

پاسخ کنکور سراسری ۱۴۰۰

۱۱۰۲۷ سطر سوم ماتریس A را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$\text{سطر سوم حاصل ضرب دو ماتریس اول} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ 3 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

اکنون سطر سوم ماتریس A را پیدا می کنیم:

$$A \text{ سطر سوم} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ 3 & 7 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ 7 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه های سطر سوم ماتریس A مساوی $7+1-5=3$ است.

۱۱۰۲۸ توجه کنید که

$$BA^T A = 52I \Rightarrow B \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = 52I$$

$$B \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = 52I \quad (1)$$

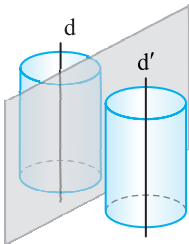
اکنون برای پیدا کردن ماتریس B، طرفین تساوی (۱) را از سمت راست در

وارون ماتریس $\begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ضرب می کنیم. توجه کنید که

$$\text{بنابراین} \cdot \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 14 \end{bmatrix}$$

$$B = 52I \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = 52I \times \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 14 \end{bmatrix} = \frac{52}{26} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 14 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -8 & 28 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماکزیم مقدار درایه های ماتریس B برابر ۲۸ است.



۱۱۰۲۹ فرض کنید $k > 0$. مکان هندسی

نقاطی از فضا که از خط های موازی d و d' به فاصله k هستند، دو سطح استوانه ای با محورهای d و d' هستند (شکل مقابل را ببینید). صفحه هایی که بر این دو سطح استوانه ای مماس هستند، از دو خط d و d' به یک فاصله هستند که در اینجا تعداد آن ها حداکثر ۴ تا است. در واقع دو تا از این

صفحه ها می توانند طوری بر این دو سطح استوانه ای مماس باشند که هر دو سطح در یک طرف این صفحه ها باشند و دو تا از این صفحه ها می توانند طوری بر این دو سطح استوانه ای مماس باشند که دو سطح در طرفین این صفحه ها باشند. با تغییر مقدار k .

۱۱۰۲۵ زاویه بین بردار $\vec{a} = (-1, \alpha, 1)$ و محور Z در فضا برابر 45° است. بنابراین

$$\cos 45^\circ = \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{|\vec{a}| |\vec{k}|} = \frac{\vec{k} = (0, 0, 1)}{\sqrt{2} \times \sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{2 + \alpha^2} \times \sqrt{1}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2 + \alpha^2} \Rightarrow \alpha = 0$$

بنابراین $\vec{a} = (-1, 0, 1)$. اکنون به جای بردار $\vec{b} = (-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 2)$ از بردار

$\frac{3}{2}\vec{b} = (-2, 1, 3)$ استفاده می کنیم. در این صورت

$$\vec{a} \times \frac{3}{2}\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

توجه کنید که چون $\vec{a} \times \frac{3}{2}\vec{b} = \frac{3}{2}(\vec{a} \times \vec{b})$ پس θ زاویه بین بردار $\vec{a} \times \frac{3}{2}\vec{b}$ و محور Z است. بنابراین

$$\cos \theta = \frac{(\vec{a} \times \frac{3}{2}\vec{b}) \cdot \vec{k}}{|\vec{a} \times \frac{3}{2}\vec{b}| |\vec{k}|} = \frac{(-1, 1, -1) \cdot (0, 0, 1)}{\sqrt{3} \times \sqrt{1}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

۱۱۰۲۶ در شکل زیر، مثلث $TB'C'$ انتقال یافته مثلث ABC تحت

بردار AT و مثلث TPQ ناحیه محدود بین مثلث اولیه و مثلث انتقال یافته است. بنابر فرض تست،

