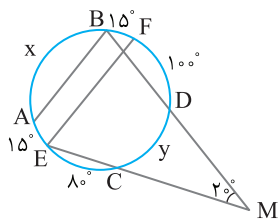


۴- گزینه ۴ می‌دانیم کمان‌های محصور بین دو وتر موازی مساوی‌اند، پس



$$AB \parallel EF \Rightarrow \widehat{BF} = \widehat{AE}$$

$$\widehat{AE} = 15^\circ \Rightarrow \widehat{BF} = 15^\circ$$

$$\text{با فرض } \widehat{CD} = y \text{ و } \widehat{AB} = x$$

می‌نویسیم:

$$\widehat{AB} + \widehat{BF} + \widehat{FD} + \widehat{CD} + \widehat{EC} + \widehat{AE} = 360^\circ$$

$$x + 15^\circ + 10^\circ + y + 8^\circ + 15^\circ = 360^\circ \Rightarrow x + y = 15^\circ \quad (1)$$

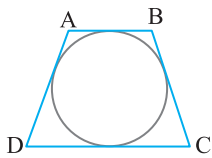
از طرف دیگر،

$$\widehat{M} = \frac{\widehat{EAB} - \widehat{CD}}{2} \Rightarrow 2^\circ = \frac{15^\circ + x - y}{2} \Rightarrow x - y = 25^\circ \quad (2)$$

$$\text{از (1) و (2) } \begin{cases} x + y = 15^\circ \\ x - y = 25^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} 2y = 125^\circ \Rightarrow y = 62.5^\circ$$

بنابراین

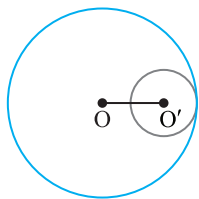
$$\widehat{ABD} = \frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow \widehat{ABD} = \frac{62.5^\circ + 8^\circ + 15^\circ}{2} = \frac{152.5^\circ}{2} = 76.25^\circ$$



$$4R^2 = AB \times DC \quad (1)$$

از طرف دیگر، $15\pi = \pi R^2 \Rightarrow R^2 = 15 \Rightarrow R = \sqrt{15}$ (2)

$$\text{از (1) و (2) } 4 \times 15 = 6 \times a \Rightarrow a = 10$$



۶- گزینه ۱ فرض کنیم شعاع R

دایره بزرگ‌تر و R' شعاع دایره کوچک‌تر

باشد. چون دو دایره مماس درونی‌اند، پس

$$OO' = R - R'$$

از $R - R' = 3/5$. یعنی

طرف دیگر،

$$21\pi = \pi R^2 - \pi R'^2 \Rightarrow R^2 - R'^2 = 21$$

$$(R - R')(R + R') = 21 \xrightarrow{R - R' = 3/5} 3/5(R + R') = 21$$

$$R + R' = \frac{21}{3/5} = \frac{21 \times 5}{3} = 35$$

بنابراین

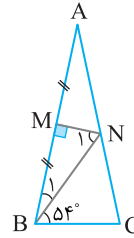
$$\begin{cases} R - R' = 3/5 \\ R + R' = 35 \end{cases} \xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} 2R' = 35 - 3/5 = 34.4$$

$$2R' = 34.4 \Rightarrow R' = \frac{34.4}{2} = 17.2$$

آزمون ۱۰۱

۱- گزینه ۳

بنابر فرض سؤال شکل مقابل را خواهیم داشت، نقطه N روی عمود منصف AB است، پس N از دو سر ضلع AB به یک فاصله است، یعنی NA = NB. بنابراین $\hat{B}_1 = \hat{A} = \alpha$ در ضمن $AB = AC$ پس $\hat{B}_1 + 54^\circ = \hat{C}$ بنابراین



$$\triangle ABC: \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \hat{B}_1 + 54^\circ + \hat{B}_1 + 54^\circ = 180^\circ$$

$$\xrightarrow{\hat{B}_1 = \alpha} 3\alpha = 180^\circ - 108^\circ \Rightarrow 3\alpha = 72^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{72^\circ}{3} = 24^\circ$$

