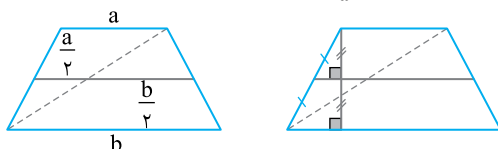


پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۶- گزینه ۲ فرض کنید طول قاعده‌ها a و b باشد (شکل رسم شده را ببینید). در این صورت طول پاره‌خطی که وسط‌های ساق‌ها را به هم وصل می‌کند برابر $\frac{a+b}{2}$ است. توجه کنید که ارتفاع ذوزنقه بالایی و پایینی برابر است. در نتیجه اگر این ارتفاع برابر h باشد، آن‌گاه

$$\frac{\frac{1}{2}h(a+\frac{a+b}{2})}{\frac{1}{2}h(\frac{a+b}{2}+b)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a+\frac{a+b}{2}}{\frac{a+b}{2}+b} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2a+b}{a+b+b} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2a+b}{a+2b} = \frac{1}{2}$$

$$4a+2b=a+2b \Rightarrow 3a=b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{3}$$



۷- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که بنابر قضیه فیثاغورس

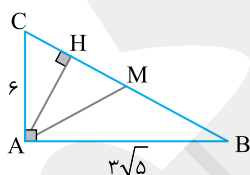
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = (3\sqrt{5})^2 + 6^2 = 81 \Rightarrow BC = 9$$

از طرف دیگر، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$AC^2 = CH \times CB \Rightarrow 36 = CH \times 9 \Rightarrow CH = 4$$

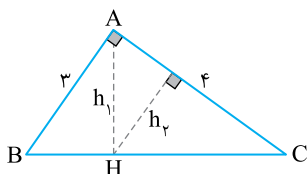
بنابراین $HM = CM - CH = \frac{BC}{2} - CH = \frac{9}{2} - 4 = \frac{1}{2}$. اکنون توجه کنید که

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMH}} = \frac{BC}{HM} = \frac{9}{\frac{1}{2}} = 18$$



۸- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که طول ضلع دیگر مثلث ABC برابر ۵ است. از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر، دو مثلث متشابه با مثلث اصلی ایجاد می‌کند. بنابراین، با نمادگذاری شکل زیر، مثلث‌های ABC و AHC متشابه‌اند. در نتیجه نسبت ارتفاع‌های آن‌ها برابر نسبت تشابه آن‌هاست یعنی

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5}$$



۱- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{1+\tan^2 x} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{|\cos x|} = \frac{1}{-\cos x} \quad (\pi < x < \frac{3\pi}{2})$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

به این ترتیب،

$$\sqrt{1+\tan^2 x} (2 \sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x) = -\frac{1}{\cos x} (2 \times \frac{1}{2} - \sin^2 x)$$

$$= -\frac{1}{\cos x} (1 - \sin^2 x) = -\frac{1}{\cos x} \times \cos^2 x = -\cos x$$

۲- گزینه ۳ فرض کنید سرعت آب برابر v باشد. در این صورت،

سرعت قایق موتوری در جهت حرکت آب $100+v$ و در جهت مخالف حرکت آب برابر $100-v$ است. در نتیجه

$$\frac{1200}{100-v} - \frac{1200}{100+v} = 5 \Rightarrow \frac{2400}{100-v} - \frac{2400}{100+v} = 1 \Rightarrow 2400 \left(\frac{1}{100-v} - \frac{1}{100+v} \right) = 1$$

$$2400 \left(\frac{2v}{100^2 - v^2} \right) = 1 \Rightarrow 100^2 - v^2 = 4800v \Rightarrow v^2 + 4800v - 100^2 = 0$$

$$(v-20)(v+5000) = 0 \Rightarrow v = 20$$

۳- گزینه ۱ راه‌حل اول توجه کنید که

$$\frac{2x-3}{x+1} > 1 \Rightarrow \frac{2x-3}{x+1} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{x-4}{x+1} > 0 \Rightarrow x > 4 \text{ یا } x < -1 \quad (1)$$

$$\frac{2x-3}{x+1} < 3 \Rightarrow \frac{2x-3}{x+1} - 3 < 0 \Rightarrow \frac{-x-6}{x+1} < 0 \Rightarrow \frac{x+6}{x+1} > 0$$

$$x < -6 \text{ یا } x > -1 \quad (2)$$

مجموعه جواب‌های نامعادله مورد نظر اشتراک جواب‌های (۱) و (۲) است که

از روی شکل زیر معلوم می‌شود برابر $\mathbb{R} - [-6, 4]$ است.



راه‌حل دوم اعداد ۵ و -۷ در نامعادله صدق می‌کنند:

$$1 < \frac{2 \times 5 - 3}{5 + 1} = \frac{7}{6} < 3, \quad 1 < \frac{2 \times (-7) - 3}{-7 + 1} = \frac{17}{6} < 3$$

بنابراین گزینه (۱) جواب نامعادله است.

۴- گزینه ۳ باید دسته‌های چهارتایی، پنج‌تایی یا شش‌تایی از هشت شیء متمایز انتخاب کند. تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با

$$\binom{8}{4} + \binom{8}{5} + \binom{8}{6} = 70 + 56 + 28 = 154$$

۵- گزینه ۴ توجه کنید که

$$3a + \sqrt{2a^2 + 4a} = 2 \Rightarrow \sqrt{2a^2 + 4a} = 2 - 3a \Rightarrow 2a^2 + 4a = 4 - 12a + 9a^2$$

$$7a^2 - 16a + 4 = 0 \Rightarrow (7a-2)(a-2) = 0 \Rightarrow a = \frac{2}{7}, a = 2$$

توجه کنید که اگر $a = 2$ ، تساوی مورد نظر درست نیست (سمت چپ بیشتر از ۲ است). بنابراین $a = \frac{2}{7}$. در نتیجه $\frac{a+1}{a} = 1 + \frac{1}{a} = 1 + \frac{7}{2} = \frac{9}{2}$

۹- گزینه ۳

ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{17\pi}{3}\right) &= \sin\left(5\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = -\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\left(-\frac{17\pi}{6}\right) &= \cos\left(\frac{17\pi}{6}\right) = \cos\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan\left(\frac{19\pi}{4}\right) &= \tan\left(5\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1 \\ \sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right) &= -\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -(-\sin\frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

۱۰- گزینه ۳

ابتدا توجه کنید که نمودار تابع مورد نظر از روی نمودار

تابع $y = \sin x$ با تبدیلات به دست آمده است. چون نمودار تابع مورد نظر و نمودار تابع سینوس در یک همسایگی راست نقطه صفر بالای محور x هستند، پس مقدار b مثبت است. بنابراین بیشترین مقدار تابع $y = a + b \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ برابر $a + b$ است. از روی نمودار معلوم است که این بیشترین مقدار برابر $\sqrt{3}$ است، پس $a + b = \sqrt{3}$. از طرف دیگر، چون نقطه $\left(\pi, -\frac{3}{2}\right)$ روی نمودار تابع مورد نظر است. پس

$$y = a + b \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3}{2} \Rightarrow a - b\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

بنابراین

$$\begin{cases} a + b = \sqrt{3} \\ a - b\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow b + b\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} + \frac{3}{2} \\ b\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow b = \sqrt{3}$$

۱۱- گزینه ۱

توجه کنید که

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{2x-1} = \left(\frac{125}{8}\right)^{x^2} \Rightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^{2x-1} = \left(\left(\frac{5}{2}\right)^3\right)^{x^2} \Rightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^{2x-1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{3x^2}$$

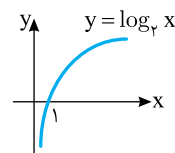
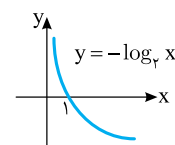
بنابراین

$$2x-1 = -3x^2 \Rightarrow 3x^2 + 2x-1 = 0 \Rightarrow (3x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}, x = -1$$

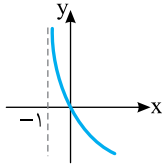
به ازای $x = -1$ ، مقدار $9x+1$ منفی می‌شود که لگاریتم آن در مبنای ۸تعریف نمی‌شود. بنابراین $x = \frac{1}{3}$ و

$$\log_8(9x+1) = \log_8(3+1) = \log_8 4 = \log_8 2^2 = \frac{2}{3} \log_8 2 = \frac{2}{3}$$

۱۲- گزینه ۲

نمودار تابع $y = \log_p x$ به صورت زیر است:بنابراین نمودار تابع $y = -\log_p x$ به صورت زیر است:

اگر این نمودار را یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم به نمودار تابع $y = -\log_p(x+1)$ می‌رسیم که همان نمودار داده شده است:

توجه کنید که $y = -\log_p(x+1) = \log_p(x+1)^{-1}$ ، بنابراین

$$U(x) = (x+1)^{-1}$$

۱۳- گزینه ۱ برای اینکه تابع f در نقطه $x = -2$ فقط از چپ پیوسته باشد، باید داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = f(-2), \quad \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) \neq f(-2)$$

اکنون توجه کنید که

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{\lambda + x^3}{|x+2|} \\ &= \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{(2+x)(4-2x+x^2)}{-(x+2)} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} (-(4-2x+x^2)) \\ &= -(4-2(-2)+(-2)^2) = -12\end{aligned}$$

چون $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = 12$ ، توجه کنید که $a = -12$ ، پس باید $f(-2) = a$ و در نتیجه $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) \neq f(-2)$.

۱۴- گزینه ۱ فرض کنید A و B به ترتیب پیشامدهای قبولی این فرد در آزمون‌های اول و دوم باشند. در این صورت $P(A) = 0.7$ ، $P(B) = 0.6$ و $P(B|A) = 0.8$. اکنون توجه کنید که

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow 0.8 = \frac{P(A \cap B)}{0.7} \\ P(A \cap B) = 0.56$$

در نتیجه،

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ = 0.7 + 0.6 - 0.56 = 0.74$$

۱۵- گزینه ۲

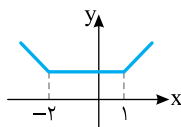
توجه کنید که

$$\text{گروه اول: } \bar{x} = 80, \sigma^2 = 25 \Rightarrow \sigma = 5, CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{5}{80} = \frac{1}{16}$$

$$\text{گروه دوم: } \bar{x} = 72, \sigma^2 = 16 \Rightarrow \sigma = 4, CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{4}{72} = \frac{1}{18}$$

چون ضریب تغییرات گروه دوم کمتر است، پس گروه دوم بهتر است. البته بهتر است که در صورت سؤال پرسیده شود «پراکندگی مسئولیت‌پذیری در کدام گروه کمتر است».

۱۶- گزینه ۱

نمودار تابع f به صورت زیر است:از روی این نمودار معلوم است که تابع f روی بازه $(-\infty, -2)$ اکیداً نزولی است.

۲۰- گزینه ۳ خارج از برنامه درسی
۲۱- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = f'(4)$ از طرف دیگر،

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}(\delta-2x) - (-2)(1+\sqrt{x})}{(\delta-2x)^2} \Rightarrow f'(4) = \frac{\frac{1}{2}(-3)+2(3)}{(-3)^2} = \frac{7}{12}$$

۲۲- گزینه ۲ چون تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است، پس روی $\mathbb{R}$ پیوسته است و در نتیجه در $x=2$ پیوسته و مشتق پذیر است:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x^2+ax+b) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-1}$$

$$-4+2a+b = \frac{1}{2-1} = 1 \Rightarrow 2a+b=5$$

$$f'_-(2) = f'_+(2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (-2x+a) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-1}{(x-1)^2} \Rightarrow -4+a = -1 \Rightarrow a=3$$

$$b = 5 - 2a = -1$$

۲۳- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$(fog)'(x) = g'(x) \times f'(g(x)) \quad (1)$$

$$g'(x) = \frac{2(x-1)-(1)(2x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow g'(2) = -3$$

همچنین، $g(2) = 5$. بنابراین از تساوی (۱) نتیجه می شود $f'(5) = -2$.

۲۴- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{8-\frac{1}{4}-(-\frac{1}{4})}{3} = \frac{11}{4}$$

$$\text{آهنگ تغییر لحظه ای} = f'(2)$$

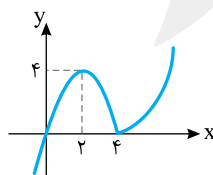
از طرف دیگر، $f'(x) = x + \frac{1}{x^2}$ ، پس $f'(2) = \frac{9}{4}$. بنابراین اختلاف مورد نظر می شود $\frac{11}{4} - \frac{9}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$.

۲۵- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+4x & x \leq 4 \\ x^2-4x & x > 4 \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است. از روی این شکل معلوم می شود که $(4, 0)$ نقطه مینیمم نسبی تابع f و $(2, 4)$ نقطه ماکزیمم نسبی تابع f است.

فاصله این نقطه ها برابر است با $\sqrt{(4-2)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{2^2 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.



۲۶- گزینه ۳ اگر مطابق شکل زیر، طول یکی از ضلع های مستطیل

برابر x باشد، طول دیگرش می شود $\sqrt{12-x}$. بنابراین

$$\text{مساحت مستطیل} = x\sqrt{12-x}$$

۱۷- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $\sin(\frac{3\pi}{2}-x) = -\cos x$ بنابراین معادله مورد نظر می شود

$$4 \sin x (-\cos x) = 1 \Rightarrow -2 \sin x \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin(-\frac{\pi}{6})$$

بنابراین جواب های کلی معادله و جواب های درون بازه $[0, 2\pi]$ به صورت زیر هستند:

$$2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{12}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 0 \leq k\pi - \frac{\pi}{12} \leq 2\pi$$

$$\frac{1}{12} \leq k \leq 2 + \frac{1}{12} \Rightarrow k = 1, 2$$

$$x = \pi - \frac{\pi}{12}, x = 2\pi - \frac{\pi}{12} \quad (1)$$

$$2x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{12}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 0 \leq k\pi + \frac{7\pi}{12} \leq 2\pi$$

$$-\frac{7}{12} \leq k < 2 - \frac{7}{12} \Rightarrow k = 0, 1$$

$$x = \frac{7\pi}{12}, x = \pi + \frac{7\pi}{12} \quad (2)$$

مجموع جواب های (۱) و (۲) برابر است با $4\pi + \frac{14\pi - 2\pi}{12} = 5\pi$.

۱۸- گزینه ۳ راه حل اول ابتدا توجه کنید که

$$x^2 + 10x + 16 = (x+2)(x+8)$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{x^2 + 10x + 16}{12 + 6\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(x+2)(x+8)}{2 + \sqrt[3]{x}}$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow -8} \left(\frac{(x+2)(x+8)}{2 + \sqrt[3]{x}} \times \frac{4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}{4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}} \right)$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(x+2)(x+8)(4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{2^3 + \sqrt[3]{x^3}}$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(x+2)(x+8)(4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{8 + x}$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow -8} ((x+2)(4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}))$$

$$= \frac{1}{6} (-8+2)(4 - 2(-2) + 2^2) = -12$$

راه حل دوم با استفاده از قاعده هوییتال به دست می آید

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{x^2 + 10x + 16}{12 + 6\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow -8} \frac{2x + 10}{6 \times \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}} = \frac{-16 + 10}{6 \times \frac{1}{3 \times (-2)^2}} = \frac{-6}{2} = -3$$

۱۹- گزینه ۴ چون تابع در هیچ همسایگی چپ نقطه صفر تعریف نشده

است، پس درباره حد چپ آن در نقطه صفر نمی توان حرف زد. از طرف دیگر،

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{x + x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{2x}$$

چون $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x) = 0$ و در یک همسایگی راست نقطه صفر مقادیر $2x$ مثبت اند، پس

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{2x} = -\infty$$

۳۰- گزینه ۲ فرض کنید A_1 پیشامد این باشد که مهره خارج شده سفید باشد و A_2 پیشامد این باشد که مهره خارج شده سیاه باشد. در این صورت اگر B پیشامد مورد نظر باشد، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) = \frac{5}{11} \times \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} + \frac{6}{11} \times \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} \\ = \frac{5}{11} \times \frac{6}{45} + \frac{6}{11} \times \frac{10}{45} = \frac{90}{11 \times 45} = \frac{2}{11}$$

۳۱- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{1+\tan^2 x} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{|\cos x|} = \frac{1}{-\cos x} \quad \left(\frac{\pi}{2} < x < \pi\right)$$

بنابراین

$$\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = \frac{\frac{1}{\sin x} - \sin x}{-\frac{1}{\cos x}} = \frac{\tan x (1 - \sin^2 x)}{-\cos x} \\ = -\tan x \cos x \times \frac{\cos^2 x}{\sin x} = -\sin x \times \frac{\cos^2 x}{\sin x} = -\cos^2 x$$

۳۲- گزینه ۴ فرض می‌کنیم سرعت پرنده در هوای آرام برابر v باشد.

چون سرعت باد 5 کیلومتر در ساعت است، پس سرعت پرنده در جهت موافق باد برابر $v+5$ و در جهت مخالف باد برابر $v-5$ است. چون پرنده یک کیلومتر رفته و یک کیلومتر برگشته است، پس مدت زمان رفت $\frac{1}{v+5}$ و مدت

زمان برگشت $\frac{1}{v-5}$ است. به این ترتیب،

$$\frac{1}{v+5} + \frac{1}{v-5} = \frac{9}{60} = \frac{3}{20} \Rightarrow \frac{2v}{v^2-25} = \frac{3}{20}$$

$$3v^2 - 40v - 75 = 0 \Rightarrow (3v+5)(v-15) = 0 \Rightarrow v = 15$$

۳۳- گزینه ۳ راه‌حل اول توجه کنید که

$$\frac{yx-8}{x^2-x-2} > \frac{x}{x-2} \Rightarrow \frac{yx-8}{(x+1)(x-2)} - \frac{x}{x-2} > 0 \Rightarrow \frac{yx-8-x(x+1)}{(x+1)(x-2)} > 0$$

$$\frac{-x^2+6x-8}{(x+1)(x-2)} > 0 \Rightarrow \frac{-(x-2)(x-4)}{(x+1)(x-2)} > 0 \Rightarrow \frac{(x-2)(x-4)}{(x+1)(x-2)} < 0$$

x	$-\infty$	-1	2	4	$+\infty$
$\frac{(x-2)(x-4)}{(x+1)(x-2)}$		+	-	-	+

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله مورد نظر $(-1, 2) \cup (2, 4)$ می‌شود.