$$\frac{S_{TPQ}}{S_{ABC}} = \frac{1}{16} \quad (1)$$

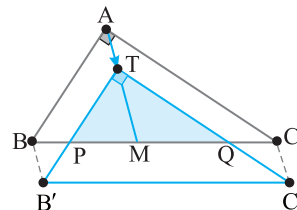
از طرف دیگر، چون اضلاع مثلث TPQ با اضلاع مثلث ABC دوجه دو موازی اند، پس زاویه های این دو مثلث مساوی اند. در نتیجه این دو مثلث متشابه اند. بنابراین نسبت مساحت های این دو مثلث مساوی توان دوم نسبت میانه های نظیر آن ها است، پس

$$\frac{S_{TPQ}}{S_{ABC}} = \left(\frac{TM}{AM}\right)^2 \xrightarrow{\text{از (1)}} \left(\frac{TM}{AM}\right)^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{TM}{AM} = \frac{1}{4} \quad (2)$$

چون در مثلث قائم الزاویه، میانه وارد بر وتر نصف وتر است، پس

$$AM = \frac{BC}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{TM}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow TM = 1 \Rightarrow AT = AM - TM = 2 - 1 = 1$$



۱۰۳۳ از نقطه F عمود HH' و از نقطه E عمود KK' را بر اضلاع AD و BC از مستطیل ABCD وارد می‌کنیم. در نتیجه

$$AM \parallel BN \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \triangle AFM \sim \triangle NFB$$

$$\frac{FH}{FH'} = \frac{AM}{NB} = \frac{2}{1} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{FH}{HH'} = \frac{2}{3}$$

$$\xrightarrow{HH'=DC=8} \frac{FH}{8} = \frac{2}{3} \Rightarrow FH = \frac{16}{3}$$

به‌طور مشابه،

$$DM \parallel NC \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \triangle MED \sim \triangle CEN$$

$$\frac{EK}{EK'} = \frac{MD}{CN} = \frac{4}{5} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{EK}{KK'} = \frac{4}{9}$$

$$\xrightarrow{KK'=DC=8} \frac{EK}{8} = \frac{4}{9} \Rightarrow EK = \frac{32}{9}$$

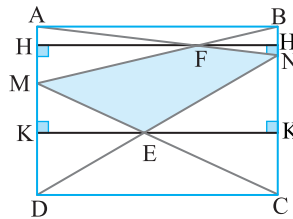
اکنون می‌توانیم مساحت چهارضلعی MENF را پیدا کنیم:

$$S_{MENF} = S_{AND} - S_{AMF} - S_{MED}$$

$$= \frac{1}{2} DC \times AD - \frac{1}{2} FH \times AM - \frac{1}{2} EK \times MD$$

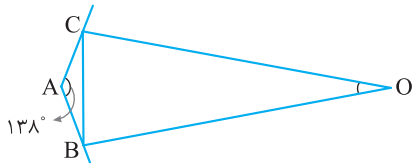
$$= \frac{1}{2} (8)(6) - \frac{1}{2} \left(\frac{16}{3}\right)(2) - \frac{1}{2} \left(\frac{32}{9}\right)(4)$$

$$= 24 - \frac{16}{3} - \frac{64}{9} = \frac{216 - 48 - 64}{9} = \frac{104}{9}$$



۱۰۳۴ در شکل زیر، O نقطه تلاقی نیمسازهای خارجی دو زاویه کوچک‌تر B و C است. بنابراین

$$\hat{O} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} = 90^\circ - \frac{138^\circ}{2} = 21^\circ$$



۱۰۳۵ طول وتر ED برابر شعاع دایره است، پس $\widehat{ED} = 60^\circ$. از طرف دیگر، چون \hat{C} زاویه‌ای محاطی است، پس

$$\hat{C} = \frac{\widehat{DEB}}{2} \Rightarrow \gamma^\circ = \frac{\widehat{ED} + \widehat{EB}}{2} = \frac{60^\circ + \widehat{EB}}{2} \Rightarrow \widehat{EB} = 140^\circ - 60^\circ = 80^\circ$$

چون BC قطر دایره است، پس $\widehat{BE} + \widehat{ED} + \widehat{DC} = 180^\circ$
در نتیجه $\widehat{EDC} = 180^\circ - \widehat{BE} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$

