

۳- گزینه ۱ سطر سوم ماتریس A را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ 3 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

اکنون سطر سوم ماتریس A را پیدا می کنیم:

$$\text{سطر سوم } A = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ 3 & 7 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ 7 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه های سطر سوم ماتریس A مساوی $7+1-5=3$ است.

۴- گزینه ۴ توجه کنید که

$$BA^T A = 52I \Rightarrow B \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = 52I$$

$$B \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = 52I \quad (1)$$

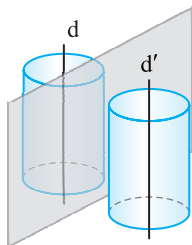
اکنون برای پیدا کردن ماتریس B، طرفین تساوی (۱) را از سمت راست

در وارون ماتریس ضرب می کنیم. توجه کنید که

$$\begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 14 \end{bmatrix}$$

$$B = 52I \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = 52I \times \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 14 \end{bmatrix} = \frac{52}{26} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 14 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -8 & 28 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماکزیم مقدار درایه های ماتریس B برابر ۲۸ است.



۵- گزینه ۱ فرض کنید $k > 0$. مکان

هندسی نقاطی از فضا که از خط های موازی d و

d' به فاصله k هستند، دو سطح استوانه ای با

محورهای d و d' هستند (شکل مقابل را ببینید).

صفحه هایی که بر این دو سطح استوانه ای مماس

هستند، از دو خط d و d' به یک فاصله هستند که

در اینجا تعداد آنها حداکثر ۴ تا است. در واقع دو

تا از این صفحه ها می توانند طوری بر این دو سطح استوانه ای مماس باشند که هر دو

سطح در یک طرف این صفحه ها باشند و دو تا از این صفحه ها می توانند طوری بر

این دو سطح استوانه ای مماس باشند که دو سطح در طرفین این صفحه ها باشند. با

تغییر مقدار k، تعداد نامتناهی صفحه با این ویژگی خواهیم داشت. بنابراین گزینه

(۱) درست است. در ضمن، چون گزینه (۱) درست است، پس گزینه (۲) نادرست

خواهد بود. گزینه های (۳) و (۴) در صفحه به ترتیب تعریف سهمی و بیضی هستند.

در فضا این مکان ها سهمی گون و بیضی گون هستند.

۱- گزینه ۱ زاویه بین بردار $\vec{a} = (-1, \alpha, 1)$ و محور Z در فضا

برابر 45° است. بنابراین

$$\cos 45^\circ = \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{|\vec{a}| |\vec{k}|} \quad \vec{k} = (0, 0, 1) \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2 + \alpha^2} \times \sqrt{1}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2 + \alpha^2} \Rightarrow \alpha = 0$$

بنابراین $\vec{a} = (-1, 0, 1)$. اکنون به جای بردار $\vec{b} = (-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 2)$ از بردار

$\frac{3}{4}\vec{b} = (-2, 1, 3)$ استفاده می کنیم. در این صورت

$$\vec{a} \times \frac{3}{4}\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

توجه کنید که چون $\vec{a} \times \frac{3}{4}\vec{b} = \frac{3}{4}(\vec{a} \times \vec{b})$ ، پس زاویه بین بردار $\vec{a} \times \frac{3}{4}\vec{b}$

و محور Z است، بنابراین

$$\cos \theta = \frac{(\vec{a} \times \frac{3}{4}\vec{b}) \cdot \vec{k}}{|\vec{a} \times \frac{3}{4}\vec{b}| |\vec{k}|} = \frac{(-1, 1, -1) \cdot (0, 0, 1)}{\sqrt{3} \times \sqrt{1}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

