −۱ ۲) ۱ ۳) −۲ ۴) ۲

۱۹۲- در شکل مقابل AC نیمساز زاویهٔ KAD است. مقدار x کدام است؟



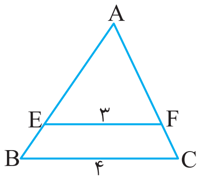
۱) ۱۰ ۲) ۱۲
۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۱۹۳- در شکل مقابل EF||BC و $EF=\frac{۳}{۴}BC$. مقدار x+y کدام است؟



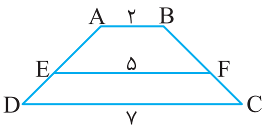
۱) ۳ ۲) ۴
۳) ۵ ۴) ۷

۱۹۴- در شکل مقابل EF||BC و $AF-FC=\frac{۳}{۲}$. طول ضلع AC چقدر است؟



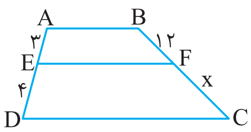
۱) ۸ ۲) ۶
۳) ۴ ۴) ۳

۱۹۵- در شکل مقابل AB، EF و CD موازی‌اند. مقدار $\frac{AE}{ED}$ کدام است؟



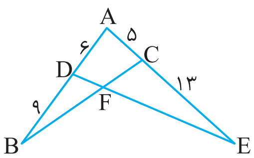
۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) ۲ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۱۹۶- در شکل مقابل AB، EF و CD موازی‌اند. مقدار x کدام است؟



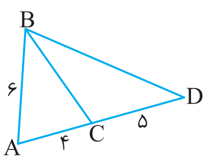
۱) ۱۴ ۲) ۱۶
۳) ۱۸ ۴) ۲۴

۱۹۷- در شکل مقابل نسبت $\frac{BC}{DE}$ چقدر است؟



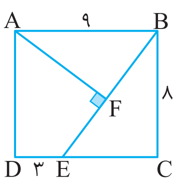
۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۶}$
۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۱۹۸- در شکل مقابل محیط مثلث BCD برابر ۲۰ است. طول BC چقدر است؟



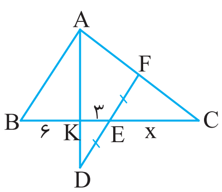
۱) ۹ ۲) ۶
۳) ۸ ۴) ۷

۱۹۹- در شکل مقابل ABCD مستطیل است. طول پاره‌خط EF چقدر است؟



۱) ۳/۸
۲) ۴/۲
۳) ۴/۴
۴) ۴/۶

۲۰۰- در شکل مقابل DF||AB . طول پاره‌خط BC چقدر است؟

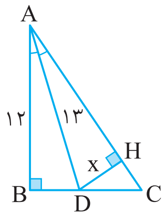


۱) ۱۴
۲) ۱۶
۳) ۱۸
۴) ۲۴

آزمون ۲۱ — آزمون فصل استدلال و هندسه (۲)

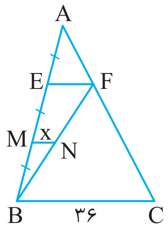
سؤال	گام
۲۰۱	۳۵۹ ۳۷۲
۲۰۲	۳۶۲ ۳۶۶
۲۰۳	۳۶۰ ۳۶۲
۲۰۴	۳۶۰ ۳۶۹
۲۰۵	۳۶۹
۲۰۶	۳۶۴
۲۰۷	۳۶۶ ۳۶۸
۲۰۸	۳۶۰ ۳۶۱ ۳۶۸
۲۰۹	۳۷۲
۲۱۰	۳۷۲

۲۰۱- در شکل مقابل AD نیمساز زاویهٔ BAC است. مقدار x کدام است؟



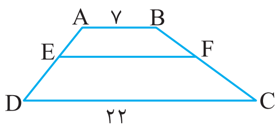
۱) ۵
۲) ۱۲
۳) ۷
۴) ۹

۲۰۲- در شکل مقابل نقطه‌های E و M پاره‌خط AB را به سه قسمت برابر تقسیم کرده‌اند و EF||MN||BC . مقدار x کدام است؟



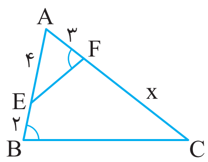
۱) ۴
۲) ۶
۳) ۹
۴) ۱۲

۲۰۳- در شکل مقابل AB||EF||CD و ۳BF=۲FC . طول پاره‌خط EF چقدر است؟



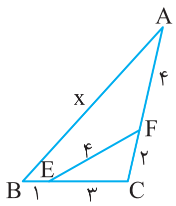
۱) ۱۱
۲) ۱۲
۳) ۱۳
۴) ۱۴

۲۰۴- در شکل مقابل $A\hat{B}C=A\hat{F}E$. مقدار x کدام است؟



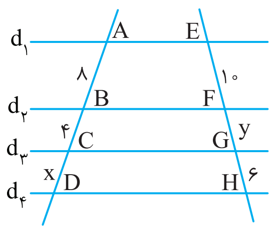
۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۸

۲۰۵- در شکل مقابل مقدار x کدام است؟



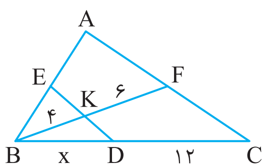
۱) ۶
۲) ۸
۳) ۱۰
۴) ۱۲

۲۰۶- در شکل مقابل خط‌های d_1، d_2، d_3 و d_4 موازی‌اند. مقدار x+y کدام است؟



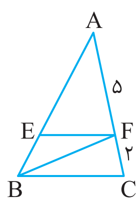
۱) $\frac{۴۶}{۵}$
۲) $\frac{۴۷}{۵}$
۳) $\frac{۴۸}{۵}$
۴) $\frac{۴۹}{۵}$

۲۰۷- در شکل مقابل نقطه‌های E و F به‌ترتیب وسط ضلع‌های AB و AC از مثلث ABC هستند. مقدار x کدام است؟



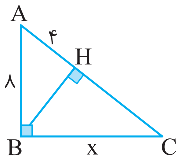
۱) ۳
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۸

۲۰۸- در شکل مقابل EF||BC . نسبت مساحت مثلث AEF به مساحت مثلث BEF چقدر است؟



۱) $\frac{۹}{۲}$
۲) $\frac{۷}{۲}$
۳) $\frac{۵}{۲}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

۲۰۹- در شکل مقابل مقدار x کدام است؟



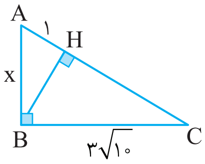
۱) $۸\sqrt{۳}$

۲) $\frac{۱۵\sqrt{۳}}{۲}$

۳) $۴\sqrt{۳}$

۴) $۵\sqrt{۳}$

۲۱۰- در شکل مقابل مقدار x کدام است؟



۱) $\sqrt{۶}$

۲) $۲\sqrt{۲}$

۳) $\sqrt{۱۰}$

۴) $۲\sqrt{۳}$

پاسخ آزمون‌ها

۱- گزینهٔ ۲ ضابطهٔ تابع همانی به‌صورت $f(x)=x$ است. بنابراین

$$a=0,\quad b=-1,\quad b+c=0\Rightarrow c=1$$

بنابراین $g(x)=2^0-x+1=-x+2$ و در نتیجه g یک تابع خطی است.

۲- گزینهٔ ۱ کافی است در تساوی داده شده به جای x قرار دهیم $\frac{1}{x}$:

$$f(\frac{1}{\frac{1}{x}})=\frac{\frac{1}{x}+2}{\frac{2}{x^2}+1}=\frac{\frac{1+2x}{x}}{\frac{2+x^2}{x^2}}=\frac{x(1+2x)}{2+x^2}\Rightarrow f(x)=\frac{x+2x^2}{2+x^2}$$

۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $D_f=\{x|x-3\neq 0,\frac{x-7}{2-x}\geq 0\}$. از طرف دیگر، $\frac{x-7}{2-x}\geq 0\Rightarrow x\in(2,7]$. اگر $x-3=0$، آن‌گاه $x=3$. بنابراین

$$D_f=(2,3)\cup(3,7]=(2,7]-\{3\}$$

پس $a=2$، $b=7$، $c=3$ و در نتیجه $a+b+c=12$.

۴- گزینهٔ ۲ چون فقط یک عدد حقیقی در دامنهٔ تابع قرار ندارد، پس معادلهٔ $m^2x^2+3x+1=0$ باید فقط یک جواب داشته باشد. در دو حالت این اتفاق می‌افتد.

حالت اول این معادله ریشهٔ مضاعف داشته باشد:

$$\Delta=9-4m^2=0\Rightarrow m=\pm\frac{3}{2}$$

در این حالت $x=-\frac{2}{3}$ ریشهٔ مخرج است، در نتیجه $n=-\frac{2}{3}$.

حالت دوم این معادله یک معادلهٔ درجهٔ اول باشد، یعنی ضریب x^2 برابر صفر باشد: $m=0$. در این حالت $x=-\frac{1}{3}$ ریشهٔ مخرج است. در نتیجه $n=-\frac{1}{3}$. پس دو مقدار مختلف برای n وجود دارد.

۵- گزینهٔ ۲ دامنهٔ تابع f به‌صورت $D_f=\mathbb{R}-\{-2\}$ است، پس باید دامنهٔ g هم به همین صورت باشد، یعنی $x=-2$ ریشهٔ مضاعف مخرج $g(x)$ باشد:

$$x^2+cx+4=(x+2)^2\Rightarrow x^2+cx+4=x^2+4x+4\Rightarrow c=4$$

از طرف دیگر ضابطهٔ f و g باید برابر باشند، پس باید صورت $g(x)$ یک عامل ۵ و یک عامل $x+2$ داشته باشد:

$$g(x)=f(x)\Rightarrow\frac{ax+b}{(x+2)^2}=\frac{5}{x+2}\Rightarrow ax+b=5(x+2)\Rightarrow a=5, b=10$$

بنابراین $abc=5(10)(4)=200$.

۶- گزینهٔ ۲ دامنهٔ تابع g به‌صورت زیر است:

$$D_g=D_f-\{x|f(x)=2\}=\{1,4,3,5\}-\{4,3\}=\{1,5\}$$

از طرف دیگر،

$$g(1)=\frac{3f(1)}{2-f(1)}=\frac{-3}{2-(-1)}=-1,\quad g(5)=\frac{3f(5)}{2-f(5)}=\frac{3}{2-1}=3$$

بنابراین $g=\{(1,-1),(5,3)\}$ و $R_g=\{-1,3\}$. پس مجموع اعضای برد تابع g برابر ۲ است.

۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید

$$D_{fog}=\{x|x\in D_g, g(x)\in D_f\}=\{x|-5\le x\le 4, 1\le|x-1|\le 4\}$$

بنابراین

$$1\le|x-1|\le 4\Rightarrow\begin{cases}1\le x-1\le 4\Rightarrow 2\le x\le 5\\ \text{یا}\\ -4\le x-1\le -1\Rightarrow -3\le x\le 0\end{cases}$$

بنابراین $D_{fog}=[-5,4]\cap([-3,0]\cup[2,5])=[-3,0]\cup[2,4]$.

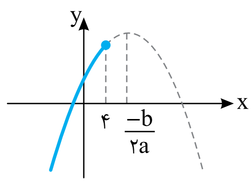
پس اعداد صحیح ۳-، ۲-، ۱-، ۰، ۲، ۳ و ۴ در دامنهٔ تابع fog قرار دارند که تعداد آن‌ها هفت‌تاست.

۸- گزینهٔ ۳ تابع $y=ax^2+bx+c$ با شرط $a<0$ روی بازهٔ $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$ صعودی و روی بازهٔ $[-\frac{b}{2a},+\infty)$ نزولی است. بنابراین باید شرایط زیر برقرار باشند تا تابع f صعودی باشد:

$$k+2<0\Rightarrow k<-2$$

$$4\le\frac{-2}{2(k+2)}\Rightarrow 4+\frac{2}{2(k+2)}\le 0\Rightarrow\frac{4k+9}{k+2}\le 0\Rightarrow -\frac{9}{4}\le k<-2$$

بنابراین اگر $-\frac{9}{4}\le k<-2$، آن‌گاه تابع f روی بازهٔ $(-\infty,4]$ صعودی است.



۹- گزینهٔ ۴ نمودار تابع f^{-1} از نقطهٔ $(4,8)$ عبور می‌کند، پس نمودار تابع f از نقطهٔ $(8,4)$ عبور می‌کند. بنابراین

$$f(8)=4\Rightarrow\frac{1}{16}\times 8^3+\sqrt[3]{8}+2a=4\Rightarrow 2a=-30\Rightarrow a=-15$$

در نتیجه

$$f(x)=\frac{1}{16}x^3+\sqrt[3]{x}-30\Rightarrow f(0)=-30$$

۱۰- گزینهٔ ۳ در تساوی $f(2x+1)=2g(3x)-1$ قرار می‌دهیم $x=2$:

$$f(5)=2g(6)-1\Rightarrow g(6)=\frac{f(5)+1}{2}$$

از طرف دیگر،

$$f^{-1}(2)=5\Rightarrow f(5)=2$$

در نتیجه $g(6)=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$.

۱۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f(\frac{x^2+1}{x})=3x^2+\frac{3}{x^2}-4\Rightarrow f(x+\frac{1}{x})=3(x^2+\frac{1}{x^2})-4$$
$$=3((x+\frac{1}{x})^2-2)-4=3(x+\frac{1}{x})^2-10$$

بنابراین، اگر x عددی باشد که $x+\frac{1}{x}=5$ (چنین عددی وجود دارد، زیرا معادلهٔ $x+\frac{1}{x}=5$ معادل است با $x^2-5x+1=0$، که دلتای آن مثبت است)، آن‌گاه $f(5)=3\times 5^2-10=65$.

۱۲- گزینهٔ ۴ چون تابع خطی است، باید ضابطهٔ آن یک چندجمله‌ای درجهٔ اول باشد. پس باید صورت و مخرج کسر در ضابطهٔ داده شده ساده شوند، یعنی صورت باید به شکل ضرب دو عبارت باشد که یکی از آن‌ها $x+2$ است، یعنی

$$x^2+mx+4=(x+2)(x+a)\Rightarrow x^2+mx+4=x^2+(a+2)x+2a$$

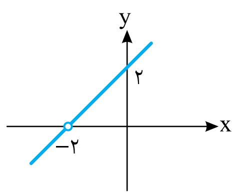
برای اینکه تساوی فوق برقرار باشد باید داشته باشیم

$$a=2, m=a+2\Rightarrow m=4$$

پس ضابطهٔ تابع به‌صورت زیر است:

$$f(x)=\frac{(x+2)(x+2)}{x+2}=x+2,\quad x\neq -2$$

پس نمودار تابع به شکل روبه‌رو است:



۱۳- گزینهٔ ۴ شرط محاسبهٔ دامنه به‌صورت $(a+3)x^2-ax+b\geq 0$ است. مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ فوق نمی‌تواند به‌صورت $[4,+\infty)$ باشد، مگر اینکه عبارت $(a+3)x^2-ax+b$ چندجمله‌ای از درجهٔ اول باشد، یعنی $a+3=0$ و در نتیجه $a=-3$. پس نامعادله به‌صورت $3x+b\geq 0$ درمی‌آید:

$$3x+b\geq 0\Rightarrow x\geq -\frac{b}{3}\Rightarrow D_f=[-\frac{b}{3},+\infty)$$

بنابراین $-\frac{b}{3}=4$ و در نتیجه $b=-12$.

۱۴- گزینهٔ ۲ دامنهٔ تابع f برابر $D_f=\{x|\sin x>0, \pi^2-x^2\geq 0\}$ است. مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\pi^2-x^2\geq 0$ به‌صورت $-\pi\leq x\leq \pi$ است. بنابراین باید به دنبال xهایی در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ باشیم که در نابرابری $\sin x>0$ صدق می‌کنند. بنابراین دامنهٔ تابع f به‌صورت $(0,\pi)$ است و تنها عددهای صحیح ۳، ۲ و ۱ در آن قرار دارند.

۱۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=|x-1|-|x|=\begin{cases}1 & x\leq 0\\ -2x+1 & 0\leq x\leq 1\\ -1 & x\geq 1\end{cases}$$

در بازهٔ $[0,1]$ تابع $f-g$ ثابت نیست. در این بازه،

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=|x-1|+|x|=-x+1+x=1$$

۱۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $f(4)=2$. بنابراین

$$(fof)(4)=k\Rightarrow f(f(4))=k\Rightarrow f(2)=k$$

همچنین، از روی شکل معلوم است که $f(2)$ عددی در بازهٔ $(0,2)$ است، پس $0<k<2$ و در نتیجه $0<\frac{k}{2}<1$، بنابراین چون تابع f روی بازهٔ $(0,1)$ صعودی است، پس $f(\frac{k}{2})$ عددی بین $f(0)$ و $f(1)$ است، یعنی $-1<f(\frac{k}{2})<0$.

۱۷- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$(fog)(x)=f(g(x))=8(x^2-4x+5)\Rightarrow f(2x+1)=8(x-2)^2+8\quad (*)$$

اگر فرض کنیم $t=2x+1$، آن‌گاه $x=\frac{t-1}{2}$. اکنون در تساوی $(*)$ به‌جای x مقدار $\frac{t-1}{2}$ را قرار می‌دهیم:

$$f(t)=8(\frac{t-1}{2}-2)^2+8=2(t-5)^2+8=2(t^2-10t+25)+8$$
$$=2t^2-20t+58$$

بنابراین $f(x)=2x^2-20x+58$.

راه‌حل دوم توجه کنید که $(fog)(x)=8(x^2-4x+5)$، در نتیجه $(fog)(0)=40$. از طرف دیگر $(fog)(0)=f(g(0))=f(1)$. فقط در گزینهٔ (۳) شرط $f(1)=40$ برقرار است.

۱۸- گزینهٔ ۲ اگر $a=0$، آن‌گاه $f(x)=[x]$ و می‌دانیم f یک‌به‌یک نیست. اگر $a=-1$، آن‌گاه $f(x)=-x+[x]$. واضح است که f یک‌به‌یک نیست، مثلاً $f(0)=f(1)=0$. اگر $a=-2$، آن‌گاه $f(x)=-2x+[x]$ و f یک‌به‌یک نیست، مثلاً $f(0)=f(-\frac{1}{2})=0$. اگر $a=1$، آن‌گاه $f(x)=x+[x]$ که یک تابع اکیداً صعودی و یک‌به‌یک است.

۱۹- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا ضابطهٔ تابع وارون تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{x+4}{x+2}\Rightarrow xy+2y=x+4\Rightarrow x(y-1)=-2y+4\Rightarrow x=\frac{-2y+4}{y-1}$$

بنابراین $f^{-1}(x)=\frac{-2x+4}{x-1}$. اکنون با حل معادلهٔ $f(x)=f^{-1}(x)$ نقطه‌های برخورد نمودار دو تابع را می‌یابیم:

$$\frac{x+4}{x+2}=\frac{-2x+4}{x-1}\Rightarrow x^2+3x-4=-2x^2+8\Rightarrow x^2+x-4=0$$

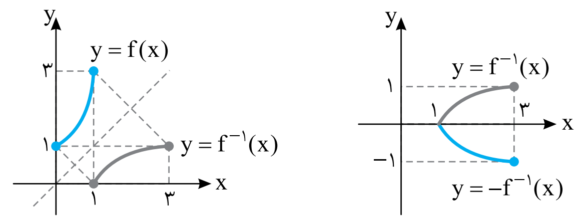
جواب‌های معادلهٔ بالا طول نقاط برخورد هستند که حاصل‌ضرب آن‌ها برابر -4 است.