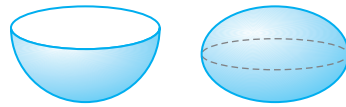
۱۰۳۶ از فرض $\frac{AC}{BC} = \sqrt{3}$ نتیجه می‌گیریم $AC = \sqrt{3}BC$. اکنون

با استفاده از رابطه طولی در دایره می‌نویسیم:

$$AC^2 = CB \times DC \Rightarrow (\sqrt{3}BC)^2 = CB \times DC \Rightarrow 3BC = DC$$

$$\frac{DC}{BC} = 3 \xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{DC - BC}{BC} = 3 - 1 \Rightarrow \frac{DB}{BC} = 2$$

تعداد نامتناهی صفحه با این ویژگی خواهیم داشت. بنابراین گزینه (۱) درست است. در ضمن، چون گزینه (۱) درست است، پس گزینه (۲) نادرست خواهد بود. گزینه‌های (۳) و (۴) در صفحه به‌ترتیب تعریف سهمی و بیضی هستند. در فضا این مکان‌ها سهمی گون و بیضی گون هستند.



سهمی گون

بیضی گون

۱۰۳۰ معادله استاندارد سهمی به صورت زیر است:

$$(x-1)^2 - 12y = 6 \Rightarrow (x-1)^2 = 12y + 6 \Rightarrow (x-1)^2 = 12\left(y + \frac{1}{2}\right)$$

پس این سهمی قائم رو به بالا با رأس $F(1, -\frac{1}{2})$ است و $4a = 12$ ، یعنی $a = 3$. بنابراین کانون این سهمی به مختصات زیر است:

$$F' = (\alpha, a + \beta) = \left(1, 3 - \frac{1}{2}\right) = \left(1, \frac{5}{2}\right)$$

اکنون مرکز بیضی را پیدا می‌کنیم: $O = \frac{F + F'}{2} = (1, 1)$ مرکز بیضی

بنابراین فاصله مرکز بیضی از مبدأ مختصات $= \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

۱۰۳۱ به کمک قضیه هرون، مساحت مثلث را حساب می‌کنیم. توجه کنید که

$$P = \frac{13+14+15}{2} = 21$$

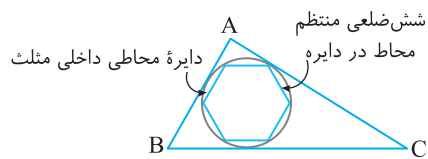
در نتیجه

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}$$

$$= \sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 6} = \sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 3 \times 2} = \sqrt{21 \times 21 \times 16} = 21 \times 4 = 84$$

اکنون شعاع دایره محاطی داخلی مثلث برابر است با $r = \frac{S}{P} = \frac{84}{21} = 4$. بنابراین

$$2r \sin \frac{180^\circ}{6} = 2(4) \sin 30^\circ = 4$$



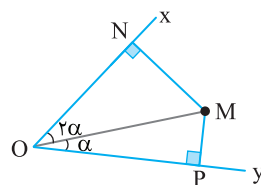
۱۰۳۲ شکل مسئله به صورت زیر است. توجه کنید که

$$\left. \begin{aligned} \triangle OMN: \sin 2\alpha &= \frac{MN}{OM} \\ \triangle OMP: \sin \alpha &= \frac{MP}{OM} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{تقسیم می‌کنیم}} \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{MN}{MP}$$

$$\frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{MN}{MP} \Rightarrow 2 \cos \alpha = \frac{MN}{MP}$$

از طرف دیگر، در مثلث قائم‌الزاویه OMP، $\cos \alpha = \frac{OP}{OM}$. بنابراین

$$2 \times \frac{OP}{OM} = \frac{MN}{MP} \Rightarrow \frac{MN}{MP} = \frac{2OP}{OM}$$