راه‌حل دوم توجه کنید که اعداد صفر و ۳ در نامعادله صدق می‌کنند:

$$\frac{0-8}{0-2} > \frac{0}{0-2} \Rightarrow 4 > 0, \quad \frac{21-8}{9-3-2} > \frac{3}{3-2} \Rightarrow \frac{13}{4} > 3$$

بنابراین گزینه (۳) جواب نامعادله است.

۳۴- گزینه ۴ باید سه مدرسه از پنج مدرسه انتخاب کنیم (به $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ طریق) و از هر کدام از آن‌ها یک نفر را انتخاب کنیم (هر کدام به $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ طریق). بنابراین پاسخ مسئله برابر است با

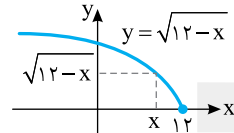
$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 10 \times 4 \times 4 \times 4 = 640$$

در نتیجه، باید بیشترین مقدار تابع $f(x) = x\sqrt{12-x}$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x) = (1)\sqrt{12-x} + x\left(\frac{-1}{2\sqrt{12-x}}\right)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{12-x}(2\sqrt{12-x}) = x \Rightarrow 2(12-x) = x \Rightarrow x = 8$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع f ، یعنی بیشترین مقدار مساحت مستطیل مورد نظر به ازای $x = 8$ به دست می‌آید و برابر است با $8\sqrt{4} = 16$.



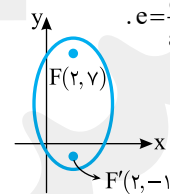
۲۷- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$FF' = 2c \Rightarrow 8 = 2c \Rightarrow c = 4$$

از طرف دیگر، $2b = 6$ ، پس $b = 3$ و در نتیجه

$$a^2 = b^2 + c^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow a = 5$$

به این ترتیب $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0.8$



۲۸- گزینه ۱ توجه کنید که شکل n ام از مربعی با n^2 دایره و

ردیف‌هایی از ۱، ۲، ... و $n-1$ دایره درست شده است. بنابراین

$$9^2 + 1 + 2 + 3 + \dots + 8 = 81 + \frac{8 \times 9}{2} = 117$$

۲۹- گزینه ۴ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4 \Rightarrow f(x) + 4 = (x-1)^2$$

$$x = \sqrt{f(x) + 4} + 1$$

بنابراین $f^{-1}(x) = \sqrt{x+4} + 1$. در نتیجه طول نقطه تقاطع نمودار تابع‌های f و f^{-1} جواب معادله زیر است:

$$\sqrt{x+4} + 1 = \frac{x-9}{2} \Rightarrow 2\sqrt{x+4} + 2 = x-9 \Rightarrow 2\sqrt{x+4} = x-11 \quad (1)$$

$$4(x+4) = x^2 - 22x + 121 \Rightarrow x^2 - 26x + 105 = 0 \Rightarrow (x-5)(x-21) = 0$$

$$x = 5, x = 21$$

توجه کنید که $x = 5$ جواب نیست، زیرا به ازای $x = 5$ سمت چپ معادله (۱) مثبت ولی سمت راست آن منفی است. بنابراین $x = 21$.

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که $f(x) = (x-1)^2 - 4$. طول نقطه برخورد نمودار تابع‌های f^{-1} و g جواب معادله $f^{-1}(x) = g(x)$ است. اکنون توجه کنید که

$$f^{-1}(x) = g(x) \Rightarrow f(f^{-1}(x)) = f(g(x)) \Rightarrow x = f(g(x))$$

$$x = (g(x)-1)^2 - 4 \Rightarrow x+4 = \left(\frac{x-9}{2}-1\right)^2 \Rightarrow x+4 = \left(\frac{x-11}{2}\right)^2$$

$$4x+16 = x^2 - 22x + 121 \Rightarrow x^2 - 26x + 105 = 0 \Rightarrow (x-5)(x-21) = 0$$

$$x = 5, x = 21$$

اکنون توجه کنید که $R_{f^{-1}} = D_f = [1, +\infty)$. پس مقادیر f^{-1} مثبت‌اند. اما

$g(5) < 0$ ، پس $x = 5$ جواب معادله $f^{-1}(x) = g(x)$ نیست. بنابراین $x = 21$.

۳۵- گزینه ۱ توجه کنید که

$$2a + \sqrt{3a+16} = 1 \Rightarrow \sqrt{3a+16} = 1-2a \Rightarrow \sqrt{3a+16}^2 = (1-2a)^2$$

$$3a+16 = 1-4a+4a^2 \Rightarrow 4a^2-7a-15=0$$

$$(4a+5)(a-3)=0 \Rightarrow a=-\frac{5}{4}, a=3$$

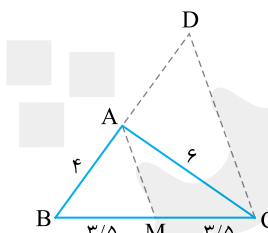
توجه کنید که $a=3$ در تساوی داده شده صدق نمی‌کند، ولی $a=-\frac{5}{4}$ در

تساوی داده شده صدق می‌کند. بنابراین $a=-\frac{5}{4}$ و $4a+9=4$

۳۶- گزینه ۲ راه حل اول توجه کنید که در مثلث BCD، از نقطه M،

وسط ضلع BC، خطی موازی ضلع CD رسم شده است. در نتیجه، این خط از

وسط ضلع DB نیز می‌گذرد. یعنی $BD=2AB=8$.



راه حل دوم چون $AM \parallel DC$ ، بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث BCD،

$$\frac{BA}{BM} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow \frac{4}{3/5} = \frac{BD}{5} \Rightarrow BD=8$$

۳۷- گزینه ۲ توجه کنید که در مثلث ایجاد شده هم ضلع‌ها به سه

قسمت برابر تقسیم می‌شوند. از طرف دیگر، مثلث‌های ABC و AEF

متشابه‌اند، پس

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AEF}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{4} S_{AEF} \quad (1)$$

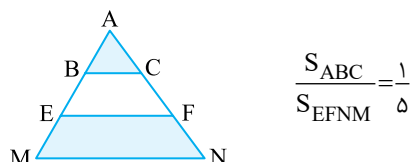
همین‌طور، مثلث‌های AEF و AMN متشابه‌اند، پس

$$\frac{S_{AEF}}{S_{AMN}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow S_{AMN} = \frac{9}{4} S_{AEF}$$

$$S_{AMN} - S_{AEF} = \frac{9}{4} S_{AEF} - S_{AEF}$$

$$S_{EFNM} = \frac{5}{4} S_{AEF} \quad (2)$$

اگر تساوی‌های (۱) و (۲) را بر هم تقسیم کنیم، به دست می‌آید

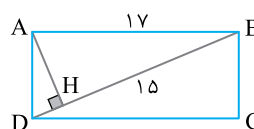


$$\frac{S_{ABC}}{S_{EFNM}} = \frac{1}{5}$$

۳۸- گزینه ۱ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه ABD،

$$AB^2 = BH \times BD \Rightarrow 17^2 = 15 \times BD \Rightarrow BD = \frac{17^2}{15} = \frac{289}{15} = 19 \frac{4}{15}$$

پس طول قطر مستطیل $\frac{4}{15}$ واحد از عدد ۱۹ بیشتر است.



۳۹- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha, \quad \cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\tan\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = -\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cot \alpha$$

بنابراین (چون α ربع سوم است، $\cos \alpha < 0$)

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \frac{16}{9}} = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\sin \alpha = \tan \alpha \cos \alpha = \frac{4}{3} \times \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{5}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{3}{4}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\left(-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) + \frac{3}{4} = \frac{3}{20}$

۴۰- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که $y = a + b \sin x$ از روی نمودار

تابع معلوم می‌شود که b مثبت است، پس بیشترین مقدار تابع برابر $a+b$

است. چون این مقدار برابر ۳ است، پس $a+b=3$. همچنین، نمودار تابع از

نقطه $\left(-\frac{5\pi}{6}, 0\right)$ گذشته است، پس

$$0 = a + b \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = a + b\left(-\frac{1}{2}\right) = a - \frac{b}{2}$$

بنابراین

$$\begin{cases} a+b=3 \\ a-\frac{b}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$$

بنابراین ضابطه تابع مورد نظر $y = 1 + 2 \sin x$ می‌شود، که مقدار آن به ازای

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ برابر است با } 1 + 2 \sin \frac{\pi}{6} = 2$$

۴۱- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $3^{x^2-2} = 81^x = (3^4)^x = 3^{4x}$

بنابراین

$$x^2 - 2 = 4x \Rightarrow x^2 - 4x - 2 = 0$$

$$x = 2 - \sqrt{6}, \quad x = 2 + \sqrt{6}$$

چون به ازای $x = 2 - \sqrt{6}$ ، مقدار $x - 2$ منفی می‌شود و $\log_\epsilon(x-2)$ را

می‌خواهیم، پس $x = 2 + \sqrt{6}$ و در نتیجه

$$\log_\epsilon(x-2) = \log_\epsilon \sqrt{6} = \frac{1}{2} \log_\epsilon 6 = \frac{1}{2}$$

۴۲- گزینه ۲ چون دامنه تابع بازه $\left(-\frac{a}{2}, +\infty\right)$ است و از روی نمودار

تابع معلوم می‌شود که این بازه $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ است، پس $a = -1$. از طرف دیگر

نمودار تابع از نقطه $(2, 0)$ گذشته است، پس $y(2) = 0$:

$$-1 + \log_b(4-1) = 0$$

$$\log_b 3 = 1 \Rightarrow b = 3$$

بنابراین ضابطه تابع $y = -1 + \log_3(2x-1)$ می‌شود. طول نقطه برخورد

نمودار تابع مورد نظر با خط $y = 1$ جواب معادله زیر است:

$$-1 + \log_3(2x-1) = 1 \Rightarrow \log_3(2x-1) = 2$$

$$2x-1 = 9 \Rightarrow x = 5$$

۴۳- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} x+2 = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} x+2 = 2$$

چون $f(2) = 2$ ، پس تابع f در نقطه $x = 2$ فقط از راست پیوسته است.

۴۴- گزینه ۴ فرض کنید A پیشامد موفقیت این فرد و B پیشامد

موفقیت دوستش باشد. در این صورت

$$P(A) = 2P(B), \quad P(A \cup B) = \frac{Y}{9}$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{(P(A))^2}{2}$$

اکنون توجه کنید که

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\frac{Y}{9} = P(A) + \frac{P(A)}{2} - \frac{(P(A))^2}{2}$$

$$(P(A))^2 - 3P(A) + \frac{14}{9} = 0 \Rightarrow P(A) = \frac{2}{3}, \quad P(A) = \frac{14}{9} \text{ (غ.ق.)}$$

۴۵- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که $\bar{X}_A = 14$ و $\bar{X}_B = 14/5$. بنابراین

$$\sigma_A^2 = \frac{2^2 + 1^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2}{5} = 2$$

$$\sigma_B^2 = \frac{2^2 + 1/5^2 + 1^2 + 1/5^2 + 2^2}{5} = 3/7$$

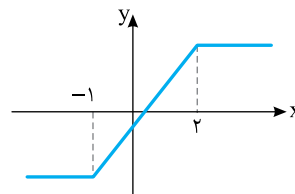
چون

$$CV_A = \frac{\sigma_A}{\bar{X}_A} = \frac{\sqrt{2}}{14}, \quad CV_B = \frac{\sigma_B}{\bar{X}_B} = \frac{\sqrt{3/7}}{14/5}$$

پس $CV_A < CV_B$ ، یعنی دقت عمل A بیشتر است. البته بهتر است در صورت سؤال پرسیده شود «نمرات مهارت» کدام کارگر پراکندگی کمتری دارد.

۴۶- گزینه ۳ نمودار تابع f به صورت زیر است. از روی این نمودار

معموم است که تابع f روی بازه $(-1, 2)$ اکیداً صعودی است.



۴۷- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\cos 3x + \cos x = 0 \Rightarrow \cos 3x = -\cos x = \cos(\pi - x)$$

بنابراین $(k \in \mathbb{Z})$

$$3x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$3x = 2k\pi - (\pi - x) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2}$$

چون باید $\cos x \neq 0$ ، پس جوابهای به شکل $k\pi - \frac{\pi}{2}$ قبول نیستند. در

نتیجه، جوابهای کلی معادله مورد نظر به صورت $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ هستند $(k \in \mathbb{Z})$.

۴۸- گزینه ۴ راهحل اول توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{3x+2}}{\Delta x^2 - 18x + 16}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2 - \sqrt{3x+2}}{(\Delta x - 8)(x - 2)} \times \frac{4 + 2\sqrt{3x+2} + \sqrt{(3x+2)^2}}{4 + 2\sqrt{3x+2} + \sqrt{(3x+2)^2}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 - (3x+2)}{(\Delta x - 8)(x - 2)(4 + 2\sqrt{3x+2} + \sqrt{(3x+2)^2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3(x-2)}{(\Delta x - 8)(x - 2)(4 + 2\sqrt{3x+2} + \sqrt{(3x+2)^2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3}{(\Delta x - 8)(4 + 2\sqrt{3x+2} + \sqrt{(3x+2)^2})}$$

$$= \frac{-3}{(2)(4 + 2 \times 2 + 2^2)} = -\frac{1}{8}$$

راهحل دوم بنابر قاعده هوییتال،

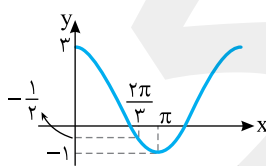
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{3x+2}}{\Delta x^2 - 18x + 16} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}}{2\Delta x - 18} = \frac{-\frac{1}{2^2}}{2 \times 0 - 18} = -\frac{1}{8}$$

۴۹- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}^+} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}^+} (1 + 2 \cos x) = 0$$

و در یک همسایگی راست نقطه $\frac{2\pi}{3}$ ، مقادیر $1 + 2 \cos x$ منفی هستند. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}^+} \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} = -\infty$$



۵۰- گزینه ۴ خارج از برنامه درسی

۵۱- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\frac{1}{4} + h) - f(\frac{1}{4})}{h} = f'(\frac{1}{4})$$

از طرف دیگر،

$$f'(x) = \frac{(-1)(\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(-x-1)}{(\sqrt{x})^2}$$

پس

$$f'(\frac{1}{4}) = \frac{-\frac{1}{2} + (1)(\frac{1}{4} + 1)}{\frac{1}{4}} = 3$$

۵۶- گزینه ۴ راه حل اول فرض می کنیم مستطیل مورد نظر ABCD

باشد و طول نقطه C برابر x باشد (شکل زیر را ببینید). چون نقطه B روی دایره $\sqrt{36-x^2}$ است، پس عرض نقطه B برابر است با $\sqrt{36-x^2}$.

به این ترتیب، $S_{ABCD} = 2x\sqrt{36-x^2}$ باید بیشترین مقدار تابع

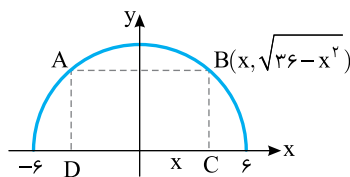
$f(x) = 2x\sqrt{36-x^2}$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x) = 2\sqrt{36-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{36-x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 36-x^2 = x^2 \Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow x = 3\sqrt{2} \quad (x > 0)$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع f، یعنی بیشترین مساحت مستطیل ABCD، به

ازای $x = 3\sqrt{2}$ به دست می آید و برابر است با $2(3\sqrt{2})\sqrt{36-18} = 36$.

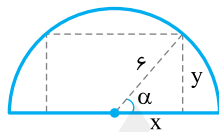


راه حل دوم با نمادگذاری شکل زیر، فرض می کنیم طول ضلع های مستطیل

2x و y باشند. در این صورت $x = 6 \cos \alpha$ و $y = 6 \sin \alpha$ بنابراین

$$S_{ABCD} = 2xy = 2(6 \cos \alpha)(6 \sin \alpha) = 36 \sin 2\alpha \leq 36$$

توجه کنید که تساوی وقتی به دست می آید که $2\alpha = 90^\circ$ ، یعنی $\alpha = 45^\circ$.