در نتیجه

$$\triangle BMN: \hat{M} + \hat{N}_1 + \hat{B}_1 = 180^\circ$$

$$\xrightarrow{\hat{B}_1 = 24^\circ} 90^\circ + \hat{N}_1 + 24^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{N}_1 = 66^\circ$$

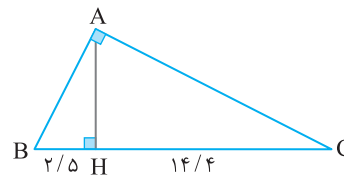
۲- گزینه ۲

در مثلث قائم‌الزاویه

ABC ارتفاع AH روی

وتر BC پاره‌خط‌هایی به

طول ۲/۵ و ۱۴/۴ جدا



کرده است. با استفاده از رابطه طولی در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم:

$$AH^2 = BH \times CH \Rightarrow AH^2 = \frac{2}{5} \times \frac{14}{4} = \frac{25}{10} \times \frac{14}{4} = \frac{25 \times 14}{40}$$

$$AH = \frac{5 \times 12}{10} = \frac{12}{2} = 6$$

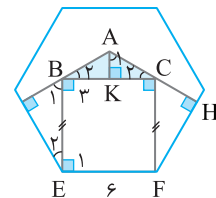
۳- گزینه ۱

بنابر فرض سؤال

چهارضلعی BCFE مربع است. پس

$\hat{E}_1 = 90^\circ$ از طرف دیگر هر زاویه داخلی

شش‌ضلعی منتظم 120° است. بنابراین



$$\hat{E}_1 + \hat{E}_2 = 120^\circ \xrightarrow{\hat{E}_1 = 90^\circ} \hat{E}_2 = 30^\circ \Rightarrow \hat{B}_1 = 60^\circ$$

چون $\hat{B}_2 = 90^\circ$ و $\hat{B}_1 = 60^\circ$ ، پس $\hat{B}_3 = 30^\circ$.

به همین ترتیب معلوم می‌شود $\hat{C}_1 = 30^\circ$. پس مثلث ABC

متساوی‌الساقین با زاویه رأس 120° است. بنابراین اگر ارتفاع AK وارد بر

قاعده BC را رسم کنیم، AK میانه و نیمساز هم هست. در نتیجه

$$BK = KC = \frac{BC}{2} = \frac{6}{2} = 3, \quad \hat{A}_1 = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$

در مثلث قائم‌الزاویه AKC ضلع KC روبه‌رو به زاویه 60° است، پس

$$KC = \frac{\sqrt{3}}{2} AC \Rightarrow 3 = \frac{\sqrt{3}}{2} AC \Rightarrow AC = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

و AK روبه‌رو به زاویه 30° است، پس

$$AK = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} (2\sqrt{3}) \Rightarrow AK = \sqrt{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AK \times BC = \frac{1}{2} (\sqrt{3}) (6) = 3\sqrt{3}$$

بنابراین

ماتریس AB ماتریس اسکالر است، پس درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی صفر و درایه‌های روی قطر اصلی همگی برابر یکدیگرند. بنابراین

$$\begin{cases} 2xz - 2z = 2 \Rightarrow xz - z = 1 \xrightarrow{\text{از (1)}} -xy + y = 1 \\ 2y - 4yz = 2 \Rightarrow y - 2yz = 1 \xrightarrow{\text{از (1)}} y + 2y^2 = 1 \\ 2x + 4y = 0 \Rightarrow x = -2y \\ 2yz + 2z^2 = 0 \xrightarrow{z \neq 0} y = -z \quad (1) \\ \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 0 \Rightarrow y = -z \end{cases}$$

در نتیجه

$$2y^2 + y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = \frac{1}{2} \quad (\text{غ.ق.ق}) \end{cases}$$

بنابراین $-xy + y = 1 \xrightarrow{y = -1} -xy - 1 = 1 \Rightarrow xy = -2$

دقت کنید $Z \neq 0$ زیرا در غیر این صورت مقدار $2xz - 2z$ برابر صفر است و با اسکالر بودن ماتریس AB در تناقض است.