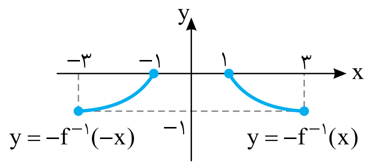
راه‌حل دوم در تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ که $a\neq -d$ اگر نمودار تابع‌های f و f^{-1} نقطه‌های مشترکی داشته باشند، طول این نقطه‌ها از معادلهٔ $f(x)=x$ به‌دست می‌آید. پس

$$\frac{x+4}{x+2}=x\Rightarrow x^2+2x=x+4\Rightarrow x^2+x-4=0$$

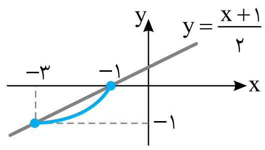
بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌ها برابر -4 است.

۲۰- گزینهٔ ۲ ابتدا قرینهٔ نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $f^{-۱}$ به‌دست بیاید. سپس قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $-f^{-۱}$ به‌دست بیاید. در آخر، قرینهٔ تابع $-f^{-۱}$ را نسبت به محور y رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-f^{-۱}(-x)$ به‌دست بیاید.





بنابراین نمودار توابع $y=-f^{-۱}(-x)$ و g مطابق شکل مقابل دو نقطهٔ مشترک دارند.



۲۱- گزینهٔ ۲ ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH،

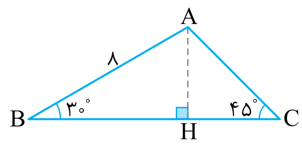
$$\sin ۳۰^\circ=\frac{AH}{AB}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{AH}{۸}$$

پس $AH=۴$. در همین مثلث،

$$\cos ۳۰^\circ=\frac{BH}{AB}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{BH}{۸}$$

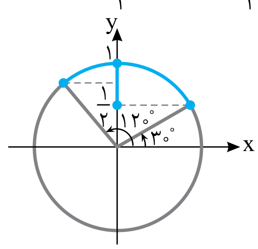
پس $BH=۴\sqrt{۳}$. اکنون توجه کنید که چون مثلث AHC قائم‌الزاویه است و زاویهٔ ۴۵° دارد، پس زاویهٔ حادهٔ دیگر آن نیز ۴۵° است. در نتیجه، مثلث AHC متساوی‌الساقین است، پس $HC=AH=۴$. به این ترتیب،

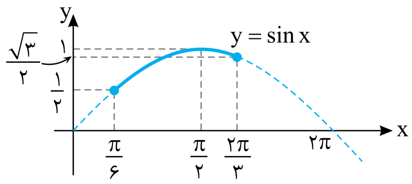
$$BC=BH+HC=۴\sqrt{۳}+۴=۴(\sqrt{۳}+۱)$$



۲۲- گزینهٔ ۲ وقتی چرخ‌وفلک ۱۸۰ ثانیه (۳ دقیقه) می‌چرخد، ۶ دور چرخیده و کابین‌ها در محل اولیهٔ خود قرار گرفته‌اند. باید ببینیم در ۴ ثانیه هر کابین چقدر جابه‌جا می‌شود. چون در هر ۶۰ ثانیه ۲ دور می‌چرخد، پس در ۴ ثانیه $\frac{۴}{۶۰}\times۲$ دور، یعنی $\frac{۲}{۱۵}$ دور معادل $۲\pi\times\frac{۲}{۱۵}=\frac{۸\pi}{۳۰}$ رادیان می‌چرخد. چون زاویهٔ بین دو کابین متوالی $\frac{۲\pi}{۳۰}$ رادیان است، پس هر کابین به ۴ کابین جلوتر منتقل می‌شود. یعنی کابین شمارهٔ یک به محل کابین شمارهٔ پنج منتقل می‌شود.

۲۳- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل‌های زیر واضح است که وقتی $۳۰^\circ\le\alpha\le۱۲۰^\circ$ مقدار $\sin\alpha$ در بازهٔ $[\frac{۱}{۲},۱]$ قرار دارد، پس $a=\frac{۱}{۲}$، $b=۱$ و در نتیجه $a+b=\frac{۳}{۲}$.





۲۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\cot\alpha-\cos\alpha<۰\Rightarrow\cot\alpha(۱-\sin\alpha)<۰$$

چون $۱-\sin\alpha$ نمی‌تواند منفی باشد، پس $\cot\alpha<۰$. از طرف دیگر چون $\cos\alpha\cot\alpha>۰$ و $\cot\alpha<۰$، پس $\cos\alpha<۰$. بنابراین انتهای کمان نظیر زاویهٔ α در ناحیهٔ دوم قرار دارد.

۲۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sin\frac{۴۹\pi}{۱۰}=\sin(۵\pi-\frac{\pi}{۱۰})=\sin\frac{\pi}{۱۰},\ \sin\frac{۷\pi}{۵}=\sin(\frac{۳\pi}{۲}-\frac{\pi}{۱۰})=-\cos\frac{\pi}{۱۰}$$

$$\sin\frac{۱۸\pi}{۵}=\sin(۳\pi+\frac{۳\pi}{۵})=-\sin\frac{۳\pi}{۵}=-\sin(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۱۰})=-\cos\frac{\pi}{۱۰}$$

$$\cos\frac{۸\pi}{۵}=\cos(\frac{۳\pi}{۲}+\frac{\pi}{۱۰})=\sin\frac{\pi}{۱۰}$$

بنابراین $A=\sin\frac{\pi}{۱۰}+(-\cos\frac{\pi}{۱۰})-(-\cos\frac{\pi}{۱۰})+\sin\frac{\pi}{۱۰}=۲\sin\frac{\pi}{۱۰}$.

۲۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\alpha=\frac{۵\pi}{۲}+\beta$ و در نتیجه

$$\sin\alpha=\sin(\frac{۵\pi}{۲}+\beta)=\cos\beta,\quad \cos\alpha=\cos(\frac{۵\pi}{۲}+\beta)=-\sin\beta$$

بنابراین $A=\frac{۳\cos^۳\beta+\cos^۳\beta}{-\sin^۳\beta+۲\sin^۳\beta}=\frac{۴\cos^۳\beta}{\sin^۳\beta}=۴\cot^۳\beta$.

۲۷- گزینهٔ ۳ به کمک اتحادهای $\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$ و $\cos ۲\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha$ عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$A=\sin x\cos x(۱-۲\sin^۲x)=\frac{۱}{۲}\sin ۲x\times\cos ۲x=\frac{۱}{۴}\sin ۴x$$

بنابراین به ازای $x=\frac{\pi}{۱۶}$ به دست می‌آید $A=\frac{۱}{۴}\sin(\frac{۴\pi}{۱۶})=\frac{۱}{۴}\sin\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۸}$.

۲۸- گزینهٔ ۲ از اتحاد مزدوج و اتحاد $\cos ۲\alpha=\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$\cos^۴\frac{\pi}{۱۲}-\sin^۴\frac{\pi}{۱۲}=(\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}+\sin^۲\frac{\pi}{۱۲})(\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}-\sin^۲\frac{\pi}{۱۲})$$

$$=۱\times\cos(۲\times\frac{\pi}{۱۲})=\cos\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۲۹- گزینهٔ ۳ ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos(۲x-\frac{\pi}{۹})=-\sin ۲x\Rightarrow\cos(۲x-\frac{\pi}{۹})=\cos(\frac{\pi}{۲}+۲x)$$

پس جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است:

$$۲x-\frac{\pi}{۹}=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}+۲x\Rightarrow۲k\pi=-\frac{۱۱\pi}{۱۸}\quad(\text{غ.ق.ق})$$

$$۲x-\frac{\pi}{۹}=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}-۲x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}-\frac{۷\pi}{۷۲},k\in\mathbb{Z}$$

۳۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$2\cos^2 2x+3\cos 2x+1=0\Rightarrow(2\cos 2x+1)(\cos 2x+1)=0$$

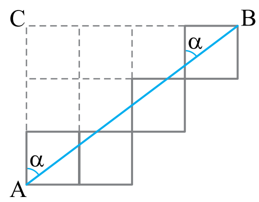
بنابراین

$$\cos 2x=-1\Rightarrow 2x=2k\pi+\pi\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\cos 2x=-\frac{1}{2}\Rightarrow 2x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[0,\pi]$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{2}$، $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{2\pi}{3}$ که مجموع آن‌ها برابر $\frac{3\pi}{2}$ است.

۳۱- گزینهٔ ۳ از نمادگذاری شکل مقابل استفاده می‌کنیم. توجه کنید که بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب، $\alpha=B\hat{A}C$، در نتیجه $\sin\alpha=\sin B\hat{A}C=\frac{BC}{AB}$.



از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ فیثاغورس، $AB=\sqrt{3^2+4^2}=5$. بنابراین $\sin\alpha=\frac{BC}{AB}=\frac{4}{5}$. همچنین $\tan\alpha=\frac{BC}{AC}=\frac{4}{3}$. بنابراین

$$\sin\alpha-\tan\alpha=\frac{4}{5}-\frac{4}{3}=-\frac{8}{15}$$

۳۲- گزینهٔ ۳ با استفاده از اتحاد $\tan\alpha\cot\alpha=1$ مقدار m را حساب می‌کنیم:

$$\frac{1}{2m}(m+2)=1\Rightarrow m+2=2m\Rightarrow m=2$$

بنابراین $\cot\alpha=4$ و به کمک اتحاد $1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$ مقدار $\sin^2\alpha$ را به‌دست می‌آوریم $1+4^2=\frac{1}{\sin^2\alpha}$، پس $\sin^2\alpha=\frac{1}{17}$.

۳۳- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\tan^2x+9\cot^2x=(\tan x-3\cot x)^2+6$$

در نتیجه $\tan^2x+9\cot^2x=(2)^2+6=10$. بنابراین

$$(\tan^2x+9\cot^2x)^2=100$$

$$\tan^4x+81\cot^4x+18\tan^2x\cot^2x=100$$

$$\tan^4x+81\cot^4x+18=100\Rightarrow\tan^4x+81\cot^4x=82$$

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$\tan x-3\cot x=2\Rightarrow\tan x-\frac{3}{\tan x}=2$$

$$\tan^2x-2\tan x-3=0\Rightarrow(\tan x+1)(\tan x-3)=0$$

$$\tan x=-1\ ,\ \tan x=3$$

اگر $\tan x=-1$، آن‌گاه $\cot x=-1$ و

$$\tan^4x+81\cot^4x=1+81=82$$

اگر $\tan x=3$، آن‌گاه $\cot x=\frac{1}{3}$ و

$$\tan^4x+81\cot^4x=81+\frac{81}{81}=82$$

پس در هر دو حالت مقدار عبارت مورد نظر برابر ۸۲ است.

۳۴- گزینهٔ ۳ چون $\sin^2x=\frac{1-\cos 2x}{2}$، پس

$$f(x)=3-4\times\frac{1-\cos 2(2+ax)}{2}=1+2\cos(4+2ax)$$

بنابراین دورهٔ تناوب تابع f برابر است با $\frac{2\pi}{|2a|}=\frac{\pi}{|a|}$، در نتیجه

$$\frac{\pi}{|a|}=\frac{\pi}{6}\Rightarrow|a|=6$$

۳۵- گزینهٔ ۲ حداقل مقدار تابع مورد نظر باید ۴- و حداکثر مقدار آن ۲ باشد. حداقل مقدار تابع $y=3\cos(2x)-4$ برابر ۷- و حداقل مقدار تابع $y=-2\cos(3x)+1$ برابر ۱- است. پس این توابع جواب نیستند. در تابع $y=-3\sin(3x)-1$ مقدار تابع در $x=0$ برابر ۱- است و تابع در سمت راست $x=0$ نزولی است. پس $y=-3\sin(3x)-1$ جواب نیست. ولی تابع $y=3\sin(2x)-1$ در سمت راست $x=0$ صعودی است.

۳۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $\cos(7\pi+\alpha)=-\cos\alpha$. در نتیجه $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$ و $\sin^2\alpha=1-(-\frac{1}{3})^2=\frac{8}{9}$. چون $\alpha\in(\pi,\frac{3\pi}{2})$، پس $\sin\alpha<0$ و در نتیجه $\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$، بنابراین

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2(-\frac{2\sqrt{2}}{3})(-\frac{1}{3})=\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

۳۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\sin x=2\cos x\Rightarrow\sin^2x=4\cos^2x$$

اگر به طرفین تساوی بالا $\cos^2x$ را اضافه کنیم، آن‌گاه از اتحاد $\sin^2x+\cos^2x=1$ نتیجه می‌شود

$$4\cos^2x+\cos^2x=1\Rightarrow\cos^2x=\frac{1}{5}$$

پس $\cos 2x=2\cos^2x-1=2(\frac{1}{5})-1=-\frac{3}{5}$.

راه‌حل دوم از فرض مسئله نتیجه می‌گیریم $\tan x=2$. اکنون می‌توانیم از اتحاد $\cos 2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ استفاده کنیم. بنابراین

$$\cos 2x=\frac{1-\tan^2x}{1+\tan^2x}\xrightarrow{\tan x=2}\cos 2x=\frac{1-4}{1+4}=-\frac{3}{5}$$

۳۸- گزینهٔ ۲ دو طرف تساوی $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{2}{3}$ را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=(\frac{2}{3})^2\Rightarrow\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{4}{9}$$

$$1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{4}{9}\Rightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{5}{9}$$

بنابراین $\sin 2\alpha=\frac{5}{9}$ و در نتیجه $\sin^2 2\alpha=\frac{25}{81}$.

۳۹- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت $\sin 2x=\frac{1}{2}$ می‌نویسیم. پس جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$2x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{12},\ k\in\mathbb{Z}$$

$$2x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=k\pi+\frac{5\pi}{12},\ k\in\mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازهٔ $(0,\frac{3\pi}{2})$ را مشخص می‌کنیم:

k	0	1	2
$x=k\pi+\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{12}$	$\pi+\frac{\pi}{12}$	$2\pi+\frac{\pi}{12}$ (غ.ق.ق)

k	0	1	2
$x=k\pi+\frac{5\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\pi+\frac{5\pi}{12}$	$2\pi+\frac{5\pi}{12}$ (غ.ق.ق)

۴۰- گزینهٔ ۱ در نقاطی که $\cos 4x=1$، تابع f به حداقل مقدار خود می‌رسد. پس

$$4x=2k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$$

k	0	1	2
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π

بنابراین نمودار تابع در بازهٔ مورد نظر سه بار به حداقل مقدار خود می‌رسد.

۴۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که اگر $x\to1^+$، آن‌گاه $(1-x^2)\to0^-$ و اگر $x\to1^-$، آن‌گاه $(1-x^2)\to0^+$. بنابراین

$$\lim_{x\to1^+}f(1-x^2)=\lim_{t\to0^-}f(t)=1,\quad \lim_{x\to1^-}f(1-x^2)=\lim_{t\to0^+}f(t)=-2$$

در نتیجه $\lim_{x\to1^+}f(1-x^2)-\lim_{x\to1^-}f(1-x^2)=1-(-2)=3$.

۴۲- گزینهٔ ۱ وقتی که x از سمت چپ به ۲ نزدیک می‌شود، $f(x)$ از سمت راست به ۲ نزدیک می‌شود. بنابراین

$$\lim_{x\to2^-}(f\circ f)(x)=\lim_{x\to2^-}f(f(x))=\lim_{t\to2^+}f(t)=-1$$

۴۳- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم $\lim_{x\to1}f(x)=a$ و $\lim_{x\to1}g(x)=b$. در این صورت

$$\lim_{x\to1}(f-2g)(x)=\lim_{x\to1}f(x)-2\lim_{x\to1}g(x)=a-2b=2$$

$$\lim_{x\to1}(2f+3g)(x)=2\lim_{x\to1}f(x)+3\lim_{x\to1}g(x)=2a+3b=18$$

از حل دستگاه معادلات بالا نتیجه می‌شود $a=6$ و $b=2$، پس

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\lim_{x\to1}f(x)}{\lim_{x\to1}g(x)}=\frac{a}{b}=\frac{6}{2}=3$$

۴۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که در یک همسایگی چپ نقطهٔ $x=1$ تساوی‌های $[2x]=1$، $[-x]=-1$ و $|1-x|=1-x$ برقرار هستند. بنابراین

$$\lim_{x\to1^-}\frac{[2x](x+2)}{x[-x]+|1-x|}=\lim_{x\to1^-}\frac{x+2}{-x+1-x}=\lim_{x\to1^-}\frac{x+2}{-2x+1}=-3$$

۴۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{8})^-}f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{8})^-}(\sqrt{2}\sin 2x)=\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}=1$$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{8})^+}f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{8})^+}(a\cos 2x+2)=a\cos\frac{\pi}{4}+2=\frac{a\sqrt{2}}{2}+2$$

اگر تابع f در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{8}$ حد داشته باشد، دو حد بالا باید برابر باشند:

$$1=\frac{a\sqrt{2}}{2}+2\Rightarrow a=-\sqrt{2}$$

۴۶- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\frac{2x^2-8}{x^2+3x+2}=\frac{2(x^2-4)}{x^2+3x+2}=\frac{2(x-2)(x+2)}{(x+2)(x+1)}=\frac{2(x-2)}{x+1},\ x\neq-2$$

بنابراین

$$\lim_{x\to-2}\frac{2x^2-8}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{2(x-2)}{x+1}=\frac{-8}{-1}=8$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم: (به درس آخر فصل چهارم مراجعه کنید.)

$$\lim_{x\to-2}\frac{2x^2-8}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{4x}{2x+3}=\frac{-8}{-1}=8$$

۴۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}(ax^2+1)=4a+1$$

$$\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^+}(4ax+21)=8a+21$$

برای اینکه تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، باید حدهای چپ و راست تابع در نقطهٔ ۲ با مقدار تابع در نقطهٔ ۲ برابر باشند، بنابراین

$$4a+1=b-1,\quad 8a+21=b-1$$

از حل دستگاه معادلات بالا به‌دست می‌آید $a=-5$ و $b=-18$.

۴۸- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** برای اینکه حد کسر برابر $+\infty$ شود، باید حد مخرج صفر باشد. پس

$$\lim_{x\to1}(x^3+ax^2+3x+b)=1+a+3+b=0\Rightarrow b=-a-4$$

بنابراین

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-x}{x^3+ax^2+3x+b}=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)}{x^3+ax^2+3x-a-4}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x^2+(a+1)x+a+4)}=\lim_{x\to1}\frac{x}{x^2+(a+1)x+a+4}$$

برای اینکه حد کسر فوق $+\infty$ شود، باید حد مخرج صفر باشد و علامت مخرج در دو طرف $x=1$ مثبت باشد، یعنی $x=1$ ریشهٔ مضاعف آن باشد. پس

$$1+a+1+a+4=0\Rightarrow a=-3$$

بنابراین $b=-1$ و $a-b=-2$.

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم: (به درس آخر فصل چهارم مراجعه کنید.)

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-x}{x^3+ax^2+3x+b}=\lim_{x\to1}\frac{2x-1}{3x^2+2ax+3}$$

با توجه به اینکه حاصل حد $+\infty$ شده است، بنابراین حد مخرج در نقطهٔ $x=۱$ باید صفر باشد. پس

$$\lim_{x\to ۱}(۳x^۲+۲ax+۳)=۰\Rightarrow ۳+۲a+۳=۰\Rightarrow a=-۳$$

توجه کنید که در ابتدا در نقطهٔ $x=۱$ هم، حد صورت و هم حد مخرج برابر صفر بود، پس $۱+a+۳+b=۰\xrightarrow{a=-۳}b=-۱$

بنابراین $a-b=-۲$.

۴۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که بزرگ‌ترین جمله در صورت کسر مورد نظر برابر است با $۱۰x^۲$، در نتیجه حد مورد نظر برابر است با $\lim_{x\to+\infty}\frac{۱۰x^۲}{۵x^۲}=۲$.

۵۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $m\neq ۶$، در غیر این صورت حد مورد نظر برابر صفر می‌شود. اکنون توجه کنید که

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۶x^۲-۵x+۱-mx^۲}{(۳x-۲)^۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(۶-m)x^۲-۵x+۱}{۹x^۲-۱۲x+۴}=\frac{۶-m}{۹}$$

بنابراین $\frac{۶-m}{۹}=\frac{۱}{۲}$، پس $m=\frac{۳}{۲}$.

