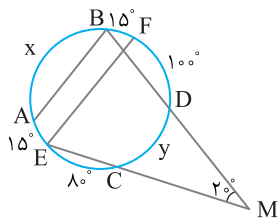


پاسخ کنکور سراسری ۱۴۰۱



۱۰۵۸ می‌دانیم کمان‌های

محصور بین دو وتر موازی مساوی‌اند، پس

$$AB \parallel EF \Rightarrow \widehat{BF} = \widehat{AE}$$

$$\widehat{AE} = 15^\circ \Rightarrow \widehat{BF} = 15^\circ$$

با فرض $\widehat{AB} = x$ و $\widehat{CD} = y$ می‌نویسیم:

$$\widehat{AB} + \widehat{BF} + \widehat{FD} + \widehat{CD} + \widehat{EC} + \widehat{AE} = 360^\circ$$

$$x + 15^\circ + 100^\circ + y + 8^\circ + 15^\circ = 360^\circ \Rightarrow x + y = 15^\circ \quad (1)$$

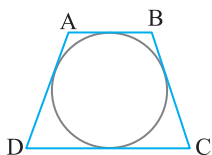
از طرف دیگر،

$$\widehat{M} = \frac{\widehat{EAB} - \widehat{CD}}{2} \Rightarrow 20^\circ = \frac{15^\circ + x - y}{2} \Rightarrow x - y = 25^\circ \quad (2)$$

$$\text{از (۱) و (۲) } \begin{cases} x + y = 15^\circ \\ x - y = 25^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} 2y = 12^\circ \Rightarrow y = 6^\circ$$

بنابراین

$$\widehat{ABD} = \frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow \widehat{ABD} = \frac{6^\circ + 8^\circ + 15^\circ}{2} = \frac{15^\circ + 23^\circ}{2} = 19^\circ$$



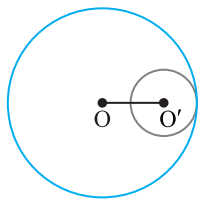
۱۰۵۹ اگر دوزنقه متساوی‌الساقین بر

دایره به شعاع R محیط باشد، آن‌گاه قطر دایره محاطی واسطه هندسی بین دو قاعده

است: پس $4R^2 = AB \times DC \quad (1)$

از طرف دیگر، $\pi R^2 = 15\pi \Rightarrow R^2 = 15 \quad (2)$

$$\text{از (۱) و (۲) } 4 \times 15 = 6 \times a \Rightarrow a = 10$$



۱۰۶۰ فرض کنیم R شعاع دایره

بزرگ‌تر و R' شعاع دایره کوچک‌تر باشد.

چون دو دایره مماس درونی‌اند، پس $OO' = R - R'$ یعنی $R - R' = 3/5$.

طرف دیگر،

$$21 = \pi R^2 - \pi R'^2 \Rightarrow R^2 - R'^2 = 21$$

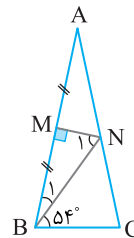
$$(R - R')(R + R') = 21 \xrightarrow{R - R' = 3/5} 3/5(R + R') = 21$$

$$R + R' = \frac{21}{3/5} = \frac{21}{3/5} = 35$$

بنابراین

$$\begin{cases} R - R' = 3/5 \\ R + R' = 35 \end{cases} \xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} 2R' = 35 - 3/5 = 34 2/5$$

$$2R' = 34 2/5 \Rightarrow R' = 17 1/5$$



۱۰۵۵ بنا بر فرض سؤال شکل مقابل را خواهیم

داشت، نقطه N روی عمود منصف AB است، پس $NA = NB$ یعنی $\widehat{B}_1 = \widehat{A} = \alpha$ در ضمن