۱۰۴۰ چون بردار $(\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{a} \times \vec{b})$ یا بردار \vec{c} موازی است، پس $\vec{a} \times \vec{b}$ با \vec{c} موازی است. در ضمن برای ساده‌تر شدن محاسبات به جای بردار $\vec{b} = (-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 2)$ از بردار $\frac{3}{4}\vec{b} = (-2, 1, 3)$ استفاده می‌کنیم. در واقع بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ با بردار $\vec{a} \times \frac{3}{4}\vec{b}$ موازی است. توجه کنید که

$$\vec{a} \times \frac{3}{4}\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & \alpha & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (3\alpha - 2)\vec{i} - \vec{j} + (-1 + 2\alpha)\vec{k}$$

بنابر فرض سؤال قرار است بردار $\vec{a} \times \frac{3}{4}\vec{b}$ با \vec{c} موازی باشد. بنابراین

$$\frac{3\alpha - 2}{-1} = \frac{-1}{1} = \frac{-1 + 2\alpha}{-1}$$

در نتیجه

$$\begin{cases} 3\alpha - 2 = 1 \Rightarrow \alpha = 1 \\ -1 + 2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 1 \end{cases}$$

پس به‌ازای $\alpha = 1$ دو بردار $(\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{a} \times \vec{b})$ و \vec{c} موازی‌اند.

۱۰۴۱ توجه کنید که

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & a \end{bmatrix}_{2 \times 2} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 4b_1 \\ 4b_2 \end{bmatrix}_{2 \times 1} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5b_1 - 2b_2 \\ 4b_1 + ab_2 \end{bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 4b_1 \\ 4b_2 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

بنابراین $5b_1 - 2b_2 = 4b_1 \Rightarrow b_1 = 2b_2$ (۱)

چون b ماتریسی ناصفر است، پس $b_1, b_2 \neq 0$. اکنون می‌توان نوشت

$$4b_1 + ab_2 = 4b_2 \xrightarrow{\text{تقسیم بر } b_2} 4b_1 + ab_2 = 4b_2 \xrightarrow{b_2 \neq 0} 4b_1 + a = 4 \Rightarrow a = -4$$

۱۰۴۲ توجه کنید که

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & & \\ & 7 & \\ & & 5 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس A برابر $9+7+5=21$ است.

۱۰۴۳ چون $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ پس $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ a & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

بنابراین

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & a & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ a & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + 10 & a + 2 \\ a + 2 & 3 \end{bmatrix}$$

چون $AA^T B = \Delta 2I$ و $|B|$ تعریف می‌شود، پس B و I ماتریس‌هایی 2×2 هستند. اکنون اگر از دو طرف تساوی $AA^T B = \Delta 2I$ دترمینان بگیریم، به‌دست می‌آید

۱۰۳۷ شعاع‌های OM و ON به‌ترتیب بر خط‌های مماس AB و BC عمود هستند. پس $\hat{M} = \hat{N} = 90^\circ$. چون $\hat{B} = 60^\circ$ ، پس در چهارضلعی $OMBN$ می‌توان نوشت

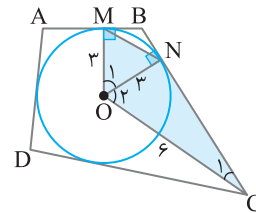
$\hat{O}_1 + \hat{M} + \hat{B} + \hat{N} = 360^\circ \Rightarrow \hat{O}_1 + 90^\circ + 120^\circ + 90^\circ = 360^\circ \Rightarrow \hat{O}_1 = 60^\circ$
از طرف دیگر، دو زاویه مجاور \hat{B} و \hat{C} در دوزنقه $ABCD$ مکمل‌اند، پس $\hat{C} = 60^\circ$. چون OC نیمساز زاویه C است، پس $\hat{C}_1 = 30^\circ$. در نتیجه $\hat{O}_2 = 60^\circ$. اکنون توجه کنید که

$$\triangle ONC: \hat{C}_1 = 30^\circ \Rightarrow ON = \frac{1}{2} OC \xrightarrow{ON=3} OC=6$$

بنابراین

$$S_{OMNC} = S_{OMN} + S_{ONC}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} OM \times ON \sin \hat{O}_1 + \frac{1}{2} ON \times OC \sin \hat{O}_2 \\ &= \frac{1}{2} (3)(3) \sin 60^\circ + \frac{1}{2} (3)(6) \sin 60^\circ \\ &= \frac{9}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 9 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{27\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$