۵۷- گزینه ۱ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می کنیم. فاصله مرکز

دایره تا خط $2x - 3y + 1 = 0$ برابر است با

$$OH = \frac{|2(-1) - 3(4) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

چون $HB = \frac{AB}{2} = \sqrt{7}$ ، پس بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه OHB،

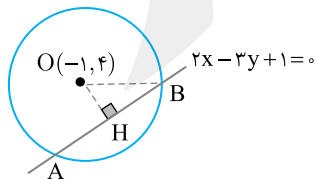
$$OB^2 = OH^2 + HB^2 = (\sqrt{13})^2 + (\sqrt{7})^2 = 20 \Rightarrow OB = 2\sqrt{5}$$

یعنی شعاع دایره مورد نظر برابر $2\sqrt{5}$ است. بنابراین معادله این دایره به

صورت $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 20$ است. طول نقطه های برخورد این دایره با

خط $y = 2$ جواب معادله زیر هستند:

$$(x+1)^2 + (2-4)^2 = 20 \Rightarrow (x+1)^2 = 16 \Rightarrow x = -5, x = 3$$



۵۸- گزینه ۳ توجه کنید که شکل nام از مستطیلی با $2 \times (n+1)$ دایره

و نواری با n دایره درست شده است. بنابراین تعداد دایره های شکل nام برابر

است با $2(n+1) + n = 3n + 2$. پس تعداد دایره های شکل دوازدهم برابر

$$\text{است با } 3 \times 12 + 2 = 38$$

۵۲- گزینه ۳ چون تابع f در نقطه $x=2$ مشتق پذیر است، پس در

این نقطه پیوسته نیز هست. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{a}{ax+b} = 4 \Rightarrow \frac{a}{2a+b} = 4 \Rightarrow 2a+b=2$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-a}{(ax+b)^2} & x > 2 \\ -3x^2 + 6 & x < 2 \end{cases}$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-a}{(ax+b)^2} = \frac{-a}{(2a+b)^2} = \frac{-a}{2^2} = -\frac{a}{2}$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-3x^2 + 6) = -6$$

بنابراین

$$f'_+(2) = f'_-(2) \Rightarrow -\frac{a}{2} = -6 \Rightarrow a = 3$$

۵۳- گزینه ۲ توجه کنید که $f(x) = x \left(\frac{3x+1}{x+2} \right)^{\frac{1}{3}}$ پس

$$f'(x) = \left(\frac{3x+1}{x+2} \right)^{\frac{1}{3}} + x \times \frac{1}{3} \left(\frac{3}{(x+2)^2} - \frac{(3x+1)}{(x+2)^3} \right) \left(\frac{3x+1}{x+2} \right)^{\frac{1}{3}-1}$$

در نتیجه

$$f'(-3) = \left(\frac{-8}{-1} \right)^{\frac{1}{3}} + (-3) \left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{3(-1) - (-8)}{(-1)^2} - \frac{(-8)}{(-1)^3} \right) \left(\frac{-8}{-1} \right)^{\frac{1}{3}-1} = 2 - 5 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

۵۴- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که نقطه های ابتدایی و انتهایی نمودار

تابع $(0, f(0))$ و $(8, f(8))$ هستند. شیب خطی که این دو نقطه را به هم

وصل می کند برابر است با $\frac{f(8) - f(0)}{8 - 0} = \frac{3 - (-5)}{8} = 1$. اکنون طول نقطه ای

را روی نمودار تابع f پیدا می کنیم که شیب خط مماس در این نقطه بر نمودار تابع برابر ۱ است:

$$f'(x) = \frac{9}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(x) = 1 \Rightarrow \frac{9}{(x+1)^2} = 1$$

$$(x+1)^2 = 9 \Rightarrow x = 2, x = -4 \quad (\text{غ.ق.ی})$$

بنابراین طول نقطه مورد نظر برابر ۲ است و عرض آن برابر است با $f(2) = 1$.

معادله خطی که از نقطه $(2, 1)$ می گذرد و شیب آن برابر ۱ است به صورت

$y - 1 = (x - 2)$ یعنی $y = x - 1$ است. عرض نقطه ای که این خط محور y

را قطع می کند برابر است با $y = 0 - 1 = -1$.

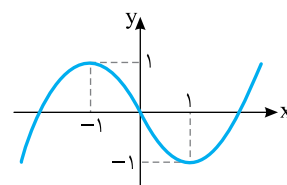
۵۵- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & x \leq 0 \\ x^2 - 2x & x > 0 \end{cases}$$

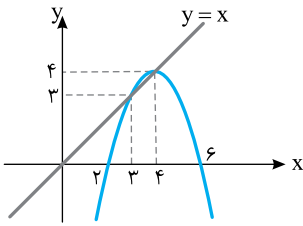
پس نمودار تابع f به صورت زیر است. بنابراین نقطه های ماکزیمم نسبی و

مینیمم نسبی تابع f نقطه های $(-1, 1)$ و $(1, -1)$ هستند که فاصله آنها برابر

$$\text{است با } \sqrt{(-1-1)^2 + (1+1)^2} = 2\sqrt{2}$$



به نمودار این تابع و خط $y=x$ توجه کنید. در بازه $(۳, ۴)$ نمودار تابع f بالای این خط قرار دارد.



راه حل دوم برای اینکه بدانیم در چه بازه‌ای نمودار تابع f بالای خط $y=x$ قرار دارد، کافی است نامعادله $f(x) > x$ را حل کنیم:

$$-x^2 + 8x - 12 > x \Rightarrow x^2 - 7x + 12 < 0$$

$$(x-3)(x-4) < 0 \Rightarrow 3 < x < 4$$

راه حل سوم در تابع $f(x) = -x^2 + 8x - 12$ مقادیر $f(۳)$ و $f(۴)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(۳) = -9 + 24 - 12 = 3, \quad f(۴) = -16 + 32 - 12 = 4$$

بنابراین در نقاط $x=3$ و $x=4$ نمودار تابع f بالای خط $y=x$ قرار ندارد، بلکه منطبق بر این خط است. پس گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) که شامل عدد ۳ یا ۴ هستند، جواب نیستند و گزینه (۱) جواب است.

۶۵- گزینه ۲ مجموع اعداد طبیعی دو رقمی مضرب هفت به صورت $S = 14 + 21 + \dots + 98$ است. به راحتی می‌توانید این اعداد را جمع بزنید و به عدد ۷۲۸ برسید. البته می‌توانید از فرمول مجموع جملات دنباله حسابی استفاده کنید. در این مجموع جمله اول برابر ۱۴، جمله آخر برابر ۹۸ و تعداد جملات برابر ۱۳ است. پس

$$S = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{13}{2}(14 + 98) = 728$$

۶۶- گزینه ۴ فرض کنید بهروز به تنهایی در t ساعت این کار را انجام می‌دهد. بنابراین فرهاد در $t+9$ ساعت این کار را انجام می‌دهد. پس بهروز در هر ساعت $\frac{1}{t}$ از این کار و فرهاد در هر ساعت $\frac{1}{t+9}$ از این کار را انجام می‌دهند. اگر هر دو با هم کار کنند، در هر ساعت به مقدار $\frac{1}{t} + \frac{1}{t+9}$ از این کار را انجام می‌دهند. چون با هم در ۲۰ ساعت کار را تمام می‌کنند، پس در یک ساعت $\frac{1}{۲۰}$ کار را با هم انجام می‌دهند. بنابراین

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t+9} = \frac{1}{۲۰} \Rightarrow 20(t+9) + 20t = t(t+9) \Rightarrow t^2 - 31t - 180 = 0$$

$$(t-36)(t+5) = 0 \Rightarrow t = 36, t = -5 \text{ (غ.ق.)}$$

۶۷- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f^{-1} = \{(2, 1), (5, 2), (4, 3), (6, 4)\}$$

بنابراین

$$(g \circ f^{-1})(2) = g(1) = \text{تعریف نشده}, \quad (g \circ f^{-1})(5) = g(2) = 3$$

$$(g \circ f^{-1})(4) = g(3) = 1, \quad (g \circ f^{-1})(6) = g(4) = 2$$

بنابراین $D_{g \circ f^{-1}} = \{5, 4, 6\}$ ، در نتیجه

$$D_{\frac{g}{g \circ f^{-1}}} = D_g \cap D_{g \circ f^{-1}} - \{x | (g \circ f^{-1})(x) = 0\} = \{4, 5\}$$

در توابع داده شده در گزینه‌ها فقط تابع گزینه (۱) دامنه اش $\{4, 5\}$ است.

۵۹- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $(g^{-1} \circ f^{-1})(\lambda) = g^{-1}(f^{-1}(\lambda))$.

اکنون فرض کنید $f^{-1}(\lambda) = a$ در این صورت

$$f(a) = \lambda \Rightarrow \frac{2}{5}a - 4 = \lambda \Rightarrow a = 30$$

اکنون فرض کنید $g^{-1}(30) = b$ در این صورت

$$g(b) = 30 \Rightarrow b^3 + b = 30 \Rightarrow b = 3$$

بنابراین

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(\lambda) = g^{-1}(f^{-1}(\lambda)) = g^{-1}(30) = 3$$

۶۰- گزینه ۲ فرض کنید A ، B و C به ترتیب پیشامد انتخاب بسته‌های ریاضی، تجربی و علوم انسانی باشند. اگر پیشامد برنده شدن بهروز X باشد، آن‌گاه

$$P(X) = P(A)P(X|A) + P(B)P(X|B) + P(C)P(X|C)$$

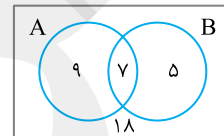
$$= \frac{5}{18} \times \frac{7}{18} + \frac{7}{18} \times \frac{8}{18} + \frac{6}{18} \times \frac{9}{18} = \frac{35}{180} + \frac{56}{180} + \frac{54}{180} = \frac{145}{180} = \frac{29}{36}$$

۶۱- گزینه ۴ اگر گروه ورزش را با A و گروه روزنامه دیواری را با B نمایش دهیم، آن‌گاه $n(A) = 16$ ، $n(B) = 12$ و $n(A-B) = 9$ بنابراین

$$n(A \cap B) = n(A) - n(A-B) = 16 - 9 = 7$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 16 + 12 - 7 = 21$$

بنابراین $39 - 21 = 18$ نفر عضو هیچ یک از دو گروه نیستند. نمودار زیر تعداد افراد هر گروه را نشان می‌دهد.



۶۲- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$A = \sqrt[5]{4\sqrt[3]{16}} \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{4}{3}} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{4}{23} = \frac{2}{23}$$

بنابراین

$$(2A)^{-\frac{1}{3}} = 8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}}$$

۶۳- گزینه ۵ ابتدا توجه کنید که معادله

$$(2m-1)x^2 + 6x + m - 2 = 0$$

به ازای $m = \frac{1}{3}$ درجه دوم نیست و به صورت $6x - \frac{3}{2} = 0$ درمی‌آید که تنها جواب آن $\frac{1}{4}$ است. چون $\frac{1}{3}$ در هر چهار گزینه وجود دارد، پس هیچ کدام از گزینه‌ها جواب نیستند ولی منظور طراح سؤال حالتی بوده که دلتای معادله مثبت است. در این صورت

$$\Delta = 36 - 4(2m-1)(m-2) > 0 \Rightarrow (m+1)(2m-7) < 0 \Rightarrow -1 < m < \frac{7}{2}$$

یعنی منظور طراح، گزینه (۳) بوده است.

۶۴- گزینه ۱ **راه حل اول** اگر نمودار تابع $y = -x^2 + 2x + 5$ را سه

واحد به طرف x های مثبت سپس دو واحد به طرف y های منفی انتقال دهیم،

نمودار تابع $f(x) = -(x-3)^2 + 2(x-3) + 5 - 2 = -(x-3)^2 + 2(x-3) + 3$ ساده شده

ضابطه این تابع به صورت $f(x) = -x^2 + 8x - 12$ است. بنابراین می‌خواهیم

بازه‌ای را معین کنیم که در آن بازه نمودار تابع f بالای خط $y=x$ قرار دارد.

۷۱- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $f(2) = 2a - 1$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax - 1) = 2a - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x - 6}{x - \sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)(x+\sqrt{x+2})}{(x-\sqrt{x+2})(x+\sqrt{x+2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)(x+\sqrt{x+2})}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)(x+\sqrt{x+2})}{(x-2)(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x+\sqrt{x+2})}{x+1} = \frac{3(2+\sqrt{2+2})}{2+1} = 4$$

بنابراین برای اینکه تابع f در $x=2$ پیوسته باشد باید تساوی $2a-1=4$ برقرار باشد که نتیجه می‌شود $a=\frac{5}{2}$. توجه کنید که حد راست تابع را می‌توانید به کمک قاعده هوییتال نیز به دست آورید:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x-6}{x-\sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{1-\frac{1}{\sqrt{x+2}}} = \frac{3}{1-\frac{1}{2}} = 4$$

۷۲- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $f(x) = 1 + \frac{a}{2} \sin 2bx$. بنابراین دوره

تناوب تابع f برابر $\frac{2\pi}{|2b|}$ و حداکثر مقدار تابع برابر $1 + \frac{|a|}{2}$ است. با توجه به نمودار تابع f دوره تناوب برابر $\frac{3\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}) = \pi$ و حداکثر مقدار تابع برابر $\frac{3}{2}$ است. بنابراین $\frac{2\pi}{|2b|} = \pi \Rightarrow |b| = 1$, $1 + \frac{|a|}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow |a| = 1$

با توجه به اینکه نمودار تابع f در اطراف نقطه $x=0$ صعودی است، مقادیر a و b هم‌علامت‌اند. بنابراین $a=1$ و $b=1$ یا $a=-1$ و $b=-1$. پس $a+b$ می‌تواند برابر ۲ یا -۲ باشد که فقط حالت $a+b=2$ در گزینه‌ها وجود دارد.

۷۳- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که مطابق اتحاد چاق و لاغر

$$\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x)$$

$$= (\sin x + \cos x)(1 - \frac{1}{2} \sin 2x)$$

بنابراین معادله مورد نظر به صورت زیر است:

$$(\sin x + \cos x)(1 - \frac{1}{2} \sin 2x) = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$(\sin x + \cos x - 1)(1 - \frac{1}{2} \sin 2x) = 0$$

$$\begin{cases} \sin x + \cos x - 1 = 0 \\ 1 - \frac{1}{2} \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x = 2 \end{cases}$$

(غ.ق.ق.)

معادله $\sin x + \cos x - 1 = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ جواب‌های $x=0$ و $x=\frac{\pi}{2}$ را دارد که مجموع آن‌ها برابر $\frac{5\pi}{2}$ است.

۷۴- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow 2} (2x-5) = -1$. بنابراین اولاً

باید $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + ax + b)$ برابر صفر باشد ثانیاً باید علامت عبارت

$x^2 + ax + b$ در یک همسایگی نقطه $x=2$ مثبت باشد. پس

باید برابر $(x-2)^2$ باشد، در نتیجه

$$x^2 + ax + b = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow a = -4, b = 4$$

پس $a+b=0$.

۶۸- گزینه ۴ توجه کنید که اگر $g(x) = x^2 - x$ ، آنگاه $g(1)=0$ و $g(2)=2$. بنابراین

$$f(x) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{Ax+B}, \quad f(1)=0, \quad f(2)=2$$

بنابراین

$$f(1) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{A+B} = 0 \Rightarrow 2^{-A-B} = 2 \Rightarrow -A-B=1 \Rightarrow A+B=-1$$

$$f(2) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2A+B} = 2 \Rightarrow 2^{-2A-B} = 4 \Rightarrow -2A-B=2 \Rightarrow 2A+B=-2$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases} A+B=-1 \\ 2A+B=-2 \end{cases}$ نتیجه می‌شود $A=-1$ و $B=0$. در نتیجه

$$f(x) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} \Rightarrow f(3) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 6$$

۶۹- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\tan \frac{11\pi}{4} = \tan \left(3\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\sin \frac{15\pi}{4} = \sin \left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \frac{13\pi}{4} = \cos \left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین

$$\tan \frac{11\pi}{4} + \sin \frac{15\pi}{4} \cos \frac{13\pi}{4} = -1 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

۷۰- گزینه ۳ راه حل اول

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin a \cos x + \cos a \sin x - \sin a}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin a (\cos x - 1)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos a \sin x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin a \sin^2 \frac{x}{2}}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos a \sin x}{x}$$

$$= -\sin a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} + \cos a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$= -\sin a \times 0 + \cos a \times 1 = \cos a$$

راه حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin a \cos x + \cos a \sin x - \sin a}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+a) - \sin a}{x}$$

اکنون اگر فرض کنیم $f(x) = \sin x$ ، مقدار حد فوق برابر مقدار مشتق تابع f در نقطه $x=a$ یعنی $\cos a$ است.

راه حل سوم اگر قرار دهیم $a=0$ ، حد مورد نظر به صورت زیر در می‌آید

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 0 \cos x + \cos 0 \sin x - \sin 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

اکنون در گزینه‌ها $a=0$ را قرار می‌دهیم و فقط گزینه (۳) به صورت $\cos 0=1$ در می‌آید.

راه حل چهارم از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin a \cos x + \cos a \sin x - \sin a}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin a \sin x + \cos a \cos x - 0}{1} = \cos a$$

۷۵- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$g(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow \begin{cases} g(1) = 2 \\ g'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow g'(1) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{4}{3} \Rightarrow f'(2) = \frac{4}{3}$$

بنابراین

$$(f \circ g)'(1) = g'(1)f'(g(1)) = g'(1)f'(2) = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 2$$

۷۶- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که در یک همسایگی چپ نقطه $x=2$

علامت عبارت $2x - x^2$ منفی است، بنابراین $|2x - x^2| = 2x - x^2$ در

واقع تابع f به صورت زیر است

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \leq 0 \\ 2x - x^2 & 0 < x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2 + ax + b & x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & x < 0 \\ 2 - 2x & 0 < x < 2 \\ x + a & x > 2 \end{cases}$$

چون تابع f در نقطه $x=2$ مشتق پذیر است، پس $f'_+(2) = f'_-(2)$ بنابراین

$$2 + a = 2 - 4 \Rightarrow a = -4$$

از طرف دیگر تابع f در نقطه $x=2$ پیوسته است. پس

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$$

بنابراین

$$2 + 2a + b = 4 - 4 \Rightarrow b = -2a - 2 = 6$$

در نتیجه $a + b = 2$

۷۷- گزینه ۴ آنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[0, 2]$ برابر است با

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{12 - 2}{2} = 5$$

آنگ تغییر لحظه ای تابع f در $x = \frac{3}{4}$ برابر است با $f'(\frac{3}{4})$:

$$f'(x) = \sqrt{4x+1} + \frac{4(x+2)}{2\sqrt{4x+1}} \Rightarrow f'(\frac{3}{4}) = 2 + \frac{11}{4} = \frac{19}{4}$$

بنابراین آنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[0, 2]$ از آنگ لحظه ای آن در

$$x = \frac{3}{4} \text{ به اندازه } \frac{1}{4} \text{ بیشتر است.}$$

۷۸- گزینه ۱ با توجه به نمودار تابع f ، در نقطه $x=1$ جهت تقعر

نمودار تغییر می کند و خط مماس بر نمودار افقی است. بنابراین

$$f'(1) = f''(1) = 0$$

$$f(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$$

$$f'(x) = 12x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 36x^2 + 6ax + 2b$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow 12 + 3a + 2b + c = 0$$

$$f''(1) = 0 \Rightarrow 36 + 6a + 2b = 0$$

چون طبق نمودار، $f'(0) = 0$ پس $c = 0$. بنابراین از حل دستگاه معادلات

به دست آمده نتیجه می شود $a = -8$ و $b = 6$.