۲- گزینه ۱ در شکل زیر، مثلث $TB'C'$ انتقال یافته مثلث

ABC تحت بردار \vec{AT} و مثلث TPQ ناحیه محدود بین مثلث اولیه و

مثلث انتقال یافته است. بنابر فرض تست،

$$\frac{S_{TPQ}}{S_{ABC}} = \frac{1}{16} \quad (1)$$

از طرف دیگر، چون اضلاع مثلث TPQ با اضلاع مثلث ABC دوجه دو

موازی اند، پس زاویه های این دو مثلث مساوی اند. در نتیجه این دو مثلث

متشابه اند. بنابراین نسبت مساحت های این دو مثلث مساوی توان دوم

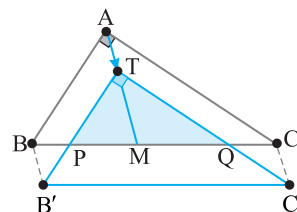
نسبت میانه های نظیر آنها است. پس

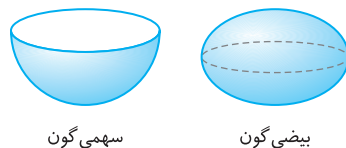
$$\frac{S_{TPQ}}{S_{ABC}} = \left(\frac{TM}{AM}\right)^2 \xrightarrow{(1)} \left(\frac{TM}{AM}\right)^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{TM}{AM} = \frac{1}{4} \quad (2)$$

چون در مثلث قائم الزاویه، میانه وارد بر وتر نصف وتر است، پس

$$AM = \frac{BC}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\frac{TM}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow TM = 1 \Rightarrow AT = AM - TM = 4 - 1 = 3$$





۶- گزینه ۲ معادله استاندارد سهمی به صورت زیر است:

$$(x-1)^2 - 12y = 6 \Rightarrow (x-1)^2 = 12y + 6 \Rightarrow (x-1)^2 = 12\left(y + \frac{1}{2}\right)$$

پس این سهمی قائم رو به بالا با رأس $F(1, -\frac{1}{2})$ است و $4a = 12$ ، یعنی

$a = 3$. بنابراین کانون این سهمی به مختصات زیر است:

$$F' = (\alpha, a + \beta) = \left(1, 3 - \frac{1}{2}\right) = \left(1, \frac{5}{2}\right)$$

اکنون مرکز بیضی را پیدا می‌کنیم: $O = \frac{F+F'}{2} = (1, 1)$ مرکز بیضی

بنابراین $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ = فاصله مرکز بیضی از مبدأ مختصات

۷- گزینه ۳ به کمک قضیه هرون، مساحت مثلث را حساب می‌کنیم. توجه کنید که

$$P = \frac{13+14+15}{2} = 21$$

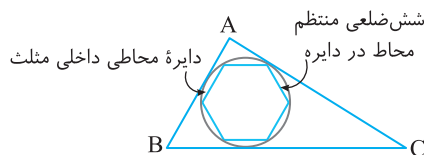
در نتیجه

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} \\ = \sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 6} = \sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 3 \times 2} = \sqrt{21 \times 21 \times 16} = 21 \times 4 = 84$$

اکنون شعاع دایره محاطی داخلی مثلث برابر است با $r = \frac{S}{P} = \frac{84}{21} = 4$

بنابراین

$$2r \sin \frac{18^\circ}{6} = 2(4) \sin 3^\circ = 4$$



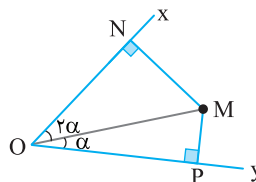
۸- گزینه ۴ شکل مسئله به صورت زیر است. توجه کنید که

$$\left. \begin{aligned} \triangle OMN: \sin 2\alpha &= \frac{MN}{OM} \\ \triangle OMP: \sin \alpha &= \frac{MP}{OM} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{تقسیم می‌کنیم}} \begin{aligned} \sin 2\alpha &= \frac{MN}{OM} \\ \sin \alpha &= \frac{MP}{OM} \end{aligned}$$

$$\frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{MN}{MP} \Rightarrow 2 \cos \alpha = \frac{MN}{MP}$$

از طرف دیگر، در مثلث قائم‌الزاویه OMP، $\cos \alpha = \frac{OP}{OM}$. بنابراین

$$2 \times \frac{OP}{OM} = \frac{MN}{MP} \Rightarrow \frac{MN}{MP} = \frac{2OP}{OM}$$