۱-۰ گزینه ۳ ابتدا درمیان A را به دست می‌آوریم:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1(3-2) + 1(12-4) - 3(4-2) = 1+8-6=3$$

بنابراین

$$\begin{bmatrix} 2|A| & |A| \\ 1 & \frac{2}{|A|} \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

اکنون طرفین تساوی ماتریسی بالا را در وارون ماتریس $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ یعنی

ماتریس $\frac{1}{1} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -3 \\ 3 & 6 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$ از سمت چپ ضرب می‌کنیم. در نتیجه

$$X = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -3 \\ 3 & 6 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -15 & 6 \end{bmatrix}$$

پس کوچک‌ترین درایه قطر اصلی ماتریس X برابر ۶ است.

۱۱-۰ گزینه ۱ با انتخاب دو مقدار دلخواه برای m دو قطر دایره را

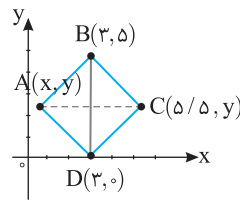
به دست آورده از تلاقی این دو قطر مرکز دایره به دست می‌آید.

$$\begin{cases} m = 2 \Rightarrow 3y = 6 \Rightarrow y = 2 \\ m = -1 \Rightarrow -3x = 6 \Rightarrow x = -2 \end{cases} \Rightarrow \text{مرکز دایره } O(-2, 2)$$

چون A روی دایره است، پس

$$R = OA = \sqrt{(-1+2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

بنابراین $2\pi R = 2\sqrt{2}\pi$ محیط دایره



۷-۰ گزینه ۲ بازتاب نقطه D

نسبت به محور X بر خودش منطبق است، پس نقطه D روی محور X قرار دارد، پس $D = (3, 0)$.

مسلماً بازتاب نقطه C نسبت به قطر BD نقطه A است زیرا قطرهای مربع

عمودمنصف یکدیگرند. فرض کنیم $A = (x, y)$ و $C = (5, 5, y)$ در

این صورت چون قطرهای مربع منصف یکدیگرند، بنابراین

$$A + C = B + D \Rightarrow (x, y) + (5, 5, y) = (3, 5) + (3, 0)$$

$$(x + 5, 5, 2y) = (6, 5)$$

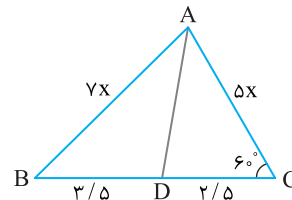
پس

$$\begin{cases} x + 5/5 = 6 \Rightarrow x = 1/5 \\ 2y = 5 \Rightarrow y = 2/5 \end{cases} \Rightarrow A(1/5, 2/5)$$

بنابراین

$$OA = \sqrt{1/5^2 + 2/5^2} = \sqrt{1/25 + 4/25} = \sqrt{5/25} = \sqrt{1/5} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

۸-۰ گزینه ۱ از قضیه نیمساز زاویه داخلی استفاده کرده می‌نویسیم:



$$AD \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{3/5}{2/5} = \frac{7x}{5x} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 5}{5 \cdot 5} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{7}{5}$$

با توجه به تناسب به دست آمده فرض می‌کنیم

$$AC = 5x, \quad AB = 7x$$

اکنون بنابر قضیه کسینوس‌ها،

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \cos 60^\circ$$

$$\xrightarrow{BC=6} 49x^2 = 25x^2 + 36 - 2(5x)(6) \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$49x^2 = 25x^2 + 36 - 30x \Rightarrow 24x^2 + 30x - 36 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 6} 4x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+96}}{8}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{8} = \frac{-5 \pm 11}{8} \Rightarrow x = \frac{-5+11}{8} \Rightarrow x = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

بنابراین ضلع کوچک‌تر این مثلث یعنی AC برابر $5 \times \frac{3}{4} = \frac{15}{4} = 3.75$ است.