$AB = AC$ پس $\widehat{B}_1 + 54^\circ = \widehat{C}$ بنابراین

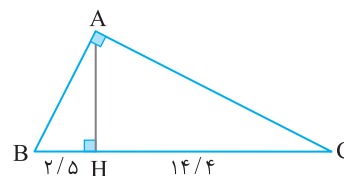
$$\triangle ABC: \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \widehat{B}_1 + 54^\circ + \widehat{B}_1 + 54^\circ = 180^\circ$$

$$\xrightarrow{\widehat{B}_1 = \alpha} 3\alpha = 180^\circ - 108^\circ \Rightarrow 3\alpha = 72^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{72^\circ}{3} = 24^\circ$$

در نتیجه

$$\triangle BMN: \widehat{M} + \widehat{N}_1 + \widehat{B}_1 = 180^\circ$$

$$\xrightarrow{\widehat{B}_1 = 24^\circ} 90^\circ + \widehat{N}_1 + 24^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{N}_1 = 66^\circ$$



۱۰۵۶ در مثلث

قائم‌الزاویه ABC ارتفاع

AH روی وتر BC

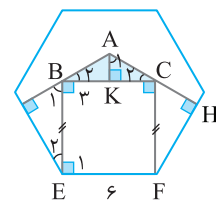
پاره‌خط‌هایی به طول ۲/۵

و ۱۴/۴ جدا کرده است.

با استفاده از رابطه طولی در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم:

$$AH^2 = BH \times CH \Rightarrow AH^2 = 2/5 \times 14/4 = \frac{25}{10} \times \frac{144}{10}$$

$$AH = \frac{5 \times 12}{10} = \frac{12}{2} = 6$$



۱۰۵۷ بنا بر فرض سؤال چهارضلعی

BCFE مربع است. پس $\widehat{E}_1 = 90^\circ$ از

طرف دیگر هر زاویه داخلی شش‌ضلعی

منتظم 120° است. بنابراین

$$\widehat{E}_1 + \widehat{E}_2 = 120^\circ \xrightarrow{\widehat{E}_1 = 90^\circ} \widehat{E}_2 = 30^\circ \Rightarrow \widehat{B}_1 = 60^\circ$$

چون $\widehat{B}_2 = 90^\circ$ و $\widehat{B}_1 = 60^\circ$ پس $\widehat{B}_3 = 30^\circ$.

به همین ترتیب معلوم می‌شود $\widehat{C}_3 = 30^\circ$ پس مثلث ABC متساوی‌الساقین

با زاویه رأس 120° است. بنابراین اگر ارتفاع AK وارد بر قاعده BC را رسم

کنیم، AK میانه و نیمساز هم هست. در نتیجه

$$BK = KC = \frac{BC}{2} = \frac{6}{2} = 3, \quad \widehat{A}_1 = \widehat{A} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$

در مثلث قائم‌الزاویه AKC ضلع KC روبه‌رو به زاویه 60° است، پس

$$KC = \frac{\sqrt{3}}{2} AC \Rightarrow 3 = \frac{\sqrt{3}}{2} AC \Rightarrow AC = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

و AK روبه‌رو به زاویه 30° است، پس

$$AK = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} (2\sqrt{3}) \Rightarrow AK = \sqrt{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AK \times BC = \frac{1}{2} (\sqrt{3}) (6) = 3\sqrt{3}$$

بنابراین

ماتریس AB ماتریس اسکالر است. پس درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی صفر و درایه‌های روی قطر اصلی همگی برابر یکدیگرند. بنابراین

$$\begin{cases} 2xz - 2z = 2 \Rightarrow xz - z = 1 \xrightarrow{\text{از (۱)}} -xy + y = 1 \\ 2y - 4yz = 2 \Rightarrow y - 2yz = 1 \xrightarrow{\text{از (۱)}} y + 2y^2 = 1 \\ 2x + 4y = 0 \Rightarrow x = -2y \\ 2yz + 2z^2 = 0 \xrightarrow{z \neq 0} y = -z \quad (۱) \\ \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 0 \Rightarrow y = -z \end{cases}$$

در نتیجه

$$2y^2 + y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = \frac{1}{2} \quad (\text{غ.ق.}) \end{cases}$$

بنابراین $-xy + y = 1 \xrightarrow{y=-1} -xy - 1 = 1 \Rightarrow xy = -2$
دقت کنید $z \neq 0$ زیرا در غیر این صورت مقدار $2xz - 2z$ برابر صفر است و با اسکالر بودن ماتریس AB در تناقض است.