۹- گزینه ۱ از نقطه F عمود HH' و از نقطه E عمود KK' را

بر اضلاع AD و BC از مستطیل ABCD وارد می‌کنیم. در نتیجه

$$AM \parallel BN \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \triangle AFM \sim \triangle NFB$$

$$\frac{FH}{FH'} = \frac{AM}{NB} = \frac{2}{1} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{FH}{HH'} = \frac{2}{3}$$

$$\xrightarrow{HH'=DC=8} \frac{FH}{8} = \frac{2}{3} \Rightarrow FH = \frac{16}{3}$$

به طور مشابه،

$$DM \parallel NC \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \triangle MED \sim \triangle CEN$$

$$\frac{EK}{EK'} = \frac{MD}{CN} = \frac{4}{5} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{EK}{KK'} = \frac{4}{9}$$

$$\xrightarrow{KK'=DC=8} \frac{EK}{8} = \frac{4}{9} \Rightarrow EK = \frac{32}{9}$$

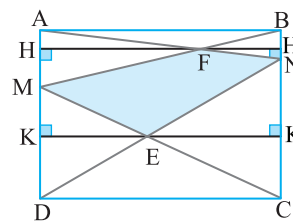
اکنون می‌توانیم مساحت چهارضلعی MENF را پیدا کنیم:

$$S_{MENF} = S_{AND} - S_{AMF} - S_{MED}$$

$$= \frac{1}{2} DC \times AD - \frac{1}{2} FH \times AM - \frac{1}{2} EK \times MD$$

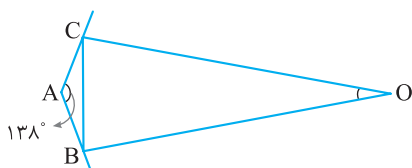
$$= \frac{1}{2} (8)(6) - \frac{1}{2} \left(\frac{16}{3}\right)(2) - \frac{1}{2} \left(\frac{32}{9}\right)(4)$$

$$= 24 - \frac{16}{3} - \frac{64}{9} = \frac{216 - 48 - 64}{9} = \frac{104}{9}$$



۱۰- گزینه ۱ در شکل زیر، O نقطه تلاقی نیمسازهای خارجی دو

زاویه کوچک‌تر B و C است. بنابراین $\hat{O} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} = 90^\circ - \frac{138^\circ}{2} = 21^\circ$



۱۱- گزینه ۳ طول وتر ED برابر شعاع دایره است، پس $\widehat{ED} = 60^\circ$.

از طرف دیگر، چون \hat{C} زاویه‌ای محاطی است، پس

$$\hat{C} = \frac{\widehat{DEB}}{2} \Rightarrow 7^\circ = \frac{\widehat{ED} + \widehat{EB}}{2} = \frac{60^\circ + \widehat{EB}}{2} \Rightarrow \widehat{EB} = 14^\circ - 60^\circ = 8^\circ$$

چون BC قطر دایره است، پس $\widehat{BE} + \widehat{ED} + \widehat{DC} = 180^\circ$

$$\widehat{EDC} = 180^\circ - \widehat{BE} = 180^\circ - 8^\circ = 172^\circ$$

در نتیجه

۱۲- گزینه ۳ از فرض $\frac{AC}{BC} = \sqrt{3}$ نتیجه می‌گیریم

اکنون با استفاده از رابطه طولی در دایره می‌نویسیم:

$$AC^2 = CB \times DC \Rightarrow (\sqrt{3}BC)^2 = CB \times DC \Rightarrow 3BC = DC$$

$$\frac{DC}{BC} = 3 \xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{DC-BC}{BC} = \frac{3-1}{1} \Rightarrow \frac{DB}{BC} = 2$$

۱۶- گزینه ۲ چون بردار $(\vec{a} \times \vec{b})$ یا بردار \vec{c} موازی است، پس $\vec{a} \times \vec{b}$ با \vec{c} موازی است. در ضمن برای ساده‌تر شدن محاسبات به جای بردار $\vec{b} = (-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 2)$ از بردار $\frac{3}{4}\vec{b} = (-1, 1, 3)$ استفاده می‌کنیم.