۱۰۳۸ نقطه تلاقی قطرهای $x+y=1$ و $x-y=3$ مرکز دایره است:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases} \xrightarrow{+} 2x=4 \Rightarrow x=2 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow O(2, -1)$$

همچنین فاصله مرکز $O(2, -1)$ تا خط مماس $4x+3y+5=0$ برابر شعاع

$$R = \frac{|4(2)+3(-1)+5|}{\sqrt{16+9}} = \frac{10}{5} = 2$$

دایره است، یعنی

از طرف دیگر، طول پاره‌خط OM برابر است با

$$OM = \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2} = \sqrt{(4-2)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{5}$$

چون $OM > R$ ، پس نقطه M بیرون دایره است. بنابراین

$$\text{نزدیک‌ترین فاصله } M \text{ از دایره} = OM - R = \sqrt{5} - 2$$

۱۰۳۹ بنا بر فرض سؤال $OO' = 6$ ، $R = 6a - 1$ و $R' = a^2 - 2$

چون دو دایره مماس داخلی هستند، پس

$$OO' = |R' - R| \Rightarrow 6 = |a^2 - 2 - 6a + 1| \Rightarrow |a^2 - 6a - 1| = 6$$

بنابراین دو حالت داریم:

حالت اول: $a^2 - 6a - 1 = 6 \Rightarrow a^2 - 6a - 7 = 0 \Rightarrow a = -1, a = 7$

$a = -1$ غیرقابل قبول است، زیرا به‌ازای آن شعاع‌های R و R' منفی می‌شوند.

حالت دوم: $a^2 - 6a - 1 = -6 \Rightarrow a^2 - 6a + 5 = 0 \Rightarrow a = 1, a = 5$

$a = 1$ غیرقابل قبول است، زیرا به‌ازای آن شعاع R' منفی می‌شود.

پس میانگین مقادیر ممکن برای a مساوی $\frac{5+5}{2} = 5$ است.

۱۰۴۶ شکل مسئله به صورت زیر است. سه مثلث CMN, AME, BEN به حالت (رض ز) همنهشت هستند. فرض می‌کنیم طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع MEN برابر a باشد. توجه کنید که

$$\triangle AME: \hat{A} = 60^\circ \Rightarrow EM = \frac{\sqrt{3}}{2} AE \xrightarrow{EM=a} AE = \frac{2a}{\sqrt{3}} \quad (1)$$

$$\hat{E} = 30^\circ \Rightarrow AM = \frac{AE}{2} \xrightarrow{\text{از (1)}} AM = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

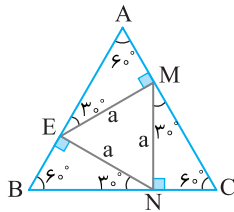
$$\xrightarrow{AM=BE} BE = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad (2)$$

از جمع کردن تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$AB = AE + BE = \frac{2a}{\sqrt{3}} + \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{3a}{\sqrt{3}} = a\sqrt{3}$$

چون مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ABC و MEN متشابه‌اند، پس

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MEN}} = \left(\frac{AB}{ME}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{a}\right)^2 = 3$$



۱۰۴۷ با توجه به اندازه‌های روی شکل معلوم می‌شود که

$$\hat{C}_1 = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$$

اکنون زاویه‌ها را برحسب کمان‌ها می‌نویسیم

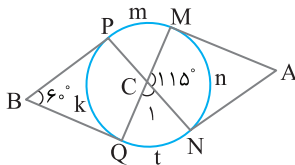
$$\hat{C}_1 = \frac{m+t}{2} \xrightarrow{\hat{C}_1=65^\circ} m+t=130^\circ$$

$$\hat{B} = \frac{m+n+t-k}{2} \xrightarrow{\hat{B}=60^\circ} m+n+t-k=120^\circ \xrightarrow{m+t=130^\circ}$$

$$n-k=-10^\circ \Rightarrow k-n=10^\circ$$

بنابراین

$$\hat{M\hat{A}N} = \frac{m+k+t-n}{2} \xrightarrow{\substack{m+t=130^\circ \\ k-n=10^\circ}} \hat{M\hat{A}N} = \frac{130^\circ+10^\circ}{2} = 70^\circ$$



