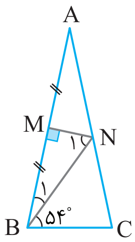
آزمون ۱۰۱

۱- گزینۀ ۳ بنابر فرض سؤال شکل مقابل را خواهیم داشت، نقطۀ N روی عمودمنصف AB است، پس N از دو سر ضلع AB به یک فاصله است یعنی $NA=NB$. بنابراین $\hat{B}_۱=\hat{A}=\alpha$. در ضمن $AB=AC$ پس $\hat{B}_۱+۵۴^\circ=\hat{C}$. بنابراین



$$\triangle ABC:\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ\Rightarrow\alpha+\hat{B}_۱+۵۴^\circ+\hat{B}_۱+۵۴^\circ=۱۸۰^\circ$$

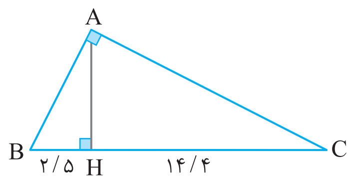
$$\xrightarrow{\hat{B}_۱=\alpha}۳\alpha=۱۸۰^\circ-۱۰۸^\circ\Rightarrow۳\alpha=۷۲^\circ\Rightarrow\alpha=\frac{۷۲^\circ}{۳}=۲۴^\circ$$

در نتیجه

$$\triangle BMN:\hat{M}+\hat{N}_۱+\hat{B}_۱=۱۸۰^\circ$$

$$\xrightarrow{\hat{B}_۱=۲۴^\circ}۹۰^\circ+\hat{N}_۱+۲۴^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{N}_۱=۶۶^\circ$$

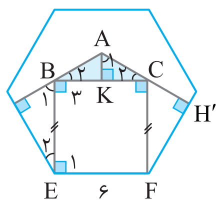
۲- گزینۀ ۲ در مثلث قائم‌الزاویۀ ABC ارتفاع AH روی وتر BC پاره‌خط‌هایی به طول ۲/۵ و ۱۴/۴ جدا کرده است. با استفاده از رابطۀ طولی در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم:



$$AH^۲=BH\times CH\Rightarrow AH^۲=۲/۵\times۱۴/۴=\frac{۲۵}{۱۰}\times\frac{۱۴۴}{۱۰}$$

$$AH=\frac{۵\times۱۲}{۱۰}=\frac{۱۲}{۲}=۶$$

۳- گزینۀ ۱ بنابر فرض سؤال چهارضلعی BCFE مربع است. پس $\hat{E}_۱=۹۰^\circ$. از طرف دیگر هر زاویۀ داخلی شش‌ضلعی منتظم ۱۲۰° است. بنابراین



$$\hat{E}_۱+\hat{E}_۲=۱۲۰^\circ\xrightarrow{\hat{E}_۱=۹۰^\circ}\hat{E}_۲=۳۰^\circ\Rightarrow\hat{B}_۱=۶۰^\circ$$

چون $\hat{B}_۳=۹۰^\circ$ و $\hat{B}_۱=۶۰^\circ$، پس $\hat{B}_۲=۳۰^\circ$.

به همین ترتیب معلوم می‌شود $\hat{C}_۲=۳۰^\circ$. پس مثلث ABC متساوی‌الساقین با زاویۀ رأس ۱۲۰° است. بنابراین اگر ارتفاع AK را وارد بر قاعدۀ BC را رسم کنیم، AK میانه و نیمساز هم هست. در نتیجه

$$BK=KC=\frac{BC}{۲}=\frac{۶}{۲}=۳,\quad \hat{A}_۱=\frac{\hat{A}}{۲}=\frac{۱۲۰^\circ}{۲}=۶۰^\circ$$

در مثلث قائم‌الزاویۀ AKC ضلع KC روبه‌رو به زاویۀ ۶۰° است، پس

$$KC=\frac{\sqrt{۳}}{۲}AC\Rightarrow۳=\frac{\sqrt{۳}}{۲}AC\Rightarrow AC=\frac{۶}{\sqrt{۳}}=۲\sqrt{۳}$$