ابتدا درمیان A را به دست می‌آوریم: **۳۱۰۶۴**

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1(3-2) + 1(12-4) - 3(4-2) = 1+8-6=3$$

بنابراین

$$\begin{bmatrix} 2|A| & |A| \\ 1 & \frac{2}{|A|} \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

اکنون طرفین تساوی ماتریسی بالا را در وارون ماتریس $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ یعنی

$$\text{ماتریس} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \text{ از سمت چپ ضرب می‌کنیم. در نتیجه}$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -3 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -15 & 6 \end{bmatrix}$$

پس کوچک‌ترین درایه قطر اصلی ماتریس X برابر ۶ است.

با انتخاب دو مقدار دلخواه برای m دو قطر دایره را به دست

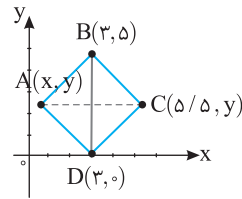
آورده از تلاقی این دو قطر مرکز دایره به دست می‌آید.

$$\begin{cases} m=2 \Rightarrow 3y=6 \Rightarrow y=2 \\ m=-1 \Rightarrow -3x=6 \Rightarrow x=-2 \end{cases} \Rightarrow \text{مرکز دایره } O(-2, 2)$$

چون A روی دایره است، پس

$$R = OA = \sqrt{(-1+2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

بنابراین $2\pi R = 2\sqrt{2}\pi$ محیط دایره



۲۱۰۶۱ بازتاب نقطه D نسبت به

محور x بر خودش منطبق است. پس نقطه D روی محور x قرار دارد. پس $D=(3, 0)$.

مسئلاً بازتاب نقطه C نسبت به قطر عمودمنصف یکدیگرند. فرض کنیم

بنابراین $A=(x, y)$ و $C=(5/5, y)$ در این صورت چون قطرهای مربع

$$A+C=B+D \Rightarrow (x, y) + (5/5, y) = (3, 5) + (3, 0)$$

$$(x+5/5, 2y) = (6, 5)$$

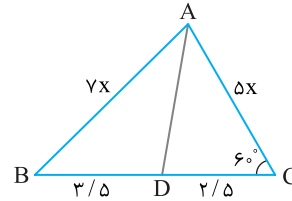
پس

$$\begin{cases} x+5/5=6 \Rightarrow x=5/5 \\ 2y=5 \Rightarrow y=5/2 \end{cases} \Rightarrow A(5/5, 5/2)$$

بنابراین

$$OA = \sqrt{5/5^2 + 5/2^2} = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{5}{2})^2} = \sqrt{\frac{1+25}{4}} = \sqrt{\frac{26}{4}} = \sqrt{\frac{13}{2}}$$

از قضیه نیمساز زاویه داخلی استفاده کرده می‌نویسیم: **۱۱۰۶۲**



$$AD \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{2/5}{3/5} = \frac{7x}{5x} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{7}{5}$$

با توجه به تناسب به دست آمده فرض می‌کنیم

$$AC=5x, AB=7x$$

اکنون بنابر قضیه کسینوس‌ها،

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \cos 60^\circ$$

$$49x^2 = 25x^2 + 9 - 2(5x)(3) \cos 60^\circ$$

$$49x^2 = 25x^2 + 9 - 30x \Rightarrow 24x^2 + 30x - 9 = 0$$

$$\div 6 \Rightarrow 4x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+96}}{8}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{8} = \frac{-5 \pm 11}{8} \Rightarrow x = \frac{-5+11}{8} \Rightarrow x = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

بنابراین ضلع کوچک‌ترین مثلث یعنی AC برابر $5x = 5 \times \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$ است.