۷۹- گزینه ۳ خط $x=1$ مجانب قائم نمودار تابع f است. اکنون توجه

کنید که

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x+2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2+2x)}{(x-1)^4}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2(x-1)(x^2 - 1 - x^2 - 2x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}, x = 1 \text{ (غ.ق.)}$$

بنابراین $x = -\frac{1}{2}$ طول تنها نقطه بحرانی تابع f است:

$$f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{3}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$$

بنابراین مینیمم مطلق تابع f روی هر دو بازه $(-\infty, 1)$ و $(1, +\infty)$ برابر $-\frac{1}{3}$

است. فاصله نقطه $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$ از مجانب قائم نمودار تابع f برابر $\frac{3}{4}$ است.

۸۰- گزینه ۱ بازه $(x+1, 2x-1)$ یک همسایگی عدد ۳ است.

بنابراین بایستی

$$x+1 < 3 < 2x-1$$

مجموعه جواب های نامعادله های $x+1 < 3$ و $3 < 2x-1$ را به دست می آوریم:

$$x+1 < 3 \Rightarrow x < 2 \quad (1)$$

$$3 < 2x-1 \Rightarrow x > 2 \quad (2)$$

اشتراک مجموعه جواب های نامعادله های (۱) و (۲) برابر تهی است.

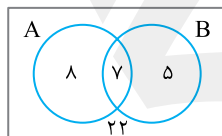
۸۱- گزینه ۴ اگر گروه آزمایشگاهی را A و گروه فوتبال را B بنامیم.

آن گاه $n(A) = 15$ ، $n(B) = 12$ و $n(A \cap B) = 7$ بنابراین

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 15 + 12 - 7 = 20$$

بنابراین $22 - 20 = 2$ نفر عضو هیچ یک از دو گروه نیستند. نمودار زیر تعداد

افراد هر گروه را نشان می دهد.



۸۲- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$A = \sqrt[5]{9\sqrt{3}}(12)^{-1/5} = 3^{2/5} \times 3^{1/5} \times 3^{-3/5} = 3^{-1} \times 2^{-3} = \frac{1}{24}$$

$$(1+A^{-1})^{1/2} = (1+24)^{1/2} = \sqrt{25} = 5 \text{ بنابراین}$$

۸۳- گزینه ۲ برای اینکه سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ همواره

پایین محور x قرار بگیرد، باید $a < 0$ و $b^2 - 4ac < 0$. بنابراین در سهمی به

معادله $y = (1-m)x^2 + 2(m-3)x - 1$ باید شرایط زیر برقرار باشد:

$$1-m < 0 \Rightarrow m > 1$$

$$4(m-3)^2 + 4(1-m) < 0 \Rightarrow m^2 - 7m + 1 < 0$$

$$(m-2)(m-5) < 0 \Rightarrow 2 < m < 5$$

بنابراین اگر $2 < m < 5$ ، آن گاه سهمی مورد نظر همواره پایین محور x ها

قرار دارد.

۸۹- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\tan \frac{17\pi}{6} = \tan(3\pi - \frac{\pi}{6}) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin \frac{11\pi}{3} = \sin(4\pi - \frac{\pi}{3}) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{10\pi}{3} = \cos(3\pi + \frac{\pi}{3}) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

بنابراین

$$\tan \frac{17\pi}{6} \sin \frac{11\pi}{3} + \cos \frac{10\pi}{3} = (-\frac{\sqrt{3}}{3})(-\frac{\sqrt{3}}{2}) - \frac{1}{2} = \frac{3}{6} - \frac{1}{2} = 0$$

۹۰- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که در یک همسایگی راست $x=1$ تابع

$$y = [x] \text{ با تابع } y=1 \text{ برابر است. پس}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin^2 \pi x}{[x] + \cos \pi x} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \cos^2 \pi x}{1 + \cos \pi x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1 - \cos \pi x)(1 + \cos \pi x)}{1 + \cos \pi x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 - \cos \pi x) = 1 - \cos \pi = 2 \end{aligned}$$

۹۱- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(1) = a+b, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax+b) = a+b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x[x] = \lim_{x \rightarrow 1^-} 0 = 0$$

تابع f در $x=1$ پیوسته است، پس $a+b=0$. از طرف دیگر

$$f(-1) = -a+b, \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (ax+b) = -a+b$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} x[x] = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (-x) = 1$$

تابع f در $x=-1$ پیوسته است، پس $-a+b=1$. از حل دستگاه معادلات

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -a+b=1 \end{cases} \text{ نتیجه می شود } a = -\frac{1}{2} \text{ و } b = \frac{1}{2}$$

۹۲- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید

$$\begin{aligned} f(x) &= \tan(\pi x) - \cot(\pi x) \\ &= \frac{\sin(\pi x)}{\cos(\pi x)} - \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \frac{\sin^2(\pi x) - \cos^2(\pi x)}{\sin(\pi x) \cos(\pi x)} \\ &= \frac{-\cos(2\pi x)}{\frac{1}{2} \sin(2\pi x)} = -2 \cot(2\pi x) = -2 \tan(\frac{\pi}{2} - 2\pi x) \end{aligned}$$

پس دوره تناوب تابع برابر $\frac{\pi}{|-2\pi|} = \frac{1}{2}$ است.

۹۳- گزینه ۴ معادله را به صورت زیر ساده می کنیم:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2} \Rightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = \pm 1$$

بنابراین جوابهای معادله به صورت زیر هستند

$$2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

جوابهای واقع در بازه $[0, 2\pi]$ عبارتند از $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{2}$

که مجموع آنها برابر 4π است.

۸۴- گزینه ۱ اگر نمودار تابع $y = x^2 - x - 3$ را دو واحد به طرف

x های منفی سپس ۳ واحد به طرف y های منفی انتقال دهیم، نمودار تابع

$f(x) = (x+2)^2 - (x+2) - 3 - 9 = x^2 + 3x - 10 = (x+5)(x-2)$ به دست می آید. ساده شده ضابطه تابع f

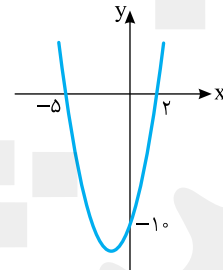
به صورت $f(x) = x^2 + 3x - 10 = (x+5)(x-2)$ است. نمودار تابع f به

صورت زیر است و واضح است که در بازه $(-5, 2)$ نمودار تابع f زیر محور

x ها قرار دارد. توجه کنید که اگر نمودار تابع f زیر محور x ها قرار داشته باشد،

آن گاه $f(x) < 0$ بنابرین

$$(x+5)(x-2) < 0 \Rightarrow -5 < x < 2$$



۸۵- گزینه ۱ مجموع را به صورت زیر می نویسیم:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2 \times 5} + \frac{1}{5 \times 8} + \frac{1}{8 \times 11} + \dots + \frac{1}{17 \times 20} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{17} - \frac{1}{20} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{20} \right) = \frac{3}{20} = 0.15 \end{aligned}$$

۸۶- گزینه ۲ اگر $x \geq \frac{1}{2}$ آن گاه معادله به صورت $2x - 1 + x + 2 = 3$

در می آید که جواب آن $x = \frac{2}{3}$ است. اگر $-2 < x < \frac{1}{2}$ ، آن گاه معادله به

صورت $2x - 1 + x + 2 = 3$ در می آید که $x = 0$ جواب آن است. اگر

$x \leq -2$ ، آن گاه معادله به صورت $-2x + 1 - x - 2 = 3$ در می آید که

$x = -\frac{4}{3}$ جواب آن است ولی قابل قبول نیست. بنابراین جوابهای معادله

$x = 0$ و $x = \frac{2}{3}$ هستند که مجموع آنها برابر $\frac{2}{3}$ است.

۸۷- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$g^{-1} = \{(3, 2), (2, 4), (6, 5), (1, 3)\}$$

$$f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$$

بنابراین

$$g^{-1} \circ f = \{(1, 4), (4, 5)\} \Rightarrow (g^{-1} \circ f) - f = \{(1, 2), (4, -1)\}$$

بنابراین برد تابع $(g^{-1} \circ f) - f$ مجموعه $\{2, -1\}$ است.

۸۸- گزینه ۳ نمودار تابع $f(x) = 3^{Ax+B}$ نمودار تابع $y = x^2$ را در

دو نقطه به طولهای ۱ و ۳ قطع می کند. پس نمودار تابع f از نقاط $(1, 1)$ و

$(3, 9)$ عبور می کند.

بنابراین

$$f(1) = 1 \Rightarrow 3^{A+B} = 1 \Rightarrow A+B = 0$$

$$f(3) = 9 \Rightarrow 3^{3A+B} = 9 \Rightarrow 3A+B = 2$$

از حل دستگاه معادلات بالا نتیجه می شود $A = 1$ و $B = -1$ و در نتیجه

$f(x) = 3^{x-1}$. پس عرض نقطه تلاقی نمودار تابع f با محور y ها برابر

$\frac{1}{3}$ است.

۹۷- گزینه ۲ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[0, 4]$ برابر است با

$$\frac{f(4)-f(0)}{4-0} = \frac{(3+\frac{1}{4})-(1+1)}{4} = \frac{3}{10}$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در $x = \frac{3}{4}$ برابر $f'(\frac{3}{4})$ است:

$$f(x) = \sqrt{2x+1} + \frac{1}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$f'(\frac{3}{4}) = \frac{1}{2} - \frac{4}{25} = \frac{17}{50}$$

بنابراین اختلاف $\frac{3}{50}$ و $\frac{17}{50}$ مورد سؤال است که برابر 4% است.

۹۸- گزینه ۴ با توجه به نمودار تابع f معلوم است که این تابع فقط در

$x=3$ اکسترمم نسبی دارد. از طرف دیگر،

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2$$

$$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx = x(4x^2 + 3ax + 2b)$$

علامت $f'(x)$ در $x=0$ نباید تغییر کند و فقط در $x=3$ باید تغییر کند. بنابراین باید $b=0$ و

$$f'(x) = x(4x^2 + 3ax) = x^2(4x + 3a), \quad f'(3) = 0 \Rightarrow a = -4$$

بنابراین

$$f(x) = x^4 - 4x^3 \Rightarrow f(-2) = 48$$

۹۹- گزینه ۳ خط $y=-1$ مجانب افقی نمودار تابع f است. زیرا

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

اکنون نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f را معین می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{2x-x^2}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2-2x)(x+1)^2 - 2x(x+1)(2x-x^2)}{(x+1)^4}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2(x+1)(1-x^2-2x+x^2) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, x = -1 \text{ (غ.ق.)}$$

بنابراین $x = \frac{1}{2}$ طول تنها نقطهٔ بحرانی تابع f است. پس باید طول نقطهٔ

ماکزیمم نسبی تابع هم باشد. فاصلهٔ نقطهٔ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ از خط $y=-1$ مورد سؤال است که برابر $\frac{4}{3}$ است.

۱۰۰- گزینه ۴ ابتدا دامنهٔ تابع $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x-1}$ را به دست می‌آوریم:

$$x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1, 9-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 9 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3, D_f = [-3, 1) \cup (1, 3]$$

برای این که بازهٔ $(k-2, 3k+2)$ زیرمجموعهٔ دامنهٔ تابع f باشد یا باید زیرمجموعهٔ $[-3, 1)$ باشد یا باید زیرمجموعهٔ $(1, 3]$ باشد. پس دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول $(k-2, 3k+2) \subseteq [-3, 1)$. در این حالت باید $k-2 \geq -3$ و $3k+2 < 1$ پس $-\frac{1}{3} \leq k < -\frac{1}{3}$.

حالت دوم $(k-2, 3k+2) \subseteq (1, 3]$. در این حالت باید $k-2 > 1$ و $3k+2 \leq 3$

که در گزینهٔ (۴) بازهٔ $[-1, -\frac{1}{3})$ آمده است.

۹۴- گزینه ۱ خط $y=2$ مجانب افقی نمودار تابع f است. زیرا

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

از طرف دیگر،

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 2}{x^2 + 2x} = 2 - \frac{5x+2}{x^2+2x} = 2 - \frac{5x+2}{(x+1)^2-1}$$

اگر $x \rightarrow +\infty$ ، آن‌گاه علامت عبارت $\frac{5x+2}{(x+1)^2-1}$ مثبت است و در نتیجه

$f(x) < 2$. اگر $x \rightarrow -\infty$ ، آن‌گاه علامت عبارت $\frac{5x+2}{(x+1)^2-1}$ منفی است و

در نتیجه $f(x) > 2$. بنابراین نمودار تابع f در $+\infty$ پایین مجانب افقی آن و در $-\infty$ بالای مجانب افقی آن قرار دارد.

۹۵- گزینه ۴ خط $y=3x-5$ در نقطهٔ $(2, 1)$ بر نمودار تابع y

مماس است. پس $g(2)=1$ و $g'(2)=3$. از طرف دیگر،

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{2x-2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{2} f'(1) = \frac{2}{3} \Rightarrow f'(1) = \frac{4}{3}$$

بنابراین

$$(f \circ g)'(2) = g'(2)f'(g(2)) = g'(2)f'(1) = 3 \times \frac{4}{3} = 4$$

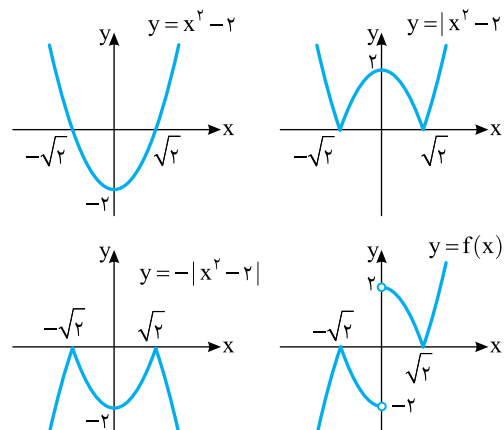
۹۶- گزینه ۳ **راه حل اول** تابع f در $x=0$ تعریف نشده پس در این

نقطه مشتق‌پذیر نیست. عبارت x^2-2x در ضابطهٔ f داخل قدرمطلق قرار دارد و این عبارت در $x=0$ و $x=\pm\sqrt{2}$ برابر صفر می‌شود و در نتیجه تابع f در این نقاط مشتق‌پذیر نیست. بنابراین در سه نقطهٔ تابع f مشتق ندارد.

راه حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \frac{|x^3-2x|}{x} = \frac{|x||x^2-2|}{x} = \begin{cases} |x^2-2| & x > 0 \\ -|x^2-2| & x < 0 \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است. واضح است که در $x=\sqrt{2}$ ، $x=0$ و $x=-\sqrt{2}$ تابع f مشتق‌پذیر نیست.



راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که عدد ۱ در نامعادله صدق می‌کند، زیرا $1 < \frac{1+1}{2-1} < 3$.

همچنین عدد $\frac{3}{2}$ در نامعادله صدق می‌کند $\frac{3}{2} < \frac{5}{4} < 3$ این اعداد فقط عضو بازه گزینه (۴) هستند.

راه‌حل سوم نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{x+1}{2x-1} < 3 \Rightarrow \frac{x+1-6x+3}{2x-1} < 0 \Rightarrow \frac{-5x+4}{2x-1} < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, \frac{4}{5}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$$

$$\frac{x+1}{2x-1} > 1 \Rightarrow \frac{x+1-2x+1}{2x-1} > 0 \Rightarrow \frac{-x+2}{2x-1} > 0 \Rightarrow x \in (\frac{1}{2}, 2)$$

از اشتراک دو مجموعه جواب به دست آمده نتیجه می‌شود

$$x \in (\frac{4}{5}, 2) = (0.8, 2)$$

۶- گزینه ۱ **راه‌حل اول** مختصات نقاط را در معادله سهمی قرار می‌دهیم:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow 0+0+c=5 \Rightarrow c=5, \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow a+b+c=1 \Rightarrow a+b=6$$

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow 4a-2b+c=5 \Rightarrow 4a-2b=0 \Rightarrow b=2a$$

$$\begin{cases} a+b=6 \\ b=2a \end{cases} \text{ از حل دستگاه معادلات نتیجه می‌شود } a=2 \text{ و } b=4. \text{ پس معادله}$$

سهمی به صورت $y = 2x^2 + 4x + 5$ است که از نقطه $(-1, 3)$ می‌گذرد.

راه‌حل دوم چون سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ از نقاط $(0, 5)$ ،

$(-2, 5)$ و $(1, 1)$ می‌گذرد، پس سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c - 5$

از نقاط $(0, 0)$ ، $(-2, 0)$ و $(1, 6)$ می‌گذرد و معادله سهمی‌ای که از این نقاط

می‌گذرد به صورت $y = a(x-0)(x+2) = a(x^2 + 2x)$ است. این سهمی از

نقطه $(1, 6)$ می‌گذرد. پس $6 = a(1+2) \Rightarrow a = 2$

بنابراین معادله سهمی اولیه به صورت $y = 2x^2 + 4x + 5$ است که از نقطه

$(-1, 3)$ می‌گذرد.

راه‌حل سوم چون عرض نقاط $(-2, 5)$ و $(0, 5)$ یکسان است، پس طول رأس

این سهمی برابر ۱- است. بنابراین معادله سهمی به شکل کلی $y = m(x+1)^2 + n$

است. این سهمی از نقاط $(0, 5)$ و $(1, 1)$ می‌گذرد. پس

$$(0, 5) \in \text{سهمی} \Rightarrow m+n=5$$

$$(1, 1) \in \text{سهمی} \Rightarrow 4m+n=1$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases} m+n=5 \\ 4m+n=1 \end{cases}$ به دست می‌آید $m=2$ و $n=3$. در نتیجه

معادله سهمی به صورت $y = 2(x+1)^2 + 3$ است که از نقطه $(-1, 3)$ می‌گذرد.