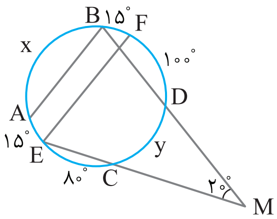
و AK روبه‌رو به زاویۀ ۳۰° است، پس

$$AK=\frac{۱}{۲}AC=\frac{۱}{۲}(۲\sqrt{۳})\Rightarrow AK=\sqrt{۳}$$

بنابراین

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AK\times BC=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۳})(۶)=۳\sqrt{۳}$$

۴- گزینۀ ۴ می‌دانیم کمان‌های محصور بین دو وتر موازی مساوی‌اند، پس



$$AB\|EF\Rightarrow\overset{\frown}{BF}=\overset{\frown}{AE}$$

$$\xrightarrow{\overset{\frown}{AE}=۱۵^\circ}\overset{\frown}{BF}=۱۵^\circ$$

با فرض $\overset{\frown}{AB}=x$ و $\overset{\frown}{CD}=y$ می‌نویسیم:

$$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BF}+\overset{\frown}{FD}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{EC}+\overset{\frown}{AE}=۳۶۰^\circ$$

$$x+۱۵^\circ+۱۰۰^\circ+y+۸۰^\circ+۱۵^\circ=۳۶۰^\circ\Rightarrow x+y=۱۵۰^\circ\quad(۱)$$

از طرف دیگر،

$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{EAB}-\overset{\frown}{CD}}{۲}\Rightarrow۲۰^\circ=\frac{۱۵^\circ+x-y}{۲}\Rightarrow x-y=۲۵^\circ\quad(۲)$$

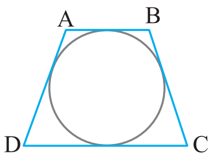
$$(۱)\text{ و }(۲)\text{ از}\Rightarrow\begin{cases}x+y=۱۵۰^\circ\\x-y=۲۵^\circ\end{cases}\xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}}۲y=۱۲۵^\circ\Rightarrow y=۶۲/۵^\circ$$

بنابراین

$$\text{زاویۀ محاطی }A\hat{B}D=\frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}\Rightarrow A\hat{B}D=\frac{۶۲/۵^\circ+۸۰^\circ+۱۵^\circ}{۲}$$

$$=\frac{۱۵۷/۵^\circ}{۲}=۷۸/۷۵$$

۵- گزینۀ ۴ اگر ذوزنقۀ متساوی‌الساقین بر دایرۀ به شعاع R محیط باشد، آن‌گاه قطر دایرۀ محاطی واسطۀ هندسی بین دو قاعده است؛ پس



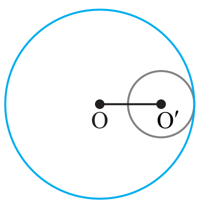
$$۴R^۲=AB\times DC\quad(۱)$$

از طرف دیگر،

$$\text{مساحت دایره}=۱۵\pi\Rightarrow\pi R^۲=۱۵\pi\Rightarrow R^۲=۱۵\quad(۲)$$

$$(۱)\text{ و }(۲)\text{ از}\Rightarrow۴\times۱۵=۶\times a\Rightarrow a=۱۰$$

۶- گزینۀ ۱ فرض کنیم R شعاع دایرۀ بزرگ‌تر و R′ شعاع دایرۀ کوچک‌تر باشد. چون دو دایره مماس درونی‌اند، پس $OO'=R-R'$. یعنی $R-R'=۳/۵$. از طرف دیگر،



$$\text{مساحت بین دو دایره}=۲۱\pi\Rightarrow\pi R^۲-\pi R'^۲=۲۱\pi\Rightarrow R^۲-R'^۲=۲۱$$

$$(R-R')(R+R')=۲۱\xrightarrow{R-R'=۳/۵}۳/۵(R+R')=۲۱$$

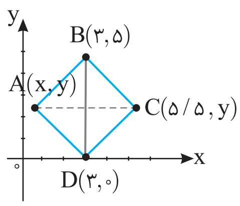
$$R+R'=\frac{۲۱}{۳/۵}=\frac{۲۱}{\frac{۷}{۲}}=۶$$