در واقع بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ با بردار $\vec{a} \times \frac{3}{4}\vec{b}$ موازی است. توجه کنید که

$$\vec{a} \times \frac{3}{4}\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & \alpha & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (3\alpha - 2)\vec{i} - \vec{j} + (-1 + 2\alpha)\vec{k}$$

بنابر فرض سؤال قرار است بردار $\vec{a} \times \frac{3}{4}\vec{b}$ با \vec{c} موازی باشد. بنابراین

$$\frac{3\alpha - 2}{-1} = \frac{-1}{1} = \frac{-1 + 2\alpha}{-1}$$

در نتیجه

$$\begin{cases} 3\alpha - 2 = 1 \Rightarrow \alpha = 1 \\ -1 + 2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 1 \end{cases}$$

پس به‌ازای $\alpha = 1$ دو بردار $(\vec{a} \times \vec{b})$ و \vec{c} موازی‌اند.

۱۷- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & a \end{bmatrix}_{2 \times 2} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 4b_1 \\ 4b_2 \end{bmatrix}_{2 \times 1} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5b_1 - 2b_2 \\ 4b_1 + ab_2 \end{bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 4b_1 \\ 4b_2 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

$$5b_1 - 2b_2 = 4b_1 \Rightarrow b_1 = 2b_2 \quad (\text{بنابراین})$$

چون b ماتریسی ناصفر است، پس $b_1, b_2 \neq 0$. اکنون می‌توان نوشت

$$4b_1 + ab_2 = 4b_2 \xrightarrow{\text{تقسیم بر } b_2 \neq 0} 4b_1 + ab_2 = 4b_2 \xrightarrow{\text{از (۱)}} 8b_2 + ab_2 = 4b_2$$

$$8 + a = 4 \Rightarrow a = -4$$

۱۸- گزینه ۴ توجه کنید که

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & & \\ & 7 & \\ & & 5 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس A برابر $9 + 7 + 5 = 21$ است.

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ a & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{چون } A = \begin{bmatrix} 1 & a & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{پس } A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ a & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & a & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ a & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + 10 & a + 2 \\ a + 2 & 3 \end{bmatrix}$$

۱۳- گزینه ۱ شعاع‌های OM و ON به‌ترتیب بر خط‌های مماس

AB و BC عمود هستند. پس $\hat{M} = \hat{N} = 90^\circ$. چون $\hat{B} = 60^\circ$ ، پس در چهارضلعی $OMBN$ می‌توان نوشت

$$\hat{O}_1 + \hat{M} + \hat{B} + \hat{N} = 360^\circ \Rightarrow \hat{O}_1 + 90^\circ + 120^\circ + 90^\circ = 360^\circ \Rightarrow \hat{O}_1 = 60^\circ$$

از طرف دیگر، دو زاویهٔ مجاور \hat{B} و \hat{C} در دوزنقهٔ $ABCD$ مکمل‌اند.

پس $\hat{C} = 60^\circ$. چون OC نیمساز زاویهٔ C است، پس $\hat{C}_1 = 30^\circ$. در نتیجه

$$\hat{O}_p = 60^\circ \quad \text{اکنون توجه کنید که}$$

$$\triangle ONC: \hat{C}_1 = 30^\circ \Rightarrow ON = \frac{1}{2} OC \xrightarrow{ON=3} OC=6$$

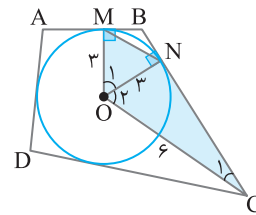
بنابراین

$$S_{OMNC} = S_{OMN} + S_{ONC}$$

$$= \frac{1}{2} OM \times ON \sin \hat{O}_1 + \frac{1}{2} ON \times OC \sin \hat{O}_p$$

$$= \frac{1}{2} (3)(3) \sin 60^\circ + \frac{1}{2} (3)(6) \sin 60^\circ$$

$$= \frac{9}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 9 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{27\sqrt{3}}{2}$$