۵۱- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $x\to ۰^+$ یا $x\to ۰^-$، آن‌گاه $x^۳-x^۲=x^۲(x-۱)\to ۰^-$، بنابراین

$$\lim_{x\to ۰}f(x^۳-x^۲)=\lim_{t\to ۰^-}f(t)=-۱$$

۵۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\lim_{x\to ۳}f(f(x-۳))=\lim_{t\to ۰}f(f(t))=\lim_{s\to -۱}f(s)=۰$$

و

$$\lim_{x\to ۳}(xf(x-۱))=\lim_{x\to ۳}x\times\lim_{x\to ۳}f(x-۱)=۳\lim_{t\to ۲}f(t)=۰$$

بنابراین $\lim_{x\to ۳}\frac{f(f(x-۳))+۱}{xf(x-۱)+۲}=\frac{۰+۱}{۰+۲}=\frac{۱}{۲}$.

۵۳- گزینهٔ ۱ با فرض $\lim_{x\to ۲}f(x)=L_۱$ و $\lim_{x\to ۲}g(x)=L_۲$ معلوم می‌شود که

$$\lim_{x\to ۲}(f(x)+g(x))=۳\Rightarrow \lim_{x\to ۲}f(x)+\lim_{x\to ۲}g(x)=۳\Rightarrow L_۱+L_۲=۳$$

$$\lim_{x\to ۲}(f^۲(x)-g^۲(x))=۲۱\Rightarrow \lim_{x\to ۲}f^۲(x)-\lim_{x\to ۲}g^۲(x)=۲۱$$

$$L_۱^۲-L_۲^۲=۲۱\Rightarrow (L_۱-L_۲)(L_۱+L_۲)=۲۱$$

$$۳(L_۱-L_۲)=۲۱\Rightarrow L_۱-L_۲=۷$$

از حل دستگاه معادله‌های $\begin{cases}L_۱-L_۲=۷\\ L_۱+L_۲=۳\end{cases}$ به دست می‌آید $L_۱=۵$ و $L_۲=-۲$. بنابراین $\lim_{x\to ۱}\frac{f(۲x^۲)}{g(x+۱)}=\frac{\lim_{x\to ۱}f(۲x^۲)}{\lim_{x\to ۱}g(x+۱)}=\frac{\lim_{t\to ۲}f(t)}{\lim_{k\to ۲}g(k)}=\frac{۵}{-۲}$.

۵۴- گزینهٔ ۳ ابتدا حد چپ و حد راست تابع را در نقطهٔ $x=۳$ حساب می‌کنیم. توجه کنید که

$$\lim_{x\to ۳^-}[-x]=-۳\ ,\quad \lim_{x\to ۳^-}[x^۲]=۸$$

$$\lim_{x\to ۳^+}[-x]=-۴\ ,\quad \lim_{x\to ۳^+}[x^۲]=۹$$

پس

$$\lim_{x\to ۳^-}f(x)=\lim_{x\to ۳^-}(-۳x+۸m)=۸m-۹$$

$$\lim_{x\to ۳^+}f(x)=\lim_{x\to ۳^+}(-۴x+۹m)=-۱۲+۹m$$

برای اینکه تابع در نقطهٔ $x=۳$ حد داشته باشد، باید حد چپ و حد راست تابع در آن با هم برابر باشند. پس

$$۸m-۹=۹m-۱۲\Rightarrow m=۳$$

۵۵- گزینهٔ ۲ با توجه به اینکه تابع $y=[x]$ فقط در نقاط صحیح حد ندارد، پس تابع f هم فقط در این نقاط ممکن است حد نداشته باشد. به دلیل حضور عامل صفر کنندهٔ $x^۲-۱$ که در $[x]$ ضرب شده است، تابع f در اعداد صحیح $x=۱$ و $x=-۱$ حد دارد و در بقیهٔ نقاط صحیح بازهٔ $(-۲,۳)$ یعنی نقاط $x=۰$ و $x=۲$ حد ندارد. توجه کنید که اگر k عددی صحیح باشد، آن‌گاه

$$\lim_{x\to k^+}f(x)=\lim_{x\to k^+}k(x^۲-۱)=k(k^۲-۱)$$

$$\lim_{x\to k^-}f(x)=\lim_{x\to k^-}(k-۱)(x^۲-۱)=(k-۱)(k^۲-۱)$$

از تساوی $k(k^۲-۱)=(k-۱)(k^۲-۱)$ نتیجه می‌شود $k=\pm۱$، یعنی تابع f فقط در دو تا نقطه از نقاط صحیح ($x=۱$ و $x=-۱$) حد دارد و در بقیهٔ نقاط صحیح حد ندارد.

۵۶- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** چون حد صورت کسر در نقطهٔ $x=۲$ صفر است، پس باید حد مخرج کسر هم در آن صفر باشد، زیرا در غیر این صورت حد کسر برابر صفر خواهد شد. پس

$$\lim_{x\to ۲}(ax^۲+bx+۲)=۴a+۲b+۲=۰\Rightarrow b=-۱-۲a$$

بنابراین

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x+۲}-۲}{ax^۲+bx+۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x+۲}-۲}{ax^۲+(-۱-۲a)x+۲}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{x+۲-۴}{(x-۲)(ax-۱)(\sqrt{x+۲}+۲)}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{۱}{(ax-۱)(\sqrt{x+۲}+۲)}=\frac{۱}{۴(۲a-۱)}$$

بنابراین $\frac{۱}{۴(۲a-۱)}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow ۲a-۱=\frac{۱}{۳}\Rightarrow a=\frac{۲}{۳}$

در نتیجه $b=-\frac{۷}{۳}$ و $a+b=\frac{-۵}{۳}$.

راه‌حل دوم توجه کنید که حد صورت در نقطهٔ $x=۲$ برابر صفر است و چون مقدار حد عبارت صفر نشده، پس حد مخرج در این نقطه هم باید صفر باشد: $۴a+۲b+۲=۰$.
اکنون از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم (به درس آخر فصل چهارم مراجعه کنید):

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x+۲}-۲}{ax^۲+bx+۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x+۲}}}{۲ax+b}=\frac{\frac{۱}{۴}}{۴a+b}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow ۴a+b=\frac{۱}{۳}$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}۴a+۲b=-۲\\ ۴a+b=\frac{۱}{۳}\end{cases}$ به‌دست می‌آید $a=\frac{۲}{۳}$ و $b=-\frac{۷}{۳}$. پس

$$a+b=-\frac{۵}{۳}$$

۵۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f(12)=[6]-[4]=2,\quad \lim_{x\to 12^-} f(x)=5-3=2,\quad \lim_{x\to 12^+} f(x)=6-4=2$$

بنابراین تابع f در $x=12$ پیوسته است.

۵۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه $-\frac{1}{x}\to 0^-$ و در نتیجه $[-\frac{1}{x}]=-1$، بنابراین $\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2-1}{4x^2+x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{4x^2}=-\frac{1}{4}$.

۵۹- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to-2}\frac{x+3}{4x^3+ax^2+bx}=\lim_{x\to-2}\frac{x+3}{x(4x^2+ax+b)}=-\infty$$

چون $\lim_{x\to-2}\frac{x+3}{x}=\frac{1}{-2}$ ، پس باید $\lim_{x\to-2}\frac{1}{4x^2+ax+b}=+\infty$ و در نتیجه $x=-2$ باید ریشهٔ مضاعف مخرج باشد و در اطراف آن مخرج مثبت باشد. بنابراین

$$4x^2+ax+b=4(x+2)^2\Rightarrow 4x^2+ax+b=4x^2+16x+16$$

پس $a=16$، $b=16$ و $a+b=32$.

۶۰- گزینهٔ ۴ چون حاصل حد $-\infty$ شده است، پس باید درجهٔ صورت کسر بیشتر از درجهٔ مخرج آن شود. بنابراین

$$a-3=0\Rightarrow a=3,\quad b^2-3a=0\xrightarrow{a=3}b^2=9\Rightarrow b=\pm 3$$

از طرف دیگر حد مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(b-2)x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}((b-2)x)=-\infty$$

پس $b-2$ باید منفی باشد و در نتیجه $b=-3$ و $ab=-9$.

۶۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f'(4)=\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\frac{4+2\times 2}{16-4\times 2}=1$$

۶۲- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** به جای ۲۷ قرار می‌دهیم $f^3(1)$ و از تعریف مشتق در نقطهٔ $x=1$ استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^3(1+h)-27}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f^3(1+h)-f^3(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(f(1+h)-f(1))(f^2(1+h)+f(1)f(1+h)+f^2(1))}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\times\lim_{h\to 0}(f^2(1+h)+3f(1+h)+9)$$

$$=f'(1)\times(f^2(1)+3f(1)+9)=3(9+9+9)=81$$

زیرا $f'(1)=\frac{6\times 1}{1+1}=3$.

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم (به درس آخر این فصل مراجعه کنید):

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^3(1+h)-27}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3f'(1+h)f^2(1+h)}{1}$$

$$=3f'(1)f^2(1)=3\times 3\times 3^2=81$$

۶۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f(0)=0$ و در نتیجه

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x+2\sqrt{4x^2-x^4}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{x+2\sqrt{x^2(4-x^2)}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x+2|x|\sqrt{4-x^2}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}(1-2\sqrt{4-x^2})=1-4=-3$$

به همین ترتیب،

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+2|x|\sqrt{4-x^2}}{x}=\lim_{x\to 0^+}(1+2\sqrt{4-x^2})=1+4=5$$

پس $f'_+(0)+f'_-(0)=2$.

۶۴- گزینهٔ ۳ ابتدا تابع مشتق تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{1+2x+3x^2+\cdots+24x^{23}}{2\sqrt{1+x+x^2+\cdots+x^{24}}}$$

بنابراین $f'(1)=\frac{1+2+3+\cdots+24}{2\sqrt{1+1+\cdots+1}}=\frac{\frac{24\times 25}{2}}{2\sqrt{25}}=30$.

۶۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که در یک همسایگی نقطهٔ $x=4$ تساوی $|x-3|=x-3$ برقرار است، پس

$$f(x)=x^2(x-3)\sqrt{x^2-3x}=x(x^2-3x)\sqrt{x^2-3x}=x(x^2-3x)^{\frac{3}{2}}$$

بنابراین $f'(x)=(x^2-3x)^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}x(2x-3)(x^2-3x)^{\frac{1}{2}}$. در نتیجه

$$f'(4)=8+\frac{3}{2}\times 4\times 5\times 2=68$$

۶۶- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** توجه کنید که ضابطهٔ تابع به‌صورت زیر است:

$$f(x)=|x||x-3|-|x||x+3|=|x|(|x-3|-|x+3|)$$

بنابراین

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|(|x-3|-|x+3|)}{x}=\lim_{x\to 0^+}(|x-3|-|x+3|)=3-3=0$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|(|x-3|-|x+3|)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}(-(|x-3|-|x+3|))=-(3-3)=0$$

پس $f'(0)=0$.

راه‌حل دوم در یک همسایگی راست $x=0$ مقدار x^2-3x منفی و مقدار x^2+3x مثبت است. پس در این همسایگی

$$f(x)=-x^2+3x-x^2-3x=-2x^2\Rightarrow f'(x)=-4x\Rightarrow f'_+(0)=0$$

در یک همسایگی چپ $x=0$ مقدار x^2-3x مثبت و مقدار x^2+3x منفی است. پس در این همسایگی

$$f(x)=x^2-3x+x^2+3x=2x^2\Rightarrow f'(x)=4x\Rightarrow f'_-(0)=0$$

پس $f'(0)=0$.

۶۷- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** توجه کنید که $x=۱$ و $x=۰$ ریشه‌های عبارت داخل قدرمطلق هستند. مشتق‌پذیری را در این نقاط بررسی می‌کنیم. تابع در نقطهٔ $x=۱$ مشتق چپ و راست نابرابر دارد:

$$x\geq ۱\Rightarrow f(x)=x(x^۲-x)=x^۳-x^۲$$

$$f'(x)=۳x^۲-۲x\Rightarrow f'_+(۱)=۳-۲=۱$$

$$۰\leq x\leq ۱\Rightarrow f(x)=x(x-x^۲)=x^۲-x^۳$$

$$f'(x)=۲x-۳x^۲\Rightarrow f'_-(۱)=۲-۳=-۱$$

ولی تابع در نقطهٔ $x=۰$ مشتق‌پذیر است:

$$f'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{x|x^۲-x|}{x}=\lim_{x\to ۰}|x^۲-x|=۰$$

راه‌حل دوم تابع $y=|g(x)|$ در ریشه‌های سادهٔ $g(x)=۰$ مشتق ندارد. پس $y=|x^۲-x|$ در $x=۰$ و $x=۱$ مشتق ندارد ولی تابع $y=x|x^۲-x|$ به دلیل وجود عامل صفر کنندهٔ x که در قدرمطلق ضرب شده است در $x=۰$ مشتق‌پذیر است.

۶۸- گزینهٔ ۲ به جای اینکه حاصل $g'(x)f'(g(x))$ را بیابیم، مشتق تابع fog را به‌دست می‌آوریم. پس ابتدا ضابطهٔ تابع fog را به‌دست می‌آوریم:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f\left(\frac{۲x}{\sqrt{۱+x^۲}}\right)=\frac{\frac{۲x}{\sqrt{۱+x^۲}}}{\sqrt{۴-\frac{۴x^۲}{۱+x^۲}}}=\frac{\frac{۲x}{\sqrt{۱+x^۲}}}{\frac{۲}{\sqrt{۱+x^۲}}}=x$$

بنابراین $(fog)'(x)=۱$.

۶۹- گزینهٔ ۱ اگر S و P به‌ترتیب مساحت و محیط مربعی با طول ضلع x باشند، آن‌گاه

$$S=x^۲\Rightarrow x=\sqrt{S},\quad P=۴x\Rightarrow P(S)=۴\sqrt{S}$$

بنابراین

$$P'(S)=\frac{۴}{۲\sqrt{S}}=\frac{۲}{\sqrt{S}}=۴\Rightarrow \sqrt{S}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow S=\frac{۱}{۴}$$

۷۰- گزینهٔ ۴ در نقطه‌ای که نمودار تابع بر محور طول‌ها مماس است، مقدار تابع و مقدار مشتق تابع برابر صفر است، پس ابتدا نقطه‌ای را که مشتق تابع در آن صفر است، پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{(۲x-a)(x^۲+۹)-۲x(x^۲-ax+۹)}{(x^۲+۹)^۲}=۰$$

$$۲x^۳+۱۸x-ax^۲-۹a-۲x^۳+۲ax^۲-۱۸x=۰$$

$$a(x^۲-۹)=۰\xrightarrow{a\neq ۰}x=-۳,\ x=۳$$

اگر $x=-۳$، آن‌گاه

$$f(-۳)=۰\Rightarrow ۹+۳a+۹=۰\Rightarrow a=-۶$$

اگر $x=۳$، آن‌گاه

$$f(۳)=۰\Rightarrow ۹-۳a+۹=۰\Rightarrow a=۶$$

پس حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای a برابر ۳۶- است.

راه‌حل دوم چون تابع f بر محور طول‌ها مماس است، پس معادلهٔ $f(x)=۰$ ریشهٔ مضاعف دارد. بنابراین

$$\frac{x^۲-ax+۹}{x^۲+۹}=۰\Rightarrow x^۲-ax+۹=۰\Rightarrow \Delta=a^۲-۳۶=۰\Rightarrow a=\pm ۶$$

پس حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای a برابر ۳۶- است.

۷۱- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** توجه کنید که $f(۱)=۱$، پس

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-۱}{h^۲-۴h}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h(h-۴)}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}\times\lim_{h\to ۰}\frac{۱}{h-۴}=f'(۱)\times\frac{۱}{-۴}$$

از طرف دیگر

$$f(x)=\frac{x^۲+۱}{x^۴+۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{۲x(x^۴+۱)-۴x^۳(x^۲+۱)}{(x^۴+۱)^۲}$$

$$f'(۱)=\frac{۲\times۲-۴\times۲}{۴}=-۱$$

بنابراین مقدار حد مورد نظر برابر $\frac{۱}{۴}$ است.

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم (به درس آخر این فصل مراجعه کنید):

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-۱}{h^۲-۴h}=\lim_{h\to ۰}\frac{f'(۱+h)}{۲h-۴}=\frac{f'(۱)}{-۴}=\frac{۱}{۴}$$

توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x^۲+۱}{x^۴+۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{۲x(x^۴+۱)-۴x^۳(x^۲+۱)}{(x^۴+۱)^۲}$$

$$f'(۱)=\frac{۲\times۲-۴\times۲}{۴}=-۱$$

۷۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{(۲x+a)(x+۱)-(۱)(x^۲+ax)}{(x+۱)^۲}$$

بنابراین

$$f'(۲)=\frac{۱۱}{۹}\Rightarrow\frac{(۴+a)(۳)-(۴+۲a)}{۹}=\frac{۱۱}{۹}\Rightarrow a=۳$$

۷۳- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^۲-۶x+۹}}{x-\sqrt[۳]{x+۵}}=\frac{\sqrt{(x-۳)^۲}}{x-\sqrt[۳]{x+۵}}=\frac{|x-۳|}{x-\sqrt[۳]{x+۵}}$$

بنابراین

$$f'_-(۳)=\lim_{x\to ۳^-}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{\frac{|x-۳|}{x-\sqrt[۳]{x+۵}}}{x-۳}$$

$$=\lim_{x\to ۳^-}\frac{-(x-۳)}{(x-۳)(x-\sqrt[۳]{x+۵})}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{-۱}{x-\sqrt[۳]{x+۵}}=-\frac{۱}{۳-۲}=-۱$$

۷۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f(۱)=۳,\quad \lim_{x\to ۱^+}f(x)=\lim_{x\to ۱^+}(x^۲+۱)=۲,\quad \lim_{x\to ۱^-}f(x)=\lim_{x\to ۱^-}(۲x)=۲$$

پس تابع در $x=۱$ پیوسته نیست و در نتیجه مشتق‌پذیر نیست.

۷۵- گزینهٔ ۲ اگر از دو طرف تساوی داده شده مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$(۳x^۲-۱)f'(x^۳-x)=۴\sqrt{x+۱}+(۴x)\times\frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}}$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=۳$، به‌دست می‌آید:

$$۲۶f'(۲۴)=۴\times۲+۴\times۳\times\frac{۱}{۲\times۲}\Rightarrow f'(۲۴)=\frac{۱۱}{۲۶}$$

۷۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x^5+1}{x+1}=\frac{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)}{x+1}$$
$$=x^4-x^3+x^2-x+1 \qquad (x\neq 1)$$

پس $f'(x)=4x^3-3x^2+2x-1$ بنابراین $f''(x)=12x^2-6x+2$. در نتیجه $f''(2)=38$.

۷۷- گزینهٔ ۴ نمودار تابع‌های f و g از نقطهٔ $(2,3)$ عبور می‌کنند، پس $f(2)=g(2)=3$. شیب خط مماس در نقطهٔ $(2,3)$ بر نمودار تابع‌های f و g به‌ترتیب برابر ۱ و ۲ است، پس $f'(2)=1$ و $g'(2)=2$.

