۱ (۱) کوچک‌ترین دایرهٔ گذرا از دو نقطهٔ A و B دایره‌ای به قطر AB است. پس مرکز دایره وسط AB و شعاع آن نصف طول پاره خط AB است:

$$O=\frac{A+B}{2}=(-1,\ 3),\quad R=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{36+16}}{2}=\frac{\sqrt{52}}{2}$$

بنابراین معادلهٔ دایره به‌صورت زیر است:

$$(x+1)^2+(y-3)^2=\frac{52}{4}\xrightarrow{y=0}(x+1)^2+9=\frac{52}{4}\Rightarrow(x+1)^2=4$$

$x+1=2$ یا $x+1=-2\Rightarrow x=1$ یا $x=-3$

۲ (۲) در شکل زیر دایره‌ای به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و گذرنده از نقطهٔ $A(1,-4)$ بر خط $4x+3y=0$ و محور y مماس است. چون دایره بر محور y مماس است، پس طول مرکز آن برابر R است، بنابراین $O(R,\beta)$ مرکز دایره است و

فاصلهٔ O تا خط $(4x+3y=0)$ = فاصلهٔ O تا محور y $\Rightarrow R=\frac{|4R+3\beta|}{\sqrt{4^2+3^2}}$

$$5R=4R+3\beta,\quad -5R=4R+3\beta$$

مرکز O در ناحیهٔ چهارم مختصات قرار دارد، پس β باید منفی باشد:

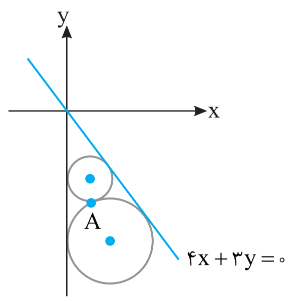
$$-5R=4R+3\beta\Rightarrow\beta=-3R\Rightarrow O(R,-3R)$$

بنابراین

$$OA=R\Rightarrow\sqrt{(R-1)^2+(-3R+4)^2}=R$$

$$R^2+1-2R+9R^2+16-24R=R^2\Rightarrow 9R^2-26R+17=0$$

$$R=\frac{26\pm\sqrt{26\times26-4\times9\times17}}{18}=\frac{13\pm4}{9}\Rightarrow R=\frac{17}{9},\ R=1$$



۳ (۳) دایرهٔ به قطر FF′ بیضی را در نقطهٔ M قطع کرده است، پس زاویهٔ M محاطی و روبه‌رو به قطر FF′ است، پس $\hat{M}=90^\circ$، یعنی مثلث MFF′ قائم‌الزاویه است. از طرف دیگر بنابر فرض،

$$2b=2\sqrt7\Rightarrow b=\sqrt7,\quad 2a=8\Rightarrow a=4$$

پس $c^2=a^2-b^2=16-7=9\Rightarrow c=3$

بنابراین $\triangle MFF': MF^2+MF'^2=FF'^2=(2c)^2=36 \qquad (1)$

درضمن $MF+MF'=2a=8$، پس

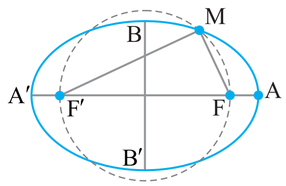
$$(MF+MF')^2=64\Rightarrow MF^2+MF'^2+2MF\times MF'=64$$

$$\xrightarrow{\text{از }(1)}36+2MF\times MF'=64\Rightarrow MF\times MF'=14$$

در نتیجه $MF\times MF'=14$ و $MF+MF'=8$. با فرض $S=8$ و $P=14$ می‌توان نوشت

$$x^2-Sx+P=0\Rightarrow x^2-8x+14=0\Rightarrow x=\frac{8\pm\sqrt{64-4\times14}}{2}=4\pm\sqrt2$$

بنابراین فاصلهٔ M از یک کانون $4+\sqrt2$ و از کانون دیگر $4-\sqrt2$ است، پس فاصلهٔ M تا کانون نزدیک‌تر $4-\sqrt2$ است.