(توجه کنید اگر $BD = 2/5$ و $DC = 3/5$ ، آن‌گاه مسئله جواب نخواهد

داشت. پس بهتر بود از ابتدا مطرح می‌شد $(AB > AC)$)

۹-۰ گزینه ۲ ابتدا ماتریس AB را پیدا می‌کنیم:

$$AB = \begin{bmatrix} x & -1 & -x \\ 0 & 0 & 4 \\ y & z & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2z & \frac{1}{2} & 2 \\ 2z & 0 & -4y \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2xz - 2z & 0 & 2x + 4y \\ 0 & 2 & 0 \\ 2yz + 2z^2 & \frac{y}{2} + \frac{z}{2} & 2y - 4yz \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} AC \text{ روی عمود منصف } M \Rightarrow MA=MC \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_\varphi = \hat{C} \\ AB \text{ روی عمود منصف } N \Rightarrow NA=NB \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_\varphi = \hat{B} \end{aligned} \right\}$$

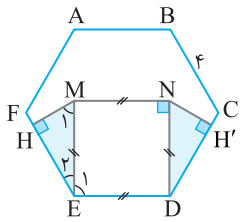
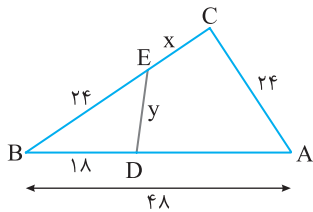
$$\xrightarrow{\text{جمع می کنیم}} \hat{A}_1 + \hat{A}_\varphi + \hat{A}_\varphi + \hat{A}_1 = \hat{B} + \hat{C} \xrightarrow{\hat{A}_1 + \hat{A}_\varphi + \hat{A}_\varphi = 80^\circ} 80^\circ + \hat{A}_1 = 180^\circ - 80^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 = 100^\circ$$

۱۶- گزینه ۱ دو مثلث ABC و BDE متشابه اند زیرا:

$$\left. \begin{aligned} \hat{E}CA = \hat{B}DE \\ \hat{B} = \hat{B} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle BDE \Rightarrow \frac{DE}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{BE}{AB}$$

$$\frac{y}{24} = \frac{18}{x+24} = \frac{24}{48} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{24} = \frac{24}{48} \Rightarrow \frac{y}{24} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 12 \\ \frac{18}{x+24} = \frac{24}{48} \Rightarrow \frac{18}{x+24} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 12 \end{cases}$$

بنابراین مقدار $\frac{x}{y}$ برابر یک است.



۱۷- گزینه ۴ چهار ضلعی

MNDE مربع به ضلع ۴ است. پس $\hat{E}_1 = 90^\circ$ در ضمن هر زاویه داخلی شش ضلعی منظم ۱۲۰ است. پس $\hat{E}_\varphi = 30^\circ$ در نتیجه در مثلث

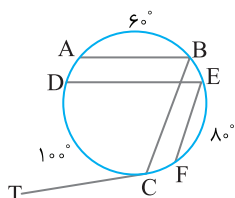
قائم الزاویه MHE زاویه M_1 برابر 60° می شود. بنابراین

$$\triangle MEH: \hat{M}_1 = 60^\circ \Rightarrow HE = \frac{\sqrt{3}}{2} ME \xrightarrow{ME=4} HE = 2\sqrt{3}$$

$$\triangle MEH: \hat{E}_\varphi = 30^\circ \Rightarrow MH = \frac{1}{2} ME \xrightarrow{ME=4} MH = 2$$

$$S_{MEH} = \frac{1}{2} MH \times EH = \frac{1}{2} (2)(2\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} \quad \text{پس}$$

به همین ترتیب مشخص می شود $S_{NDH'} = 2\sqrt{3}$. بنابراین مجموع مساحت های دو مثلث MHE و NDH' برابر $4\sqrt{3}$ است.