اکنون توجه کنید که

$$h(x)=\frac{f(x)+x}{g(x)-x}$$
$$h'(x)=\frac{(f'(x)+1)(g(x)-x)-(g'(x)-1)(f(x)+x)}{(g(x)-x)^2}$$

بنابراین

$$h'(2)=\frac{(f'(2)+1)(g(2)-2)-(g'(2)-1)(f(2)+2)}{(g(2)-2)^2}=\frac{2\times1-1\times5}{(3-2)^2}=-3$$

۷۸- گزینهٔ ۲ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[a,1]$ برابر $\frac{f(1)-f(a)}{1-a}$ است:

$$\frac{f(1)-f(a)}{1-a}=\frac{0-\sqrt{1-a}}{1-a}=\frac{-1}{\sqrt{1-a}}$$

بنابراین

$$\frac{-1}{\sqrt{1-a}}=-\frac{1}{4}\Rightarrow 1-a=16\Rightarrow a=-15$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در $x=a$ را می‌خواهیم که برابر $f'(a)$ است:

$$f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}\Rightarrow f'(a)=f'(-15)=\frac{-1}{2\sqrt{1+15}}=-\frac{1}{8}$$

۷۹- گزینهٔ ۳ در نقاطی که خط مماس بر نمودار موازی محور طول‌هاست، مقدار مشتق تابع برابر صفر است. بنابراین

$$f(x)=x^2-4\sqrt{x^2+3}$$
$$f'(x)=2x-\frac{4x}{\sqrt{x^2+3}}=0\Rightarrow 2x\left(1-\frac{2}{\sqrt{x^2+3}}\right)=0$$
$$\begin{cases} x=0 \\ \sqrt{x^2+3}=2\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm1 \end{cases}$$

پس در سه نقطه خط مماس بر نمودار تابع f موازی محور طول‌هاست.

۸۰- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** در نقطه‌ای که خط بر تابع g مماس است، مشتق تابع g برابر شیب خط است:

$$g'(x)=-2x-b=-\frac{1}{4}\Rightarrow b=-2x+\frac{1}{4}$$

همچنین در این نقطه،

$$g(x)=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}\Rightarrow -x^2-bx=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$$
$$-x^2+x(2x-\frac{1}{4})=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}\Rightarrow x^2=\frac{3}{4}$$
$$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow b=-\sqrt{3}+\frac{1}{4} \\ x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow b=\sqrt{3}+\frac{1}{4} \end{cases}$$

پس مجموع مقادیر ممکن برای b برابر است با $\frac{1}{2}$.

راه‌حل دوم چون تابع g بر خط داده شده مماس است، پس معادلهٔ $-x^2-bx=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$ ریشهٔ مضاعف دارد. بنابراین

$$4x^2+(4b-1)x+3=0\Rightarrow \Delta=(4b-1)^2-48=0\Rightarrow 16b^2-8b-47=0$$

معادلهٔ بالا دو جواب دارد که مجموع آن‌ها برابر است با $-\frac{-8}{16}=\frac{1}{2}$.

۸۱- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{x^2+x+1-(2x+1)(x+k)}{(x^2+x+1)^2}=\frac{-x^2-2kx+1-k}{(x^2+x+1)^2}$$

مخرج کسر فوق همواره مثبت است. پس باید صورت این کسر فقط روی بازهٔ $[-\frac{4}{5},2]$ نامنفی باشد تا $f'(x)$ نامنفی و تابع f صعودی شود. بدین منظور باید ۲ و $-\frac{4}{5}$ جواب‌های معادلهٔ $f'(x)=0$ باشند:

$$-x^2-2kx+1-k=0\xrightarrow{x=2}-4-4k+1-k=0\Rightarrow k=-\frac{3}{5}$$

توجه کنید که اگر $k=-\frac{3}{5}$، آن‌گاه $x=2$ و $x=-\frac{4}{5}$ جواب‌های معادلهٔ $f'(x)=0$ هستند.

۸۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $D_f=[2,+\infty)$ و

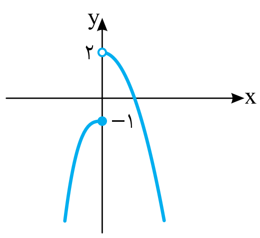
$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x+4}}-\frac{1}{2\sqrt{x-2}}=\frac{2\sqrt{x-2}-\sqrt{x+4}}{2\sqrt{x+4}\sqrt{x-2}}$$
$$f'(x)=0\Rightarrow 2\sqrt{x-2}=\sqrt{x+4}\Rightarrow 4x-8=x+4\Rightarrow x=4$$

بنابراین جدول تعیین علامت تابع f' به‌صورت زیر است: (برای تعیین علامت می‌توانید از عددگذاری استفاده کنید. مثلاً $f'(3)<0$ و $f'(11)>0$)

x	2		4		$+\infty$
$f'(x)$	ت ن	$-$	0	$+$	

پس تابع f روی بازهٔ $[2,4]$ نزولی و روی بازهٔ $[4,+\infty)$ صعودی است، یعنی حداکثر مقدار $b-a$ وقتی به‌دست می‌آید که $a=2$ و $b=4$ و برابر ۲ است.

۸۳- گزینهٔ ۴ نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. این تابع نه ماکزیمم نسبی دارد و نه مینیمم نسبی.



۸۴- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(x^2+1)-2x(x^2+x)}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow -x^2+2x+1=0\Rightarrow x=1+\sqrt{2}\ ,\ \ x=1-\sqrt{2}$$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	

بنابراین تابع f در نقطه‌ای به طول $x=1+\sqrt{2}$ ماکزیمم نسبی دارد. اکنون توجه کنید که اگر $a=1+\sqrt{2}$، آن‌گاه $a>0$ و $f(a)=\frac{a(a+1)}{a^2+1}>0$. پس نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f در ناحیهٔ اول است.

۸۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $f'(x)=6x^2+2ax+1$. برای اینکه تابع f اکسترمم نسبی نداشته باشد باید معادلهٔ $f'(x)=0$، یعنی $6x^2+2ax+1=0$ جواب نداشته باشد یا ریشهٔ مضاعف داشته باشد. پس

$$\Delta=4a^2-24\le 0\Rightarrow a^2\le 6\Rightarrow |a|\le\sqrt{6}$$

۸۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}x^4-4x & x\ge 0\\ -x^4+4x & x<0\end{cases}\ ,\qquad f'(x)=\begin{cases}4x^3-4 & x>0\\ -4x^3+4 & x<0\end{cases}$$

پس تابع f در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست زیرا $f'_+(0)=-4$ و $f'_-(0)=4$. همچنین

$$f'(x)=0\Rightarrow 4x^3-4=0\Rightarrow x^3=1\Rightarrow x=1$$

یعنی $(0,0)$ و $(1,-3)$ نقاط بحرانی تابع هستند که فاصلهٔ آن‌ها برابر است با $\sqrt{10}$.

۸۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که تابع f در نقطهٔ $x=1$ مشتق‌پذیر نیست. از طرف دیگر،

$$f(x)=\begin{cases}-5x^3-x(x-1) & 0\le x<1\\ -5x^3+x(x-1) & 1\le x\le 2\end{cases}=\begin{cases}-5x^3-x^2+x & 0\le x<1\\ -5x^3+x^2-x & 1\le x\le 2\end{cases}$$

بنابراین

$$f'(x)=\begin{cases}-15x^2-2x+1 & 0<x<1\\ -15x^2+2x-1 & 1<x<2\end{cases}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}-15x^2-2x+1=0\Rightarrow x=\frac{1}{5},\ x=-\frac{1}{3}\ (\text{غ.ق.ق.})\\ -15x^2+2x-1=0\ \ \text{جواب ندارد}\end{cases}$$

اکنون توجه کنید که $f(0)=0$، $f(1)=-5$، $f(\frac{1}{5})=\frac{3}{25}$ و $f(2)=-38$. بنابراین مقدار مینیمم مطلق تابع f برابر -38 است.

۸۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $D_f=[-2,2]$ و تابع f روی بازهٔ $(-2,2)$ مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}}\ ,\qquad f'(x)=0\Rightarrow\sqrt{4-x^2}=x$$

$$\xrightarrow{x\ge 0}4-x^2=x^2\Rightarrow x=\sqrt{2}\ ,\qquad x=-\sqrt{2}\ (\text{غ.ق.ق.})$$

بنابراین باید $f(-2)$، $f(\sqrt{2})$ و $f(2)$ را مقایسه کنیم تا بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع f روی بازهٔ $[-2,2]$ پیدا شود: $f(-2)=-2$، $f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}$ و $f(2)=2$. بنابراین بیشترین مقدار تابع برابر $2\sqrt{2}$ و کمترین مقدار آن برابر -2 است و نسبت بیشترین مقدار به کمترین مقدار تابع برابر $-\sqrt{2}$ است.

۸۹- گزینهٔ ۱ اگر B نقطه‌ای روی نمودار تابع $y=\sqrt{x+1}$ باشد، مختصات آن به‌صورت $(x,\sqrt{x+1})$ است. بنابراین

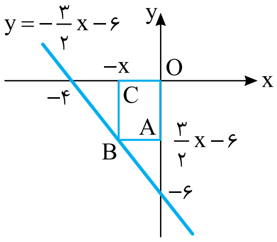
$$AB=\sqrt{(x-\frac{7}{2})^2+(\sqrt{x+1}-0)^2}=\sqrt{x^2-6x+\frac{53}{4}}$$

اگر $f(x)=\sqrt{x^2-6x+\frac{53}{4}}$، آن‌گاه $f'(x)=\frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+\frac{53}{4}}}$ و در نتیجه

$$f'(x)=0\Rightarrow x=3$$

بنابراین کمترین مقدار تابع f، یعنی کمترین مقدار طول پاره‌خط AB، به ازای $x=3$ به‌دست می‌آید. پس نقطهٔ B $(3,\sqrt{3+1})$، یعنی $(3,2)$ است.

۹۰- گزینهٔ ۲ فرض کنید طول نقطهٔ C برابر $-x$ باشد، در این صورت طول نقطهٔ B هم برابر $-x$ است. نقطهٔ B روی خطی است که از نقطه‌های $(-4,0)$ و $(0,-6)$ می‌گذرد. معادلهٔ این خط $y=-\frac{3}{2}x-6$ است. بنابراین عرض نقطهٔ B برابر $\frac{3}{2}x-6$ است. توجه کنید که چون $x<4$، پس $\frac{3}{2}x-6<0$، در نتیجه مساحت مستطیل $OABC=x(-\frac{3}{2}x+6)$.



پس باید بیشترین مقدار تابع $f(x)=x(-\frac{3}{2}x+6)$ را پیدا کنیم. چون $f'(x)=-3x+6$، اگر $f'(x)=0$، آن‌گاه $x=2$. بنابراین بیشترین مقدار تابع f، یعنی بیشترین مقدار مساحت مستطیل $OABC$ به ازای $x=2$ به‌دست می‌آید و برابر است با $2\times3=6$.

۹۱- گزینهٔ ۲ به جدول تعیین علامت تابع f' توجه کنید.

$$f'(x)=\frac{x^2+1-2x(x+1)}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$$

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

بنابراین تابع f روی بازهٔ $[-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2}]$ صعودی است و حداکثر مقدار $b-a$ برابر $2\sqrt{2}$ است.

۹۲- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $D_f=(-\infty,k]$ و

$$f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{k-x}}=\frac{2\sqrt{k-x}-1}{2\sqrt{k-x}}$$

$$f'(x)\le 0\Rightarrow 2\sqrt{k-x}\le 1\Rightarrow x\ge k-\frac{1}{4}$$

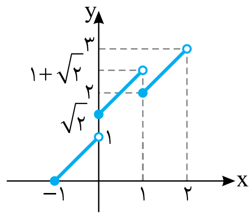
بنابراین تابع f روی بازهٔ $[k-\frac{1}{4},k]$ نزولی است و بیشترین مقدار $b-a$ برابر با $\frac{1}{4}$ است.

۹۳- گزینهٔ ۱ ابتدا دامنهٔ تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$۲-[x]^۲\geq ۰\Rightarrow [x]^۲\leq ۲\Rightarrow -\sqrt{۲}\leq [x]\leq \sqrt{۲}\Rightarrow -۱\leq [x]\leq ۱\Rightarrow -۱\leq x<۲$$

بنابراین ضابطهٔ تابع f به‌صورت $f(x)=\begin{cases} x+۱ & -۱\leq x<۰ \\ x+\sqrt{۲} & ۰\leq x<۱ \\ x+۱ & ۱\leq x<۲ \end{cases}$ است.

نمودار تابع f به شکل زیر است و مشخص است که این تابع فقط در نقطهٔ $x=۱$ مینیمم نسبی دارد.



۹۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{(۲x+۲)(x^۲+a)-۲x(x^۲+۲x)}{(x^۲+a)^۲}=\frac{-۲(x^۲-ax-a)}{(x^۲+a)^۲}$$

چون تابع f همه‌جا مشتق‌پذیر است، برای اینکه دو نقطهٔ اکسترمم نسبی داشته باشد، باید معادلهٔ $x^۲-ax-a=۰$ دو جواب متمایز داشته باشد:

$$\Delta>۰\Rightarrow a^۲+۴a>۰$$

که چون $a>۰$، همواره درست است.

۹۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $x=۰$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع مشتق‌پذیر f است. پس $f'(۰)=۰$:

$$f'(x)=۴x^۳+۲ax+b\Rightarrow f'(۰)=۰+۰+b=۰\Rightarrow b=۰$$

بنابراین $f(x)=x^۴+ax^۲+۱$. از طرف دیگر، عرض نقاط مینیمم نسبی تابع f برابر -۳ است. ابتدا طول این نقاط را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=۴x^۳+۲ax=۰$$

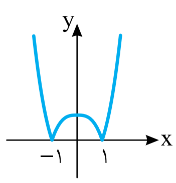
$$۲x(۲x^۲+a)=۰\Rightarrow x=۰,\quad x=\pm\sqrt{\frac{-a}{۲}},\quad a<۰$$

بنابراین

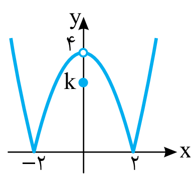
$$f\left(\pm\sqrt{\frac{-a}{۲}}\right)=-۳\Rightarrow \frac{a^۲}{۴}-\frac{a^۲}{۲}+۱=-۳\Rightarrow a^۲=۱۶\Rightarrow a=-۴$$

پس طول نقاط مینیمم نسبی تابع $\pm\sqrt{۲}$ است.

۹۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که اگر $x\geq ۰$، آن‌گاه $f(x)=|x^۳-۱|$ و اگر $x<۰$، آن‌گاه $f(x)=|-x^۳-۱|=|x^۳+۱|$. بنابراین نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. پس در نقطه‌های $x=۱$ و $x=-۱$ تابع f مشتق ندارد (نقطهٔ گوشه‌ای) و در نقطهٔ $x=۰$ مشتق تابع f برابر صفر است. پس این تابع سه نقطهٔ بحرانی دارد.



۹۷- گزینهٔ ۱ به نمودار تابع f توجه کنید. واضح است که اگر تابع f در $x=۰$ مینیمم نسبی داشته باشد ولی مینیمم مطلق نداشته باشد، باید $۰<k<۴$. دقت کنید که اگر $k\leq ۰$، آن‌گاه تابع f در $x=۰$ مینیمم مطلق دارد و اگر $k\geq ۴$، آن‌گاه تابع f در $x=۰$ ماکزیمم نسبی دارد.



۹۸- گزینهٔ ۲ چون $x+y=۲$، پس $y=۲-x$، در نتیجه

$$x^۳+y^۳=x^۳+(۲-x)^۳=۲(۳x^۲-۶x+۴)$$

بنابراین باید کمترین مقدار تابع $f(x)=۲(۳x^۲-۶x+۴)$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=۲(۶x-۶)=۱۲(x-۱),\qquad f'(x)=۰\Rightarrow x=۱$$

چون تابع f فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

پس کمترین مقدار تابع f به‌ازای $x=۱$ به‌دست می‌آید و برابر است با $f(۱)=۲$.

۹۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که طول نقطه‌های A و B صفرهای تابع f هستند، در نتیجه x_A+x_B برابر مجموع صفرهای تابع درجهٔ دوم f است:

$x_A+x_B=-\frac{۳-۲m}{m^۲-۲}=\frac{۲m-۳}{m^۲-۲}$. اگر $g(x)=\frac{۲m-۳}{m^۲-۲}$، آن‌گاه

$$g'(x)=\frac{۲(m^۲-۲)-۲m(۲m-۳)}{(m^۲-۲)^۲}=\frac{-۲m^۲+۶m-۴}{(m^۲-۲)^۲}$$

$$g'(x)=۰\Rightarrow m^۲-۳m+۲=۰\Rightarrow m=۱,\ m=۲$$

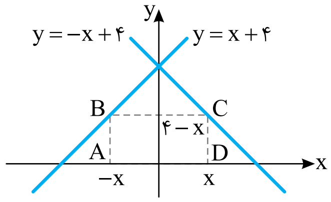
اگر $m=۲$، آن‌گاه ضریب $x^۲$ در ضابطهٔ تابع f مثبت می‌شود و در نتیجه نمودار تابع f پایین‌ترین نقطه دارد که چنین نیست. بنابراین $m=۱$ و کمترین مقدار تابع g به‌ازای $m=۱$ به‌دست می‌آید و برابر است با ۱.

۱۰۰- گزینهٔ ۳ فرض کنید طول نقطهٔ D برابر x باشد. در این صورت، طول نقطهٔ C هم برابر x است و چون نقطهٔ C روی خط $y=-x+۴$ است، پس عرض نقطهٔ C برابر $-x+۴$ است. اکنون توجه کنید که عرض نقطهٔ B هم برابر $-x+۴$ است، و چون نقطهٔ B روی خط $y=x+۴$ است، پس طول نقطهٔ B برابر $-x$ است. به این ترتیب طول نقطهٔ A نیز برابر $-x$ است، در نتیجه $AD=۲x$. بنابراین

$$\text{مساحت مستطیل } ABCD=۲x(۴-x)$$

بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $f(x)=۲x(۴-x)$ را به‌دست آوریم. چون $f'(x)=۸-۴x$، پس اگر $f'(x)=۰$، آن‌گاه $x=۲$.

بنابراین بیشترین مقدار تابع f، یعنی بیشترین مقدار مساحت مستطیل ABCD به‌ازای $x=۲$ به‌دست می‌آید و برابر است با $۲\times۲\times۲=۸$.



۱۰۱- گزینهٔ ۱ اندازهٔ AB، قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع، برابر است با

$$AB=\sqrt{(۱+۱)^۲+(۲+۲)^۲}=۲\sqrt{۵}$$

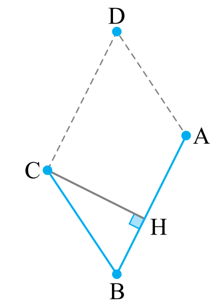
معادلهٔ خطی را که ضلع AB روی آن قرار دارد می‌نویسیم:

$$m_{AB}=\frac{-۲-۲}{-۱-۱}=۲\Rightarrow y-۲=۲(x-۱)\Rightarrow y-۲x=۰$$

فاصلهٔ C از این خط را به‌دست می‌آوریم که اندازهٔ ارتفاع CH است:

$$\frac{|۱-۲(-۳)|}{\sqrt{۱^۲+(-۲)^۲}}=\frac{۷}{\sqrt{۵}}$$

بنابراین مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با $۲\sqrt{۵}\times\frac{۷}{\sqrt{۵}}=۱۴$.



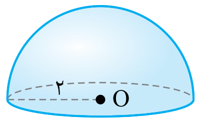
۱۰۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید نقطهٔ C روی عمود منصف پاره‌خط AB قرار دارد. وسط پاره‌خط AB نقطهٔ $(-۱,-۲)$ است. معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB به شکل $y=-۲$ است. بنابراین عرض نقطهٔ C هم برابر -۲ است.

۱۰۳- گزینهٔ ۳ معادلهٔ خط اول را در ۲ ضرب می‌کنیم و به شکل $۶x-۴y-۱۰=۰$ می‌نویسیم. طول ضلع مربع برابر فاصلهٔ دو خط موازی $۶x-۴y-۱۰=۰$ و $۶x-۴y+۳=۰$ است.

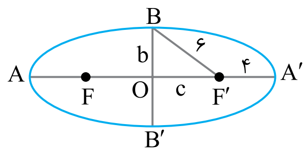
در نتیجه
$$\text{طول ضلع مربع}=\frac{|-۱۰-۳|}{\sqrt{۶^۲+(-۴)^۲}}=\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$$

بنابراین مساحت مربع برابر است با $(\frac{\sqrt{۱۳}}{۲})^۲=\frac{۱۳}{۴}$.