۱۴- گزینه ۴ نقطهٔ تلاقی قطرهای $x+y=1$ و $x-y=3$ مرکز دایره است:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases} \xrightarrow{+} 2x=4 \Rightarrow x=2 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow O(2, -1)$$

همچنین فاصلهٔ مرکز $O(2, -1)$ تا خط مماس $4x + 3y + 5 = 0$ برابر

$$R = \frac{|4(2) + 3(-1) + 5|}{\sqrt{16+9}} = \frac{10}{5} = 2$$

یعنی شعاع دایره است.

از طرف دیگر، طول پاره خط OM برابر است با

$$OM = \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2} = \sqrt{(4-2)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{5}$$

چون $OM > R$ ، پس نقطهٔ M بیرون دایره است. بنابراین

$$OM - R = \sqrt{5} - 2 = \text{نزدیک‌ترین فاصلهٔ } M \text{ از دایره}$$

۱۵- گزینه ۳ بنابر فرض سؤال $OO' = 6$ ، $R = 6a - 1$ و

$$R' = a^2 - 2 \quad \text{چون دو دایره مماس داخلی هستند، پس}$$

$$OO' = |R' - R| \Rightarrow 6 = |a^2 - 2 - 6a + 1| \Rightarrow |a^2 - 6a - 1| = 6$$

بنابراین دو حالت داریم:

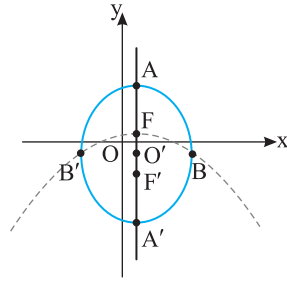
$$a^2 - 6a - 1 = 6 \Rightarrow a^2 - 6a - 7 = 0 \Rightarrow a = -1, a = 7 \quad \text{حالت اول.}$$

$a = -1$ غیر قابل قبول است، زیرا به‌ازای آن شعاع‌های R و R' منفی می‌شوند.

$$a^2 - 6a - 1 = -6 \Rightarrow a^2 - 6a + 5 = 0 \Rightarrow a = 1, a = 5 \quad \text{حالت دوم.}$$

$a = 1$ غیر قابل قبول است، زیرا به‌ازای آن شعاع R' منفی می‌شود.

پس میانگین مقادیر ممکن برای a مساوی $\frac{5+5}{2} = 5$ است.



۲۲- گزینه ۱ شکل مسئله به صورت زیر است. سه مثلث AME, CMN و BEN به حالت (ض ز) همنهشت هستند. فرض می کنیم طول ضلع مثلث متساوی الاضلاع MEN برابر a باشد. توجه کنید که

$$\triangle AME: \hat{A} = 60^\circ \Rightarrow EM = \frac{\sqrt{3}}{2} AE \xrightarrow{EM=a} AE = \frac{2a}{\sqrt{3}} \quad (1)$$

$$\hat{E} = 30^\circ \Rightarrow AM = \frac{AE}{2} \xrightarrow{(1)} AM = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

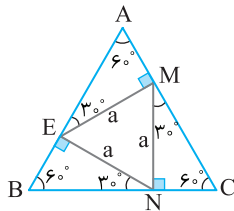
$$\xrightarrow{AM=BE} BE = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad (2)$$

از جمع کردن تساوی های (۱) و (۲) نتیجه می گیریم

$$AB = AE + BE = \frac{2a}{\sqrt{3}} + \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{3a}{\sqrt{3}} = a\sqrt{3}$$

چون مثلث های متساوی الاضلاع ABC و MEN متشابه اند، پس

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MEN}} = \left(\frac{AB}{ME}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{a}\right)^2 = 3$$