۱- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{5-\sqrt{6}} = \frac{(2\sqrt{2}+3\sqrt{3})(5+\sqrt{6})}{(5-\sqrt{6})(5+\sqrt{6})} = \frac{10\sqrt{2}+4\sqrt{3}+15\sqrt{3}+9\sqrt{2}}{25-6} = \frac{19\sqrt{2}+19\sqrt{3}}{19} = \sqrt{2}+\sqrt{3}$$

از طرف دیگر،

$$2(\sqrt{9}-1)^{-1} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \sqrt{3}+1$$

بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با $\sqrt{2}+\sqrt{3} - (\sqrt{3}+1) = \sqrt{2}-1$

۲- گزینه ۳ اعداد مربع کامل به صورت زیر هستند:

$$1^2, 2^2, 3^2, \dots, 8^2, 9^2, \dots$$

بنابراین آخرین عدد دسته هشتم عدد 8^2 و آخرین عدد دسته نهم عدد 9^2

است. همچنین اولین عدد دسته نهم 8^2+1 است. پس واسطه حسابی بین

$$\frac{8^2+1+9^2}{2} = 73 \text{ را باید حساب کنیم که برابر است با}$$

۳- گزینه ۲ چون چندجمله‌ای $p(x)$ بر x^2-1 بخش‌پذیر است،

پس بر $x-1$ و $x+1$ هم بخش‌پذیر است. یعنی $p(-1)=p(1)=0$. از طرف

دیگر باقی‌مانده تقسیم $Q(x)$ بر $x-2$ برابر $Q(2)$ است. بنابراین

$$Q(x) = p(x-1) + p(1-x) \Rightarrow Q(2) = p(1) + p(-1) = 0$$

توجه در صورت سؤال نوشته شده است «حاصل تقسیم $Q(x)$ بر $x-2$ که

معلوم نیست چیه! ولی احتمالاً منظور همین «باقی‌مانده» بوده است.

۴- گزینه ۱ مجموع جواب‌ها و حاصل ضرب جواب‌ها در معادله

$$0 = (2m-1)x + 2 - m = 3x^2 + \frac{1-2m}{3} \text{ به ترتیب برابر } \frac{2-m}{3} \text{ و } \frac{1-2m}{3} \text{ هستند، پس}$$

$$\frac{1-2m}{3} = \frac{3}{2-m} \Rightarrow (1-2m)(2-m) = 9 \Rightarrow 2m^2 - 5m - 7 = 0$$

$$(m+1)(2m-7) = 0 \Rightarrow m = -1, m = \frac{7}{2}$$

به‌ازای $m = -1$ معادله به صورت $3x^2 - 3x + 3 = 0$ در می‌آید که جواب

ندارد، پس فقط $m = \frac{7}{2}$ قابل قبول است.

۵- گزینه ۴ **راه‌حل اول** نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$1 < \frac{x+1}{2x-1} < 3 \Rightarrow -1 < \frac{x+1}{2x-1} - 2 < 1 \Rightarrow -1 < \frac{-3x+3}{2x-1} < 1$$

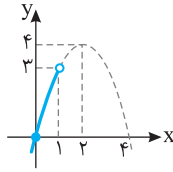
$$\left| \frac{-3x+3}{2x-1} \right| < 1 \Rightarrow |3x-3| < |2x-1|$$

بنابراین نامعادله به صورت زیر حل می‌شود:

$$(3x-3)^2 < (2x-1)^2 \Rightarrow (3x-3)^2 - (2x-1)^2 < 0$$

$$(3x-3+2x-1)(3x-3-2x+1) < 0$$

$$(\Delta x - 4)(x - 2) < 0 \Rightarrow \frac{4}{5} < x < 2 \Rightarrow x \in (0.8, 2)$$



۱۰- گزینه ۳ چون $g(x) = f^{-1}(x)$ پس

$$g(6) + g(12) = f^{-1}(6) + f^{-1}(12)$$

از طرف دیگر، $f(x) = x + \sqrt{x}$ ، $f(4) = 4 + 2 = 6$ و $f(9) = 9 + 3 = 12$ بنابراین $f^{-1}(6) = 4$ و $f^{-1}(12) = 9$ و در نتیجه حاصل عبارت خواسته شده برابر ۱۳ است.

۱۱- گزینه ۲ راه حل اول فرض می‌کنیم نمودار تابع f^{-1} در نقطه $(a, -a)$ که $a > 0$ نیمساز ناحیه چهارم را قطع کند. در این صورت

$$f^{-1}(a) = -a \text{ و در نتیجه } f(-a) = a \text{ بنابراین}$$

$$-a - \frac{2}{-a} = a \Rightarrow 2a = \frac{2}{a} \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = 1$$

راه حل دوم ابتدا تابع وارون f را به دست می‌آوریم:

$$y = x - \frac{2}{x}, \quad x < 0 \Rightarrow y = \frac{x^2 - 2}{x} \Rightarrow xy = x^2 - 2 \Rightarrow x^2 - yx - 2 = 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{y + \sqrt{y^2 + 8}}{2} > 0 \text{ (غ.ق.ق.)} \\ x = \frac{y - \sqrt{y^2 + 8}}{2} \end{cases}$$

بنابراین $f^{-1}(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 8}}{2}$ طول نقطه برخورد نمودار تابع f^{-1} با

نیمساز ناحیه دوم (خط $y = -x$) از حل معادله $f^{-1}(x) = -x$ به دست می‌آید:

$$\frac{x - \sqrt{x^2 + 8}}{2} = -x \Rightarrow \sqrt{x^2 + 8} = 3x \quad (x > 0)$$

$$x^2 + 8 = 9x^2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1, x = -1 \text{ (غ.ق.ق.)}$$

۱۲- گزینه ۱ راه حل اول توجه کنید که

$$\log_4 3 = \frac{\log_2 3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \log_2 3 = \frac{f}{5} \Rightarrow \log_2 3 = \frac{f}{5}$$

$$\log_{12} 6 = \frac{\log_2 6}{\log_2 12} = \frac{\log_2 3 + \log_2 2}{\log_2 3 + 2 \log_2 2} = \frac{\frac{f}{5} + 1}{\frac{f}{5} + 2} = \frac{13}{18} \text{ بنابراین}$$

راه حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$\log_4 3 = 0/8 = \frac{f}{5} \Rightarrow 4^{\frac{f}{5}} = 3 \Rightarrow 4^f = 3^5 \Rightarrow 2^8 = 3^5$$

دقت کنید که این تساوی به صورت تقریبی داده شده است و تساوی درستی نیست.

بنابراین

$$\begin{aligned} \log_{12} 6 &= \log_{12} 3 + \log_{12} 2 = \log_{2^2 \times 3} 3 + \log_{2^2 \times 3} 2 \\ &= \frac{1}{2} \log_{2^2 \times 3} 3 + \frac{1}{2} \log_{2^2 \times 3} 2 = \frac{1}{2} \log_{(2^2 \times 3)^2} 3 + \frac{1}{2} \log_{(2^2 \times 3)^2} 2 \\ &= \frac{1}{2} \log_{3^2 \times 2^4} 3 + \frac{1}{2} \log_{3^2 \times 2^4} 2 = \frac{1}{2} \log_3 3 + \frac{1}{2} \log_2 2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

۷- گزینه ۳ اگر نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را دوازده واحد به راست

ببریم، نمودار تابع $y = \sqrt{x-12}$ به دست می‌آید. اگر این نمودار را دو واحد به بالا انتقال دهیم، نمودار تابع $y = \sqrt{x-12} + 2$ حاصل می‌شود. نقطه برخورد نمودار توابع $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt{x-12} + 2$ مد نظر است که طول آن از حل معادله $f(x) = g(x)$ به دست می‌آید:

$$\sqrt{x} = \sqrt{x-12} + 2 \Rightarrow \sqrt{x} - 2 = \sqrt{x-12} \Rightarrow x + 4 - 4\sqrt{x} = x - 12$$

$$16 = 4\sqrt{x} \Rightarrow 4 = \sqrt{x} \Rightarrow x = 16$$

پس نقطه مورد نظر $A(16, 4)$ است که فاصله آن از مبدأ مختصات برابر $\sqrt{16^2 + 4^2} = 4\sqrt{17}$ است با

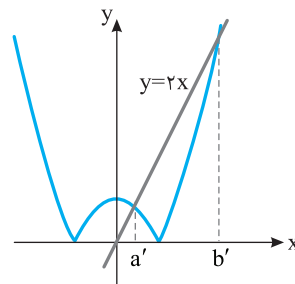
۸- گزینه ۱ نمودار تابع‌های $f(x) = |2x^2 - 4| = 2|x^2 - 2|$ و

$g(x) = 2x$ به صورت زیر است. واضح است که در بازه (a', b') نمودار تابع f زیر نمودار تابع g قرار دارد. پس کافی است نقاط a' و b' را معلوم کنیم که جواب معادله $f(x) = g(x)$ هستند:

$$2|x^2 - 2| = 2x \Rightarrow |x^2 - 2| = x$$

$$x \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2 = x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2, x = -1 \text{ (غ.ق.ق.)} \\ x^2 - 2 = -x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -2 \text{ (غ.ق.ق.)} \end{cases}$$

بنابراین بیشترین مقدار $b-a$ وقتی است که $a = a' = 1$ و $b = b' = 2$ و در نتیجه $b-a = 1$.



۹- گزینه ۲ راه حل اول ابتدا توجه کنید $D_f = D_g = \mathbb{R}$ ، بنابراین

$$D_{g \circ f} = \mathbb{R} \text{ از طرف دیگر،}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = -f^2(x) + 4f(x) = 4 - (f(x) - 2)^2$$

$$= 4 - (2x - [2x] - 2)^2$$

اکنون توجه کنید که

$$0 \leq 2x - [2x] < 1 \Rightarrow -2 \leq 2x - [2x] - 2 < -1$$

$$1 < (2x - [2x] - 2)^2 \leq 4 \Rightarrow -4 \leq -(2x - [2x] - 2)^2 < -1$$

$$0 \leq 4 - (2x - [2x] - 2)^2 < 3 \Rightarrow 0 \leq (g \circ f)(x) < 3$$

بنابراین برد تابع $g \circ f$ بازه $[0, 3)$ است.

راه حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$0 \leq 2x - [2x] < 1 \Rightarrow 0 \leq f(x) < 1$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(t) = -t^2 + 4t, \quad 0 \leq t < 1$$

بنابراین نمودار تابع g به صورت زیر است و در نتیجه $0 \leq g(t) < 3$ یعنی

$$R_{g \circ f} = [0, 3)$$

۱۶- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$y = a + b \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = a + b \cos x$$

پس ماکزیمم تابع برابر $a + |b|$ است که با توجه به شکل برابر ۳ است. از

طرف دیگر نمودار تابع از نقطه $\left(\frac{7\pi}{3}, 0\right)$ عبور می‌کند. پس

$$a + b \cos \frac{7\pi}{3} = 0 \Rightarrow a + b \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow a + b \cos \frac{\pi}{3} = 0$$

$$a + \frac{b}{2} = 0 \Rightarrow a = -\frac{b}{2}$$

$$a + |b| = 3 \Rightarrow -\frac{b}{2} + |b| = 3 \quad \text{بنابراین}$$

با توجه به نمودار تابع واضح است که b مقداری منفی است، پس

$$-\frac{b}{2} - b = 3 \Rightarrow b = -2$$

۱۷- گزینه ۴ حداکثر مقدار و حداقل مقدار تابع $y = a \sin(bx) + c$

به ترتیب برابر $|a| + c$ و $-|a| + c$ است که روی شکل برابر ۱ و -۳ نشان

$$\begin{cases} |a| + c = 1 \\ -|a| + c = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -1 \\ |a| = 2 \end{cases} \quad \text{داده شده است. پس}$$

از طرف دیگر، دوره تناوب تابع برابر $\frac{2\pi}{|b|}$ است که روی شکل برابر

$$\frac{2\pi}{|b|} = 6\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{3} \quad \text{پس} \quad \frac{9\pi}{2} - \left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 6\pi$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{2}{\frac{1}{3}} = 6 \Rightarrow \frac{a}{b} = \pm 6 \quad \text{پس}$$

ولی چون نمودار رسم شده در یک همسایگی راست صفر نزولی است، a و b باید

$$\frac{a}{b} = -6 \quad \text{غیرهم علامت باشند، پس}$$

۱۸- گزینه ۴ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} - x \\ 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi + \pi}{3} \\ x = (2k+1)\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

چون شرط $x \neq k\pi$ قرار داده شده است، پس $x = (2k+1)\pi$ قابل قبول نیست.

۱۹- گزینه ۳ توجه کنید که در یک همسایگی چپ نقطه $x = -2$ تابع

$$y = [x] \quad \text{با تابع} \quad y = -3 \quad \text{برابر است. بنابراین}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{[x] + 3}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{-3 + 3}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} 0 = 0$$

۱۳- گزینه ۲ از نمودار تابع f معلوم است که $f\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$ و

$$f(0) = -2 \quad \text{بنابراین}$$

$$f(x) = -4 + 2^{ax+b} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = -4 + 2^b = -2 \\ f\left(-\frac{1}{3}\right) = -4 + 2^{-\frac{a}{3}+b} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^b = 2 \Rightarrow b = 1 \\ 2^{-\frac{a}{3}+1} = 4 \Rightarrow -\frac{a}{3} + 1 = 2 \Rightarrow a = -3 \end{cases}$$

$$f(x) = -4 + 2^{-3x+1} \Rightarrow f\left(-\frac{5}{3}\right) = -4 + 2^6 = 60 \quad \text{پس}$$

۱۴- گزینه ۴ راه‌حل اول فرض کنید $f^{-1}(2) = a > 0$. در این

$$\frac{2^a + \left(\frac{1}{2}\right)^a}{2} = 2 \Rightarrow 2^a + \frac{1}{2^a} = 4 \quad \text{صورت } f(a) = 2 \text{ و در نتیجه}$$

با فرض $b = 2^a > 0$ معادله به صورت زیر در می‌آید:

$$b + \frac{1}{b} = 4 \Rightarrow b^2 - 4b + 1 = 0 \Rightarrow b = 2 + \sqrt{3}, b = 2 - \sqrt{3} \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

اگر $b = 2 - \sqrt{3}$ ، آن‌گاه $a = \log_2(2 - \sqrt{3}) < 0$ که با توجه به دامنه داده

شده قابل قبول نیست. پس $2^a = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow a = \log_2(2 + \sqrt{3})$

$$\frac{2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2} = f(x) \quad \text{تابع وارون تابع} \quad f(x) = \frac{2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2} \quad \text{با دامنه } [0, +\infty) \text{ را}$$

$$y = \frac{2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2} \Rightarrow 2y = 2^x + \frac{1}{2^x} \quad \text{به دست می‌آوریم:}$$

اگر فرض کنیم $t = 2^x > 0$ ، آن‌گاه

$$2y = t + \frac{1}{t} \Rightarrow t^2 - 2yt + 1 = 0 \Rightarrow t = y \pm \sqrt{y^2 - 1} \Rightarrow 2^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

چون $x \geq 0$ ، پس فقط $y + \sqrt{y^2 - 1}$ قابل قبول است. بنابراین

$$x = \log_2(y + \sqrt{y^2 - 1}) \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_2(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

در نتیجه $f^{-1}(2) = \log_2(2 + \sqrt{3})$

۱۵- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\tan 300^\circ = \tan(360^\circ - 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 480^\circ = \tan(450^\circ + 30^\circ) = \tan(90^\circ + 30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sin 840^\circ = \sin(720^\circ + 120^\circ) = \sin(180^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} & \tan 300^\circ \cos 210^\circ + \tan 480^\circ \sin 840^\circ \\ &= (-\sqrt{3})\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-\sqrt{3})\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3 \end{aligned}$$

۲۰- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax - \sqrt[n]{x^n - 1}}{x^n - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{x^n} = \frac{1}{6} \Rightarrow \begin{cases} n=1 \\ a=\frac{2}{3} \end{cases}$$

بنابراین راه حل اول

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{2}{3}x - \sqrt[3]{x^3 - 1}}{4x - 12} = \frac{1}{12} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 3\sqrt[3]{x^3 - 1}}{x - 3} \\ &= \frac{1}{12} \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2x^3 - 3\sqrt[3]{(x^3 - 1)^3}}{x^3 - 3} \right) \times \frac{1}{4x^2 + 6x\sqrt[3]{x^3 - 1} + 9\sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}} \\ &= \frac{1}{12} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(2x^2 + 3x + 9)}{x-3} \\ &\quad \times \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{4x^2 + 6x\sqrt[3]{x^3 - 1} + 9\sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}} \\ &= \frac{1}{12} \lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 + 3x + 9) \times \frac{1}{36 + 36 + 36} \\ &= \frac{1}{12} \times (2 \times 9 + 3 \times 3 + 9) \times \frac{1}{36} = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

راه حل دوم به کمک قاعده هوییتال مقدار حد خواسته شده را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{2}{3}x - \sqrt[3]{x^3 - 1}}{4x - 12} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{2}{3} - \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}}}{4} \\ &= \frac{\frac{2}{3} - \frac{2 \times 3}{3 \times 4}}{4} = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

۲۱- گزینه ۳ چون تابع f در نقطه x = -2 مشتق پذیر است، پس در

این نقطه پیوسته نیز هست. بنابراین

$$\begin{aligned} f'_-(-2) &= f'_+(-2), \quad f(-2) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) \\ f(x) &= \begin{cases} \sqrt{5-2x} & x \leq -2 \\ -\frac{1}{3}x^2 + bx + c & x > -2 \end{cases}, \quad f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{5-2x}} & x \leq -2 \\ -x + b & x > -2 \end{cases} \\ \begin{cases} f'_-(-2) = -\frac{1}{\sqrt{5+4}} = -\frac{1}{3} \\ f'_+(-2) = -(-2) + b = b+2 \end{cases} &\Rightarrow b+2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow b = -\frac{7}{3} \\ \begin{cases} f(-2) = \sqrt{5+4} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (-\frac{1}{3}x^2 + bx + c) = -2-2b+c = c+\frac{\lambda}{3} \end{cases} \\ c+\frac{\lambda}{3} = 3 \Rightarrow c = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

۲۲- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x}}{x^2 - x} \right)^3 = \frac{x^3 + 2x}{(x^2 - x)^3} = \frac{x(x+2)}{x^2(x-1)^3} = \frac{x+2}{x^2(x-1)^3} \\ f'(x) &= \frac{x^2(x-1)^3 - (2x(x-1)^3 + 3(x-1)^2 x^2)(x+2)}{(x^2(x-1)^3)^2} \\ \text{بنابراین} \\ f'(-2) &= \frac{4 \times 1^3 - (4 \times 1^3 + 3 \times 1^2 \times 4)(-2)}{(4 \times 1^3)^2} = -\frac{15}{4} \end{aligned}$$

در نتیجه

۲۳- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = x + \sqrt{4x - x^2} \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}} = \frac{\sqrt{4x-x^2} + 2-x}{\sqrt{4x-x^2}}$$

واضح است که $x=0$ و $x=4$ نقاط بحرانی تابع اند ولی چون تابع f در یک همسایگی آنها تعریف نمی شود، پس این نقاط اکسترمم نسبی تابع نیستند. بنابراین باید معادله $f'(x)=0$ را حل کنیم تا طول نقاط اکسترمم نسبی به دست آید:

$$\sqrt{4x-x^2} + 2 - x = 0 \Rightarrow \sqrt{4x-x^2} = x-2, \quad x > 2$$

$$4x - x^2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow 2x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2 + \sqrt{2}, x = 2 - \sqrt{2} \quad (\text{غ.ق.ی.})$$

بنابراین نقطه $A(2+\sqrt{2}, 2+2\sqrt{2})$ نقطه اکسترمم (ماکزیمم) نسبی تابع f است

که فاصله آن از نیمساز ناحیه اول برابر است با $\frac{|2+2\sqrt{2} - (2+\sqrt{2})|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$

۲۴- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $x^2 + y^2 = 1$ پس $y^2 = 1 - x^2$.