بنابراین

$$\begin{cases}R-R'=۳/۵\\R+R'=۶\end{cases}\xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}}۲R'=۶-۳/۵$$

$$۲R'=۲/۵\Rightarrow R'=\frac{۲/۵}{۲}=۱/۲۵$$

۷- گزینهٔ ۲ بازتاب نقطهٔ D نسبت به محور x بر خودش منطبق است، پس نقطهٔ D روی محور x قرار دارد، پس $D=(3,0)$.



مسلماً بازتاب نقطهٔ C نسبت به قطر BD نقطهٔ A است زیرا قطرهای مربع عمودمنصف یکدیگرند. فرض کنیم $A=(x,y)$ و $C=(5.5,y)$. در این صورت چون قطرهای مربع منصف یکدیگرند، بنابراین

$$A+C=B+D\Rightarrow(x,y)+(5.5,y)=(3,5)+(3,0)$$

$$(x+5.5,2y)=(6,5)$$

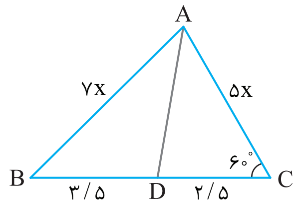
پس

$$\begin{cases}x+5.5=6\Rightarrow x=0.5\\2y=5\Rightarrow y=2.5\end{cases}\Rightarrow A(0.5,2.5)$$

بنابراین

$$OA=\sqrt{0.5^2+2.5^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{25}{4}}=\sqrt{\frac{26}{4}}=\sqrt{6.5}$$

۸- گزینهٔ ۱ از قضیهٔ نیمساز زاویهٔ داخلی استفاده کرده می‌نویسیم:



$$\text{نیمساز } AD\Rightarrow\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{3.5}{2.5}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{35}{25}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{7}{5}=\frac{AB}{AC}$$

با توجه به تناسب به‌دست آمده فرض می‌کنیم

$$AC=5x,\quad AB=7x$$

اکنون بنابر قضیهٔ کسینوس‌ها،

$$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\times BC\cos60^\circ$$

$$\xrightarrow{BC=6}49x^2=25x^2+36-2(5x)(6)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$49x^2=25x^2+36-30x\Rightarrow24x^2+30x-36=0$$

$$\xrightarrow{\div6}4x^2+5x-6=0\Rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{25+96}}{8}$$

$$=\frac{-5\pm\sqrt{121}}{8}=\frac{-5\pm11}{8}\Rightarrow x=\frac{-5+11}{8}\Rightarrow x=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

بنابراین ضلع کوچک‌تر این مثلث یعنی AC برابر $5x=5\times\frac{3}{4}=\frac{15}{4}=3.75$ است.

(توجه کنید اگر $BD=2.5$ و $DC=3.5$، آن‌گاه مسئله جواب نخواهد داشت. پس بهتر بود از ابتدا مطرح می‌شد $AB>AC$)

۹- گزینهٔ ۲ ابتدا ماتریس AB را پیدا می‌کنیم:

$$AB=\begin{bmatrix}x&-1&-x\\0&0&4\\y&z&z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2z&\frac{1}{2}&2\\2z&0&-4y\\0&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2xz-2z&0&2x+4y\\0&2&0\\2yz+2z^2&\frac{y}{2}+\frac{z}{2}&2y-4yz\end{bmatrix}$$

ماتریس AB ماتریس اسکالر است، پس درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی صفر و درایه‌های روی قطر اصلی همگی برابر یکدیگرند. بنابراین

$$\begin{cases}2xz-2z=2\Rightarrow xz-z=1\xrightarrow{\text{از }(1)}-xy+y=1\\2y-4yz=2\Rightarrow y-2yz=1\xrightarrow{\text{از }(1)}y+2y^2=1\\2x+4y=0\Rightarrow x=-2y\\2yz+2z^2=0\xrightarrow{z\neq0}y=-z\quad(1)\\\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=0\Rightarrow y=-z\end{cases}$$