۱۰۴- گزینهٔ ۲ جسم حاصل یک نیم‌کره به شعاع ۲ است که روی سطحی دایره‌ای به شعاع ۲ قرار دارد. بنابراین مساحت جانبی این جسم برابر است با $\frac{۴\pi\times۲^۲}{۲}+\pi\times۲^۲=۱۲\pi$.



۱۰۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $a=BF'=۶$. از طرف دیگر
$$OA'=OF'+F'A'\Rightarrow a=c+۴\Rightarrow ۶=c+۴\Rightarrow c=۲$$
اکنون توجه کنید که
$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow ۶^۲=b^۲+۲^۲\Rightarrow b=۴\sqrt{۲}$$
بنابراین طول قطر کوچک بیضی برابر است با $۲b=۸\sqrt{۲}$.

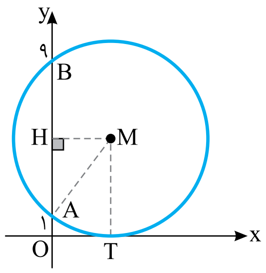


۱۰۶- گزینهٔ ۴ بنابر فرض مسئله، $۲a-۲b=۴$، پس $a-b=۲$، در نتیجه $a=۲+b$. از طرف دیگر، $\frac{c}{a}=\frac{۳}{۵}$، پس $c=\frac{۳}{۵}a=\frac{۳}{۵}(۲+b)$. بنابراین
$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow(۲+b)^۲=b^۲+(\frac{۳}{۵}(۲+b))^۲\Rightarrow b=۸$$
بنابراین $a=۲+b=۱۰$ و طول قطر بزرگ بیضی برابر است با $۲a=۲۰$.

۱۰۷- گزینهٔ ۴ مرکز دایره وسط پاره‌خط میان دو سر قطر است. مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(-\frac{-۲}{۲},-\frac{۶}{۲})$، یعنی $(۱,-۳)$ است. اگر سر دیگر قطر مورد نظر نقطهٔ (x,y) باشد، آن‌گاه وسط این قطر، نقطهٔ $(\frac{x-۲}{۲},\frac{y+۱}{۲})$ است. بنابراین
$$(\frac{x-۲}{۲},\frac{y+۱}{۲})=(۱,-۳)\Rightarrow\frac{x-۲}{۲}=۱\ ,\ \frac{y+۱}{۲}=-۳$$
بنابراین $x=۴$ و $y=-۷$. پس نقطهٔ مورد نظر $(۴,-۷)$ است.

۱۰۸- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** اگر معادلهٔ دایره به‌صورت $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲$ باشد، آن‌گاه $|\beta|=r$، پس معادلهٔ دایره می‌شود $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=\beta^۲$. چون نقطه‌های $(۰,۱)$ و $(۰,۹)$ روی این دایره هستند، پس
$$\begin{cases}\alpha^۲+(۱-\beta)^۲=\beta^۲\\ \alpha^۲+(۹-\beta)^۲=\beta^۲\end{cases}\Rightarrow(۱-\beta)^۲=(۹-\beta)^۲\Rightarrow\beta=۵\Rightarrow\alpha=۳$$
بنابراین معادلهٔ دایره به‌صورت $(x-۳)^۲+(y-۵)^۲=۲۵$ است.

راه‌حل دوم فرض کنید مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ M و دایره در نقطهٔ T بر محور x مماس باشد. با نمادگذاری شکل زیر $AB=۹-۱=۸$، پس $AH=\frac{AB}{۲}=۴$. در نتیجه $TM=OH=۵$، یعنی شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر ۵ است.
به این ترتیب $AM=۵$ و بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHM،
$$AM^۲=AH^۲+MH^۲\Rightarrow ۵^۲=۴^۲+MH^۲\Rightarrow MH=۳$$
به این ترتیب، مرکز دایرهٔ مورد نظر، نقطهٔ $(۳,۵)$ و شعاعش برابر ۵ است. پس معادله‌اش به‌صورت زیر است.
$$(x-۳)^۲+(y-۵)^۲=۲۵$$
توجه کنید که دایرهٔ به معادلهٔ $(x+۳)^۲+(y-۵)^۲=۲۵$ نیز می‌تواند پاسخ این سؤال باشد.



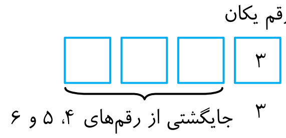
۱۰۹- گزینهٔ ۴ معادلهٔ خط اول را به‌صورت $۹x-۱۲y+۹=۰$ می‌نویسیم. چون خط‌های داده شده موازی‌اند (شیب هر کدام $\frac{۳}{۴}$ است)، پس شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر نصف فاصلهٔ این دو خط است. فاصلهٔ دو خط برابر است با $۲r=\frac{|۹+۱|}{\sqrt{۹^۲+(-۱۲)^۲}}=\frac{۱۰}{۱۵}=\frac{۲}{۳}$. بنابراین شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر $\frac{۱}{۳}$ است.

۱۱۰- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که مرکز دایرهٔ $x^۲+y^۲+۴x-۲y=k$ نقطهٔ $O(-۲,۱)$ و شعاع آن $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۴+۴k}=\sqrt{۵+k}$ است. همچنین مرکز دایرهٔ $x^۲+y^۲-۴x+۴y=۸$ نقطهٔ $O'(۲,-۲)$ و شعاع آن برابر است با $r'=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۱۶+۳۲}=۴$.

بنابراین
$$OO'=\sqrt{(۲+۲)^۲+(-۲-۱)^۲}=۵\ ,\quad r+r'=\sqrt{۵+k}+۴$$
برای اینکه دو دایره بر هم مماس بیرونی باشند باید $OO'=r+r'$. پس
$$۵=\sqrt{۵+k}+۴\Rightarrow k+۵=۱\Rightarrow k=-۴$$

۱۱۱- گزینهٔ ۳ سه حالت وجود دارد:
حالت اول رقم هزارگان ۳ باشد. در این صورت رقم صدگان فقط باید یکی از رقم‌های ۴ یا ۵ باشد و برای رقم‌های دیگر محدودیتی نداریم. بنابراین تعداد عددهای مورد نظر در این حالت برابر است با $۱\times۲\times۴\times۳=۲۴$.
حالت دوم رقم هزارگان ۴ باشد. در این صورت برای رقم‌های دیگر محدودیتی نداریم و تعداد عددها در این حالت برابر است با $۱\times۵\times۴\times۳=۶۰$.
حالت سوم رقم هزارگان ۵ باشد. در این صورت برای رقم‌های دیگر محدودیتی نداریم و تعداد عددها در این حالت برابر است با $۱\times۵\times۴\times۳=۶۰$.
بنابراین تعداد کل عددهای مورد نظر برابر است با $۲۴+۶۰+۶۰=۱۴۴$.

۱۱۲- گزینهٔ ۲ هر یک از رقم‌های ۳، ۴، ۵ و ۶ را می‌توان به جای رقم یکان نوشت. چون رقم‌ها تکراری نیستند، تعداد عددهایی که رقم یکانش یکی از این عددهاست برابر است با تعداد جایگشت‌های سه رقم دیگر. مثلاً تعداد عددهایی که رقم یکان آن‌ها ۳ است برابر با $۳!$ است:



بنابراین مجموع رقم‌های یکان این عددها برابر است با $۳!\times۳$. همین مطلب در مورد رقم‌های دیگر نیز درست است. بنابراین مجموع رقم‌های یکان عددهای مورد نظر برابر است با $۳!\times۳+۳!\times۴+۳!\times۵+۳!\times۶=۳!\times۱۸=۱۰۸$

۱۱۳- گزینهٔ ۱ پنج مکان برای پنج حرف جایگشت در نظر می‌گیریم. حرف سمت چپ t و حرف سمت راست g است. بنابراین سه مکان دیگر باید با هفت حرف دیگر پر شوند که تعداد حالت‌ها برابر است با $P(۷,۳)$. بنابراین تعداد جایگشت‌های مورد نظر مسئله برابر است با

$$P(۷,۳)=\frac{۷!}{۴!}=۷\times۶\times۵=۲۱۰$$

۱۱۴- گزینهٔ ۳ در اینجا $n(S)=۲^۶$. فرض کنید A پیشامد مورد نظر باشد. در این صورت باید از شش جای زیر حداکثر سه جا رو باشد. بنابراین

$$n(A)=\underbrace{\binom{۶}{۰}}_{\text{هیچ جا رو نیاید}}+\underbrace{\binom{۶}{۱}}_{\text{یک جا رو بیاید}}+\underbrace{\binom{۶}{۲}}_{\text{دو جا رو بیاید}}+\underbrace{\binom{۶}{۳}}_{\text{سه جا رو بیاید}}$$

در نتیجه $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴۲}{۲^۶}=\frac{۲۱}{۳۲}$.

۱۱۵- گزینهٔ ۳ چون A، B و C دوبه‌دو ناسازگارند، پس

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$$

$$۱-x=۲x+۳x+۴x\Rightarrow ۱=۱۰x\Rightarrow x=\frac{۱}{۱۰}$$

بنابراین

$$P(A\cup B)+P(A\cup C)=P(A)+P(B)+P(A)+P(C)$$

$$=۲P(A)+P(B)+P(C)=۴x+۳x+۴x=۱۱x=\frac{۱۱}{۱۰}=۱/۱$$

۱۱۶- گزینهٔ ۴ با هر دو خط افقی و هر دو خط عمودی می‌توان یک مستطیل درست کرد، بنابراین $n(S)=\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۲}=۶۰$. از طرف دیگر،

$$\text{تعداد مربع‌های } ۱\times۱=۳\times۴=۱۲$$

$$\text{تعداد مربع‌های } ۲\times۲=۳+۳=۶$$

$$\text{تعداد مربع‌های } ۳\times۳=۱+۱=۲$$

پس تعداد مربع‌های روی شکل برابر است با $۱۲+۶+۲=۲۰$. در نتیجه احتمال مورد نظر برابر است با $\frac{۲۰}{۶۰}=\frac{۱}{۳}$.

۱۱۷- گزینهٔ ۱ اگر A و B مستقل از هم باشند، آن‌گاه A و B' و همچنین A' و B نیز مستقل از هم هستند. بنابراین

$$P(A\cap B')=P(A)P(B')=P(A)(۱-P(B))=\frac{۱}{۴}$$

$$P(A'\cap B)=P(A')P(B)=(۱-P(A))P(B)=\frac{۱}{۶}$$

بنابراین

$$P(A)-P(A)P(B)=\frac{۱}{۴},\quad P(B)-P(A)P(B)=\frac{۱}{۶}$$

چون A و B مستقل‌اند، پس $P(A)P(B)=P(A\cap B)$، در نتیجه

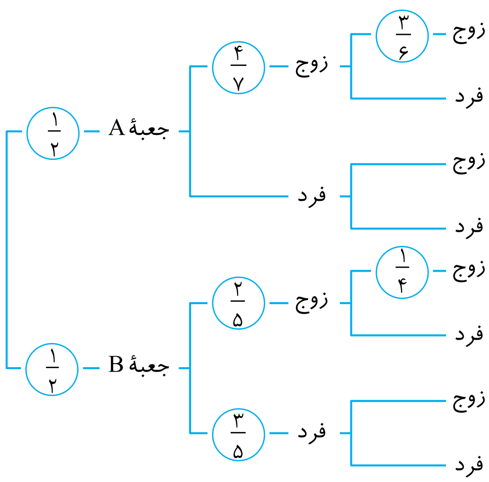
$$P(A)-P(A\cap B)=\frac{۱}{۴},\quad P(B)-P(A\cap B)=\frac{۱}{۶}$$

اگر این تساوی‌ها را با هم جمع کنیم به‌دست می‌آید

$$P(A)+P(B)-P(A\cap B)-P(A\cap B)=\frac{۵}{۱۲}$$

$$P(A\cup B)-P(A\cap B)=\frac{۵}{۱۲}$$

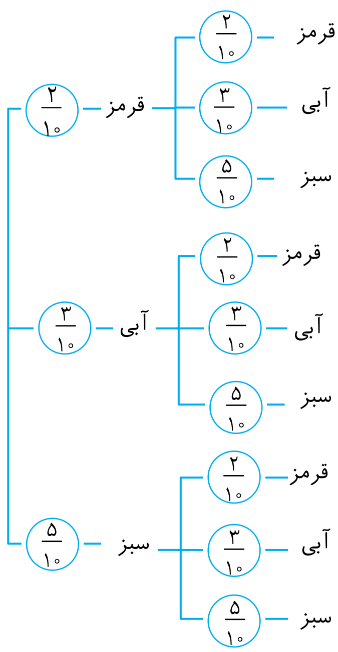
۱۱۸- گزینهٔ ۴ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم است که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۷}\times\frac{۳}{۶}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۵}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۲۰}=\frac{۲۷}{۱۴۰}$$

۱۱۹- گزینهٔ ۱ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



راه‌حل اول از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{۲}{۱۰}\times\frac{۳}{۱۰}+\frac{۲}{۱۰}\times\frac{۵}{۱۰}+\frac{۳}{۱۰}\times\frac{۲}{۱۰}+\frac{۳}{۱۰}\times\frac{۵}{۱۰}+\frac{۵}{۱۰}\times\frac{۲}{۱۰}+\frac{۵}{۱۰}\times\frac{۳}{۱۰}=۰/۶۲$$

راه‌حل دوم فرض کنید A پیشامد آن باشد که هر دو مهره همرنگ باشند. در این صورت $P(A')$ را می‌خواهیم. با توجه به نمودار درختی بالا

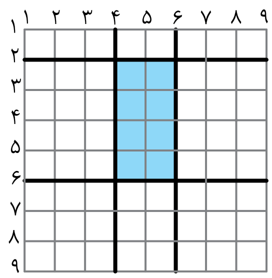
$$P(A)=\frac{۲}{۱۰}\times\frac{۲}{۱۰}+\frac{۳}{۱۰}\times\frac{۳}{۱۰}+\frac{۵}{۱۰}\times\frac{۵}{۱۰}=۰/۳۸$$

بنابراین $P(A')=۱-۰/۳۸=۰/۶۲$.

۱۲۰- گزینهٔ ۱ فرض کنید $u_i=۵x_i+۱$، در این صورت $\bar{u}=۵\bar{x}+۱$ و $\sigma_u=۵\sigma_x$. در نتیجه $CV_u=\frac{\sigma_u}{\bar{u}}=\frac{۵\sigma_x}{۵\bar{x}+۱}$. چون $CV_x=۲CV_u$، در نتیجه

$$\frac{\sigma_x}{\bar{x}}=\frac{۲\times۵\sigma_x}{۵\bar{x}+۱}\Rightarrow ۵\bar{x}+۱=۱۰\bar{x}\Rightarrow ۵\bar{x}=۱\Rightarrow \bar{x}=\frac{۱}{۵}=۰/۲$$

۱۲۱- گزینهٔ ۳ هر مستطیل از برخورد دو خط افقی و دو خط عمودی از ۹ خط افقی و ۹ خط عمودی شکل زیر به‌وجود می‌آید. برای اینکه مستطیل‌ها ۲×۴ یا ۴×۲ باشند، باید فاصلهٔ دو خط موازی ۲ واحد و فاصلهٔ دو خط موازی دیگر ۴ واحد باشد. برای رسم مستطیل‌های ۲×۴ یکی از خطوط ۱ تا ۷ افقی را می‌توانیم انتخاب کنیم و خط موازی آن خودبه‌خود به فاصلهٔ ۲ واحد رسم می‌شود. همچنین یکی از خطوط عمودی ۱ تا ۵ را می‌توانیم انتخاب کنیم و خط موازی آن خودبه‌خود به فاصلهٔ ۴ واحد رسم می‌شود.



بنابراین تعداد مستطیل‌های ۲×۴ برابر است با

$$\binom{۷}{۱}\times\binom{۵}{۱}=۷\times۵=۳۵$$

به همین ترتیب ۳۵ مستطیل ۴×۲ وجود دارد. پس جمعاً ۷۰ مستطیل با ابعاد ۲ و ۴ وجود دارد.

۱۲۲- گزینهٔ ۴ حروف صدادار a، o و i هستند که به !۳ حالت کنار هم قرار می‌گیرند. حروف بی‌صدا l، g، r، t، h و m هستند که به !۶ حالت کنار هم قرار می‌گیرند. دو دسته حرف صدادار و بی‌صدا هم به !۲ حالت می‌توانند کنار هم قرار بگیرند. بنابراین تعداد کل جایگشت‌های مورد نظر برابر است با $۱۲\times۶!=۲!۶!۳!$.

۱۲۳- گزینهٔ ۱ از تساوی داده شده نتیجه می‌شود

$$\frac{(۵-n)!n!}{۵!}+\frac{(۶-n)!n!}{۶!}=\frac{(۴-n)!n!}{۴!}$$

$$\frac{(۵-n)!}{۵!}+\frac{(۶-n)!}{۶!}=\frac{(۴-n)!}{۴!}$$

$$\frac{(۵-n)(۴-n)!}{۵\times۴!}+\frac{(۶-n)(۵-n)(۴-n)!}{۶\times۵\times۴!}=\frac{(۴-n)!}{۴!}$$

$$\frac{۵-n}{۵}+\frac{(۶-n)(۵-n)}{۳۰}=۱\Rightarrow ۳۰-۶n+۳۰-۱۱n+n^۲=۳۰$$

$$n^۲-۱۷n+۳۰=۰\Rightarrow(n-۱۵)(n-۲)=۰\Rightarrow n=۲,\quad n=۱۵\ (\text{غ.ق.ق})$$

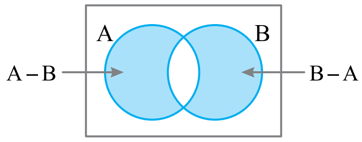
بنابراین $\binom{n+۳}{۲}=\binom{۵}{۲}=۱۰$.

۱۲۴- گزینهٔ ۱ چون $A-B$ و $B-A$ اشتراک ندارند، پس ناسازگارند (نمودار ون زیر را ببینید).

همچنین $A-B$ و B ناسازگارند. $A\cap B$ و $A'\cap B$ هیچ اشتراکی ندارند، پس ناسازگارند. ولی A' و B' لزوماً ناسازگار نیستند. مثلاً اگر $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$، $A=\{۱,۲\}$ و $B=\{۳,۴\}$، آن‌گاه

$$A'=\{۳,۴,۵,۶\},\quad B'=\{۱,۲,۵,۶\}$$

در نتیجه $A'\cap B'=\{۵,۶\}\neq\varnothing$. پس A' و B' ناسازگار نیستند.



۱۲۵- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** تعداد کل مهره‌ها در کیسه ۹تاست. تعداد راه‌های انتخاب ۳ مهره از میان این ۹ مهره برابر است با $n(S)=\binom{۹}{۳}=۸۴$.

برای اینکه حداکثر دو تا از مهره‌ها قرمز باشند، باید یکی از حالت‌های زیر پیش بیاید:

۱: ۲ قرمز و ۱ آبی $\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۲}=۵\times۶=۳۰$، ۳: آبی $\binom{۴}{۳}=۴$

۲: ۲ قرمز و ۱ آبی $\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۱}=۱۰\times۴=۴۰$

بنابراین اگر A پیشامد مورد نظر باشد، $n(A)=۴۰+۳۰+۴=۷۴$. در نتیجه

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۷۴}{۸۴}=\frac{۳۷}{۴۲}$$

راه‌حل دوم فرض کنید A پیشامد آن باشد که هر سه مهره قرمز باشند. در این صورت $P(A')$ مطلوب مسئله است. توجه کنید که $n(A)=\binom{۵}{۳}=۱۰$.