(توجه کنید اگر $BD=2/5$ و $DC=3/5$ ، آن‌گاه مسئله جواب نخواهد داشت. پس بهتر بود از ابتدا مطرح می‌شد $AB > AC$)

ابتدا ماتریس AB را پیدا می‌کنیم: **۲۱۰۶۳**

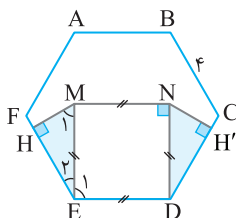
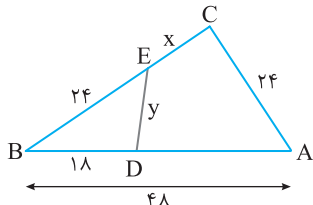
$$AB = \begin{bmatrix} x & -1 & -x \\ 0 & 0 & 4 \\ y & z & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2z & \frac{1}{2} & 2 \\ 2z & 0 & -4y \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xz-2z & 0 & 2x+4y \\ 0 & 2 & 0 \\ 2yz+2z^2 & \frac{y}{2} + \frac{z}{2} & 2y-4yz \end{bmatrix}$$

۱۰۷۰ دو مثلث ABC و BDE متشابه‌اند زیرا:

$$\left. \begin{matrix} \widehat{E\hat{C}A} = \widehat{B\hat{D}E} \\ \widehat{B} = \widehat{B} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle BDE \Rightarrow \frac{DE}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{BE}{AB}$$

$$\frac{y}{24} = \frac{18}{x+24} = \frac{24}{48} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{24} = \frac{24}{48} \Rightarrow \frac{y}{24} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 12 \\ \frac{18}{x+24} = \frac{24}{48} \Rightarrow \frac{18}{x+24} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 12 \end{cases}$$

بنابراین مقدار $\frac{x}{y}$ برابر یک است.



۱۰۷۱ چهارضلعی MNDE

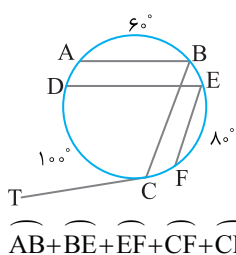
مربع به ضلع ۴ است. پس $\hat{E}_1 = 90^\circ$. در ضمن هر زاویه داخلی شش ضلعی منتظم 120° است. پس $\hat{E}_7 = 30^\circ$. نتیجه در مثلث قائم‌الزاویه MHE زاویه M_1 برابر 60° می‌شود. بنابراین

$$\triangle MEH: \hat{M}_1 = 60^\circ \Rightarrow HE = \frac{\sqrt{3}}{2} ME \xrightarrow{ME=4} HE = 2\sqrt{3}$$

$$\triangle MEH: \hat{E}_7 = 30^\circ \Rightarrow MH = \frac{1}{2} ME \xrightarrow{ME=4} MH = 2$$

$$S_{MEH} = \frac{1}{2} MH \times EH = \frac{1}{2} (2)(2\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} \quad \text{پس}$$

به همین ترتیب مشخص می‌شود $S_{NDH'} = 2\sqrt{3}$. بنابراین مجموع مساحت‌های دو مثلث MHE و NDH' برابر $4\sqrt{3}$ است.