۴ (۲) سهمی $y^2+ay+bx+1=0$ افقی است، پس عرض رأس سهمی با عرض کانون آن برابر و مساوی -2 است. معادلهٔ سهمی را استاندارد می‌کنیم:

$$(y+\frac{a}{2})^2-\frac{a^2}{4}=-bx-1\Rightarrow(y+\frac{a}{2})^2=-bx-1+\frac{a^2}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{عرض رأس سهمی } -2 \text{ است}}-\frac{a}{2}=-2\Rightarrow a=4$$

در نتیجه معادلهٔ سهمی به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$(y+2)^2=-bx+3\Rightarrow(y+2)^2=-b(x-\frac{3}{b})$$

با فرض $b<0$ نتیجه می‌گیریم دهانهٔ سهمی رو به راست است و رأس آن $S(\alpha,\beta)=(\frac{3}{b},-2)$ است و $4a=-b$، پس $a=\frac{-b}{4}$. مختصات کانون این سهمی به‌صورت مقابل است: $F(a+\alpha,\beta)=(-\frac{b}{4}+\frac{3}{b},-2)=(-\frac{1}{4},-2)$

بنابراین

$$-\frac{b}{4}+\frac{3}{b}=-\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{-b^2+12}{4b}=-\frac{1}{4}\Rightarrow4b^2-4b-48=0$$

$b^2-b-12=0\Rightarrow(b-4)(b+3)=0\Rightarrow b=4$ یا $b=-3$

پس کمترین مقدار b برابر -3 است.

۵ (۴) ابتدا ماتریس A^2 و سپس درایه‌های سطر اول ماتریس A^3 را پیدا می‌کنیم.

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}2&1&5\\-3&0&4\\1&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&5\\-3&0&4\\1&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&2&24\\-2&-3&-7\\4&1&9\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}6&2&24\\-2&-3&-7\\4&1&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&5\\-3&0&4\\1&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30&6&86\\?&?&?\\?&?&?\end{bmatrix}$$

۶ (۳) با فرض $B=\begin{bmatrix}2&3\\4&5\end{bmatrix}$ نتیجه می‌گیریم

$$B^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}5&-3\\-4&2\end{bmatrix}$$

و با فرض $C=\begin{bmatrix}2&-1\\-4&3\end{bmatrix}$ نتیجه می‌گیریم $C^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3&1\\4&2\end{bmatrix}$

اکنون طرفین رابطهٔ ماتریسی داده شده را از چپ در B^{-1} و از راست در C^{-1} ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix}2&3\\4&5\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}2&-1\\-4&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0\\0&8\end{bmatrix}\Rightarrow X=B^{-1}\begin{bmatrix}4&0\\0&8\end{bmatrix}C^{-1}$$

$$X=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}5&-3\\-4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&0\\0&8\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3&1\\4&2\end{bmatrix}$$

$$=-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}20&-24\\-16&16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1\\4&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&6\\4&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1\\4&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&7\\-4&-4\end{bmatrix}$$

۷ (۳) حاصل دترمینان را برحسب سطر اول بسط می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix}-4&1&1\\1&2-x&1\\3&2&3-x\end{vmatrix}=0\Rightarrow -4(-1)^2\begin{vmatrix}2-x&1\\2&3-x\end{vmatrix}$$

$$+1(-1)^3\begin{vmatrix}1&1\\3&3-x\end{vmatrix}+1(-1)^4\begin{vmatrix}1&2-x\\3&2\end{vmatrix}=0$$

$$-4(6+x^2-5x-2)-1(3-x-3)+1(2-6+3x)=0$$

$$-16-4x^2+20x+x-4+3x=0$$

$$-4x^2+24x-20=0\xrightarrow[-4]{\text{تقسیم بر}}x^2-6x+5=0$$

$(x-1)(x-5)=0\Rightarrow x=1$ یا $x=5$

۸ (۴) بنابر فرض سؤال وتر AB به طول $2\sqrt{21}$ است، پس $AH=\sqrt{21}$. با به‌دست آوردن OH شعاع OA را پیدا می‌کنیم:

$$OH=\frac{|5+36-15|}{\sqrt{25+144}}=\frac{26}{13}=2$$

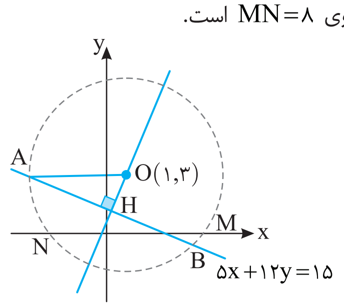
$$\triangle OAH: OA^2=OH^2+AH^2=4+21=25\Rightarrow OA=5\Rightarrow R=5$$

معادلهٔ دایره: $(x-1)^2+(y-3)^2=25$

اکنون نقاط برخورد این دایره با محور x را تعیین می‌کنیم:

$$y=0\Rightarrow(x-1)^2+9=25\Rightarrow(x-1)^2=16\Rightarrow\begin{cases}x-1=4\Rightarrow x=5\\x-1=-4\Rightarrow x=-3\end{cases}$$

نقاط تلاقی دایره با محور x نقطه‌های $M(5,0)$ و $N(-3,0)$ است و فاصلهٔ این دو نقطه مساوی $MN=8$ است.



۹ (۱) مطابق شکل مرکز دایره $O(\alpha,R)$ است. در واقع عرض مرکز برابر شعاع دایره است. در ضمن فاصلهٔ مرکز O از دو خط $3x-4y=0$ و $y=0$ برابر است.

$$(y=0)\text{ فاصلهٔ O تا }=(3x-4y=0)\text{ فاصلهٔ O تا }$$

$$|R|=\frac{|3\alpha-4R|}{\sqrt{9+16}}\Rightarrow R=\frac{|3\alpha-4R|}{5}\Rightarrow\begin{cases}5R=3\alpha-4R\\5R=-3\alpha+4R\end{cases}$$

چون O در ناحیهٔ اول دستگاه مختصات قرار دارد، پس باید α مثبت باشد:

$$5R=3\alpha-4R\Rightarrow3\alpha=9R\Rightarrow\alpha=3R\Rightarrow O(3R,R)$$

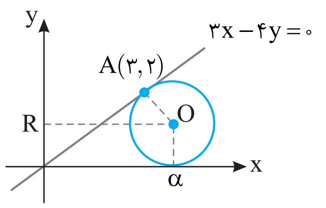
از طرف دیگر،

$$OA=R\Rightarrow\sqrt{(3R-3)^2+(R-2)^2}=R$$

$$\xrightarrow{\text{توان دو}}9R^2+9-18R+R^2+4-4R=R^2\Rightarrow9R^2-22R+13=0$$

$$R=\frac{22\pm\sqrt{22\times22-4\times9\times13}}{2\times9}=\frac{11\pm\sqrt{11\times11-9\times13}}{9}$$

$$=\frac{11\pm\sqrt{121-117}}{9}=\frac{11\pm2}{9}\Rightarrow R=\frac{13}{9},R=1$$



۱۰ (۲) بنابر فرض سؤال،

$$2b=4\sqrt{6}\Rightarrow b=2\sqrt{6},\quad 2a=14\Rightarrow a=7$$

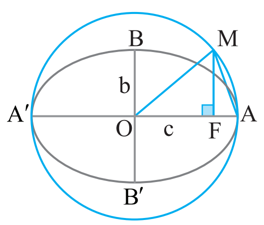
پس $c^2=a^2-b^2=49-24=25\Rightarrow c=5$