۲۳- گزینه ۳ با توجه به اندازه های روی شکل معلوم می شود که

$$\hat{C}_1 = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$$

اکنون زاویه ها را بر حسب کمان ها می نویسیم

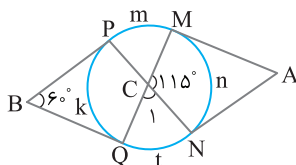
$$\hat{C}_1 = \frac{m+t}{2} \xrightarrow{\hat{C}_1=65^\circ} m+t=130^\circ$$

$$\hat{B} = \frac{m+n+t-k}{2} \xrightarrow{\hat{B}=60^\circ} m+n+t-k=120^\circ \xrightarrow{m+t=130^\circ}$$

$$n-k=-10^\circ \Rightarrow k-n=10^\circ$$

بنابراین

$$\hat{M\hat{A}N} = \frac{m+k+t-n}{2} \xrightarrow{\substack{m+t=130^\circ \\ k-n=10^\circ}} \hat{M\hat{A}N} = \frac{130^\circ+10^\circ}{2} = 70^\circ$$



چون $AA^T B = 52I$ ماتریسی 2×2 است، $|B|$ تعریف می شود، پس B و I ماتریس هایی 2×2 هستند. اکنون اگر از دو طرف تساوی $AA^T B = 52I$ دترمینان بگیریم، به دست می آید

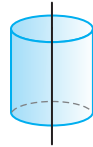
$$|AA^T B| = |52I| \Rightarrow |AA^T| |B| = 52^2 |I|$$

$$\begin{vmatrix} a^2+10 & a+2 \\ a+2 & 3 \end{vmatrix} \times 104 = 52^2 \Rightarrow (3a^2+30-(a+2)^2) = \frac{52^2}{104} = 26$$

$$3a^2+30-a^2-4-4a=26 \Rightarrow 2a^2-4a=0 \Rightarrow 2a(a-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=2 \end{cases}$$

پس مجموع مقادیر ممکن برای a مساوی $0+2=2$ است.

۲۰- گزینه ۱ خطوطی که بر d عمودند، اگر موازی باشند، در یک صفحه هستند؛ اگر متقاطع باشند، در صفحه هایی عمود بر خط d هستند؛ اگر متناظر باشند، هر کدام از آن ها در صفحه هایی مختلف واقع هستند. در نتیجه چون در فضا بی نهایت خط بر یک خط مفروض عمودند، پس خطوط عمود بر یک خط در فضا بی نهایت صفحه در فضا تشکیل می دهند.



اکنون به نادرستی سایر گزینه ها توجه کنید: مجموعه نقاط متساوی الفاصله از یک خط در فضا روی سطحی استوانه ای قرار می گیرند. پس گزینه (۲) نادرست است.



مجموعه نقاطی از فضا که مجموع فواصل آن ها از دو نقطه ثابت به یک اندازه است، شکلی به نام بیضی گون است. پس گزینه (۳) نادرست است.



خطوط گذرا از یک نقطه که با محور گذرا از آن نقطه زاویه یکسان می سازند، سطح مخروطی است. پس گزینه (۴) نادرست است.

۲۱- گزینه ۳ طرفین معادله بیضی را بر 100 تقسیم می کنیم:

$$25(x-1)^2 + 16(y+1)^2 = 100 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{6.25} = 1$$

پس این بیضی یک بیضی قائم با مرکز $O'(1, -1)$ است و

$$\begin{cases} a^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow a = \frac{5}{2} \\ b^2 = 4 \Rightarrow b = 2 \end{cases}$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4} \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

بنابراین

با توجه به شکل $\frac{c}{a} = \frac{O'F'}{OF} = \frac{3}{5}$ چون $OF < OF'$ ، پس کانون ها به

مختصات $F(1, \frac{1}{5})$ و $F'(1, -\frac{9}{5})$ هستند. اکنون F رأس و F' کانون

سهمی مورد نظر است. با توجه به جایگاه رأس و کانون، این سهمی قائم رو به پایین است و مقدار a در سهمی مساوی $FF' = 3$ است. با توجه به معادله سهمی قائم رو به پایین،

$$(x-\alpha)^2 = -4a(y-\beta) \Rightarrow (x-1)^2 = -12(y-\frac{1}{5}) \Rightarrow (x-1)^2 = -12y+6$$

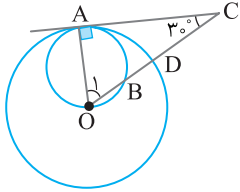
توجه کنید معادله بیضی در کتاب هندسه ۳ نظام جدید حذف شده است.