۱۰۷۲ می‌دانیم اندازه کمان‌های

بین دو وتر موازی مساوی‌اند. بنابراین

$$\left. \begin{matrix} AB \parallel DE \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BE} \\ BC \parallel EF \Rightarrow \widehat{BE} = \widehat{CF} \end{matrix} \right\}$$

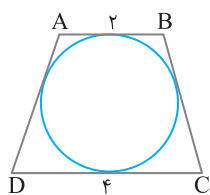
$$\widehat{AD} = \widehat{CF} = \widehat{BE} = x$$

$$\widehat{AB} + \widehat{BE} + \widehat{EF} + \widehat{CF} + \widehat{CD} + \widehat{AD} = 360^\circ \quad \text{همچنین}$$

$$60^\circ + x + 80^\circ + x + 100^\circ + x = 360^\circ \Rightarrow 3x = 120^\circ \Rightarrow x = 40^\circ$$

از طرف دیگر زاویه BCT زاویه ظلی است؛ بنابراین

$$\widehat{B\hat{C}T} = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{DC} + \widehat{AB}}{2} = \frac{40^\circ + 100^\circ + 60^\circ}{2} = 100^\circ$$



۱۰۷۳ در دوزنقه متساوی‌الساقین محیطی

قطر دایره محاطی واسطه هندسی بین دو قاعده دوزنقه است. به عبارتی اگر شعاع دایره محاطی دوزنقه متساوی‌الساقین محیطی ABCD باشد،

آن‌گاه $4R^2 = AB \times DC$. پس

$$4R^2 = AB \times DC \Rightarrow 4R^2 = 2 \times 4 \Rightarrow R^2 = 2$$

$$\text{مساحت دایره} = \pi R^2 = 2\pi$$

بنابراین

۱۰۶۶ اگر در سهمی افقی از معادله سهمی نسبت به y مشتق گرفته

مساوی صفر قرار دهیم، آن‌گاه عرض رأس سهمی به دست می‌آید. پس

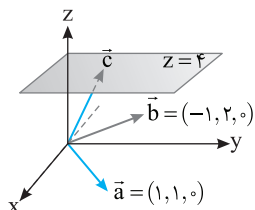
$$f'_y = 0 \Rightarrow 4y - 2a = 0 \xrightarrow{y=1} 4 - 2a = 0 \Rightarrow a = 2$$

در ضمن رأس سهمی در معادله سهمی صدق می‌کند. پس

$$2 - 2a - 8 + b = 0 \xrightarrow{a=2} 2 - 4 - 8 + b = 0 \Rightarrow b = 10$$

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

بنابراین



۱۰۶۷ ارتفاع بردار \vec{h} برابر ۴

است. پس انتهای بردار \vec{h} روی صفحه $Z=4$ قرار دارد. در ضمن بردار \vec{h} بر بردارهای \vec{a} و \vec{b} عمود نیست زیرا $\vec{a} \cdot \vec{h} \neq 0$ و $\vec{b} \cdot \vec{h} \neq 0$. بنابراین بردار \vec{h} روی صفحه $Z=4$ قرار دارد. در نتیجه

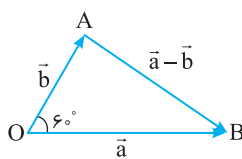
انتهای بردار \vec{c} روی صفحه $Z=4$ واقع است. بنابراین مختصات بردار \vec{c} به صورت $(x, y, 4)$ است. بنابر فرض سؤال،

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 1 \Rightarrow (1, 1, 0) \cdot (x, y, 4) = 1 \Rightarrow x + y = 1$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 5 \Rightarrow (-1, 2, 0) \cdot (x, y, 4) = 5 \Rightarrow -x + 2y = 5$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -x + 2y = 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} 3y = 6 \rightarrow y = 2, x = -1 \quad \text{بنابراین}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21} \quad \text{و} \quad \vec{c} = (-1, 2, 4)$$

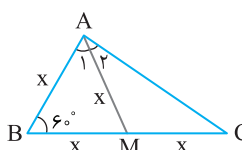


۱۰۶۸ در نظر بگیرید $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$

در این صورت بردار $\vec{a} - \vec{b}$ مطابق شکل مقابل خواهد بود. در مثلث OAB یک زاویه 60° و اندازه دو ضلع این زاویه 60°

به نسبت ۱ به ۲ هستند. پس مثلث OAB قائم‌الزاویه است و $\hat{A} = 90^\circ$. پس

$\hat{B} = 30^\circ$. در نتیجه زاویه بین بردارهای \vec{a} و $\vec{a} - \vec{b}$ برابر 30° است.