در نتیجه

$$2y^2+y-1=0\Rightarrow y=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{-1\pm3}{4}\Rightarrow\begin{cases}y=-1\\y=\frac{1}{2}\ (\text{غ.ق.ق})\end{cases}$$

بنابراین

$$-xy+y=1\xrightarrow{y=-1}-xy-1=1\Rightarrow xy=-2$$

دقت کنید $z\neq0$ زیرا در غیر این صورت مقدار $2xz-2z$ برابر صفر است و با اسکالر بودن ماتریس AB در تناقض است.

۱۰- گزینهٔ ۳ ابتدا دترمینان A را به‌دست می‌آوریم:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&-1&-3\\4&1&2\\2&1&3\end{vmatrix}=1(-1)^2\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}+(-1)(-1)^3\begin{vmatrix}4&2\\2&3\end{vmatrix}$$

$$+(-3)(-1)^4\begin{vmatrix}4&1\\2&1\end{vmatrix}=1(3-2)+1(12-4)-3(4-2)=1+8-6=3$$

بنابراین

$$\begin{bmatrix}2|A|&|A|\\1&\frac{2}{|A|}\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}3&0\\-2&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}6&3\\1&\frac{2}{3}\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}3&0\\-2&1\end{bmatrix}$$

اکنون طرفین تساوی ماتریسی بالا را در وارون ماتریس $\begin{bmatrix}6&3\\1&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$ یعنی ماتریس $\frac{1}{1}\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&-3\\-1&6\end{bmatrix}$ از سمت چپ ضرب می‌کنیم. در نتیجه

$$X=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&-3\\-1&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0\\-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&-3\\-15&6\end{bmatrix}$$

پس کوچک‌ترین درایهٔ قطر اصلی ماتریس X برابر ۶ است.

۱۱- گزینهٔ ۱ با انتخاب دو مقدار دلخواه برای m دو قطر دایره را به‌دست آورده از تلاقی این دو قطر مرکز دایره به‌دست می‌آید.

$$\left.\begin{array}{l}m=2\Rightarrow3y=6\Rightarrow y=2\\m=-1\Rightarrow-3x=6\Rightarrow x=-2\end{array}\right\}\Rightarrow \text{مرکز دایره } O(-2,2)$$

چون A روی دایره است، پس

$$R=OA=\sqrt{(-1+2)^2+(1-2)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

بنابراین

$$\text{محیط دایره}=2\pi R=2\sqrt{2}\pi$$

۱۲- گزینهٔ ۲ اگر در سهمی افقی از معادلهٔ سهمی نسبت به y مشتق گرفته مساوی صفر قرار دهیم، آن‌گاه عرض رأس سهمی به‌دست می‌آید، پس

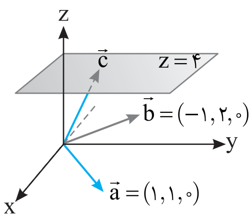
$$f'_y=۰\Rightarrow ۴y-۲a=۰\xrightarrow{y=۱}۴-۲a=۰\Rightarrow a=۲$$

در ضمن رأس سهمی در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند، پس

$$۲-۲a-۸+b=۰\xrightarrow{a=۲}۲-۴-۸+b=۰\Rightarrow b=۱۰$$

بنابراین $\frac{a}{b}=\frac{۲}{۱۰}=\frac{۱}{۵}$

۱۳- گزینهٔ ۴ ارتفاع بردار $\vec h$ برابر ۴ است، پس انتهای بردار $\vec h$ روی صفحهٔ $z=۴$ قرار دارد. در ضمن بردار $\vec h$ بر بردارهای $\vec a$ و $\vec b$ عمود نیست زیرا $\vec a\cdot\vec h\neq ۰$ و $\vec b\cdot\vec h\neq ۰$، بنابراین بردار $\vec h$ روی صفحهٔ $z=۴$ قرار دارد. در نتیجه انتهای بردار $\vec c$ روی صفحهٔ $z=۴$ واقع است، بنابراین مختصات بردار $\vec c$ به صورت $(x,y,۴)$ است.