اگر مثلث را حول ضلع AC دوران دهیم، مخروطی به دست می آید که شعاع قاعده

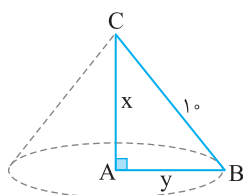
آن برابر y و ارتفاع آن برابر x است، پس حجم حاصل برابر $V = \frac{\pi}{3} y^2 x$ خواهدبود. بنابراین می خواهیم حداکثر مقدار تابع $V(x) = \frac{\pi}{3} x(1-x^2)$ حاصل شود.

$$V(x) = \frac{\pi}{3} (1 \cdot x - x^3) \Rightarrow V'(x) = \frac{\pi}{3} (1 - 3x^2)$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow y^2 = 1 - \frac{1}{3} \Rightarrow y = \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{3}}}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = \sqrt{2}$$

بنابراین



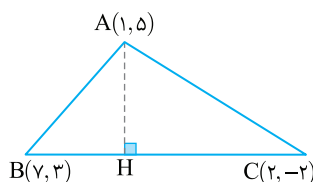
۲۵- گزینه ۴ ابتدا معادله خط BC را به دست می آوریم:

$$m_{BC} = \frac{3 - (-2)}{7 - 2} = 1$$

$$y - y_B = m_{BC}(x - x_B) \Rightarrow y - 3 = 1 \times (x - 7)$$

پس معادله خط BC به صورت $x - y - 4 = 0$ است. طول ارتفاع AH برابر فاصله

$$\text{نقطه A از خط BC} = \frac{|1 - 5 - 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$



راه حل دوم توجه کنید که به ازای $m = -5$ معادله به صورت

$$2x^2 - 5x + 1 = 0 \text{ در می‌آید که به وضوح دو جواب مثبت دارد چون}$$

$$\Delta = 17 > 0, \frac{c}{a} = \frac{1}{2} > 0 \text{ و } -\frac{b}{a} = \frac{5}{2} > 0. \text{ پس گزینه‌های (۱) و (۲) جواب}$$

نیستند. از طرف دیگر به ازای $m = -1$ معادله به صورت

$$2x^2 - x + 5 = 0 \text{ در می‌آید که جواب ندارد، زیرا } \Delta = -39 < 0. \text{ پس گزینه (۳) هم جواب}$$

نیست و گزینه (۴) جواب است.

۳- گزینه ۳ **راه حل اول** نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{2x-1}{x+1} < 3 \Rightarrow \frac{2x-1-3x-3}{x+1} < 0 \Rightarrow \frac{x+4}{x+1} > 0$$

$$x \in (-\infty, -4) \cup (-1, +\infty) \quad (۱)$$

$$\frac{2x-1}{x+1} > -1 \Rightarrow \frac{2x-1+x+1}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{3x}{x+1} > 0$$

$$x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty) \quad (۲)$$

از اشتراک (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$x \in (-\infty, -4) \cup (0, +\infty) = \mathbb{R} - [-4, 0]$$

راه حل دوم نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$-1 < \frac{2x-1}{x+1} < 3 \Rightarrow -2 < \frac{2x-1}{x+1} - 1 < 2 \Rightarrow -2 < \frac{x-2}{x+1} < 2$$

$$\left| \frac{x-2}{x+1} \right| < 2 \Rightarrow |x-2| < 2|x+1| \Rightarrow x^2 - 4x + 4 < 4x^2 + 8x + 4$$

$$x^2 + 4x > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$$

راه حل سوم واضح است که $x = 0$ در نامعادله صدق نمی‌کند، پس گزینه (۴)

جواب نیست. از طرف دیگر، $x = -5$ در نامعادله صدق می‌کند، پس

گزینه‌های (۱) و (۲) جواب درست نیستند، بنابراین گزینه (۳) جواب است.

۳۱- گزینه ۲ چون رأس سهمی نقطه $(-1, 9)$ است، پس معادله آن

به صورت $y = a(x+1)^2 + 9$ است. این سهمی از نقطه $(3, 1)$ می‌گذرد، پس

$$1 = a(3+1)^2 + 9 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

پس معادله سهمی به صورت $y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 9$ است که از نقطه $(5, -9)$

می‌گذرد:

$$-\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1)^2 + 9 = -18 + 9 = -9$$

۳۲- گزینه ۱ اگر نمودار تابع $y = x^2 - 2x$, $(x > 1)$ را نسبت به محور x

قرینه کنیم، نمودار تابع $y = -x^2 + 2x$ به دست می‌آید. اگر نمودار اخیر را شانه زده

واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $y = -x^2 + 2x + 16$ به دست می‌آید. نقطه

برخورد نمودار تابع اخیر و نمودار تابع اولیه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x^2 - 2x = -x^2 + 2x + 16 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x-4)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 4, x = -2 \text{ (غ.ق.)}$$

بنابراین باید فاصله نقطه $A(4, 8)$ از مبدأ مختصات را پیدا کنیم که برابر است با

$$OA = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$$

۲۶- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{\sqrt{27}-1}{4+\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}-1}{4+\sqrt{3}} \times \frac{4-\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}-9-4+\sqrt{3}}{16-3} = \frac{13\sqrt{3}-13}{13} = \sqrt{3}-1$$

همچنین

$$(2-\sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3}$$

بنابراین

$$\frac{\sqrt{27}-1}{4+\sqrt{3}} + (2-\sqrt{3})^{-1} = \sqrt{3}-1+2+\sqrt{3} = 2\sqrt{3}+1$$

۲۷- گزینه ۴ جملات سوم، هفتم و شانزدهم دنباله حسابی را به

ترتیب a , $a+4d$ و $a+13d$ در نظر می‌گیریم. چون این اعداد جملات

متوالی یک دنباله هندسی‌اند، پس

$$a(a+13d) = (a+4d)^2 \Rightarrow a^2 + 13ad = a^2 + 8ad + 16d^2$$

$$5ad = 16d^2 \Rightarrow a = \frac{16}{5}d$$

(توجه کنید که $d \neq 0$ ، چون در غیر این صورت، $q = 1$ که در گزینه‌ها وجود

ندارد.) بنابراین قدرنسبت دنباله هندسی برابر است با

$$r = \frac{a+4d}{a} = \frac{\frac{16}{5}d+4d}{\frac{16}{5}d} = \frac{36d}{16d} = \frac{9}{4}$$

۲۸- گزینه ۱ چون باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $x-4$ و $x+2$ به

ترتیب ۳ و ۱ است، پس $p(4) = 3$ و $p(-2) = 1$. باقی‌مانده تقسیم

چندجمله‌ای $A(x) = p(x^2) + 4p(-x)$ بر $x-2$ برابر $A(2)$ است و

برابر است با

$$A(2) = p(4) + 4p(-2) = 3 + 4 \times 1 = 7$$

۲۹- گزینه ۴ **راه حل اول** چون معادله دو جواب مثبت دارد، پس

شرایط $\Delta > 0$ ، $\frac{c}{a} > 0$ و $-\frac{b}{a} > 0$ برقرار هستند. در اینجا $a = 2$ ، $b = m$ و

$c = m+6$ پس

$$\Delta = b^2 - 4ac = m^2 - 4 \times 2(m+6) > 0 \Rightarrow m^2 - 8m - 48 > 0$$

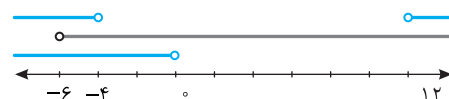
$$(m-12)(m+4) > 0 \Rightarrow m > 12 \text{ یا } m < -4 \quad (۱)$$

$$\frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{m+6}{2} > 0 \Rightarrow m > -6 \quad (۲)$$

$$-\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow -\frac{m}{2} > 0 \Rightarrow m < 0 \quad (۳)$$

با توجه به شکل زیر، اشتراک مجموعه جواب‌های (۱)، (۲) و (۳) به صورت

$m \in (-6, -4)$ است.



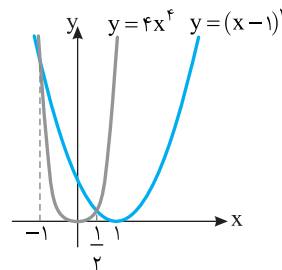
۳۳- گزینه ۲

در نقاطی که طول آن‌ها عضو مجموعه جواب‌های نامعادله $(x-1)^2 > 4x^4$ باشد، نمودار تابع $y=(x-1)^2$ بالاتر از نمودار تابع $y=4x^4$ قرار دارد:

$$4x^4 < (x-1)^2 \Rightarrow (2x)^2 - (x-1)^2 < 0 \Rightarrow (2x^2 + x - 1)(2x^2 - x + 1) < 0$$

عبارت $2x^2 - x + 1$ همواره مثبت است، زیرا $\Delta = 1 - 8 < 0$. بنابراین باید نامعادله $2x^2 + x - 1 < 0$ را حل کنیم:

در بازه $(-1, \frac{1}{2})$ چنین اتفاقی می‌افتد. در نتیجه بیشترین مقدار $b-a$ برابر $\frac{1}{2} - (-1) = \frac{3}{2}$ است. توجه کنید که نمودار تابع‌های $y=(x-1)^2$ و $y=4x^4$ به صورت زیر است:



۳۴- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

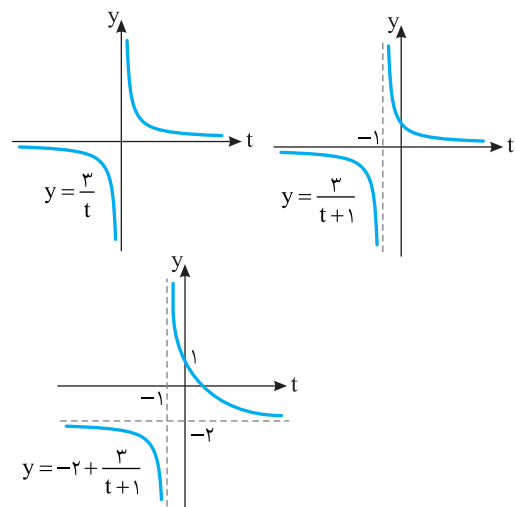
$$0 \leq x - [x] < 1 \Rightarrow -1 < [x] - x \leq 0 \Rightarrow -1 < f(x) \leq 0$$

بنابراین تابع gof با تابع $y = \frac{1-2t}{t+1}$ که دامنه آن بازه $(-1, 0]$ است، برابر

است. برد این تابع را به دست می‌آوریم:

راه حل اول نمودار تابع به صورت زیر رسم می‌شود:

$$y = \frac{1-2t}{t+1} = -2 + \frac{3}{t+1}$$



واضح است که برد تابع gof بازه $[1, +\infty)$ است.

راه حل دوم به کمک نابرابری‌ها برد تابع را به دست می‌آوریم:

$$-1 < t \leq 0 \Rightarrow 0 < t+1 \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{t+1} \geq 1 \Rightarrow \frac{3}{t+1} \geq 3 \Rightarrow -2 + \frac{3}{t+1} \geq 1 \Rightarrow y \geq 1$$

بنابراین برد تابع بازه $[1, +\infty)$ است. توجه کنید که به ازای هر $y \geq 1$ مقداری

مانند t وجود دارد که $y = -2 + \frac{3}{t+1}$. این مقدار به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y+2 = \frac{3}{t+1} \Rightarrow t+1 = \frac{3}{y+2} \Rightarrow t = -1 + \frac{3}{y+2}$$

راه حل سوم تابع $g(t) = \frac{1-2t}{t+1}$ روی بازه $(-1, 0]$ پیوسته و نزولی است.

بنابراین برد آن برابر است با $[g(0), \lim_{t \rightarrow (-1)^+} g(t)] = [1, +\infty)$

۳۵- گزینه ۳ **راه حل اول** توجه کنید که

$$f(x) = x + 2\sqrt{x} = (\sqrt{x} + 1)^2 - 1$$

بنابراین تابع وارون تابع f به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y = (\sqrt{x} + 1)^2 - 1 \Rightarrow (\sqrt{x} + 1)^2 = y + 1 \quad (y \geq -1)$$

$$\sqrt{x} + 1 = \sqrt{y+1} \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y+1} - 1$$

$$x = (\sqrt{y+1} - 1)^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = (\sqrt{x+1} - 1)^2$$

بنابراین

$$g(x) = f^{-1}(x) = (\sqrt{x+1} - 1)^2 \quad (x \geq -1)$$

$$g(3) + g(15) = f^{-1}(3) + f^{-1}(15) = 1 + 9 = 10$$

راه حل دوم توجه کنید که

$$f(x) = x + 2\sqrt{x} \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 3 \Rightarrow f^{-1}(3) = 1 \\ f(9) = 15 \Rightarrow f^{-1}(15) = 9 \end{cases}$$

بنابراین

$$g(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow g(3) + g(15) = f^{-1}(3) + f^{-1}(15) = 1 + 9 = 10$$

۳۶- گزینه ۴ **راه حل اول** ابتدا تابع وارون تابع f را به دست می‌آوریم:

$$y = x - \frac{1}{2x}, \quad x > 0$$

$$y = \frac{2x^2 - 1}{2x} \Rightarrow 2xy = 2x^2 - 1 \Rightarrow 2x^2 - 2yx - 1 = 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{2y + \sqrt{4y^2 + 8}}{4} \\ x = \frac{2y - \sqrt{4y^2 + 8}}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y + \sqrt{y^2 + 2}}{2} \\ x = \frac{y - \sqrt{y^2 + 2}}{2} < 0 \end{cases} \quad (\text{غ.ق.})$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 2}}{2}$$

بنابراین

طول نقطه برخورد نمودار تابع f^{-1} با نیمساز ناحیه دوم (خط $y = -x$) از

حل معادله $f^{-1}(x) = -x$ به دست می‌آید:

$$\frac{x + \sqrt{x^2 + 2}}{2} = -x \Rightarrow \sqrt{x^2 + 2} = -3x \quad (x < 0)$$

$$x^2 + 2 = 9x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \quad (\text{غ.ق.}), x = -\frac{1}{2}$$

راه حل دوم فرض کنید $f^{-1}(2)=a$ ، پس $f(a)=2$ و در نتیجه

$$\frac{2^a - (\frac{1}{2})^a}{2} = 2 \Rightarrow 2^a - \frac{1}{2^a} = 4 \Rightarrow (2^a)^2 - 4 \times 2^a - 1 = 0.$$

اگر فرض کنیم $2^a = b > 0$ ، آن گاه

$$b^2 - 4b - 1 = 0 \Rightarrow b = 2 + \sqrt{5}, b = 2 - \sqrt{5} < 0 \text{ (غ.ق.ق.)}$$

$$2^a = 2 + \sqrt{5} \Rightarrow a = \log_2(2 + \sqrt{5}) \quad \text{بنابراین}$$

۴۰- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\tan 285^\circ = \tan(270^\circ + 15^\circ) = -\cot 15^\circ$$

$$\tan(-165^\circ) = \tan(-180^\circ + 15^\circ) = \tan 15^\circ$$

$$\sin 1095^\circ = \sin(1080^\circ + 15^\circ) = \sin(6 \times 180^\circ + 15^\circ) = \sin 15^\circ$$

$$\cos 255^\circ = \cos(270^\circ - 15^\circ) = -\sin 15^\circ$$

بنابراین

$$\tan 285^\circ \tan(-165^\circ) - \sin 1095^\circ \cos 255^\circ$$

$$= (-\cot 15^\circ)(\tan 15^\circ) - (\sin 15^\circ)(-\sin 15^\circ)$$

$$= -1 + \sin^2 15^\circ = -\cos^2 15^\circ$$

۴۱- گزینه ۳ با توجه به شکل معلوم است که نمودار تابع

$$f(x) = a + b \sin(x + \frac{\pi}{3}) \text{ از نقطه } (\frac{\pi}{2}, 0) \text{ می گذرد و حداکثر مقدار آن برابر}$$

$\frac{3}{2}$ است. پس

$$f(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow a + b \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}) = 0 \Rightarrow a + b \cos \frac{\pi}{3} = 0.$$

$$a + \frac{b}{2} = 0 \Rightarrow a = -\frac{b}{2}$$

$$a + |b| = \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{b}{2} + |b| = \frac{3}{2}$$

همچنین با توجه به وضعیت نمودار واضح است که b باید منفی باشد. پس

$$-\frac{b}{2} - b = \frac{3}{2} \Rightarrow b = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

۴۲- گزینه ۱ با توجه به نمودار واضح است که کمترین مقدار تابع برابر

$$-3 \text{ است، پس } -|a| + c = -3. \text{ از طرف دیگر نمودار تابع از نقطه } (\frac{\pi}{6}, 1)$$

عبور می کند، پس $1 = a \sin(\frac{b\pi}{6}) + c$. همچنین دوره تناوب تابع برابر

$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3} \text{ است. پس } \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

معلوم است که a و b باید هم علامت باشند، پس دو حالت زیر را در نظر می گیریم:

حالت اول اگر a و b مثبت باشند، آن گاه $b = 3$ و در نتیجه

$$\begin{cases} -a + c = -3 \\ a \sin \frac{\pi}{2} + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + c = -3 \\ a + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = -1 \end{cases}$$

حالت دوم اگر a و b منفی باشند، آن گاه $b = -3$ و در نتیجه

$$\begin{cases} a + c = -3 \\ a \sin(\frac{-\pi}{2}) + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = -3 \\ -a + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ c = -1 \end{cases}$$

راه حل دوم فرض کنید نقطه $(a, -a)$ نقطه برخورد نمودار تابع f^{-1} با خط

$y = -x$ (نیمساز ناحیه دوم) باشد ($a < 0$). بنابراین

$$f^{-1}(a) = -a \Rightarrow f(-a) = a \Rightarrow -a - \frac{1}{-2a} = a$$

$$2a = \frac{1}{2a} \Rightarrow 4a^2 = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

۳۷- گزینه ۲ **راه حل اول** ابتدا توجه کنید که $\log_3 2 = \frac{5}{8}$ ، پس

$$\log_3 3 = \frac{8}{5} \text{ بنابراین}$$

$$\log_{18} 8 = \frac{\log_3 8}{\log_3 18} = \frac{3 \log_3 2}{\log_3 9 + \log_3 2} = \frac{3}{2 \log_3 3 + 1} = \frac{3}{2 \times \frac{8}{5} + 1} = \frac{5}{7}$$

راه حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$\log_3 2 = \frac{5}{8} \Rightarrow 3^{\frac{5}{8}} = 2 \Rightarrow 3^5 = 2^8 \Rightarrow 3^{10} = 2^{16}$$

(دقت کنید که این تساوی به صورت تقریبی داده شده است و تساوی درستی نیست.)