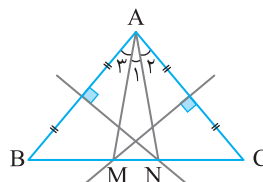
نکته: توجه کنید اگر در مثلث ABC

$\hat{B} = 60^\circ$ ، $AB = x$ و $BC = 2x$.

آن‌گاه $\hat{A} = 90^\circ$. زیرا اگر میانه AM وارد بر BC را رسم کنید. آن‌گاه مثلث ABM متساوی‌الاضلاع و مثلث AMC

متساوی‌الساقین است؛ پس $\hat{A}_1 = 60^\circ$ و

$$\hat{A}_7 = 30^\circ \quad \text{در نتیجه} \quad \hat{A} = 90^\circ$$



۱۰۶۹ بنابر داده‌های سؤال

شکل مقابل را خواهیم داشت. می‌دانیم هر نقطه روی عمود منصف یک پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.

$$\left. \begin{matrix} M \text{ روی عمود منصف } AC \Rightarrow MA = MC \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_7 = \hat{C} \\ N \text{ روی عمود منصف } AB \Rightarrow NA = NB \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_3 = \hat{B} \end{matrix} \right\}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} \hat{A}_1 + \hat{A}_7 + \hat{A}_3 + \hat{A}_1 = \hat{B} + \hat{C} \xrightarrow{\hat{A}_1 + \hat{A}_7 + \hat{A}_3 = 80^\circ}$$

$$80^\circ + \hat{A}_1 = 180^\circ - 80^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 = 20^\circ$$

$$\begin{bmatrix} -\alpha + \beta & 2\alpha \\ 4\alpha & -2\alpha + \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\begin{cases} -\alpha + \beta = \frac{3}{5} \Rightarrow -\frac{1}{5} + \beta = \frac{3}{5} \Rightarrow \beta = \frac{4}{5} \\ 2\alpha = \frac{2}{5} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}} = 4$$

ابتدا درایه‌های ماتریس A^2 را به دست آوریم:

$$A^2 = A \times A$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

اکنون فقط درایه‌های سطر اول ماتریس A^3 را به دست می‌آوریم:

$$A^3 = A^2 \times A$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

بنابراین درایه‌های سطر اول ماتریس A^3 به صورت $[1 \quad -1 \quad 0]$ است.

برای مشخص شدن راه‌حل هر دو دایره را ترسیم می‌کنیم: سپس مرکز و شعاع دایره‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$x^2 - 8x + y^2 + 15 = 0 \Rightarrow O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (4, 0)$$

$$R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{64 - 60}}{2} = 1$$

$$x^2 - 2x + y^2 = 0 \Rightarrow O'\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (1, 0)$$

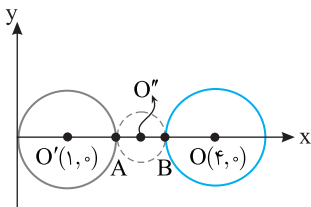
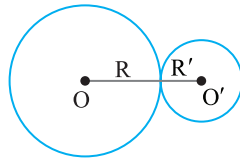
$$R' = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$$

مطابق شکل دایره خط‌چین به مرکز O'' و شعاع R'' مرکزش روی محور x قرار دارد و بر هر دو دایره مماس خارج است. در شکل AB قطر دایره خط‌چین است چون $A(2, 0)$ و $B(3, 0)$ است. پس $O'' = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{5}{2}, 0\right)$

$R'' = \frac{AB}{2} = \frac{1}{2}$. بنابراین معادله این دایره به صورت زیر است:

$$(x - \frac{5}{2})^2 + (y - 0)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 + \frac{25}{4} - 5x + y^2 = \frac{1}{4}$$