۱۸- گزینه ۳ می دانیم اندازه

کمان های بین دو وتر موازی مساوی اند. بنابراین

$$\left. \begin{aligned} AB \parallel DE \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BE} \\ BC \parallel EF \Rightarrow \widehat{BE} = \widehat{CF} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{CF} = \widehat{BE} = x$$

$$\widehat{AB} + \widehat{BE} + \widehat{EF} + \widehat{CF} + \widehat{CD} + \widehat{AD} = 360^\circ \quad \text{همچنین}$$

$$60^\circ + x + 80^\circ + x + 100^\circ + x = 360^\circ \Rightarrow 3x = 120^\circ \Rightarrow x = 40^\circ$$

از طرف دیگر زاویه BCT زاویه ظلی است. بنابراین

$$\widehat{BCT} = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{DC} + \widehat{AB}}{2} = \frac{40^\circ + 100^\circ + 60^\circ}{2} = 100^\circ$$

۱۲- گزینه ۲ اگر در سهمی افقی از معادله سهمی نسبت به y

مشق گرفته مساوی صفر قرار دهیم، آن گاه عرض رأس سهمی به دست می آید. پس

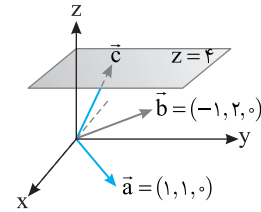
$$f'_y = 0 \Rightarrow 4y - 2a = 0 \xrightarrow{y=1} 4 - 2a = 0 \Rightarrow a = 2$$

در ضمن رأس سهمی در معادله سهمی صدق می کند. پس

$$2 - 2a - 8 + b = 0 \xrightarrow{a=2} 2 - 4 - 8 + b = 0 \Rightarrow b = 10$$

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

بنابراین



۱۳- گزینه ۴ ارتفاع بردار \vec{h}

برابر ۴ است. پس انتهای بردار \vec{h} روی صفحه $Z=4$ قرار دارد. در ضمن بردار

\vec{h} بر بردارهای \vec{a} و \vec{b} عمود نیست زیرا $\vec{a} \cdot \vec{h} \neq 0$ و $\vec{b} \cdot \vec{h} \neq 0$. بنابراین بردار

\vec{h} روی صفحه $Z=4$ قرار دارد. در نتیجه انتهای بردار \vec{c} روی صفحه $Z=4$ واقع است. بنابراین مختصات بردار \vec{c} به صورت $(x, y, 4)$ است.

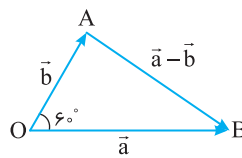
بنابر فرض سؤال،

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 1 \Rightarrow (1, 1, 0) \cdot (x, y, 4) = 1 \Rightarrow x + y = 1$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 5 \Rightarrow (-1, 2, 0) \cdot (x, y, 4) = 5 \Rightarrow -x + 2y = 5$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -x + 2y = 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع می کنیم}} 3y = 6 \rightarrow y = 2, x = -1 \quad \text{بنابراین}$$

$$\text{پس } |\vec{c}| = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21} \text{ و } \vec{c} = (-1, 2, 4)$$



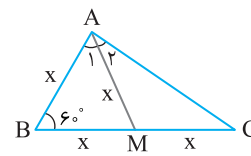
۱۴- گزینه ۱ در نظر بگیرید

$|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$ در این صورت بردار $\vec{a}-\vec{b}$

متناسب شکل مقابل خواهد بود. در مثلث OAB یک زاویه 60° و اندازه دو ضلع

این زاویه 60° به نسبت ۱ به ۲ هستند. پس مثلث OAB قائم الزاویه است و $\hat{A} = 90^\circ$ ، پس $\hat{B} = 30^\circ$. در نتیجه زاویه بین بردارهای \vec{a} و $\vec{a}-\vec{b}$

برابر 30° است.