بنابراین $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۰}{۸۴}=\frac{۵}{۴۲}$. در نتیجه

$$P(A')=۱-P(A)=۱-\frac{۵}{۴۲}=\frac{۳۷}{۴۲}$$

۱۲۶- گزینهٔ ۱ تعداد راه‌های انتخاب زیرمجموعه‌ای سه عضوی از مجموعهٔ شش عضوی داده شده برابر است با $n(S)=\binom{۶}{۳}=۲۰$. برای اینکه مجموع عضوهای زیرمجموعهٔ انتخاب شده فرد باشد، یا باید یک عضو فرد و دو عضوش زوج باشد، یا باید هر سه عضوش فرد باشند. بنابراین اگر A پیشامد مورد نظر باشد،

$$n(A)=\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۲}+\binom{۳}{۳}=۳\times۳+۱=۱۰$$

در نتیجه $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۰}{۲۰}=\frac{۱}{۲}$.

۱۲۷- گزینهٔ ۲ اگر A و B مستقل از هم باشند، A' و B هم مستقل از هم هستند. بنابراین

$$P(A'\cup B)=P(A')+P(B)-P(A')P(B)$$

$$=۱-P(A)+۱-P(B')-(۱-P(A))(۱-P(B'))$$

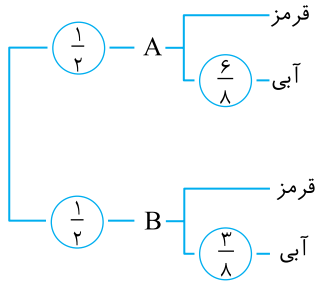
$$=۱-\frac{۱}{۳}+۱-\frac{۱}{۶}-(۱-\frac{۱}{۳})(۱-\frac{۱}{۶})=\frac{۱۷}{۱۸}$$

۱۲۸- گزینهٔ ۴ فرض کنید A پیشامد قبول شدن پگاه در رشتهٔ پزشکی و B پیشامد قبول شدن او در رشتهٔ دندانپزشکی باشد. در این صورت بنابر فرض، $P(A)=۰/۷۵$ و $P(B\cap A')=۰/۲۴$. چون پیشامدهای A و B مستقل از یکدیگرند، پس پیشامدهای A' و B نیز مستقل از یکدیگرند. بنابراین $P(B\cap A')=P(B)\times P(A')=P(B)(۱-P(A))$. در نتیجه

$$۰/۲۴=P(B)(۱-۰/۷۵)\Rightarrow P(B)=۰/۹۶$$

پس $P(B')=۱-P(B)=۰/۰۴$.

۱۲۹- گزینهٔ ۴ جعبه‌ها را A و B می‌نامیم. نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم است که احتمال آبی بودن مهره برابر است با

$$\frac{1}{2}\times\frac{6}{8}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}=\frac{9}{16}$$

۱۳۰- گزینهٔ ۴ چون میانگین ۱۰ دادهٔ اولیه برابر ۱۷/۵ است، پس مجموع این ۱۰ داده برابر $10\times17/5=175$ است. در نتیجه مجموع ۱۴ داده برابر $175+13+19+29+30=266$ است. بنابراین میانگین کل ۱۴ داده برابر $\frac{266}{14}=19$ است.

۱۳۱- گزینهٔ ۳ اگر ۴ مربع ۱×۱ را که در چهار گوشهٔ شکل‌ها حذف شده است به شکل‌ها اضافه کنیم، در مرحلهٔ nاُم یک مربع بزرگ داریم که $(n+2)$ مربع ۱×۱ در هر سطر و $(n+2)$ مربع ۱×۱ در هر ستون دارد. پس مساحت آن $(n+2)^2$ است. بنابراین مساحت شکل nاُم برابر است با

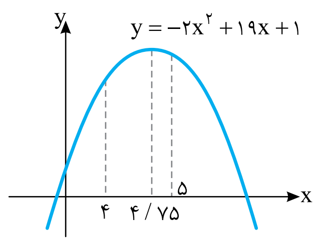
$$(n+2)^2-4=n^2+4n$$

پس مساحت شکل هشتم برابر است با

$$8^2+4\times8=96$$

۱۳۲- گزینهٔ ۲ بیشترین مقدار تابع درجهٔ دوم $y=-2x^2+19x+1$ به‌ازای $x=\frac{19}{4}=4/75$ به دست می‌آید. چون $\frac{19}{4}$ عددی طبیعی نیست، بزرگ‌ترین مقدار در میان a_nها، a_5 است، که برابر است با

$$a_5=-50+95+1=46$$



۱۳۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\frac{9}{10}<a_n<\frac{11}{10}\Rightarrow\frac{9}{10}<\frac{2n-1}{n+2}<\frac{11}{10}$$

اکنون توجه کنید که

$$\frac{9}{10}<\frac{2n-1}{n+2}\Rightarrow 9n+18<20n-10\Rightarrow n>\frac{28}{11}\qquad(1)$$

$$\frac{2n-1}{n+2}<\frac{11}{10}\Rightarrow 20n-10<11n+22\Rightarrow n<\frac{32}{9}\qquad(2)$$

تنها عدد طبیعی که در شرط‌های (۱) و (۲) صدق می‌کند، ۳ است.

۱۳۴- گزینهٔ ۳ چون $a_3+a_7=0$، پس $a_7=-a_3$. بنابراین از رابطهٔ $a_3^2+a_7^2=128$ به‌دست می‌آید

$$a_3^2+(-a_3)^2=128\Rightarrow a_3^2+a_3^2=128\Rightarrow a_3^2=64\Rightarrow a_3=\pm8$$

اگر $a_3=8$ و $a_7=-8$، آن‌گاه $d=\frac{a_7-a_3}{7-3}=\frac{-8-8}{4}=-4$.

اگر $a_3=-8$ و $a_7=8$، آن‌گاه $d=\frac{a_7-a_3}{7-3}=\frac{8-(-8)}{4}=4$.

۱۳۵- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** بنابر فرض مسئله،

$$a_3+a_7+a_{14}+a_{18}=10$$

$$a_1+2d+a_1+6d+a_1+13d+a_1+17d=10$$

$$4a_1+38d=10\Rightarrow 2a_1+19d=5$$

بنابراین $a_1+a_1+19d=5$ در نتیجه $a_1+a_{20}=5$.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$a_3+a_7+a_{14}+a_{18}=10\Rightarrow(a_3+a_{18})+(a_7+a_{14})=10$$

چون $3+18=7+14=1+20$، پس

$$a_3+a_{18}=a_7+a_{14}=a_1+a_{20}$$

بنابراین

$$2(a_1+a_{20})=10\Rightarrow a_1+a_{20}=5$$

۱۳۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$2x=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\Rightarrow 2x=1\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

$$y^2=\tan^2\alpha\cot^2\alpha\Rightarrow y^2=1\xrightarrow{y>0}y=1$$

بنابراین $x+y=\frac{3}{2}$.

۱۳۷- گزینهٔ ۱ اگر قدرنسبت دنباله را با r نشان دهیم، آن‌گاه

$$r^3=\frac{32}{\frac{1}{2}}=64\Rightarrow r=4$$

در نتیجه $x=\frac{1}{8}$، $y=2$ و $z=8$. بنابراین $xyz=2$.

۱۳۸- گزینهٔ ۱ فرض کنید قدرنسبت دنبالهٔ حسابی سطر B برابر d باشد. در این صورت $4+4d=20$ پس $d=4$. بنابراین $b=20+4=24$. در سطر B، جملهٔ کنار جملهٔ نخست برابر ۸ است. اگر قدرنسبت دنبالهٔ هندسی ستون A برابر r باشد، آن‌گاه $8=0/125r^3$ بنابراین $r^3=64$، در نتیجه $r=4$. بنابراین $a=8\times r=8\times4=32$. به این ترتیب $a+b=56$.

۱۳۹- گزینهٔ ۱ فرض کنید قدرنسبت دنبالهٔ هندسی r و جملهٔ اول آن a_1 باشند. در این صورت جمله‌های اول، دوم و چهارم آن به‌ترتیب a_1، a_1r و a_1r^3 هستند. چون این اعداد جمله‌های متوالی یک دنبالهٔ حسابی هستند، پس جملهٔ a_1r واسطهٔ حسابی دو جملهٔ دیگر است:

$$2a_1r=a_1+a_1r^3\Rightarrow r^3+1=2r\Rightarrow r^3-2r+1=0$$

$$r^3-r-r+1=r(r^2-1)-(r-1)=0\Rightarrow(r-1)(r^2+r-1)=0$$

چون دنبالهٔ هندسی غیرثابت است، پس $r\neq1$، در نتیجه

$$r^2+r-1=0\Rightarrow r=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ r=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\ \text{(غ.ق.ق)}$$

توجه کنید که قدرنسبت دنبالهٔ هندسی عددی مثبت است، پس $r=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ قابل قبول نیست.

۱۴۰- گزینهٔ ۳ اگر قدرنسبت دنبالهٔ حسابی برابر d باشد، آن‌گاه $a=b-d$ و $c=b+d$. در نتیجه

$$a+b+c=15\Rightarrow b-d+b+b+d=15\Rightarrow b=5$$

از طرف دیگر، چون $a+8\,,b+6\,,c+4$ دنباله‌ای هندسی است، پس

$$(b+6)^2=(a+8)(c+4)\Rightarrow 11^2=(5-d+8)(5+d+4)$$

$$121=(13-d)(9+d)\Rightarrow d^2-4d+4=0\Rightarrow (d-2)^2=0\Rightarrow d=2$$

بنابراین $a=3$ و $c=7$ و $ac=21$.

۱۴۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\frac{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}{\sqrt[6]{x}\sqrt{x}}=\frac{x^{\frac13}x^{\frac13}x^{\frac16}}{x^{\frac16}x^{\frac12}}=\frac{x^{\frac23}}{x^{\frac12}}=x^{\frac23-\frac12}=x^{\frac16}=\sqrt[6]{x}$$

۱۴۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{\frac12}}}=2^{\frac12}2^{\frac16}\left(\frac12\right)^{\frac1{24}}=2^{\frac12+\frac16-\frac1{24}}=2^{\frac{12+4-1}{24}}=2^{\frac{15}{24}}=2^{\frac58}$$

بنابراین

$$2^{\frac58}=\sqrt[4]{x^5}\Rightarrow 2^{\frac58}=x^{\frac54}$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان $\frac45$ برسانیم، به دست می‌آید

$$(2^{\frac58})^{\frac45}=x\Rightarrow 2^{\frac12}=x\Rightarrow x=\sqrt2$$

۱۴۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\frac{(a^2-4)(a^2-1)}{a^2}=\frac{a^4-5a^2+4}{a^2}=a^2-5+\frac{4}{a^2}$$

از طرف دیگر، اگر دو طرف فرض مسئله را به توان دو برسانیم، نتیجه می‌شود

$$a^2+\frac{4}{a^2}+4=25^2$$

بنابراین $a^2+\frac{4}{a^2}=25^2-4$. در نتیجه عبارت مورد نظر برابر است با

$$25^2-4-5=625-9=616$$

۱۴۴- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول توجه کنید که

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}=\frac{a^3+b^3}{ab}=\frac{(a+b)((a+b)^2-3ab)}{ab}$$

از طرف دیگر،

$$a+b=3+\sqrt3+3-\sqrt3=6$$

$$ab=(3+\sqrt3)(3-\sqrt3)=9-3=6$$

بنابراین $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}=\frac{6(36-18)}{6}=18$.

راه‌حل دوم

$$\frac{a^2}{b}=\frac{(3+\sqrt3)^2}{3-\sqrt3}=\frac{12+6\sqrt3}{3-\sqrt3}=\frac{(12+6\sqrt3)(3+\sqrt3)}{(3-\sqrt3)(3+\sqrt3)}$$

$$=\frac{36+(12+18)\sqrt3+18}{9-3}=\frac{54+30\sqrt3}{6}=9+5\sqrt3$$

$$\frac{b^2}{a}=\frac{(3-\sqrt3)^2}{3+\sqrt3}=\frac{12-6\sqrt3}{3+\sqrt3}=\frac{(12-6\sqrt3)(3-\sqrt3)}{(3+\sqrt3)(3-\sqrt3)}$$

$$=\frac{36-(12+18)\sqrt3+18}{9-3}=\frac{54-30\sqrt3}{6}=9-5\sqrt3$$

بنابراین $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}=18$.

۱۴۵- گزینهٔ ۲ دو طرف تساوی داده شده را به توان سه می‌رسانیم:

$$(\sqrt[3]{a+9})^3-(\sqrt[3]{a-9})^3-3\sqrt[3]{a+9}\times\sqrt[3]{a-9}(\sqrt[3]{a+9}-\sqrt[3]{a-9})=3^3$$

$$a+9-(a-9)-3\sqrt[3]{a^2-81}\times(3)=27$$

$$18-9\sqrt[3]{a^2-81}=27\Rightarrow\sqrt[3]{a^2-81}=-1\Rightarrow a^2=80$$

۱۴۶- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x^8-1}{(x^3+x)(x^6-x^4+x^2-1)}=\frac{(x^4-1)(x^4+1)}{x(x^2+1)(x^4(x^2-1)+x^2-1)}$$

$$=\frac{(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)}{x(x^2+1)((x^2-1)(x^4+1))}=\frac1x$$

بنابراین $f(-\frac23)=-\frac32$.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x^8-1}{x(x^2+1)(x^6-x^4+x^2-1)}=\frac{x^8-1}{x((x^2)^4-1)}=\frac{x^8-1}{x(x^8-1)}=\frac1x$$

که در اینجا از اتحاد زیر استفاده کرده‌ایم:

$$(x^2+1)(x^6-x^4+x^2-1)=(x^2+1)((x^2)^3-(x^2)^2+x^2-1)$$

$$=((x^2)^4-1)$$

بنابراین $f(-\frac23)=-\frac32$.

۱۴۷- گزینهٔ ۳ می‌توان نوشت

$$x^2-2x+4y-y^2-3=(x^2-2x+1)-(y^2-4y+4)$$

$$=(x-1)^2-(y-2)^2=(x-1-(y-2))(x-1+y-2)$$

$$=(x-y+1)(x+y-3)$$

۱۴۸- گزینهٔ ۱ فرض کنید $\sqrt[3]{2}=t$. در این صورت عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{t+1}{t^2+t+1}=\frac{(t-1)(t+1)}{(t-1)(t^2+t+1)}=\frac{t^2-1}{t^3-1}=\frac{t^2-1}{1}=\sqrt[3]{4}-1$.

۱۴۹- گزینهٔ ۲ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x-3)$ بر $x-4$ برابر است با $P(4-3)=P(1)$. بنابراین $P(1)=6$. اگر در تساوی $P(x+3)=x^3-mx^2+mx+2$ قرار دهیم $x=-2$، به‌دست می‌آید

$$P(1)=(-2)^3-m(-2)^2+m(-2)+2=6\Rightarrow m=-2$$

۱۵۰- گزینهٔ ۱ چون باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+2$ برابر ۱۰ است، پس $P(-2)=10$. باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $Q(x)$ بر $x-2$ برابر است با $Q(2)$. بنابراین باید $Q(2)$ را حساب کنیم. اگر در تساوی $P(x-1)=(3-2x)Q(1-x)$ قرار دهیم $x=-1$، به‌دست می‌آید

$$P(-2)=5Q(2)\Rightarrow Q(2)=\frac{P(-2)}{5}=\frac{10}{5}=2$$

۱۵۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{2^{10}}}\times\sqrt[6]{\sqrt{2^4}}=(2^{10})^{\frac{1}{3\times5}}\times(2^4)^{\frac{1}{2\times6}}=2^{\frac{10}{3\times5}}\times2^{\frac{4}{2\times6}}$$

$$=2^{\frac23}\times2^{\frac13}=2^{\frac23+\frac13}=2^1=2$$

۱۵۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}}=2^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{1}{3\times2}}\times2^{\frac{1}{4\times3\times2}}=2^{\frac{17}{24}}$$

$$\sqrt[4]{2\sqrt{2}}=2^{\frac{1}{4}}\times2^{\frac{1}{2\times4}}=2^{\frac{3}{8}}$$

در نتیجه عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{2^{\frac{17}{24}}}{2^{\frac{3}{8}}}=2^{\frac{17}{24}-\frac{3}{8}}=2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}$.

۱۵۳- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt[3]{3\sqrt[5]{9}}=3^{\frac{1}{3}}\times9^{\frac{1}{5\times3}}=3^{\frac{1}{3}}\times(3^2)^{\frac{1}{5\times3}}=3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{5\times3}}=3^{\frac{7}{15}}$$

$$\sqrt[5]{27\sqrt[3]{a}}=27^{\frac{1}{5}}\times a^{\frac{1}{3\times5}}=(3^3)^{\frac{1}{5}}\times a^{\frac{1}{3\times5}}=3^{\frac{3}{5}}a^{\frac{1}{15}}$$

بنابراین از فرض نتیجه می‌شود

$$3^{\frac{7}{15}}=3^{\frac{3}{5}}a^{\frac{1}{15}}\Rightarrow a^{\frac{1}{15}}=3^{\frac{7}{15}-\frac{3}{5}}=3^{\frac{7-9}{15}}=3^{\frac{-2}{15}}$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان ۱۵ برسانیم نتیجه می شود $a=3^{-2}$. پس

$$\sqrt[4]{a}=a^{\frac{1}{4}}=(3^{-2})^{\frac{1}{4}}=3^{-\frac{2}{4}}=3^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

۱۵۴- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{cases}2a^2+b^2+3c^2=23\\2a^2+3b^2+c^2=33\end{cases}\Rightarrow4(a^2+b^2+c^2)=56\Rightarrow a^2+b^2+c^2=14$$

بنابراین

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=14+22=36$$

در نتیجه $|a+b+c|=6$.

۱۵۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{1}{a^3}-\frac{1}{b^3}=(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{ab})$$

از طرف دیگر،

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=3\Rightarrow(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})^2+\frac{2}{ab}=3\Rightarrow1+\frac{2}{ab}=3\Rightarrow ab=1$$

در نتیجه $\frac{1}{a^3}-\frac{1}{b^3}=1(3+1)=4$.

۱۵۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$(a^2+b^2)^3=a^6+b^6+3a^2b^2(a^2+b^2)$$

$$6\sqrt{6}=a^6+b^6+3(1)(\sqrt{6})\Rightarrow a^6+b^6=3\sqrt{6}$$

در نتیجه

$$(a^6+b^6)^2=a^{12}+b^{12}+2a^6b^6$$

$$9\times6=a^{12}+b^{12}+2\Rightarrow a^{12}+b^{12}=52$$

۱۵۷- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$15x^{10}+13x^5+2=15x^{10}+3x^5+10x^5+2$$

$$=3x^5(5x^5+1)+2(5x^5+1)=(5x^5+1)(3x^5+2)$$

بنابراین $5x^5+1$ عامل عبارت مورد نظر است و بقیه نیستند.

راه‌حل دوم فرض کنید $y=x^5$، بنابراین

$$15x^{10}+13x^5+2=15y^2+13y+2=(5y+1)(3y+2)$$

در نتیجه عبارت مورد نظر به‌صورت $(5x^5+1)(3x^5+2)$ تجزیه می‌شود و $(5x^5+1)$ عاملی از آن است.

۱۵۸- گزینهٔ ۲ فرض کنید $A=(\sqrt{11}+\sqrt{7})\sqrt{9-\sqrt{77}}$. در این صورت،

$$A^2=(\sqrt{11}+\sqrt{7})^2(9-\sqrt{77})=(11+7+2\sqrt{77})(9-\sqrt{77})$$

$$=2(9+\sqrt{77})(9-\sqrt{77})=2(81-77)=8$$

پس، چون A مثبت است، $A=2\sqrt{2}$.

۱۵۹- گزینهٔ ۳ بنابر اتحاد چاق و لاغر،

$$x^{18}-1=(x^6)^3-1=(x^6-1)(x^{12}+x^6+1)$$

از طرف دیگر،

$$x^{12}+x^6+1=(x^{12}+2x^6+1)-x^6=(x^6+1)^2-(x^3)^2$$

$$=(x^6+1-x^3)(x^6+1+x^3)$$

پس $\frac{x^{18}-1}{(x^6+x^3+1)(x^6-x^3+1)}=x^6-1$.