بنابراین

$$\log_{18} 8 = \log_{3^2 \times 2^3} 2^3 = 3 \log_{3^2 \times 2^3} 2 = 3 \times 5 \log_{3^{10} \times 2^{16}} 2$$

$$= 15 \log_{3^{10} \times 2^{16}} 2 = 15 \log_{3^{10}} 2 = \frac{15}{21} \log_3 2 = \frac{5}{7}$$

۳۸- گزینه ۱ با توجه به نمودار تابع واضح است که $f(0) = -6$ و

$$f(\frac{1}{2}) = 0 \text{ بنابراین}$$

$$f(x) = -9 + (\frac{1}{3})^{ax+b}$$

$$\begin{cases} f(0) = -9 + (\frac{1}{3})^b = -6 \\ f(\frac{1}{2}) = -9 + (\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}a+b} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^{-b} = 3 \Rightarrow b = -1 \\ 3^{-\frac{a}{2}+1} = 9 \Rightarrow -\frac{a}{2} + 1 = 2 \Rightarrow a = -2 \end{cases}$$

پس

$$f(x) = -9 + (\frac{1}{3})^{-2x-1} \Rightarrow f(2) = -9 + (\frac{1}{3})^{-5} = 234$$

$$f(x) = \frac{2^x - (\frac{1}{2})^x}{2} \quad \text{راه حل اول} \text{ تابع وارون تابع}$$

به دست می آوریم:

$$y = \frac{2^x - (\frac{1}{2})^x}{2} \Rightarrow 2y = 2^x - \frac{1}{2^x}$$

اگر فرض کنیم $t = 2^x > 0$ ، آن گاه

$$2y = t - \frac{1}{t} \Rightarrow t^2 - 2yt - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = y + \sqrt{y^2 + 1} \\ t = y - \sqrt{y^2 + 1} < 0 \end{cases} \text{ (غ.ق.ق.)}$$

$$2^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \Rightarrow x = \log_2(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

بنابراین

$$f^{-1}(x) = \log_2(x + \sqrt{x^2 + 1}) \Rightarrow f^{-1}(2) = \log_2(2 + \sqrt{5})$$

۴۳- گزینه ۳ معادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$4 \sin 3x \cos 3x = 1 \Rightarrow 2 \sin 6x = 1 \Rightarrow \sin 6x = \frac{1}{2}$$

بنابراین جوابهای کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} 6x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 6x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{36} \\ x = \frac{k\pi}{3} + \frac{5\pi}{36} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

جوابهای واقع در بازه $[0, \frac{\pi}{4}]$ به ازای $k=0$ و $k=1$ حاصل می شوند:

$$x = \frac{\pi}{36}, x = \frac{5\pi}{36}, x = \frac{13\pi}{36}, x = \frac{17\pi}{36}$$

بنابراین معادله در بازه $[0, \frac{\pi}{4}]$ چهار جواب دارد.

۴۴- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که اگر $x \neq \frac{\pi}{2}$ ، آن گاه

$$\frac{2 \sin^2 x - \sin x - 1}{\cos^2 x} = \frac{(\sin x - 1)(2 \sin x + 1)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \frac{-2 \sin x - 1}{1 + \sin x}$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-2 \sin x - 1}{1 + \sin x} = \frac{-2 - 1}{1 + 1} = -\frac{3}{2}$$

برای اینکه تابع f در نقطه $x = \frac{\pi}{2}$ پیوسته باشد، باید

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

۴۵- گزینه ۲ چون حد تابع f در بی نهایت برابر ۲ شده است، پس

درجه چندجمله ای صورت کسر $f(x)$ با درجه چندجمله ای مخرج آن برابر

است. اکنون دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد.

حالت اول $a=0$ و $n=2$. در این صورت

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 6x^2 + 1}{7x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2}{7x^2} = -\frac{2}{7}$$

بنابراین حالت اول قابل قبول نیست.

حالت دوم $n=3$ و $a \neq 0$. در این صورت

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 6x^2 + 1}{ax^3 + 7x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3}{ax^3} = \frac{4}{a} = 2 \Rightarrow a = 2$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^3 - 6x^2 + 1}{2x^3 + 7x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2x-1)(2x^2-2x-1)}{(2x-1)(x^2+4x+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 2x - 1}{x^2 + 4x + 2} = \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{17}{4}} = -\frac{3}{17}$$

۴۶- گزینه ۴ سؤال با این ادبیات دارای بی شمار جواب است. کافی است

معادله دو خط را که از نقطه $A(2, m)$ می گذرند، بنویسیم که هر کدام بر نمودار

یکی از تابع های داده شده مماس باشند. بی شمار نقطه مانند A می توان پیدا کرد و

بی شمار مقدار برای a و b وجود دارد. ولی احتمالاً منظور طراح سؤال این بوده که

یک خط در این نقطه بر هر دو نمودار مماس باشد. در این صورت

$$f(2) = g(2) \Rightarrow 4 = 4a + 2b \Rightarrow 4a = 4 - 2b$$

$$f'(2) = g'(2) \Rightarrow -3 = 4a + b \Rightarrow 4a = -3 - b$$

بنابراین

$$4 - 2b = -3 - b \Rightarrow b = 7$$

توجه کنید که

$$f(x) = \frac{x+2}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

$$g(x) = ax^2 + bx \Rightarrow g'(x) = 2ax + b$$

۴۷- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{2x-x^2}{3x+5}} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{2(2x-x^2)}{3x+5}}{3\sqrt[3]{\frac{2x-x^2}{3x+5}}}$$

از طرف دیگر،

$$y = \frac{2x-x^2}{3x+5} \Rightarrow y' = \frac{(2-2x)(3x+5) - 3(2x-x^2)}{(3x+5)^2}$$

بنابراین

$$f'(x) = \frac{2((2-2x)(3x+5) - 3(2x-x^2))}{3(3x+5)^2 \sqrt[3]{\frac{2x-x^2}{3x+5}}}$$

$$f'(-2) = \frac{2((2+4)(-6+5) - 3(-4-4))}{3(-6+5)^2 \sqrt[3]{\frac{-4-4}{-6+5}}} = 6$$

۴۸- گزینه ۱ ابتدا نقاط بحرانی تابع f را به دست می آوریم:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x+2)(x^2+1) - 2x(x^2+2x-3)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-2(x^2-4x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 1 = 0 \Rightarrow x = 2 + \sqrt{5}, x = 2 - \sqrt{5}$$

اکنون به جدول تعیین علامت $f'(x)$ توجه کنید:

x	$-\infty$	$2 - \sqrt{5}$	$2 + \sqrt{5}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	-
		min	max	

بنابراین $x = 2 + \sqrt{5}$ طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع f است. مقدار ماکزیمم

نسبی تابع f برابر است با

$$f(2 + \sqrt{5}) = \frac{(2 + \sqrt{5})^2 + 2(2 + \sqrt{5}) - 3}{(2 + \sqrt{5})^2 + 1} = \frac{4 + 5 + 4\sqrt{5} + 4 + 2\sqrt{5} - 3}{4 + 5 + 4\sqrt{5} + 1}$$

$$= \frac{6\sqrt{5} + 10}{9 + 4\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5} + 5}{2\sqrt{5} + 5} \times \frac{2\sqrt{5} - 5}{2\sqrt{5} - 5}$$

$$= \frac{6\sqrt{5} + 10}{20 - 25} = \frac{30 - 15\sqrt{5} + 10\sqrt{5} - 25}{-5} = \frac{5 - 5\sqrt{5}}{-5} = \sqrt{5} - 1$$

بنابراین رئوس مثلث نقاط $A(۸, ۶)$ ، $B(۲, ۰)$ و $C(۰, ۲)$ هستند. پس

$$AB = \sqrt{(۸-۲)^2 + (۶-۰)^2} = ۶\sqrt{۲}, \quad BC = \sqrt{(۲-۰)^2 + (۰-۲)^2} = ۲\sqrt{۲}$$

پس مساحت مثلث ABC برابر است با

$$S = \frac{1}{2} AB \times BC = \frac{1}{2} \times ۶\sqrt{۲} \times ۲\sqrt{۲} = ۱۲$$

۵۳- گزینه ۱ فرض کنید $(g^{-1} \circ f^{-1})(۲۰) = a$ ، بنابراین

$$g^{-1}(f^{-1}(۲۰)) = a \Rightarrow g(a) = f^{-1}(۲۰) \Rightarrow f(g(a)) = ۲۰.$$

واضح است که $f(۱۶) = ۲۰$ ، زیرا

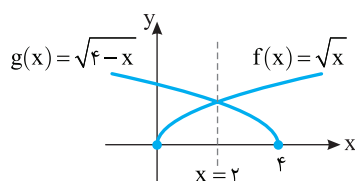
$$f(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow f(۱۶) = ۱۶ + \sqrt{۱۶} = ۱۶ + ۴ = ۲۰.$$

پس $f^{-1}(۲۰) = ۱۶$ ، بنابراین

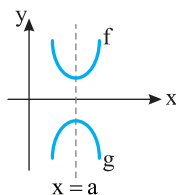
$$g(a) = ۱۶ \Rightarrow \frac{۹a+۶}{۱-a} = ۱۶ \Rightarrow ۹a+۶ = ۱۶-۱۶a \Rightarrow a = \frac{۲}{۵}$$

۵۴- گزینه ۳ اگر قرینه نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ نسبت به محور y را رسم

کنیم، نمودار تابع $y = \sqrt{-x}$ به دست می آید. اگر نمودار جدید را چهار واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y = \sqrt{-(x-۴)}$ به دست می آید. بنابراین نمودار دو تابع اولیه و نهایی به صورت زیر است. با توجه به شکل معلوم است که نمودار تابع g قرینه نمودار تابع f نسبت به خط $x = ۲$ است.



توجه ادبیات سؤال ایراد دارد چون پرسیده شده است: «منحنی اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام خط متقارن هستند؟» این سؤال یعنی نمودار توابع f و g هر دو نسبت به خط $x=a$ متقارن هستند و مقدار a چند است؟ (شکل زیر را ببینید) در حالی که مقصود طراح این بوده است که قرینه نمودار تابع f نسبت به خط $x=a$ نمودار تابع g می شود و a چند است؟ از طرف دیگر سؤال خارج از مباحث کتاب درسی است. چیزی که سؤال پرسیده مثلاً این طوری می شود:



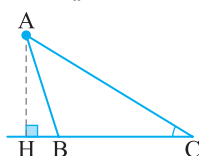
۵۵- گزینه ۴ ابتدا $\cot \hat{C}$ را با معلوم بودن $\sin \hat{C}$ به دست می آوریم:

$$1 + \cot^2 \hat{C} = \frac{1}{\sin^2 \hat{C}} \Rightarrow 1 + \cot^2 \hat{C} = \frac{۱۶۹}{۲۵}$$

$$\cot^2 \hat{C} = \frac{۱۴۴}{۲۵} \Rightarrow \cot \hat{C} = \frac{۱۲}{۵}$$

بنابراین در مثلث AHC می توان نوشت:

$$\cot \hat{C} = \frac{CH}{AH} \Rightarrow \frac{۱۲}{۵} = \frac{9}{AH} \Rightarrow AH = ۳/۷۵$$



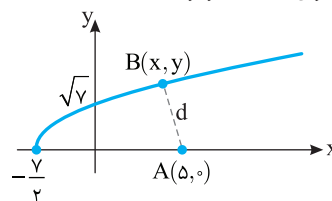
۴۹- گزینه ۱ مطابق شکل زیر فاصله نقطه A از نقطه B روی نمودار

تابع $y = \sqrt{۲x+۷}$ برابر است با

$$d = \sqrt{(x-۵)^2 + (y-۰)^2} = \sqrt{(x-۵)^2 + (\sqrt{۲x+۷}-۰)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 - 10x + ۲۵ + ۲x + ۷} = \sqrt{x^2 - ۸x + ۳۲}$$

کمترین مقدار عبارت $x^2 - ۸x + ۳۲$ به ازای $x = ۴$ به دست می آید که برابر ۱۶ است. پس کمترین مقدار d برابر ۴ است.



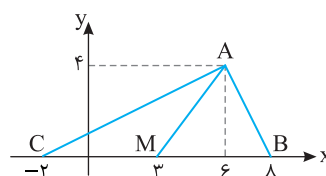
۵۰- گزینه ۲ ابتدا رئوس مثلث را مشخص می کنیم.

$$\begin{cases} y=۰ \\ ۲y-x=۲ \end{cases} \Rightarrow x=-۲, \quad \begin{cases} y=۰ \\ y+۲x=۱۶ \end{cases} \Rightarrow x=۸$$

$$\begin{cases} ۲y-x=۲ \\ y+۲x=۱۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=۶ \\ y=۴ \end{cases}$$

پس مثلث مورد نظر به صورت زیر است و اندازه میانه AM را می خواهیم.

چون نقطه M(۳,۰) است، پس $AM = \sqrt{(۶-۳)^2 + (۴-۰)^2} = \sqrt{۹+۱۶} = ۵$



۵۱- گزینه ۳ باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x-۱$ برابر ۸ است، پس

$$P(۱) = ۸. \text{ باقی مانده تقسیم } P(x) \text{ بر } ۲x+۱ \text{ برابر ۵ است، پس } P(-\frac{1}{2}) = ۵.$$

باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $۲x^2 - x - ۱$ یک چند جمله ای درجه اول به صورت $ax+b$ است. بنابراین

$$P(x) = (۲x^2 - x - ۱)Q(x) + ax + b = (x-۱)(۲x+۱)Q(x) + ax + b$$

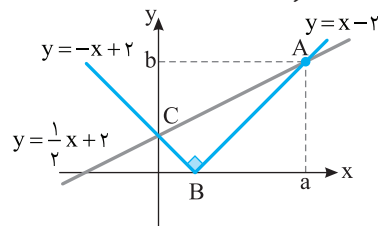
$$\begin{cases} P(۱) = a + b = ۸ \\ P(-\frac{1}{2}) = -\frac{a}{2} + b = ۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۲ \\ b = ۶ \end{cases}$$

بنابراین باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $۲x^2 - x - ۱$ برابر $۲x+۶$ است.

۵۲- گزینه ۴ نمودار دو تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - ۴x + ۴} = |x-۲|$ و

$g(x) = \frac{1}{2}x + ۲$ به صورت زیر است. مطابق شکل داده شده مساحت مثلث

قائم الزاویه ABC مد نظر است.



$$x-۲ = \frac{1}{2}x + ۲ \Rightarrow x = ۸ \Rightarrow a = ۸ \Rightarrow b = ۸-۲ = ۶$$

معادله خطی که از نقطه $(4, 8)$ با شیب $\frac{3}{2}$ می‌گذرد، به صورت زیر است:

$$y - 8 = \frac{3}{2}(x - 4) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + 2$$

اگر قرار دهیم $x = 0$ ، عرض نقطه تقاطع با محور y برابر ۲ به دست می‌آید.