نکته: توجه کنید اگر در مثلث ABC

$\hat{B} = 60^\circ$ ، $AB = x$ و $BC = 2x$ ،

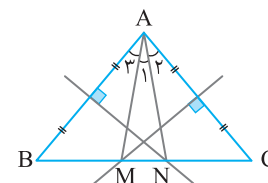
آن گاه $\hat{A} = 90^\circ$. زیرا اگر میانه AM

وارد بر BC را رسم کنید، آن گاه مثلث

ABM متساوی الاضلاع و مثلث AMC

متساوی الساقین است. پس $\hat{A}_1 = 60^\circ$ و

$\hat{A}_\varphi = 30^\circ$ ، در نتیجه $\hat{A} = 90^\circ$.



۱۵- گزینه ۲ بنابر داده های

سؤال شکل مقابل را خواهیم داشت.

می دانیم هر نقطه روی عمود منصف

یک پاره خط از دو سر پاره خط به یک

فاصله است.

۲۳- گزینه ۲ وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ برابر

پس $A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$ است.

$$\alpha A + \beta I = A^{-1} \Rightarrow \alpha \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\alpha + \beta & 2\alpha \\ 4\alpha & -3\alpha + \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{-5} & \frac{2}{-5} \\ \frac{4}{-5} & \frac{-1}{-5} \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\begin{cases} -\alpha + \beta = \frac{3}{-5} \Rightarrow -\frac{1}{5} + \beta = \frac{3}{-5} \Rightarrow \beta = \frac{4}{-5} \\ 2\alpha = \frac{2}{-5} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{-5} \end{cases}$$

در نتیجه $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\frac{4}{-5}}{\frac{1}{-5}} = 4$

۲۴- گزینه ۱ ابتدا درایه‌های ماتریس A^2 را به دست آوریم:

$$A^2 = A \times A$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

اکنون فقط درایه‌های سطر اول ماتریس A^3 را به دست می‌آوریم:

$$A^3 = A^2 \times A$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

بنابراین درایه‌های سطر اول ماتریس A^3 به صورت $[1 \quad -1 \quad 0]$ است.

۲۵- گزینه ۲ برای مشخص شدن راه‌حل هر دو دایره را ترسیم می‌کنیم؛ سپس مرکز و شعاع دایره‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$x^2 - 8x + y^2 + 15 = 0 \Rightarrow O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (4, 0)$$

$$R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{64 - 60}}{2} = 1$$

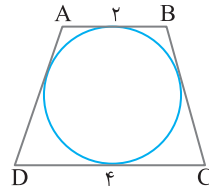
$$x^2 - 2x + y^2 = 0 \Rightarrow O'\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (1, 0)$$

$$R' = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$$

مطابق شکل دایره خط‌چین به مرکز O'' و شعاع R'' مرکزش روی محور x قرار دارد و بر هر دو دایره مماس خارج است. در شکل AB قطر دایره خط‌چین است چون $A(2, 0)$ و $B(3, 0)$ است. پس

$$R'' = \frac{AB}{2} = \frac{1}{2} \text{ و } O'' = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{5}{2}, 0\right)$$

۱۹- گزینه ۱ دروزنه متساوی‌الساقین

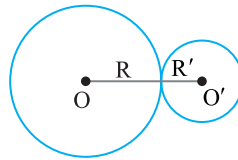


محیطی قطر دایره محاطی واسطه هندسی بین دو قاعده دوزنه است. به عبارتی اگر شعاع دایره محاطی دوزنه متساوی‌الساقین محیطی ABCD باشد، آن‌گاه $4R^2 = AB \times DC$ پس

$$4R^2 = AB \times DC \Rightarrow 4R^2 = 2 \times 4 \Rightarrow R^2 = 2$$

$$\text{بنابراین مساحت دایره} = \pi R^2 = 2\pi$$

بنابراین



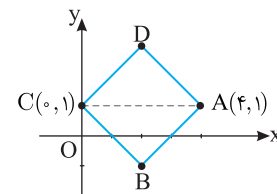
۲۰- گزینه ۴ طول خط‌المرکزین

دو دایره مماس خارج مساوی $R + R'$ است. پس طول مماس مشترک خارجی این دو دایره $2\sqrt{RR'}$ است. بنابر فرض سؤال،

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \frac{\sqrt{3}}{2} R \Rightarrow 2\sqrt{RR'} = \frac{\sqrt{3}}{2} R$$

$$4RR' = \frac{3}{4} R^2 \Rightarrow 4R' = \frac{3}{4} R \Rightarrow R = \frac{16}{3} R'$$

بنابراین شعاع دایره بزرگ‌تر $\frac{16}{3}$ برابر شعاع دایره کوچک‌تر است.