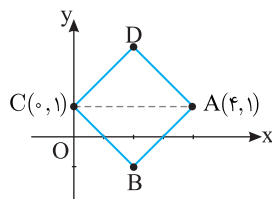
$$x^2 + y^2 - 5x + 6 = 0$$

طول خط‌المركزین دو دایره 41074 

مماس خارج مساوی $R + R'$ است. پس طول مماس مشترک خارجی این دو دایره $2\sqrt{RR'}$ است. بنابر فرض سؤال.

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \frac{\sqrt{3}}{2} R \Rightarrow 2\sqrt{RR'} = \frac{\sqrt{3}}{2} R$$

$$4RR' = \frac{3}{4} R^2 \Rightarrow 4R' = \frac{3}{4} R \Rightarrow R = \frac{16}{3} R'$$

بنابراین شعاع دایره بزرگ‌تر $\frac{16}{3}$ برابر شعاع دایره کوچک‌تر است.چون بازتاب نقطه C

نسبت به محور y بر خودش منطبق است، پس نقطه C روی محور y قرار دارد. پس مختصات C به صورت $(0, 1)$ است. در ضمن عرض نقطه

D برابر 3 است. فرض می‌کنیم $D(x, 3)$. چون قطرها مربع عمودمنصف یکدیگرند، پس رأس $B(x, y)$ بازتاب D نسبت به قطر AC است. چون

قطرهای مربع منصف یکدیگرند، پس

$$A + C = B + D \Rightarrow (4, 1) + (0, 1) = (x, 3) + (x, y)$$

$$\begin{cases} 4 = 2x \Rightarrow x = 2 \\ 2 = 3 + y \Rightarrow y = -1 \end{cases} \Rightarrow B(2, -1)$$

$$OB = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

بنابراین

در مثلث ABC فرض

کنیم $AB = 4x$. $AC = 5x$ و $BC = 6x$. در این صورت زاویه B زاویه متوسط مثلث است. فرض کنیم BD نیمساز زاویه B باشد. در این

صورت دو مثلث ABD و ABC دارای ارتفاع مشترک از رأس B هستند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های نظیرشان است. پس:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{AD}{AC} \quad (1)$$

از طرف دیگر بنابر قضیه نیمساز داخلی می‌نویسیم:

$$BD \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \xrightarrow{\text{ترکیب درمخرج}} \frac{AD}{AD + DC} = \frac{AB}{AB + BC}$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AB + BC} \Rightarrow \frac{AD}{4x + 6x} = \frac{4x}{10x} \Rightarrow \frac{AD}{10x} = \frac{4x}{10x} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{2}{5} \quad (2)$$

بنابراین

$$(2), (1) \Rightarrow \frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \frac{5}{2}$$

$$\text{برابر} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{وارون} \quad \text{ماتریس} \quad 21077$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha A + \beta I = A^{-1} \Rightarrow \alpha \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

۱۰۸۰ (۳) ابتدا معادله بیضی را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$x^2 + 4y^2 - 16y - 2x + 16 = 0 \Rightarrow (x^2 - 2x) + 4(y^2 - 4y) + 16 = 0$$

$$(x-1)^2 - 1 + 4[(y-2)^2 - 4] + 16 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + 4(y-2)^2 = 1$$

$$(x-1)^2 + \frac{(y-2)^2}{\frac{1}{4}} = 1$$

بنابراین بیضی افقی با مقادیر $a^2 = 1$ و $b^2 = \frac{1}{4}$ است. پس

$$c^2 = a^2 - b^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین فاصله دو کانون برابر $2c = \sqrt{3}$ است. «توجه کنید معادله بیضی در کتاب درسی هندسه ۳ مطرح نشده است، پس این سؤال خارج از سرفصل کتاب درسی است.»