بنابر فرض سؤال،

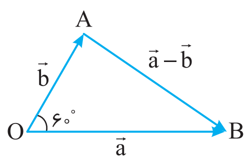
$$\vec a\cdot\vec c=۱\Rightarrow(۱,۱,۰)\cdot(x,y,۴)=۱\Rightarrow x+y=۱$$

$$\vec b\cdot\vec c=۵\Rightarrow(-۱,۲,۰)\cdot(x,y,۴)=۵\Rightarrow -x+۲y=۵$$

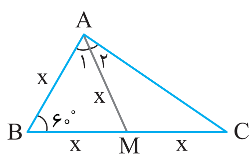
بنابراین $\begin{cases}x+y=۱\\-x+۲y=۵\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}}۳y=۶\to y=۲,x=-۱$

پس $\vec c=(-۱,۲,۴)$ و $|\vec c|=\sqrt{۱+۴+۱۶}=\sqrt{۲۱}$.

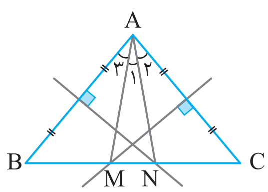
۱۴- گزینهٔ ۱ در نظر بگیرید $|\vec a|=۲|\vec b|$. در این صورت $\vec a-\vec b$ مطابق شکل مقابل خواهد بود. در مثلث OAB یک زاویهٔ ۶۰° و اندازهٔ دو ضلع این زاویهٔ ۶۰° به نسبت ۱ به ۲ هستند. پس مثلث OAB قائم‌الزاویه است و $\hat A=۹۰^\circ$، پس $\hat B=۳۰^\circ$. در نتیجه زاویهٔ بین بردارهای $\vec a$ و $\vec a-\vec b$ برابر ۳۰° است.



نکته: توجه کنید اگر در مثلث ABC، $\hat B=۶۰^\circ$، $AB=x$ و $BC=۲x$، آن‌گاه $\hat A=۹۰^\circ$. زیرا اگر میانهٔ AM وارد بر BC را رسم کنید، آن‌گاه مثلث ABM متساوی‌الاضلاع و مثلث AMC متساوی‌الساقین است؛ پس $\hat A_۱=۶۰^\circ$ و $\hat A_۲=۳۰^\circ$، در نتیجه $\hat A=۹۰^\circ$.



۱۵- گزینهٔ ۲ بنابر داده‌های سؤال شکل مقابل را خواهیم داشت. می‌دانیم هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.



$$\left.\begin{array}{l}M \text{ روی عمود منصف } AC\Rightarrow MA=MC\Rightarrow \hat A_۱+\hat A_۲=\hat C\\ N \text{ روی عمود منصف } AB\Rightarrow NA=NB\Rightarrow \hat A_۱+\hat A_۳=\hat B\end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}}\hat A_۱+\hat A_۲+\hat A_۳+\hat A_۱=\hat B+\hat C\xrightarrow{\hat A_۱+\hat A_۲+\hat A_۳=۸۰^\circ}$$

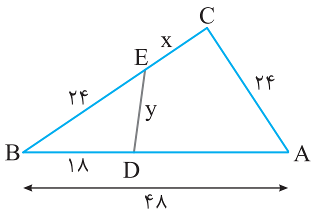
$$۸۰^\circ+\hat A_۱=۱۸۰^\circ-۸۰^\circ\Rightarrow\hat A_۱=۲۰^\circ$$

۱۶- گزینهٔ ۱ دو مثلث ABC و BDE متشابه‌اند زیرا:

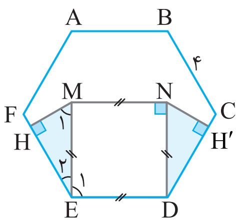
$$\left.\begin{array}{l}E\hat CA=B\hat DE\\ \hat B=\hat B\end{array}\right\}\Rightarrow\triangle ABC\sim\triangle BDE\Rightarrow\frac{DE}{AC}=\frac{BD}{BC}=\frac{BE}{AB}$$

$$\frac{y}{۲۴}=\frac{۱۸}{x+۲۴}=\frac{۲۴}{۴۸}\Rightarrow\begin{cases}\frac{y}{۲۴}=\frac{۲۴}{۴۸}\Rightarrow\frac{y}{۲۴}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow y=۱۲\\ \frac{۱۸}{x+۲۴}=\frac{۲۴}{۴۸}\Rightarrow\frac{۱۸}{x+۲۴}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=۱۲\end{cases}$$

بنابراین مقدار $\frac{x}{y}$ برابر یک است.



۱۷- گزینهٔ ۴ چهارضلعی MNDE مربع به ضلع ۴ است، پس $\hat E_۱=۹۰^\circ$. در ضمن هر زاویهٔ داخلی شش‌ضلعی منتظم ۱۲۰° است، پس $\hat E_۲=۳۰^\circ$، در نتیجه در مثلث قائم‌الزاویهٔ MHE زاویهٔ $M_۱$ برابر ۶۰° می‌شود، بنابراین



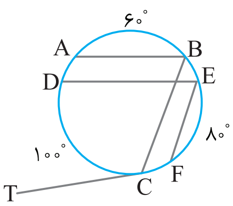
$$\triangle MEH:\hat M_۱=۶۰^\circ\Rightarrow HE=\frac{\sqrt{۳}}{۲}ME\xrightarrow{ME=۴}HE=۲\sqrt{۳}$$

$$\triangle MEH:\hat E_۲=۳۰^\circ\Rightarrow MH=\frac{۱}{۲}ME\xrightarrow{ME=۴}MH=۲$$

پس $S_{MEH}=\frac{۱}{۲}MH\times EH=\frac{۱}{۲}(۲)(۲\sqrt{۳})=۲\sqrt{۳}$

به همین ترتیب مشخص می‌شود $S_{NDH'}=۲\sqrt{۳}$. بنابراین مجموع مساحت‌های دو مثلث MHE و NDH' برابر $۴\sqrt{۳}$ است.

۱۸- گزینهٔ ۳ می‌دانیم اندازهٔ کمان‌های بین دو وتر موازی مساوی‌اند. بنابراین



$$\left.\begin{array}{l}AB\|DE\Rightarrow\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BE}\\ BC\|EF\Rightarrow\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{CF}\end{array}\right\}$$

$$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CF}=\overset{\frown}{BE}=x$$

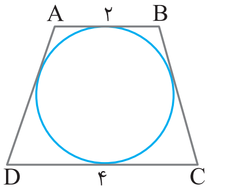
همچنین $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BE}+\overset{\frown}{EF}+\overset{\frown}{CF}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{AD}=۳۶۰^\circ$

$$۶۰^\circ+x+۸۰^\circ+x+۱۰۰^\circ+x=۳۶۰^\circ\Rightarrow ۳x=۱۲۰^\circ\Rightarrow x=۴۰^\circ$$

از طرف دیگر زاویهٔ BCT زاویهٔ ظلی است؛ بنابراین

$$B\hat CT=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{DC}+\overset{\frown}{AB}}{۲}=\frac{۴۰^\circ+۱۰۰^\circ+۶۰^\circ}{۲}=۱۰۰^\circ$$