۱۰۴۸ ابتدا مساحت مثلث را به کمک قضیه هرون به دست می‌آوریم.

$$\text{توجه کنید که } P = \frac{21+17+10}{2} = 24 \text{ در نتیجه}$$

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)} \\ = \sqrt{24 \times 3 \times 7 \times 14} = \sqrt{3 \times 8 \times 3 \times 7 \times 2 \times 7} = \sqrt{21^2 \times 16} = 21 \times 4 = 84$$

چون $\frac{1}{2} \times 8 \times 21 = 84$ ، پس ارتفاع $AH = 8$ وارد بر ضلع به طول ۲۱ است.

با فرض $BC = 21$ ، $AB = 10$ و $AC = 17$ شکل مسئله به صورت زیر است.

$$\text{اکنون چون } M \text{ و } N \text{ وسط‌های ضلع‌ها هستند، پس } MN = \frac{BC}{2} = \frac{21}{2}$$

$$|AA^T B| = |\Delta 2 I| \Rightarrow |AA^T| |B| = \Delta 2^2 |I|$$

$$\begin{vmatrix} a^2+10 & a+2 \\ a+2 & 3 \end{vmatrix} \times 104 = \Delta 2^2 \Rightarrow (3a^2+30-(a+2)^2) = \frac{\Delta 2^2}{104} = 26$$

$$3a^2+30-a^2-4-4a=26 \Rightarrow 2a^2-4a=0 \Rightarrow 2a(a-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=2 \end{cases}$$

پس مجموع مقادیر ممکن برای a مساوی $0+2=2$ است.

۱۰۴۴ خطوطی که بر d عمودند، اگر موازی باشند، در یک صفحه هستند؛ اگر متقاطع باشند، در صفحه‌هایی عمود بر خط d هستند؛ اگر متناظر باشند، هر کدام از آن‌ها در صفحه‌هایی مختلف واقع هستند. در نتیجه چون در فضا بی‌نهایت خط بر یک خط مفروض عمودند، پس خطوط عمود بر یک خط در فضا بی‌نهایت صفحه در فضا تشکیل می‌دهند.

اکنون به نادرستی سایر گزینه‌ها توجه کنید:

مجموعه نقاط متساوی‌الفاصله از یک خط در فضا روی سطحی استوانه‌ای قرار می‌گیرند. پس گزینه (۲) نادرست است.



مجموعه نقاطی از فضا که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطه ثابت به یک اندازه است، شکلی به نام بیضی گون است. پس گزینه (۳) نادرست است.

خطوط گذرا از یک نقطه که با محور گذرا از آن نقطه زاویه یکسان می‌سازند، سطح مخروطی است. پس گزینه (۴) نادرست است.

۱۰۴۵ طرفین معادله بیضی را بر ۱۰۰ تقسیم می‌کنیم:

$$25(x-1)^2 + 16(y+1)^2 = 100 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{\frac{25}{4}} = 1$$

پس این بیضی یک بیضی قائم با مرکز $O'(1, -1)$ است و

$$\begin{cases} a^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow a = \frac{5}{2} \\ b^2 = 4 \Rightarrow b = 2 \end{cases}$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4} \Rightarrow c = \frac{3}{2} \quad \text{بنابراین}$$

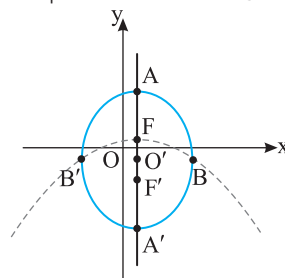
با توجه به شکل $O'F' = O'F = c = \frac{3}{2}$ ، چون $OF < OF'$ ، پس کانون‌ها به