نقطهٔ O مرکز بیضی و در نتیجه مرکز دایره به قطر AA' است، پس $OM=OA=7$

$$\triangle OMF: MF^2=OM^2-OF^2\Rightarrow MF^2=a^2-c^2=b^2\Rightarrow MF=b$$

$$\triangle AMF: AM^2=MF^2+AF^2\xrightarrow[MF=b]{AF=a-c}AM^2=b^2+(a-c)^2$$

$$AM^2=(2\sqrt{6})^2+(7-5)^2=24+4=28\Rightarrow AM=2\sqrt{7}$$



۱۱ (۱) معادلهٔ سهمی را استاندارد می‌کنیم: $(y+\frac{a}{2})^2=-bx+9+\frac{a^2}{4}$

چون $y=1$ محور تقارن سهمی است، پس $-\frac{a}{2}=1\Rightarrow a=-2$

پس معادلهٔ سهمی به صورت زیر در می‌آید:

$$(y-1)^2=-bx+10\Rightarrow(y-1)^2=-b(x-\frac{10}{b})$$

پس این سهمی افقی است و رأس آن $S(h,k)=(\frac{10}{b},1)$ است و چون علامت b مشخص نیست دهانهٔ سهمی یا به چپ یا به راست باز می‌شود. اگر $b>0$، آن‌گاه دهانه سهمی به چپ باز می‌شود $4a=b$، پس $a=\frac{b}{4}$ و

$$\text{معادلهٔ خط هادی}: x=a+h \xrightarrow{x=\frac{13}{4}} \frac{13}{4}=\frac{b}{4}+\frac{10}{b}$$

$$\xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{\text{در } 4b} 13b=b^2+40 \Rightarrow b^2-13b+40=0$$

$$(b-8)(b-5)=0 \Rightarrow b=8, b=5$$

چون این مقادیر در گزینهٔ (۱) وجود دارند، پس لزومی به بررسی حالت $b<0$ نیست.

۱۲ (۲) ابتدا ماتریس A^2 را به‌دست می‌آوریم:

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-4&4\\0&-1&0\\-2&2&-3\end{bmatrix}$$

اکنون فقط درایه‌های سطر اول ماتریس A^4 را پیدا می‌کنیم:

$$A^4=A^2\times A^2=\begin{bmatrix}3&-4&4\\0&-1&0\\-2&2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-4&4\\0&-1&0\\-2&2&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\?&?&?\\?&?&?\end{bmatrix}$$

۱۳ (۲) طرفین تساوی $AX=A^{-1}$ را از سمت چپ در A^{-1} ضرب می‌کنیم تا ماتریس X به‌دست آید:

$$AX=A^{-1}\Rightarrow X=(A^{-1})^2 \qquad (1)$$

از طرف دیگر،

$$A=\begin{bmatrix}\frac{3}{4}&\frac{1}{2}\\2&1\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{\frac{3}{4}-1}\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}\\-2&\frac{3}{4}\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=-4\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}\\-2&\frac{3}{4}\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-4&2\\8&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{(1)}X=(A^{-1})^2=\begin{bmatrix}-4&2\\8&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4&2\\8&-3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}32&-14\\-56&25\end{bmatrix}$$

۱۴ (۳) دترمینان را برحسب سطر اول بسط می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\-2&4&x+5\\x-1&6&-1\end{vmatrix}=0\Rightarrow 1(-1)^2\begin{vmatrix}4&x+5\\6&-1\end{vmatrix}+2(-1)^3\begin{vmatrix}-2&x+5\\x-1&-1\end{vmatrix}$$

$$+3(-1)^4\begin{vmatrix}-2&4\\x-1&6\end{vmatrix}=0\Rightarrow(-4-6x-30)+(-2)(2-x^2-4x+5)$$

$$+3(-12-4x+4)=0\Rightarrow -6x-34+2x^2+8x-14-24-12x=0$$

$$2x^2-10x-72=0\xrightarrow{\div 2}x^2-5x-36=0\Rightarrow(x-9)(x+4)=0$$

$$x=9, x=-4$$