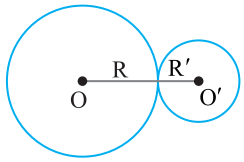
۱۹- گزینهٔ ۱ درذوزنقهٔ‌متساوی‌الساقین محیطی قطر دایرهٔ محاطی واسطهٔ هندسی بین دو قاعدهٔ ذوزنقه است. به عبارتی اگر R شعاع دایرهٔ محاطی ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین محیطی ABCD باشد، آن‌گاه $4R^2=AB\times DC$. پس



$$4R^2=AB\times DC\Rightarrow 4R^2=2\times4\Rightarrow R^2=2$$

بنابراین $\text{مساحت دایره}=\pi R^2=2\pi$

۲۰- گزینهٔ ۴ طـول خط‌المرکزین دو دایـرهٔ مماس خارج مسـاوی $R+R'$ است. پس طول مماس مشترک خارجی این دو دایره $2\sqrt{RR'}$ است. بنابر فرض سؤال،

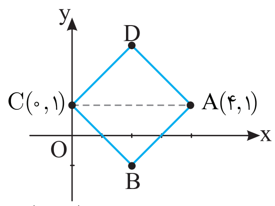


$$\text{طول مماس مشترک خارجی}=\frac{\sqrt3}{2}R\Rightarrow 2\sqrt{RR'}=\frac{\sqrt3}{2}R$$

$$4RR'=\frac34R^2\Rightarrow 4R'=\frac34R\Rightarrow R=\frac{16}{3}R'$$

بنابراین شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر $\frac{16}{3}$ برابر شعاع دایرهٔ کوچک‌تر است.

۲۱- گزینهٔ ۱ چون بازتاب نقطهٔ C نسبت بـه محـور y بر خودش منطبق اسـت، پس نقطهٔ C روی محـور y قـرار دارد، پـس مختصـات C بـه‌صـورت $(0,1)$ اسـت. در ضمن عرض نقطهٔ D برابر ۳ اسـت. فرض می‌کنیم $D(x,3)$. چون قطرهای مربع عمودمنصـف یکدیگرند، پس رأس $B(x,y)$ بازتاب D نسبت به قطر AC است. چون قطرهای مربع منصف یکدیگرند، پس

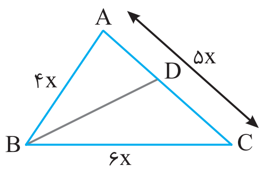


$$A+C=B+D\Rightarrow(4,1)+(0,1)=(x,3)+(x,y)$$

$$\begin{cases}4=2x\Rightarrow x=2\\ 2=3+y\Rightarrow y=-1\end{cases}\Rightarrow B(2,-1)$$

بنابراین $OB=\sqrt{4+1}=\sqrt5$

۲۲- گزینهٔ ۳ در مثلث ABC فرض کنیم $AB=4x$، $AC=5x$ و $BC=6x$. در ایـن صورت زاویهٔ B زاویهٔ متوسط مثلث است. فرض کنیم BD نیمساز زاویهٔ B باشـد. در این صورت دو مثلث ABD و ABC دارای ارتفاع مشترک از رأس B هستند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های نظیرشان است. پس:



$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}}=\frac{AD}{AC}\qquad(1)$$

از طرف دیگر بنابر قضیهٔ نیمساز داخلی می‌نویسیم:

$$\text{نیمساز }BD\Rightarrow\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}\xrightarrow[\text{درمخرج}]{\text{ترکیب}}\frac{AD}{AD+DC}=\frac{AB}{AB+BC}$$

$$\frac{AD}{AC}=\frac{AB}{AB+BC}\Rightarrow\frac{AD}{AC}=\frac{4x}{4x+6x}\Rightarrow\frac{AD}{AC}=\frac{4x}{10x}\Rightarrow\frac{AD}{AC}=\frac25\qquad(2)$$

بنابراین

$$(1),(2)\ \text{از}\Rightarrow\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}}=\frac25\Rightarrow\frac{S_{ABC}}{S_{ABD}}=\frac52$$