۱۶۰- گزینهٔ ۴ چون باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای‌های $2P(x)-1$ و $Q(x)+x$ بر $x+1$ به‌ترتیب برابر ۳ و ۳- است، پس

$$2P(-1)-1=3\Rightarrow P(-1)=2,\quad Q(-1)-1=-3\Rightarrow Q(-1)=-2$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $(x-3)P(1-x)+Q(3-2x)$ بر $x-2$ برابر است با

$$(2-3)P(1-2)+Q(3-4)=-P(-1)+Q(-1)=-2-2=-4$$

۱۶۱- گزینهٔ ۳ برای اینکه معادله ریشهٔ مضاعف داشته باشد، باید دلتای آن صفر باشد:

$$\Delta=(2k-8)^2-4k(k-7)=0\Rightarrow4k^2-32k+64-4k^2+28k=0$$

$$k=16$$

بنابراین تعداد جواب‌های معادلهٔ $x^2-16x+1=0$ را می‌خواهیم که چون $\Delta=256-4=252>0$ این معادله دو جواب دارد.

۱۶۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $x_1+x_2=6$ و $x_1x_2=4$، پس $x_1,x_2>0$. از طرف دیگر،

$$A=(x_1\sqrt{x_1}+x_2\sqrt{x_2})^2$$

$$=(x_1\sqrt{x_1})^2+(x_2\sqrt{x_2})^2+2x_1\sqrt{x_1}x_2\sqrt{x_2}$$

$$=x_1^3+x_2^3+2x_1x_2\sqrt{x_1x_2}$$

$$=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)+2x_1x_2\sqrt{x_1x_2}$$

بنابراین $A=6^3-3\times4\times6+2\times4\sqrt{4}=160$.

اکنون توجه کنید که چون جواب‌های معادله عددهایی مثبت‌اند، پس عبارت مورد نظر هم مثبت است. بنابراین

$$x_1\sqrt{x_1}+x_2\sqrt{x_2}=\sqrt{160}=4\sqrt{10}$$

۱۶۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $x_۱+x_۲=۸$ و $x_۱x_۲=۲$. اکنون مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ مورد نظر را به‌دست می‌آوریم:

$$S=x_۱-\frac{۳}{x_۲}+x_۲-\frac{۳}{x_۱}=x_۱+x_۲-(\frac{۳}{x_۱}+\frac{۳}{x_۲})$$
$$=x_۱+x_۲-\frac{۳(x_۱+x_۲)}{x_۱x_۲}=۸-\frac{۳(۸)}{۲}=-۴$$
$$P=(x_۱-\frac{۳}{x_۲})(x_۲-\frac{۳}{x_۱})=x_۱x_۲-۳-۳+\frac{۹}{x_۱x_۲}=۲-۶+\frac{۹}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$x^۲-Sx+P=۰\Rightarrow x^۲+۴x+\frac{۱}{۲}=۰\Rightarrow ۲x^۲+۸x+۱=۰$$

۱۶۴- گزینهٔ ۳ فرض کنید α جواب دیگر معادله باشد. مجموع جواب‌ها برابر $-\sqrt{۲m}$ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر m است. پس

$$\begin{cases}\alpha+\sqrt{۲}-۱=-\sqrt{۲m} & (۱)\\ \alpha(\sqrt{۲}-۱)=m & (۲)\end{cases}$$

از جای‌گذاری $\alpha(\sqrt{۲}-۱)$ به جای m در معادله (۱) نتیجه می‌شود

$$\alpha+\sqrt{۲}-۱=-\sqrt{۲}\alpha(\sqrt{۲}-۱)\Rightarrow\alpha+\sqrt{۲}-۱=-۲\alpha+\sqrt{۲}\alpha$$
$$(۳-\sqrt{۲})\alpha=۱-\sqrt{۲}\Rightarrow\alpha=\frac{۱-\sqrt{۲}}{۳-\sqrt{۲}}=\frac{(۱-\sqrt{۲})(۳+\sqrt{۲})}{۹-۲}$$
$$=\frac{۳+\sqrt{۲}-۳\sqrt{۲}-۲}{۷}=\frac{۱-۲\sqrt{۲}}{۷}$$

۱۶۵- گزینهٔ ۱ ابتدا دقت کنید که $x^۳+۱=(x+۱)(x^۲-x+۱)$. اکنون دو طرف معادله را در $(x+۱)^۲(x^۲-x+۱)$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{۲}{(x+۱)^۲}-\frac{۲}{x+۱}+\frac{۱}{(x+۱)(x^۲-x+۱)}=۰$$
$$۲(x^۲-x+۱)-۲(x+۱)(x^۲-x+۱)+(x+۱)=۰\Rightarrow ۲x^۳-۲x^۲+x-۱=۰$$

واضح است که $x=۱$ یک جواب معادله است. پس معادلهٔ فوق به‌صورت $(x-۱)(۲x^۲+۱)=۰$ است.معادلهٔ $۲x^۲+۱=۰$ جواب ندارد، پس $x=۱$ تنها جواب معادله مورد نظر است.

۱۶۶- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{x+a+۳x}{x(x+a)}=\frac{۴}{x-۱}\Rightarrow۴(x^۲+ax)=(۴x+a)(x-۱)$$
$$۴x^۲+۴ax=۴x^۲-۴x+ax-a\Rightarrow(۳a+۴)x=-a\Rightarrow x=-\frac{a}{۳a+۴}$$

واضح است که اگر $a=-\frac{۴}{۳}$ ، آن‌گاه معادله جواب ندارد. همچنین اگر $a=۰$ ، آن‌گاه $x=۰$ که قابل قبول نیست. از طرف دیگر اگر $-\frac{a}{۳a+۴}$ برابر ۱ یا $-a$ (ریشه‌های مخرج کسر) شود، جواب به‌دست آمده قبول نیست:

$$-\frac{a}{۳a+۴}=۱\Rightarrow a=-۱,\quad -\frac{a}{۳a+۴}=-a\Rightarrow a=-۱\ ,\ a=۰$$

بنابراین به ازای سه مقدار $-\frac{۴}{۳}$ ، صفر و -۱ برای a معادلهٔ مورد نظر جواب ندارد.

۱۶۷- گزینهٔ ۲ دو طرف معادلهٔ داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$x^۴+۲x-۵=(۱+x)^۲\Rightarrow x^۴-x^۲-۶=۰\Rightarrow(x^۲-۳)(x^۲+۲)=۰$$

چون $x^۲+۲\neq۰$ ، پس

$$x^۲-۳=۰\Rightarrow x=\pm\sqrt{۳}$$

$x=\sqrt{۳}$ در معادله صدق می‌کند، اما $x=-\sqrt{۳}$ در معادله صدق نمی‌کند، زیرا به ازای $x=-\sqrt{۳}$ سمت راست معادله منفی است و سمت چپ آن مثبت است. پس معادله فقط یک جواب دارد.

۱۶۸- گزینهٔ ۲ ابتدا معادله را به‌صورت $\sqrt[۳]{x^۴}-۴\sqrt[۳]{x^۲}+۳=۰$ می‌نویسیم. اکنون فرض می‌کنیم $t=\sqrt[۳]{x^۲}$ و معادله به‌صورت $t^۲-۴t+۳=۰$ در می‌آید. جواب‌های این معادله $t=۱$ و $t=۳$ هستند. پس

$$\sqrt[۳]{x^۲}=۱\Rightarrow x=\pm۱,\quad \sqrt[۳]{x^۲}=۳\Rightarrow x=\pm\sqrt{۲۷}$$

پس حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر ۲۷ است.

۱۶۹- گزینهٔ ۲ باید دو نامعادلهٔ $۳x^۲-۱۸\le x^۲$ و $x^۲\le۲x^۲-۴$ را حل کنیم و مجموعهٔ جواب‌های آن‌ها را با هم اشتراک بگیریم

$$۳x^۲-۱۸\le x^۲\Rightarrow۲x^۲-۱۸\le۰\Rightarrow x^۲-۹\le۰\Rightarrow-۳\le x\le۳$$
$$x^۲\le۲x^۲-۴\Rightarrow x^۲-۴\ge۰\Rightarrow x\ge۲\ \text{یا}\ x\le-۲$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های داده شده به‌صورت $[-۳,-۲]\cup[۲,۳]$ است که شامل چهار عدد صحیح است.

۱۷۰- گزینهٔ ۲ نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{x+۶}{x-۴}-x\ge۰\Rightarrow\frac{x+۶-x^۲+۴x}{x-۴}\ge۰$$
$$\frac{x^۲-۵x-۶}{x-۴}\le۰\Rightarrow\frac{(x+۱)(x-۶)}{x-۴}\le۰$$

اکنون به کمک تعیین علامت، مجموعهٔ جواب‌های نامعادله را معین می‌کنیم.

x	$-\infty$		-۱		۴		۶		$+\infty$
$\frac{(x+۱)(x-۶)}{x-۴}$		$-$	۰	$+$	ت.ن	$-$	۰	$+$	

پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادله به‌صورت $(-\infty,-۱]\cup(۴,۶]$ است. بنابراین $a=-۱$ و $b=۶$ و در نتیجه $a+b=۵$.

۱۷۱- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** اگر $x\ge-۱$ ، معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$||x+۱|-۲x|=|x+۱-۲x|=|۱-x|=۴$$

بنابراین

$$۱-x=۴\Rightarrow x=-۳\ (\text{غ.ق.ق}),\quad ۱-x=-۴\Rightarrow x=۵$$

اگر $x<-۱$ ، معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$||x+۱|-۲x|=|-(x+۱)-۲x|=|۳x+۱|=۴$$

که چون در این حالت $۳x+۱<۰$ ، پس معادلهٔ مورد نظر به صورت $-(۳x+۱)=۴$ است، یعنی $x=-\frac{۵}{۳}$. بنابراین معادلهٔ مورد نظر دو جواب دارد.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$\big||x+1|-2x\big|=4\Rightarrow |x+1|-2x=4\Rightarrow |x+1|=4+2x \qquad (1)$$

$$x+1=4+2x\Rightarrow x=-3\ \times ,\qquad x+1=-4-2x\Rightarrow x=-\frac{5}{3}\ \checkmark$$

($x=-3$ غیرقابل قبول است، چون در تساوی (۱) صدق نمی‌کند.)

$$|x+1|-2x=-4\Rightarrow |x+1|=-4+2x \qquad (2)$$

$$x+1=-4+2x\Rightarrow x=5\ \checkmark ,\qquad x+1=4-2x\Rightarrow x=1\ \times$$

($x=1$ غیرقابل قبول است، چون در تساوی (۲) صدق نمی‌کند.)

۱۷۲- گزینهٔ ۲ معادله را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$|x|-k=-4\Rightarrow |x|=k-4 \qquad (1)$$

$$|x|-k=4\Rightarrow |x|=k+4 \qquad (2)$$

برای اینکه معادلهٔ اصلی جواب نداشته باشد، باید هر کدام از معادله‌های (۱) و (۲) جواب نداشته باشند. بنابراین بایستی $k-4<0$ و $k+4<0$، پس $k<-4$.

۱۷۳- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\big|3-|x-2|\big|\le 4\Rightarrow -4\le 3-|x-2|\le 4\Rightarrow -7\le -|x-2|\le 1$$

نابرابری سمت راست همواره درست است. بنابراین باید

$$-7\le -|x-2|\Rightarrow |x-2|\le 7\Rightarrow -7\le x-2\le 7\Rightarrow -5\le x\le 9$$

بنابراین عددهای صحیح ۵-، ۴-، ...، ۸ و ۹ در نامعادلهٔ مورد نظر صدق می‌کنند. تعداد این عددها ۱۵ تاست.

۱۷۴- گزینهٔ ۱ چون در اینجا $|2x-1|$ مثبت است، پس

$$\left|\frac{x+2}{2x-1}\right|>1\Rightarrow |x+2|>|2x-1| \xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به توان دو}} x^2+4x+4>4x^2-4x+1$$

$$3x^2-8x-3<0\Rightarrow (3x+1)(x-3)<0\Rightarrow -\frac{1}{3}<x<3$$

البته چون مخرج عبارت سمت چپ نامعادلهٔ مورد نظر به ازای $x=\frac{1}{2}$ صفر می‌شود، پس $\frac{1}{2}$ در مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر نیست. بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله می‌شود $(-\frac{1}{3},\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},3)$.

راه‌حل دوم می‌توانیم نامعادلهٔ موردنظر را به‌صورت $|x+2|>|2x-1|$ بنویسیم که برای به‌دست آوردن مجموعهٔ جواب‌های آن به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$|x+2|>|2x-1|\Rightarrow (x+2)^2>(2x-1)^2\Rightarrow (x+2)^2-(2x-1)^2>0$$

$$(x+2+2x-1)(x+2-2x+1)>0\Rightarrow (3x+1)(-x+3)>0$$

$$x\in(-\frac{1}{3},3)$$

چون $x=\frac{1}{2}$ مخرج را صفر می‌کند، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر به‌صورت $(-\frac{1}{3},3)-\{\frac{1}{2}\}$ یا $(-\frac{1}{3},\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},3)$ است.

۱۷۵- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^2+2x+1<2+|x+1|$$

$$(x+1)^2<2+|x+1|\Rightarrow |x+1|^2<2+|x+1|$$

اگر فرض کنیم $t=|x+1|$، آن‌گاه

$$t^2-t-2<0\Rightarrow (t+1)(t-2)<0$$

چون $t\ge 0$، بنابراین $t+1\ge 1$ و در نتیجه $t+1>0$، پس باید نامعادلهٔ $t-2<0$ را حل کنیم که جواب آن به صورت $t<2$ است، پس $|x+1|<2$ و در نتیجه

$$-2<x+1<2\Rightarrow -3<x<1$$

پس اعداد صحیح صفر، ۱- و ۲- در مجموعهٔ جواب‌های نامعادله قرار دارند.

راه‌حل دوم دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول اگر $x\le -1$، آن‌گاه

$$x^2+2x<1-x-1\Rightarrow x^2+3x<0\Rightarrow -3<x<0 \xrightarrow{x\le -1} -3<x\le -1$$

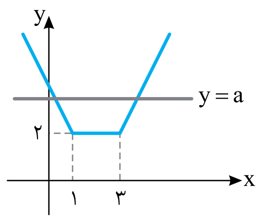
حالت دوم اگر $x>-1$، آن‌گاه

$$x^2+2x<1+x+1\Rightarrow x^2+x-2<0\Rightarrow (x+2)(x-1)<0\Rightarrow -2<x<1$$

$$\xrightarrow{x>-1} -1<x<1$$

بنابراین $-3<x<1$، در نتیجه عددهای صحیحی که در نامعادلهٔ مورد نظر صدق می‌کنند عبارت‌اند از $x=0$، $x=-1$ و $x=-2$.

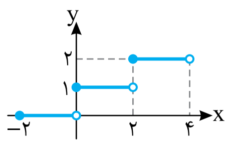
۱۷۶- گزینهٔ ۴ با توجه به نمودار تابع $y=|x-1|+|x-3|$ باید $a\ge 2$.



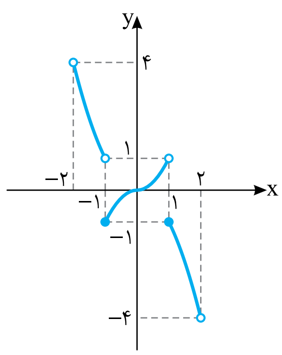
۱۷۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که اگر k عددی صحیح باشد، آن‌گاه $[x+k]=[x]+k$. بنابراین $f(x)=[\frac{x}{2}]+1$. اکنون توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}-1+1 & -2\le x<0\\ 0+1 & 0\le x<2\\ 1+1 & 2\le x<4\end{cases}=\begin{cases}0 & -2\le x<0\\ 1 & 0\le x<2\\ 2 & 2\le x<4\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است:



۱۷۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که اگر $[x]$ عددی زوج باشد، آن‌گاه $(-1)^{[x]}=1$ و در نتیجه $f(x)=x^2$. اگر $[x]$ عددی فرد باشد، آن‌گاه $(-1)^{[x]}=-1$ و در نتیجه $f(x)=-x^2$. یعنی تابع در بازه‌های $(-2,-1)$، $[0,1)$، $f(x)=x^2$ و در بازه‌های $[-1,0)$ و $[1,2)$، $f(x)=-x^2$. بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است:



۱۷۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $D_f=\{x|۱-[|x+۳|]\geq ۰\}$. از طرف دیگر،

$$۱-[|x+۳|]\geq ۰\Rightarrow [|x+۳|]\leq ۱$$

چون $|x+۳|$ نامنفی است، پس جزء صحیح آن نیز نامنفی است و چون در اینجا جزء صحیح $|x+۳|$ از ۱ بیشتر نیست، پس یا صفر است یا ۱. اکنون توجه کنید که

$$[|x+۳|]=۰\Rightarrow ۰\leq|x+۳|<۱\Rightarrow|x+۳|<۱\Rightarrow -۱<x+۳<۱$$

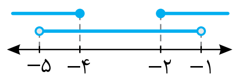
$$-۴<x<-۲$$

$$[|x+۳|]=۱\Rightarrow ۱\leq|x+۳|<۲$$

$$|x+۳|\geq۱\Rightarrow\begin{cases}x+۳\geq۱\\x+۳\leq-۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq-۲\\x\leq-۴\end{cases}\quad(۱)$$

$$|x+۳|<۲\Rightarrow -۲<x+۳<۲\Rightarrow -۵<x<-۱\quad(۲)$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $۱\leq|x+۳|<۲$ اشتراک جواب‌های (۱) و (۲) است، که می‌شود $(-۵,-۴]\cup[-۲,-۱)$.



به این ترتیب، دامنهٔ تابع f برابر است با

$$(-۴,-۲)\cup(-۵,-۴]\cup[-۲,-۱)=(-۵,-۱)$$

پس $a=-۵$، $b=-۱$ و $b-a=۴$.

۱۸۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

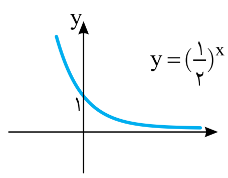
$$[\frac{۳x-a}{۲}]=۳\Rightarrow ۳\leq\frac{۳x-a}{۲}<۴\Rightarrow ۶\leq ۳x-a<۸$$

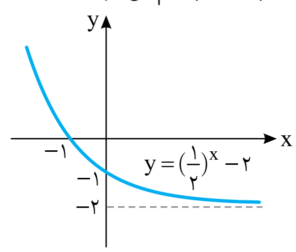
$$۶+a\leq۳x<۸+a\Rightarrow\frac{۶+a}{۳}\leq x<\frac{۸+a}{۳}$$

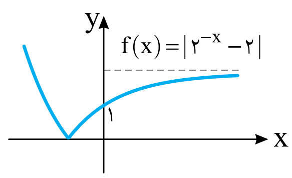
بنابراین، مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ مورد نظر بازهٔ $[\frac{۶+a}{۳},\frac{۸+a}{۳})$ است. در نتیجه، $\frac{۸+a}{۳}=۰$، یعنی $a=-۸$. توجه کنید که اگر $a=-۸$، آن‌گاه

$$\frac{۶+a}{۳}=\frac{-۲}{۳}$$

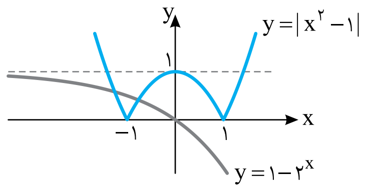
۱۸۱- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $f(x)=|(\frac{۱}{۲})^x-۲|$. نمودار تابع به‌ترتیب زیر رسم می‌شود:







۱۸۲- گزینهٔ ۴ نمودار تابع‌های $y=|x^۲-۱|$ و $y=۱-۲^x$ را رسم می‌کنیم. از روی شکل معلوم است دو نقطهٔ تقاطع با طول‌های منفی وجود دارد.



۱۸۳- گزینهٔ ۱ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$۲^{x+۲}-۲^{x+۱}=۵^{x+۲}-۴\times۵^{x+۱}\Rightarrow ۲^{x+۱}(۲-۱)=۵^{x+۱}(۵-۴)$$

$$۲^{x+۱}=۵^{x+۱}\Rightarrow(\frac{۲}{۵})^{x+۱}=۱$$

بنابراین $x+۱=۰$ و در نتیجه $x=-۱$. پس معادله فقط یک جواب دارد.