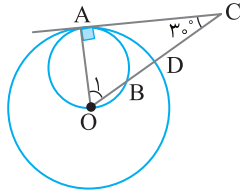
مختصات $F(1, \frac{1}{2})$ و $F'(1, -\frac{5}{2})$ هستند. اکنون F رأس و F' کانون سهمی

مورد نظر است. با توجه به جایگاه رأس و کانون، این سهمی قائم رو به پایین است و مقدار a در سهمی مساوی $FF' = 3$ است. با توجه به معادله سهمی قائم رو به پایین:

$$(x-\alpha)^2 = -4a(y-\beta) \Rightarrow (x-1)^2 = -12(y-\frac{1}{2}) \Rightarrow (x-1)^2 = -12y+6$$

توجه کنید معادله بیضی در کتاب هندسه ۳ نظام جدید حذف شده است.





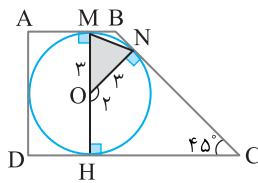
۳۱۰۵۲ شعاع OM بر خط مماس AB عمود است. چون $AB \parallel DC$. پس امتداد شعاع OM بر DC عمود است. همین طور، شعاع ON بر خط مماس BC عمود است. بنابراین در چهارضلعی ONCH می توان نوشت

$$\hat{O}_P + \hat{N} + \hat{C} + \hat{H} = 360^\circ \Rightarrow \hat{O}_P + 90^\circ + 45^\circ + 90^\circ = 360^\circ$$

$$\hat{O}_P = 135^\circ \xrightarrow{\hat{O}_1 + \hat{O}_P = 180^\circ} \hat{O}_1 = 45^\circ$$

در نتیجه

$$S_{OMN} = \frac{1}{2} OM \times ON \sin \hat{O}_1 = \frac{1}{2} (3)(3) \sin 45^\circ = \frac{9}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$$



۳۱۰۵۳ راه حل اول مختصات پیکانهای BA و BC را پیدا می کنیم:

$$\overline{BA} = A - B = (-2, 2, 1)$$

$$\overline{BC} = C - B = (-1, -1, 2)$$

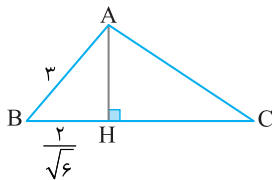
چون پیکان BH تصویر پیکان BA روی پیکان BC است، پس

$$|\overline{BH}| = \frac{|\overline{BA} \cdot \overline{BC}|}{|\overline{BC}|} = \frac{|2 - 2 + 2|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

در ضمن $|\overline{BA}| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$. بنابراین

$$\triangle ABH: AH^2 = AB^2 - BH^2 \Rightarrow AH^2 = 9 - \frac{4}{6} = 9 - \frac{2}{3} = \frac{25}{3}$$

$$AH = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$



راه حل دوم مساحت مثلث ABC را به کمک ضرب خارجی پیدا می کنیم

$$\overline{BA} \times \overline{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overline{BA} \times \overline{BC}| = \frac{1}{2} \sqrt{25 + 9 + 16} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

در ضمن $|\overline{BC}| = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}$. بنابراین

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC \Rightarrow \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} AH \times \sqrt{6} \Rightarrow AH = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

از طرف دیگر، چون $MN \parallel BC$ ، پس چهارضلعی MNPH دوزنقه است.

بنابراین ارتفاع AH بر MN نیز عمود است. اکنون توجه کنید که

$$\triangle ABH: MH' \parallel BH \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AM}{BM} = \frac{AH'}{HH'} \xrightarrow{AM=BM} \rightarrow$$

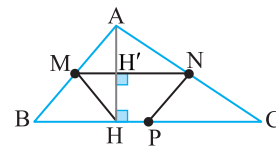
$$AH' = HH' = \frac{1}{2} AH \Rightarrow HH' = 4$$

$$\triangle ABH: BH^2 = AB^2 - AH^2 = 10^2 - 8^2 = 36 \Rightarrow BH = 6$$

$$PH = BP - BH = \frac{BC}{2} - BH = \frac{21}{2} - 6 = \frac{9}{2} \quad \text{پس}$$