۲۳- گزینهٔ ۲ وارون ماتریـس $A=\begin{bmatrix}-1&2\\4&-3\end{bmatrix}$ برابـر $A^{-1}=\frac{1}{-5}\begin{bmatrix}-3&-2\\-4&-1\end{bmatrix}$ است. پس

$$\alpha A+\beta I=A^{-1}\Rightarrow\alpha\begin{bmatrix}-1&2\\4&-3\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\frac{1}{-5}\begin{bmatrix}-3&-2\\-4&-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-\alpha+\beta&2\alpha\\4\alpha&-3\alpha+\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac35&\frac25\\\frac45&\frac15\end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\begin{cases}-\alpha+\beta=\frac35\Rightarrow-\frac15+\beta=\frac35\Rightarrow\beta=\frac45\\ 2\alpha=\frac25\Rightarrow\alpha=\frac15\end{cases}$$

در نتیجه $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\frac45}{\frac15}=4$.

۲۴- گزینهٔ ۱ ابتدا درایه‌های ماتریس A^2 را به‌دست آوریم:

$A^2=A\times A$

$$=\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-4&4\\0&-1&0\\-2&2&-3\end{bmatrix}$$

اکنون فقط درایه‌های سطر اول ماتریس A^3 را به‌دست می‌آوریم:

$A^3=A^2\times A$

$$=\begin{bmatrix}3&-4&4\\0&-1&0\\-2&2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\?&?&?\\?&?&?\end{bmatrix}$$

بنابراین درایه‌های سطر اول ماتریس A^3 به‌صورت $\begin{bmatrix}1&-1&0\end{bmatrix}$ است.

۲۵- گزینهٔ ۲ برای مشـخص شـدن راه‌حل هر دو دایره را ترسیم می‌کنیم؛ سپس مرکز و شعاع دایره‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$x^2-8x+y^2+15=0\Rightarrow O\left(-\frac a2,-\frac b2\right)=(4,0)$$

$$R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{64-60}}{2}=1$$

$$x^2-2x+y^2=0\Rightarrow O'\left(-\frac a2,-\frac b2\right)=(1,0)$$

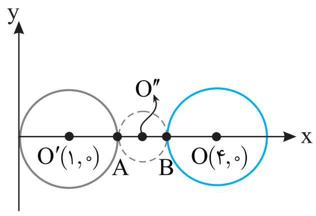
$$R'=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt4}{2}=1$$

مطابق شـکل دایـرهٔ خطچین به مرکز O'' و شـعاع R'' مرکزش روی محور x قرار دارد و بر هر دو دایره مماس خارج است. در شکل AB قطر دایـرهٔ خطچین اسـت چـون $A(2,0)$ و $B(3,0)$ اسـت. پـس $O''=\frac{A+B}{2}=(\frac52,0)$ و $R''=\frac{AB}{2}=\frac12$.

بنابراین معادلهٔ این دایره به صورت زیر است:

$$(x-\frac{۵}{۲})^۲+(y-۰)^۲=\frac{۱}{۴}\Rightarrow x^۲+\frac{۲۵}{۴}-۵x+y^۲=\frac{۱}{۴}$$

$$x^۲+y^۲-۵x+۶=۰$$



۲۶- گزینهٔ ۳ ابتدا معادلهٔ بیضی را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$x^۲+۴y^۲-۱۶y-۲x+۱۶=۰\Rightarrow(x^۲-۲x)+۴(y^۲-۴y)+۱۶=۰$$

$$(x-۱)^۲-۱+۴[(y-۲)^۲-۴]+۱۶=۰\Rightarrow(x-۱)^۲+۴(y-۲)^۲=۱$$

$$(x-۱)^۲+\frac{(y-۲)^۲}{\frac{۱}{۴}}=۱$$

بنابراین بیضی افقی با مقادیر $a^۲=۱$ و $b^۲=\frac{۱}{۴}$ است، پس

$$c^۲=a^۲-b^۲=۱-\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow c=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

بنابراین فاصلهٔ دو کانون برابر $۲c=\sqrt{۳}$ اســت. «توجه کنید معادلهٔ بیضی در کتاب درســی هندســه ۳ مطرح نشــده است، پس این ســؤال خارج از سرفصل کتاب درسی است».