۲۱- گزینه ۱ چون بازتاب

نقطه C نسبت به محور y بر خودش منطبق است، پس نقطه C روی محور y قرار دارد، پس مختصات C به صورت $(0, 1)$

است. در ضمن عرض نقطه D برابر ۳ است. فرض می‌کنیم $D(x, 3)$. چون قطرهای مربع عمودمنصف یکدیگرند، پس رأس $B(x, y)$ بازتاب

D نسبت به قطر AC است. چون قطرهای مربع منصف یکدیگرند، پس

$$A + C = B + D \Rightarrow (4, 1) + (0, 1) = (x, 3) + (x, y)$$

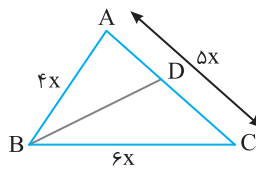
$$\begin{cases} 4 = 2x \Rightarrow x = 2 \\ 2 = 3 + y \Rightarrow y = -1 \end{cases} \Rightarrow B(2, -1)$$

$$OB = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

بنابراین

۲۲- گزینه ۳ در مثلث ABC

فرض کنیم $AB = 4x$ ، $AC = 5x$ و $BC = 6x$. در این صورت زاویه B زاویه متوسط مثلث است. فرض کنیم BD نیمساز زاویه B باشد. در این



صورت دو مثلث ABD و ABC دارای ارتفاع مشترک از رأس B هستند. پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های نظیرشان است. پس:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{AD}{AC} \quad (1)$$

از طرف دیگر بنابر قضیه نیمساز داخلی می‌نویسیم:

$$BD \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \xrightarrow{\text{ترکیب}} \frac{AD}{AD+DC} = \frac{AB}{AB+BC} \quad (2)$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AB+BC} \Rightarrow \frac{AD}{4x+6x} = \frac{4x}{4x+6x} \Rightarrow \frac{AD}{10x} = \frac{4x}{10x} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{2}{5}$$

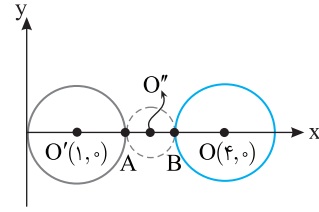
بنابراین

$$(2), (1) \Rightarrow \frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \frac{5}{2}$$

بنابراین معادله این دایره به صورت زیر است:

$$(x - \frac{5}{2})^2 + (y - 0)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 + \frac{25}{4} - 5x + y^2 = \frac{1}{4}$$

$$x^2 + y^2 - 5x + 6 = 0$$



۲۶- گزینه ۳ ابتدا معادله بیضی را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$x^2 + 4y^2 - 16y - 2x + 16 = 0 \Rightarrow (x^2 - 2x) + 4(y^2 - 4y) + 16 = 0$$

$$(x-1)^2 - 1 + 4[(y-2)^2 - 4] + 16 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + 4(y-2)^2 = 1$$

$$(x-1)^2 + \frac{(y-2)^2}{\frac{1}{4}} = 1$$

بنابراین بیضی افقی با مقادیر $a^2 = 1$ و $b^2 = \frac{1}{4}$ است، پس

$$c^2 = a^2 - b^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین فاصله دو کانون برابر $2c = \sqrt{3}$ است. «توجه کنید معادله بیضی در کتاب درسی هندسه ۳ مطرح نشده است، پس این سؤال خارج از سرفصل کتاب درسی است.»