۲۷- گزینه ۲ از نقطه O به نقطه A وصل می‌کنیم. در این صورت مثلث OAC قائم‌الزاویه است. بنابراین

$$\triangle OAC: \hat{C} = 30^\circ \Rightarrow OA = \frac{1}{2} OC \xrightarrow{OA=6} OC = 12$$

$$\hat{O}_1 = 60^\circ \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{3}}{2} OC \xrightarrow{OC=12} AC = 6\sqrt{3}$$

اکنون با استفاده از رابطه طولی در دایره کوچک‌تر می‌نویسیم
 $CA^2 = CB \times CO \Rightarrow (6\sqrt{3})^2 = CB \times 12 \Rightarrow 108 = 12CB \Rightarrow BC = 9$
 از طرف دیگر، $CD = OC - OD = 12 - 6 = 6$ بنابراین
 $BD = BC - CD = 9 - 6 = 3$



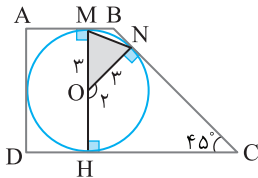
۲۸- گزینه ۳ شعاع OM بر خط مماس AB عمود است. چون $AB \parallel DC$ پس امتداد شعاع OM بر DC عمود است. همین‌طور، شعاع ON بر خط مماس BC عمود است. بنابراین در چهارضلعی ONCH می‌توان نوشت

$$\hat{O}_1 + \hat{N} + \hat{C} + \hat{H} = 360^\circ \Rightarrow \hat{O}_1 + 90^\circ + 45^\circ + 90^\circ = 360^\circ$$

$$\hat{O}_1 = 135^\circ \xrightarrow{\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^\circ} \hat{O}_2 = 45^\circ$$

در نتیجه

$$S_{OMN} = \frac{1}{2} OM \times ON \sin \hat{O}_1 = \frac{1}{2} (3)(3) \sin 45^\circ = \frac{9}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$$



۲۹- گزینه ۲ راه‌حل اول مختصات پیکان‌های \overrightarrow{BA} و \overrightarrow{BC} را پیدا می‌کنیم:

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (-2, 2, 1)$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (-1, -1, 2)$$

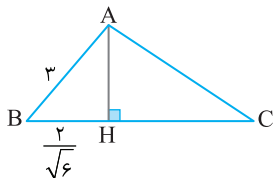
چون پیکان BH تصویر پیکان BA روی پیکان BC است، پس

$$|\overrightarrow{BH}| = \frac{|\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{|2 - 2 + 2|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

در ضمن $|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{4+4+1} = 3$ بنابراین

$$\triangle ABH: AH^2 = AB^2 - BH^2 \Rightarrow AH^2 = 9 - \frac{4}{6} = 9 - \frac{2}{3} = \frac{25}{3}$$

$$AH = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$



۲۴- گزینه ۴ ابتدا مساحت مثلث را به کمک قضیه هرون به دست می‌آوریم. توجه کنید که $P = \frac{21+17+10}{2} = 24$ در نتیجه

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)} \\ = \sqrt{24 \times 3 \times 7 \times 14} = \sqrt{3 \times 8 \times 3 \times 7 \times 2 \times 7} = \sqrt{21^2 \times 16} = 21 \times 4 = 84$$