۶۷- گزینه ۴ چون $\tan \alpha$ و $\tan \beta$ جواب‌های معادله

$2x^2 + 3x - 1 = 0$ هستند، پس مجموع و حاصل ضرب جواب‌ها معلوم است:

$$\tan \alpha + \tan \beta = -\frac{3}{2}, \quad \tan \alpha \tan \beta = -\frac{1}{2}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{-\frac{3}{2}}{1 - (-\frac{1}{2})} = -1$$

۶۸- گزینه ۱ چندجمله‌ای $P(x)$ بر $2x - 1$ بخش پذیر است. پس

$$P(\frac{1}{2}) = 0$$

$$P(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2})^4 + a(\frac{1}{2})^3 + 2(\frac{1}{2})^2 - 3(\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow a = 7$$

$$P(x) = 2x^4 + 7x^3 + 2x^2 - 3x$$

پس باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $x + 2$ برابر است با

$$P(-2) = 2(-2)^4 + 7(-2)^3 + 2(-2)^2 - 3(-2) = -1$$

۶۹- گزینه ۴ طول نقاط تقاطع نمودار تابع‌های $f(x) = |x - 2| + |x + 1|$

و $g(x) = x + 7$ از معادله $f(x) = g(x)$ به دست می‌آید. پس

$$f(x) = g(x) \Rightarrow |x - 2| + |x + 1| = x + 7$$

$$x \geq 2 \Rightarrow x - 2 + x + 1 = x + 7 \Rightarrow x = 8$$

$$-1 \leq x \leq 2 \Rightarrow -x + 2 + x + 1 = x + 7 \Rightarrow x = -4$$

$$x \leq -1 \Rightarrow -x + 2 - x - 1 = x + 7 \Rightarrow x = -2$$

بنابراین $A(8, 15)$ و $B(-2, 5)$ نقاط تقاطع هستند که فاصله آن‌ها برابر

$$AB = \sqrt{(8+2)^2 + (15-5)^2} = 10\sqrt{2}$$

۷۰- گزینه ۴ **راه حل اول** فرض کنید $(f^{-1} \circ g^{-1})(-9) = a$

$$f^{-1}(g^{-1}(-9)) = a \Rightarrow f(a) = g^{-1}(-9)$$

$$a \geq 2 \Rightarrow a^2 - 4a + 9 = g^{-1}(-9)$$

$$g(a^2 - 4a + 9) = -9 \Rightarrow \frac{3 - (a^2 - 4a + 9)}{2} = -9$$

$$a^2 - 4a - 12 = 0 \Rightarrow (a - 6)(a + 2) = 0 \Rightarrow a = 6, a = -2$$

راه حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$y = f(x) = x^2 - 4x + 9 \Rightarrow y = (x - 2)^2 + 5 \Rightarrow y - 5 = (x - 2)^2$$

$$|x - 2| = \sqrt{y - 5} \xrightarrow{x \geq 2} x - 2 = \sqrt{y - 5}$$

$$x = 2 + \sqrt{y - 5} \Rightarrow f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x - 5}$$

از طرف دیگر.

$$y = g(x) = \frac{3 - x}{2} \Rightarrow 2y = 3 - x \Rightarrow x = 3 - 2y \Rightarrow g^{-1}(x) = 3 - 2x$$

بنابراین

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(-9) = f^{-1}(g^{-1}(-9)) = f^{-1}(3 - 2(-9))$$

$$= f^{-1}(21) = 2 + \sqrt{21 - 5} = 6$$

چون تابع f در نقاط $x = 0$ و $x = 2$ پیوسته است، پس

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$$b = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + ax + b) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ((x - 1)[x]) \Rightarrow b = 0$$

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

$$4 + 2a + b = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + ax + b) = \lim_{x \rightarrow 2^-} ((x - 1)[x])$$

$$4 + 2a = (2 - 1) \times 1 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

۶۳- گزینه ۱ چون خط $y = -1$ مجانب افقی نمودار تابع f است، پس

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2 + 3x}{ax^2 + bx + c} = -1 \Rightarrow \frac{-2}{a} = -1 \Rightarrow a = 2$$

بنابراین $f(x) = \frac{-2x^2 + 3x}{2x^2 + bx + c}$. چون خطوط $x = 1$ و $x = -2$ مجانب‌های

قائم نمودار تابع f هستند، پس $x = 1$ و $x = -2$ ریشه‌های چندجمله‌ای

$2x^2 + bx + c$ هستند. پس

$$2x^2 + bx + c = 2(x - 1)(x + 2) = 2x^2 + 2x - 4 \Rightarrow b = 2, c = -4$$

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 3x}{2x^2 + 2x - 4} \Rightarrow f(-1) = \frac{-2 - 3}{2 - 2 - 4} = \frac{5}{-4} = -1\frac{1}{4}$$

در نتیجه

۶۴- گزینه ۲ توجه کنید که

$$g(x) = f(\sqrt{1 + \tan^2 x}) \Rightarrow g'(x) = (\sqrt{1 + \tan^2 x})' f'(\sqrt{1 + \tan^2 x})$$

$$g'(x) = \frac{2 \tan x (1 + \tan^2 x)}{2\sqrt{1 + \tan^2 x}} f'(\sqrt{1 + \tan^2 x})$$

بنابراین

$$g'(\frac{\pi}{3}) = \frac{2\sqrt{3}(1+3)}{2\sqrt{1+3}} f'(\sqrt{1+3}) \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} f'(\frac{2}{\sqrt{3}}) \Rightarrow f'(\frac{2}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{4}$$

۶۵- گزینه ۴ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[5, 6]$ برابر است با

$$\frac{f(6) - f(5)}{6 - 5} = \frac{3 - 4}{1} = -1$$

از طرف دیگر آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع در نقطه x برابر $f'(x)$ است.

$$f(x) = \sqrt{21 - x^2} + 4x \Rightarrow f'(x) = \frac{-2x + 4}{2\sqrt{21 - x^2} + 4x} = \frac{-x + 2}{\sqrt{21 - x^2} + 4x}$$

بنابراین

$$\frac{-x + 2}{\sqrt{21 - x^2} + 4x} = -1 \quad (*) \Rightarrow 21 - x^2 + 4x = (x - 2)^2$$

$$21 - x^2 + 4x = x^2 + 4 - 4x \Rightarrow 2x^2 - 8x - 17 = 0$$

$$x = 2 + \frac{5\sqrt{2}}{2}, \quad x = 2 - \frac{5\sqrt{2}}{2} \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

توجه کنید که طبق معادله $(*)$ مقدار x باید بیشتر از ۲ باشد.

۶۶- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \frac{5x - 4}{\sqrt{x}} = 5\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} \Rightarrow f(4) = 5 \times 2 - \frac{4}{2} = 8$$

$$f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{x\sqrt{x}} \Rightarrow m = f'(4) = \frac{5}{4} + \frac{2}{8} = \frac{3}{2}$$

۷۵- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که تعداد اعداد نوشته شده در چهل

دسته اول برابر است با

$$1+2+3+\dots+40=\frac{40}{2}(1+40)=820$$

بنابراین آخرین عدد واقع در دسته چهل همان هشتصد و بیست و یکم عدد طبیعی فرد است که برابر است با $2 \times 820 - 1 = 1639$.

۷۶- گزینه ۲ مقدار ماده خالص در محلول در روزهای متوالی به

صورت زیر است (فرض می‌کنیم محلول ۱۰۰ درصد خالص داریم).

روز اول: ۱۰۰ (غلظت ۱۰۰٪)

روز دوم: $100 - 4 = 96$ (غلظت ۹۶٪)

روز سوم: $96 - \frac{96}{100} \times 4 = 96(1 - \frac{4}{100})$ (غلظت: ۹۶/۱۰۰٪)

روز چهارم: ...

اکنون توجه کنید که همین مقادیر را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$100, 100(1 - \frac{4}{100}), 100(1 - \frac{4}{100})^2, \dots$$

بنابراین در روز $(n+1)$ ام، یعنی پس از گذشت n روز مقدار ماده خالص برابر

$100(1 - \frac{4}{100})^n$ خواهد بود که باید $\frac{1}{3}$ ماده خالص اولیه، یعنی $\frac{100}{3}$ لیتر باشد. پس

$$100(1 - \frac{4}{100})^n = \frac{1}{3} \times 100 \Rightarrow (\frac{24}{25})^n = \frac{1}{3}$$

$$n = \log_{\frac{24}{25}}(\frac{1}{3}) = \frac{-\log 3}{\log \frac{24}{25} - \log \frac{25}{25}} = \frac{-\log 3}{\log \frac{24}{25} - \log 1}$$

$$= \frac{-\log 3}{\log 24 + \log 3 - \log 25} = \frac{-\log 3}{3 \log 2 + \log 3 - \log 100 + \log 4}$$

$$= \frac{-\log 3}{5 \log 2 + \log 3 - 2} = \frac{-0.477}{0.845 + 0.477 - 2} = 24$$

۷۷- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $x \rightarrow 0^-$ ، آن‌گاه

$$\sqrt{1 - \cos x} = \sqrt{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \sqrt{2} |\sin \frac{x}{2}| = -\sqrt{2} \sin \frac{x}{2}$$

از طرف دیگر،

$$\begin{aligned} \sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x} &= \frac{(\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x})(\sqrt{2+3x} + \sqrt{2-x})}{\sqrt{2+3x} + \sqrt{2-x}} \\ &= \frac{2+3x - (2-x)}{\sqrt{2+3x} + \sqrt{2-x}} = \frac{4x}{\sqrt{2+3x} + \sqrt{2-x}} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{1 - \cos x}} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4x}{-\sqrt{2} \sin \frac{x}{2}} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{2+3x} + \sqrt{2-x}} \\ &= \frac{4}{-\sqrt{2} \times \frac{1}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = -2 \end{aligned}$$

۷۱- گزینه ۲ اگر بخواهیم قرینه نمودار تابع $f(x) = (x-1)^2$ را نسبت

به مبدأ مختصات رسم کنیم، ابتدا باید آن را نسبت به محور x سپس نسبت به محور y قرینه کنیم (یا ابتدا نسبت به محور y سپس نسبت به محور x قرینه کنیم).

ضابطه این تابع به صورت $y = -f(-x)$ خواهد بود. اگر این نمودار را چهار واحد

به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $g(x) = -f(-x) + 4$ رسم می‌شود. طول نقاط

تلاقی نمودار تابع‌های f و g از معادله $f(x) = g(x)$ به دست می‌آید:

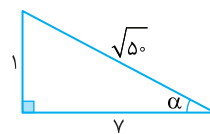
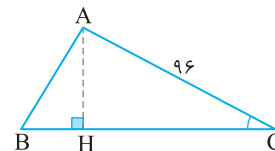
$$f(x) = g(x) \Rightarrow (x-1)^2 = -(-x-1)^2 + 4$$

$$x^2 - 2x + 1 = -x^2 - 2x - 1 + 4 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

۷۲- گزینه ۳ ابتدا از $1 + \cot^2 \hat{C} = \frac{1}{\sin^2 \hat{C}}$ مقدار $\sin \hat{C}$ را

به دست می‌آوریم: $1 + (\frac{\sqrt{5}}{2})^2 = \frac{1}{\sin^2 \hat{C}} \Rightarrow \sin^2 \hat{C} = \frac{4}{9} \Rightarrow \sin \hat{C} = \frac{2}{3}$

بنابراین $\triangle AHC: \sin \hat{C} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{AH}{96} \Rightarrow AH = 64$



۷۳- گزینه ۱ با توجه به مثلث

قائم‌الزاویه مقابل که در آن $\tan \alpha = \frac{1}{y}$.

نتیجه می‌شود

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos \alpha = \frac{y}{\sqrt{5}}$$

بنابراین

$$\sin(\frac{13\pi}{4} + \alpha) = \sin(3\pi + (\frac{\pi}{4} + \alpha)) = -\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha)$$

$$= -\sin \frac{\pi}{4} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{4} \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \alpha + \cos \alpha)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{y}{\sqrt{5}}) = -\frac{4}{5}$$

۷۴- گزینه ۱ ابتدا معادله را ساده می‌کنیم

$$\sin(x + \frac{\pi}{6}) + \cos(x + \frac{\pi}{3}) = \cos 2x$$

$$(\sin x \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} \cos x) + (\cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3}) = \cos 2x$$

$$(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x) + (\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x) = \cos 2x$$

$$\cos x = \cos 2x$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر هستند:

$$2x = 2k\pi \pm x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}, x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های به صورت $\frac{2k\pi}{3}$ شامل جواب‌های به صورت $2k\pi$ هستند.

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت $x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ است.

۸۰- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$g(x) = f\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right) \Rightarrow g'(x) = \left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)' f'\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)$$

$$g'(x) = \frac{-\cos x(1+\sin x) - \cos x(1-\sin x)}{(1+\sin x)^2} f'\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)$$

$$= \frac{-2\cos x}{(1+\sin x)^2} f'\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)$$

بنابراین

$$g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-2\cos \frac{\pi}{6}}{(1+\sin \frac{\pi}{6})^2} f'\left(\frac{1-\sin \frac{\pi}{6}}{1+\sin \frac{\pi}{6}}\right) = \frac{-4\sqrt{3}}{9} f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f'\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{3}{4}$$

۸۱- گزینه ۴ اگر نمودار تابع‌های $f(x) = x\sqrt{x}$ و

$g(x) = x^2 + ax + b$ در نقطه مشترک $x=4$ بر یک خط مماس باشند، آن‌گاه

$$\begin{cases} f(4) = g(4) \Rightarrow 16 + 4a + b = 64 \Rightarrow b = -48 - 4a \\ f'(4) = g'(4) \Rightarrow 3 = 8 + a \Rightarrow a = -5 \Rightarrow b = 12 \end{cases}$$

توجه کنید که

$$f(x) = x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(4) = \frac{3}{2} \times 2 = 3$$

$$g(x) = x^2 + ax + b \Rightarrow g'(x) = 2x + a \Rightarrow g'(4) = 8 + a$$

۸۲- گزینه ۱ ابتدا $f'(2)$ را به دست می‌آوریم:

$$0 \leq x < 4 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 6x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x+6}{2\sqrt{x^2+6x}} \Rightarrow f'(2) = \frac{5}{4}$$

اکنون توجه کنید که در یک همسایگی نقطه $x=5$ ، تساوی $\left[\frac{x}{4}\right] = 1$ برقرار

است. پس در این همسایگی می‌توان نوشت

$$f(x) = x^2 - 9x \Rightarrow f'(x) = 2x - 9 \Rightarrow f'(5) = 10 - 9 = 1$$

$$f'(2) - f'(5) = \frac{1}{4}$$

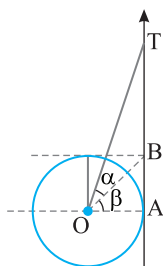
۸۳- گزینه ۳ با توجه به شکل زیر،

$$OA = AB = 1, BT = 2 \Rightarrow \begin{cases} \tan(\alpha + \beta) = \frac{AT}{OA} = \frac{1+2}{1} = 3 \\ \tan \beta = \frac{AB}{OA} = \frac{1}{1} = 1 \end{cases}$$

بنابراین

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \Rightarrow 3 = \frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha}$$

$$3 - 3 \tan \alpha = \tan \alpha + 1 \Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{2}$$



۷۸- گزینه ۲ دامنه تابع بازه $[-2, 2]$ در نظر گرفته شده است، بنابراین

تابع در نقاط $x=2$ و $x=-2$ حد ندارد و پیوسته نیست. در نقاط غیر صحیح بازه $(-2, 2)$ ، توابع $y = \sin \pi x$ و $y = [x]$ پیوسته‌اند. بنابراین حاصل ضرب آن‌ها، یعنی تابع $f(x) = [x] \sin \pi x$ نیز پیوسته است. در نقاط صحیح این بازه (یعنی $x=0, x=1, x=-1$) تابع $y = [x]$ ناپیوسته است ولی چون تابع $y = \sin \pi x$ پیوسته است و مقدار آن برابر صفر است، تابع f پیوسته خواهد بود. بنابراین تابع f فقط در دو نقطه $x=2$ و $x=-2$ ناپیوسته است.

۷۹- گزینه ۲ در دو حالت ممکن است تابع $f(x) = \frac{ax^2 + 7x}{2x^2 + bx + c}$

فقط یک مجانب قائم به معادله $x=2$ داشته باشد.

حالت اول $x=2$ ریشه مضاعف چندجمله‌ای مخرج $f(x)$ باشد، یعنی

$$2x^2 + bx + c = 2(x-2)^2 = 2x^2 - 8x + 8$$

$$b = -8, c = 8 \Rightarrow f(x) = \frac{ax^2 + 7x}{2(x-2)^2}$$

$$\frac{9a+21}{2 \times 1} = 6 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow f(x) = \frac{-x^2 + 7x}{2(x-2)^2} \quad \text{چون } f(3) = 6, \text{ پس}$$

پس معادله مجانب افقی نمودار تابع f به صورت $y = -\frac{1}{2}$ است.

حالت دوم $x=2$ ریشه مخرج $f(x)$ باشد و یکی از ریشه‌های صورت $f(x)$

ریشه دیگر مخرج آن باشد. اگر $a \neq 0$ ، آن‌گاه ریشه‌های صورت $f(x)$ اعداد

$$x=0 \text{ و } x=-\frac{7}{a} \text{ هستند. بنابراین } f(x) \text{ باید به صورت‌های زیر باشد:}$$

• اگر $x=0$ ریشه مشترک صورت و مخرج باشد، آن‌گاه

$$f(x) = \frac{x(ax+7)}{2x^2 + bx + c} = \frac{x(ax+7)}{2x(x-2)} \Rightarrow c=0, b=-4 \Rightarrow f(x) = \frac{ax+7}{2(x-2)}$$

$$\frac{3a+7}{2 \times 1} = 6 \Rightarrow a = \frac{5}{3} \Rightarrow f(x) = \frac{\frac{5}{3}x + 7}{2x - 4} \quad \text{چون } f(3) = 6, \text{ پس}$$

در این حالت معادله مجانب افقی نمودار تابع f به صورت $y = \frac{5}{6}$ است.

• اگر $x=-\frac{7}{a}$ ریشه مشترک صورت و مخرج باشد، آن‌گاه

$$f(x) = \frac{x(ax+7)}{2x^2 + bx + c} = \frac{x(ax+7)}{2(x-2)(ax+7)} \Rightarrow a=1, b=10, c=-28$$

$$f(x) = \frac{x(x+7)}{2(x-2)(x+7)} = \frac{x}{2(x-2)}$$

در این حالت $f(3) = \frac{3}{2}$ که مخالف فرض مسئله است.

اگر $a=0$ ، آن‌گاه $f(x) = \frac{7x}{2x^2 + bx + c}$ که در این صورت باید داشته باشیم

$$f(x) = \frac{7x}{2x^2 - 4x} = \frac{7}{2(x-2)} \quad \text{یعنی } b=-4 \text{ و } c=0$$

$f(3) = 6$ برقرار نیست. پس خطوط $y = \frac{5}{3}$ و $y = -\frac{1}{2}$ می‌توانند مجانب افقی

نمودار تابع f باشند.