۱۸۴- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $(\frac{۲}{۳})^x=t$، نامعادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$t^۲+\frac{۲}{۳}t-\frac{۸}{۹}>۰\Rightarrow(t+\frac{۴}{۳})(t-\frac{۲}{۳})>۰$$

چون $t+\frac{۴}{۳}=(\frac{۲}{۳})^x+\frac{۴}{۳}>۰$، پس

$$t-\frac{۲}{۳}>۰\Rightarrow(\frac{۲}{۳})^x>(\frac{۲}{۳})^۱\xrightarrow{\frac{۲}{۳}<۱}x<۱$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر بازهٔ $(-\infty,۱)$ است، در نتیجه $a=۱$.

۱۸۵- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $f(-۱)=۰$ و $f(۰)=۱$. پس

$$f(۰)=\log_۳ b=۱\Rightarrow b=۳$$

$$f(-۱)=\log_۳(-a+b)=۰\Rightarrow\log_۳(-a+۳)=۰$$

$$-a+۳=۱\Rightarrow a=۲$$

بنابراین $f(x)=\log_۳(۲x+۳)$ و دامنهٔ تابع $(-\frac{۳}{۲},+\infty)$ است. پس حداقل مقدار c برابر $-\frac{۳}{۲}$ است.

۱۸۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\log_{\frac{۴}{۵}}\frac{۲}{۵}=\frac{\log\frac{۲}{۵}}{\log\frac{۴}{۵}}=\frac{\log۲-\log۵}{\log۴-\log۵}=\frac{\log۲-\log۵}{۲\log۲-\log۵}=\frac{\log\frac{۱۰}{۵}-\log۵}{۲\log\frac{۱۰}{۵}-\log۵}$$

$$=\frac{\log۱۰-\log۵-\log۵}{۲(\log۱۰-\log۵)-\log۵}=\frac{۱-۲a}{۲-۳a}$$

۱۸۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$۲^x=۱۰\Rightarrow x=\log_۲۱۰=\frac{\log۱۰}{\log۲},\quad ۵^y=۱۰\Rightarrow y=\log_۵۱۰=\frac{\log۱۰}{\log۵}$$

بنابراین $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}=\frac{\log۲+\log۵}{\log۱۰}=\frac{\log(۲\times۵)}{\log۱۰}=\frac{\log۱۰}{\log۱۰}=۱$.

۱۸۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$. معادله را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$۵^{\log_۲x}+۴\times۵^{\log_۲x}=۱۲۵\Rightarrow۵\times۵^{\log_۲x}=۱۲۵\Rightarrow۵^{\log_۲x}=۲۵=۵^۲$$

بنابراین $\log_۲x=۲\Rightarrow x=۴$

پس $k=۴$ و در نتیجه $\log_۲(k+۴)=\log_۲۸=۳$.

۱۸۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که تابع لگاریتم در مبنای $\frac{۱}{۲}$ اکیداً نزولی و تابع لگاریتم در مبنای ۳ اکیداً صعودی است. بنابراین

$$\log_{\frac{۱}{۲}}(\log_۳(x+۱))<-۱=\log_{\frac{۱}{۲}}۲$$

$$\log_۳(x+۱)>۲=\log_۳ ۹\Rightarrow x+۱>۹\Rightarrow x>۸$$

بنابراین عددهای طبیعی ۱، ۲، ... و ۸ در نامعادلهٔ مورد نظر صدق نمی‌کنند.

۱۹۰- گزینهٔ ۳ برای اینکه لگاریتم‌ها بامعنی باشند باید $x>۰$ و $x\neq ۱$. اکنون توجه کنید که

$$D_f=\{x|x>۰,x\neq۱,\log_۳x+۲\log_x۳-۳\geq۰\}$$

اگر فرض کنیم $\log_۳x=t$، آن‌گاه $\log_x۳=\frac{۱}{t}$. در نتیجه

$$\log_۳x+۲\log_x۳-۳\geq۰$$

$$t+\frac{۲}{t}-۳\geq۰\Rightarrow\frac{t^۲-۳t+۲}{t}\geq۰\Rightarrow\frac{(t-۱)(t-۲)}{t}\geq۰$$

t	$-\infty$		۰		۱		۲		$+\infty$
$\frac{(t-۱)(t-۲)}{t}$		−	ت ن	+	۰	−	۰	+	

بنابراین باید $۰<t\leq۱$ یا $t\geq۲$. اکنون توجه کنید که

$$۰<t\leq۱\Rightarrow۰<\log_۳x\leq۱\Rightarrow۱<x\leq۳\ ,\quad t\geq۲\Rightarrow\log_۳x\geq۲\Rightarrow x\geq۹$$

بنابراین $D_f=(۱,۳]\cup[۹,+\infty)$، پس $a=۱$، $b=۳$ و $a+b=۴$.

۱۹۱- گزینهٔ ۲ فرض کنید $\frac{x}{۳}=\frac{y}{۵}=\frac{۴x-ky}{۷}=t$. در این صورت $x=۳t$ و $y=۵t$ و در نتیجه

$$\frac{۴x-ky}{۷}=t\Rightarrow\frac{۱۲t-۵kt}{۷}=t$$

$$۱۲t-۵kt=۷t\Rightarrow۵kt=۵t\Rightarrow k=۱$$

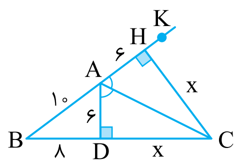
۱۹۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD،

$$AB^۲=AD^۲+BD^۲\Rightarrow۱۰۰=AD^۲+۶۴\Rightarrow AD=۶$$

اکنون اگر عمود CH را بر AK رسم کنیم، چون C روی نیمساز زاویهٔ KAD است، پس $HC=CD=x$ و چون مثلث‌های ADC و AHC همنهشت‌اند، پس $AH=AD=۶$. اکنون از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث HBC نتیجه می‌شود

$$BC^۲=HB^۲+HC^۲\Rightarrow(۸+x)^۲=۱۶^۲+x^۲$$

$$۸^۲+۱۶x+x^۲=۱۶^۲+x^۲\Rightarrow x=۱۲$$



۱۹۳- گزینهٔ ۱ از فرض سؤال نتیجه می‌شود $\frac{EF}{BC}=\frac{۳}{۴}$. چون $EF||BC$، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس

$$\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}\Rightarrow\frac{۵}{x+۵}=\frac{۴}{y+۴}=\frac{۳}{۴}$$

بنابراین

$$\frac{۵}{x+۵}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow۲۰=۳x+۱۵\Rightarrow x=\frac{۵}{۳}$$

$$\frac{۴}{y+۴}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow۱۶=۳y+۱۲\Rightarrow y=\frac{۴}{۳}$$

بنابراین $x+y=۳$.

۱۹۴- گزینهٔ ۴ چون $EF||BC$، از تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ABC نتیجه می‌شود $\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}=\frac{۳}{۴}$. اگر این تناسب را تفضیل در مخرج کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{AF}{AC-AF}=\frac{۳}{۴-۳}\Rightarrow\frac{AF}{FC}=۳\Rightarrow AF=۳FC$$

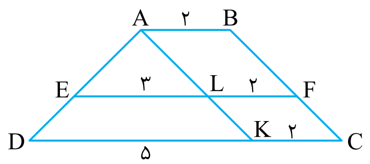
اکنون توجه کنید که

$$AF-FC=\frac{۳}{۲}\ ,\ AF=۳FC\Rightarrow AF=\frac{۹}{۴},FC=\frac{۳}{۴}$$

بنابراین $AC=\frac{۹}{۴}+\frac{۳}{۴}=۳$.

۱۹۵- گزینهٔ ۲ از A خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا پاره‌خط‌های EF و CD را به ترتیب در نقطه‌های L و K قطع کند (شکل زیر را ببینید). چون ABFL و LFCK متوازی‌الاضلاع هستند، پس $KC=LF=AB=۲$. اکنون توجه کنید که چون $EL||DK$، در مثلث ADK از تعمیم قضیهٔ تالس نتیجه می‌شود $\frac{AE}{AD}=\frac{EL}{DK}=\frac{۳}{۵}$. اگر این تناسب را تفضیل در مخرج کنیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{AE}{AD}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\frac{AE}{AD-AE}=\frac{۳}{۵-۳}\Rightarrow\frac{AE}{ED}=\frac{۳}{۲}$$



۱۹۶- گزینهٔ ۲ بنابر قضیهٔ تالس در ذوزنقه

$$\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}\Rightarrow\frac{۳}{۴}=\frac{۱۲}{x}\Rightarrow x=۱۶$$

۱۹۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AD}=\frac{۵}{۶}$. بنابراین مثلث‌های ABC و AED که در زاویهٔ A مشترک‌اند، متشابه‌اند (ض‌زض). در نتیجه

$$\frac{BC}{DE}=\frac{۵}{۶}$$

۱۹۸- گزینهٔ ۲ چون $\frac{AC}{AB}=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$ و $\frac{AB}{AD}=\frac{۶}{۹}=\frac{۲}{۳}$، پس مثلث‌های ACB و ABD که در زاویهٔ A مشترک‌اند، متشابه‌اند (ض‌زض). بنابراین نسبت تشابه دو مثلث نیز برابر $\frac{۲}{۳}$ است. در نتیجه $\frac{BD}{BC}=\frac{۳}{۲}$، یعنی $BD=\frac{۳}{۲}BC$. بنابراین

$$\text{محیط}(BCD)=BC+CD+DB=BC+۵+\frac{۳}{۲}BC=۲۰\Rightarrow\frac{۵}{۲}BC=۱۵$$

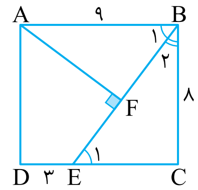
در نتیجه $BC=۶$.

۱۹۹- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل، زاویه‌های $B_۱$ و $E_۱$ هر دو متمم زاویهٔ $B_۲$ هستند، پس برابرند. در نتیجه مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABF و BEC متشابه‌اند (ز ز). بنابراین

$$\frac{AB}{BE}=\frac{BF}{EC} \qquad (۱)$$

از طرف دیگر $EC=۹-۳=۶$. در نتیجه بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ BCE، $BE^۲=BC^۲+EC^۲=۱۰۰$، پس $BE=۱۰$. در نتیجه، از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$\frac{۹}{۱۰}=\frac{۱۰-EF}{۶}\Rightarrow ۵۴=۱۰۰-۱۰EF\Rightarrow EF=۴/۶$$



۲۰۰- گزینهٔ ۳ چون $DE||AB$، پس بنابر قضیهٔ اساسی تشابه، مثلث‌های EKD و BKA متشابه‌اند. بنابراین

$$\frac{ED}{BA}=\frac{EK}{BK}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲} \qquad (۱)$$

از طرف دیگر، چون $EF||AB$، پس بنابر قضیهٔ اساسی تشابه، مثلث‌های CEF و CBA متشابه‌اند. بنابراین

$$\frac{EF}{BA}=\frac{CE}{CB}=\frac{x}{x+۹} \qquad (۲)$$

چون $ED=EF$، پس نسبت‌های سمت چپ تناسب‌های (۱) و (۲) برابرند، پس

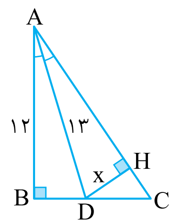
$$\frac{۱}{۲}=\frac{x}{x+۹}\Rightarrow\Rightarrow x+۹=۲x\Rightarrow x=۹$$

بنابراین $BC=۶+۳+۹=۱۸$.

۲۰۱- گزینهٔ ۱ چون D روی نیمساز زاویهٔ A قرار دارد، پس $BD=DH=x$. از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABD،

$$AD^۲=AB^۲+BD^۲\Rightarrow ۱۳^۲=۱۲^۲+x^۲$$

$$x^۲=۱۳^۲-۱۲^۲=(۱۳-۱۲)(۱۳+۱۲)=۲۵\Rightarrow x=۵$$

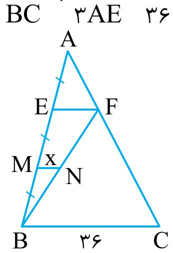


۲۰۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث BEF،

$$MN||EF\Rightarrow\frac{BM}{BE}=\frac{MN}{EF}\Rightarrow\frac{BM}{۲BM}=\frac{x}{EF}\Rightarrow EF=۲x$$

از طرف دیگر، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ABC،

$$EF||BC\Rightarrow\frac{AE}{AB}=\frac{EF}{BC}\Rightarrow\frac{AE}{۳AE}=\frac{۲x}{۳۶}\Rightarrow\frac{۱}{۳}=\frac{۲x}{۳۶}\Rightarrow x=۶$$



تذکر: برای به‌دست آوردن EF، از اینکه $MN||EF$ و M وسط BE نتیجه می‌شود MN در مثلث BEF میان‌خط است، بنابراین

$$x=MN=\frac{EF}{۲}\Rightarrow EF=۲x$$

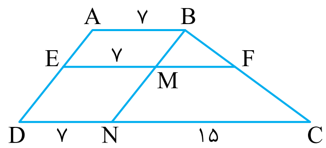
۲۰۳- گزینهٔ ۳ از B خطی موازی AD رسم می‌کنیم تا پاره‌خط‌های EF و DC را به‌ترتیب در نقاط M و N قطع کند. در این صورت، چون چهارضلعی‌های ABND و ABME متوازی‌الاضلاع هستند، پس $DN=EM=AB=۷$. بنابراین $NC=۲۲-۷=۱۵$. از طرف دیگر،

$$\frac{BF}{FC}=\frac{۲}{۳}\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}\frac{BF}{BF+FC}=\frac{۲}{۲+۳}\Rightarrow\frac{BF}{BC}=\frac{۲}{۵}$$

به این ترتیب، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث BNC،

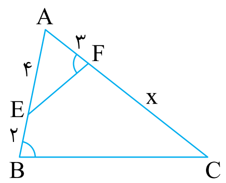
$$\frac{MF}{NC}=\frac{BF}{BC}\Rightarrow\frac{MF}{۱۵}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow MF=۶$$

بنابراین، $EF=۷+۶=۱۳$.



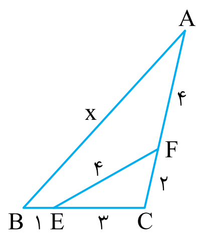
۲۰۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که مثلث‌های ABC و AFE در زاویهٔ رأس A مشترک‌اند و یک زاویهٔ برابر دارند $(\hat{ABC}=\hat{AFE})$، پس متشابه‌اند (ز ز). در نتیجه

$$\frac{AB}{AF}=\frac{AC}{AE}\Rightarrow\frac{۶}{۳}=\frac{۳+x}{۴}\Rightarrow ۲۴=۹+۳x\Rightarrow x=۵$$



۲۰۵- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که چون $\frac{CE}{CA}=\frac{CF}{CB}=\frac{۱}{۲}$ و مثلث‌های CEF و CAB در زاویهٔ رأس C مشترک‌اند، پس این دو مثلث متشابه‌اند (ض ز ض). در نتیجه

$$\frac{CE}{CA}=\frac{EF}{AB}\Rightarrow\frac{۳}{۶}=\frac{۴}{x}\Rightarrow x=۸$$



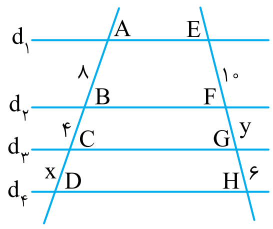
۲۰۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که بنابر قضیهٔ تالس در ذوزنقهٔ AEGC،

$$\frac{AB}{BC}=\frac{EF}{FG}\Rightarrow\frac{۸}{۴}=\frac{۱۰}{y}\Rightarrow y=۵$$

همین‌طور بنابر قضیهٔ تالس در ذوزنقهٔ BFHD،

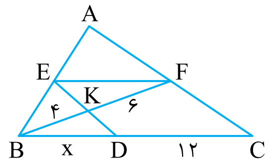
$$\frac{BC}{CD}=\frac{FG}{GH}\Rightarrow\frac{۴}{x}=\frac{۵}{۶}\Rightarrow x=\frac{۲۴}{۵}$$

پس $x+y=\frac{۴۹}{۵}$.



۲۰۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که چون نقطه‌های E و F به ترتیب وسط ضلع‌های AB و AC از مثلث ABC هستند، پس در مثلث ABC، EF میان‌خط است. یعنی $EF||BC$ و $EF=\frac{۱}{۲}BC$، پس $EF=\frac{۱}{۲}(x+۱۲)$. از طرف دیگر، چون $EF||BD$، بنابر قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌های KEF و KDB متشابه‌اند. بنابراین

$$\frac{KF}{KB}=\frac{EF}{DB}\Rightarrow\frac{۶}{۴}=\frac{\frac{۱}{۲}(x+۱۲)}{x}\Rightarrow ۶x=۲x+۲۴\Rightarrow x=۶$$

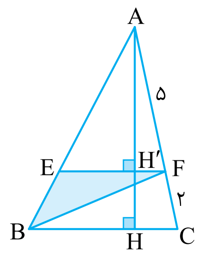


۲۰۸- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که چون $EF||BC$، پس بنابر قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌های AEF و ABC متشابه‌اند. در نتیجه، اگر ارتفاع AH را در مثلث ABC رسم کنیم، با نمادگذاری شکل زیر، AH' ارتفاع مثلث AEF است. در نتیجه $\frac{AH}{AH'}=\frac{AC}{AF}=\frac{۷}{۵}$. اگر این تناسب را تفضیل در صورت کنیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{AH-AH'}{AH'}=\frac{۷-۵}{۵}\Rightarrow\frac{HH'}{AH'}=\frac{۲}{۵}$$

اکنون توجه کنید که $\frac{S_{BEF}}{S_{AEF}}=\frac{\frac{۱}{۲}HH'\times EF}{\frac{۱}{۲}AH'\times EF}=\frac{HH'}{AH'}=\frac{۲}{۵}$.

پس $\frac{S_{AEF}}{S_{BEF}}=\frac{۵}{۲}$.



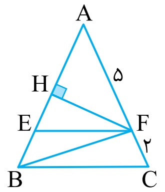
راه‌حل دوم ارتفاع FH از مثلث AEF را رسم می‌کنیم (شکل زیر را ببینید). FH ارتفاع مثلث BEF نیز هست. بنابراین

$$\frac{S_{AEF}}{S_{BEF}}=\frac{\frac{۱}{۲}\times FH\times AE}{\frac{۱}{۲}\times FH\times EB}=\frac{AE}{EB}\qquad(۱)$$

از طرف دیگر چون $EF||BC$، بنابر قضیهٔ تالس در مثلث ABC،

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}=\frac{۵}{۲}\qquad(۲)$$

بنابر تساوی‌های (۱) و (۲)، $\frac{S_{AEF}}{S_{BEF}}=\frac{۵}{۲}$.

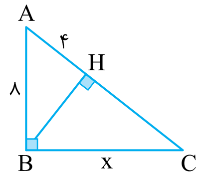


۲۰۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که بنابر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ BAC،

$$AB^۲=AH\times AC\Rightarrow ۶۴=۴\times AC\Rightarrow AC=۱۶$$

در نتیجه $HC=۱۲$ و باز هم بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$BC^۲=CH\times CA\Rightarrow x^۲=۱۲\times۱۶=۱۹۲\Rightarrow x=۸\sqrt{۳}$$



۲۱۰- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم $HC=a$. ابتدا توجه کنید که بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$BC^۲=CH\times CA\Rightarrow ۹۰=a(a+۱)\Rightarrow a=۹\ ,\ \ a=-۱۰\ \text{(غ.ق.ق)}$$

در نتیجه، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$AB^۲=AH\times AC=۱\times۱۰\Rightarrow x^۲=۱۰\Rightarrow x=AB=\sqrt{۱۰}$$