چون $\frac{1}{2} \times 8 \times 21 = 84$ پس ارتفاع $AH = 8$ وارد بر ضلع به طول ۲۱ است. با فرض $BC = 21$ ، $AB = 10$ و $AC = 17$ شکل مسئله به صورت زیر است. اکنون چون M و N وسط‌های ضلع‌ها هستند، پس

$$MN = \frac{BC}{2} = \frac{21}{2}$$

از طرف دیگر، چون $MN \parallel BC$ ، پس چهارضلعی MNPH دوزنقه است. بنابراین ارتفاع AH بر MN نیز عمود است. اکنون توجه کنید که

$$\triangle ABH: MH' \parallel BH \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AM}{BM} = \frac{AH'}{HH'} \xrightarrow{AM=BM}$$

$$AH' = HH' = \frac{1}{2} AH \Rightarrow HH' = 4$$

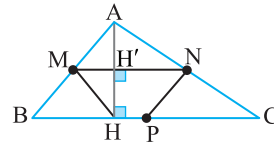
$$\triangle ABH: BH^2 = AB^2 - AH^2 = 10^2 - 8^2 = 36 \Rightarrow BH = 6$$

$$PH = BP - BH = \frac{BC}{2} - BH = \frac{21}{2} - 6 = \frac{9}{2}$$

پس

در نتیجه مساحت دوزنقه MNPH برابر است با

$$S_{MNPH} = \frac{1}{2} HH'(MN + PH) = \frac{1}{2} (4) \left(\frac{21}{2} + \frac{9}{2} \right) = 2 \times 15 = 30$$

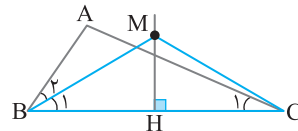


۲۵- گزینه ۳ در شکل زیر، نیمساز زاویه B عمودمنصف ضلع BC را از نقطه M قطع کرده است. از M به C وصل می‌کنیم. چون M روی عمودمنصف BC است، پس

$$MB = MC \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{M}_1\hat{C}$$

چون زاویه \hat{C}_1 قسمتی از زاویه $\hat{M}_1\hat{C}$ است، پس

$$\hat{M}_1\hat{C} > \hat{C}_1 \xrightarrow{\hat{M}_1\hat{C} = \hat{B}_1} \hat{B}_1 > \hat{C}_1 \xrightarrow{\hat{B}_1 = \hat{B}} \hat{B} > \hat{C}_1$$

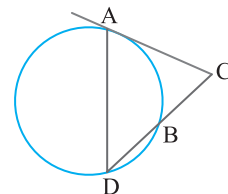


۲۶- گزینه ۴ با استفاده از رابطه طولی در دایره می‌نویسیم

$$CA^2 = CB \times CD \Rightarrow CA^2 = CB(CB + BD) \xrightarrow{DB=BC}$$

$$CA^2 = CB(CB + CB) \Rightarrow CA^2 = 2CB^2 \Rightarrow CA = \sqrt{2}CB$$

$$\frac{CA}{CB} = \sqrt{2}$$



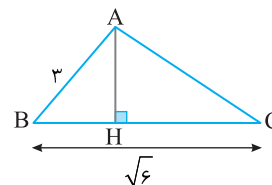
راه حل دوم مساحت مثلث ABC را به کمک ضرب خارجی پیدا می کنیم

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2} \sqrt{25+9+16} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

در ضمن $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$ بنابراین

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC \Rightarrow \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} AH \times \sqrt{6} \Rightarrow AH = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$



۳۰- گزینه ۳ فرض می کنیم شعاع دایره بزرگ R باشد. قطر AB عمود منصف قطر DC است. پس

$$\left. \begin{array}{l} OD = OC \\ ON = ON' \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{کم می کنیم}} ND = CN' \xrightarrow{DN=10} CN' = 10$$

در نتیجه $ON = ON' = R - 10$. بنابراین از رابطه طولی در دایره کوچک تر به دست می آید

$$ON \times ON' = OM \times OB \xrightarrow{OM=R-16}$$

$$(R-10)(R-10) = (R-16)(R)$$

$$R^2 + 100 - 20R = R^2 - 16R \Rightarrow 4R = 100 \Rightarrow R = 25$$

اکنون می توان نوشت

$$MB = OB + OM = R + R - 16 = 2R - 16 = 50 - 16 = 34$$

چون قطر دایره کوچک تر است، پس $\frac{MB}{2} = 17$ شعاع دایره کوچک تر