در نتیجه مساحت دوزنقه MNPH برابر است با

$$S_{MNPH} = \frac{1}{2} HH'(MN + PH) = \frac{1}{2} (4) \left(\frac{21}{2} + \frac{9}{2} \right) = 2 \times 15 = 30$$

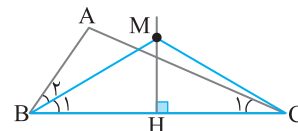


۳۱۰۴۹ در شکل زیر، نیمساز زاویه B عمود منصف ضلع BC را در نقطه M قطع کرده است. از M به C وصل می کنیم. چون M روی عمود منصف BC است، پس

$MB = MC \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{M}_1 = \hat{C}_1$

چون زاویه C_1 قسمتی از زاویه MCB است، پس

$$\hat{M}_1 > \hat{C}_1 \xrightarrow{\hat{M}_1 = \hat{B}_1} \hat{B}_1 > \hat{C}_1 \xrightarrow{\hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}} \frac{\hat{B}}{2} > \hat{C}_1 \Rightarrow \hat{B} > 2\hat{C}_1$$

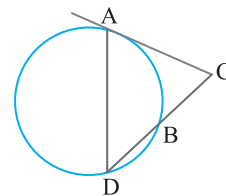


۳۱۰۵۰ با استفاده از رابطه طولی در دایره می نویسیم

$$CA^2 = CB \times CD \Rightarrow CA^2 = CB(CB + BD) \xrightarrow{DB=BC} \rightarrow$$

$$CA^2 = CB(CB + CB) \Rightarrow CA^2 = 2CB^2 \Rightarrow CA = \sqrt{2}CB$$

$$\frac{CA}{CB} = \sqrt{2}$$



۳۱۰۵۱ از نقطه O به نقطه A وصل می کنیم. در این صورت مثلث

OAC قائم الزاویه است. بنابراین

$$\triangle OAC: \hat{C} = 30^\circ \Rightarrow OA = \frac{1}{2} OC \xrightarrow{OA=6} \rightarrow OC = 12$$

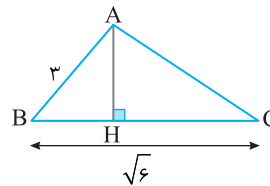
$$\hat{O}_1 = 60^\circ \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{3}}{2} OC \xrightarrow{OC=12} \rightarrow AC = 6\sqrt{3}$$

اکنون با استفاده از رابطه طولی در دایره کوچکتر می نویسیم

$$CA^2 = CB \times CO \Rightarrow (6\sqrt{3})^2 = CB \times 12 \Rightarrow 108 = 12CB \Rightarrow CB = 9$$

از طرف دیگر، $CD = OC - OD = 12 - 6 = 6$. بنابراین

$$BD = BC - CD = 9 - 6 = 3$$



۳۱۰۵۴ فرض می‌کنیم شعاع دایره بزرگ R باشد. قطر AB عمودمنصف قطر DC است. پس

$$\left. \begin{array}{l} OD=OC \\ ON=ON' \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} ND=CN' \xrightarrow{DN=10} CN'=10$$

در نتیجه $ON=ON'=R-10$. بنابراین از رابطه طولی در دایره کوچک‌تر به دست می‌آید

$$ON \times ON' = OM \times OB \xrightarrow{OM=R-16}$$

$$(R-10)(R-10) = (R-16)(R)$$

$$R^2 + 100 - 20R = R^2 - 16R \Rightarrow 4R = 100 \Rightarrow R = 25$$

اکنون می‌توان نوشت

$$MB = OB + OM = R + R - 16 = 2R - 16 = 50 - 16 = 34$$

چون MB قطر دایره کوچک‌تر است، پس $\frac{MB}{2} = 17 = \frac{MB}{2}$ شعاع دایره کوچک‌تر

