پاسخ کنکور سراسری ۱۴۰۰

۱ (۱) زاویهٔ بین بردار $\vec{a}=(-1,\alpha,1)$ و محور z در فضا برابر 45° است. بنابراین

$$\cos 45^\circ=\frac{\vec{a}\cdot\vec{k}}{|\vec{a}||\vec{k}|}\xrightarrow{\vec{k}=(0,0,1)}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2+\alpha^2}\times\sqrt{1}}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}}\frac{1}{2}=\frac{1}{2+\alpha^2}\Rightarrow\alpha=0$$

بنابراین $\vec{a}=(-1,0,1)$. اکنون به‌جای بردار $\vec{b}=(-\frac{4}{3},\frac{2}{3},2)$ از بردار $\frac{3}{2}\vec{b}=(-2,1,3)$ استفاده می‌کنیم. در این صورت

$$\vec{a}\times\frac{3}{2}\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-1&0&1\\-2&1&3\end{vmatrix}=-\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$$

توجه کنید که چون $\vec{a}\times\frac{3}{2}\vec{b}=\frac{3}{2}(\vec{a}\times\vec{b})$، پس θ زاویهٔ بین بردار $\vec{a}\times\frac{3}{2}\vec{b}$ و محور z است، بنابراین

$$\cos\theta=\frac{(\vec{a}\times\frac{3}{2}\vec{b})\cdot\vec{k}}{|\vec{a}\times\frac{3}{2}\vec{b}||\vec{k}|}=\frac{(-1,1,-1)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{3}\times\sqrt{1}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

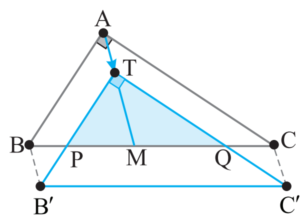
۲ (۱) در شکل زیر، مثلث $TB'C'$ انتقال‌یافتهٔ مثلث ABC تحت بردار $\overrightarrow{AT}$ و مثلث TPQ ناحیهٔ محدود بین مثلث اولیه و مثلث انتقال‌یافته است. بنابر فرض تست، $\frac{S_{TPQ}}{S_{ABC}}=\frac{1}{16}\quad(1)$

از طرف دیگر، چون اضلاع مثلث TPQ با اضلاع مثلث ABC دوبه‌دو موازی‌اند، پس زاویه‌های این دو مثلث مساوی‌اند. در نتیجه این دو مثلث متشابه‌اند. بنابراین نسبت مساحت‌های این دو مثلث مساوی توان دوم نسبت میانه‌های نظیر آن‌ها است، پس

$$\frac{S_{TPQ}}{S_{ABC}}=(\frac{TM}{AM})^2\xrightarrow{\text{از (۱)}}(\frac{TM}{AM})^2=\frac{1}{16}\Rightarrow\frac{TM}{AM}=\frac{1}{4}\quad(2)$$

چون در مثلث قائم‌الزاویه، میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است، پس $AM=\frac{BC}{2}=\frac{8}{2}=4$. در نتیجه از (۲) به‌دست می‌آید

$$\frac{TM}{4}=\frac{1}{4}\Rightarrow TM=1\Rightarrow AT=AM-TM=4-1=3$$



۳ (۱) سطر سوم ماتریس A را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\text{سطر سوم حاصل‌ضرب دو ماتریس اول}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&8&4\\3&2&5\\6&9&3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}?&?&?\\?&?&?\\3&7&-2\end{bmatrix}$$

اکنون سطر سوم ماتریس A را پیدا می‌کنیم:

$$A\ \text{سطر سوم}=\begin{bmatrix}?&?&?\\?&?&?\\3&7&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}?&?&?\\?&?&?\\7&1&-5\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های سطر سوم ماتریس A مساوی $7+1-5=3$ است.

۴ (۴) توجه کنید که

$$BA^TA=52I\Rightarrow B\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\2&1\\3&1\end{bmatrix}=52I$$

$$B\begin{bmatrix}14&4\\4&3\end{bmatrix}=52I\quad(1)$$

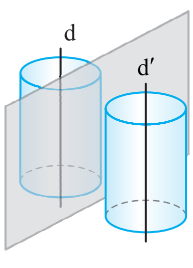
اکنون برای پیدا کردن ماتریس B، طرفین تساوی (۱) را از سمت راست در وارون ماتریس $\begin{bmatrix}14&4\\4&3\end{bmatrix}$ ضرب می‌کنیم. توجه کنید که $\begin{bmatrix}14&4\\4&3\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{26}\begin{bmatrix}3&-4\\-4&14\end{bmatrix}$. بنابراین

$$B=52I\begin{bmatrix}14&4\\4&3\end{bmatrix}^{-1}=52I\times\frac{1}{26}\begin{bmatrix}3&-4\\-4&14\end{bmatrix}$$

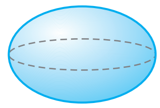
$$=\frac{52}{26}\begin{bmatrix}3&-4\\-4&14\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}3&-4\\-4&14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&-8\\-8&28\end{bmatrix}$$

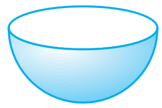
بنابراین ماکزیمم مقدار درایه‌های ماتریس B برابر ۲۸ است.

۵ (۱) فرض کنید $k>0$. مکان هندسی نقاطی از فضا که از خط‌های موازی d و d′ به فاصلهٔ k هستند، دو سطح استوانه‌ای با محورهای d و d′ هستند (شکل مقابل را ببینید). صفحه‌هایی که بر این دو سطح استوانه‌ای مماس هستند، از دو خط d و d′ به یک فاصله هستند که در اینجا تعداد آن‌ها حداکثر ۴ تا است. در واقع دو تا از این صفحه‌ها می‌توانند طوری



بر این دو سطح استوانه‌ای مماس باشند که هر دو سطح در یک طرف این صفحه‌ها باشند و دو تا از این صفحه‌ها می‌توانند طوری بر این دو سطح استوانه‌ای مماس باشند که دو سطح در طرفین این صفحه‌ها باشند. با تغییر مقدار k، تعداد نامتناهی صفحه با این ویژگی خواهیم داشت. بنابراین گزینهٔ (۱) درست است. در ضمن، چون گزینهٔ (۱) درست است، پس گزینهٔ (۲) نادرست خواهد بود. گزینه‌های (۳) و (۴) در صفحه به‌ترتیب تعریف سهمی و بیضی هستند. در فضا این مکان‌ها سهمی‌گون و بیضی‌گون هستند.


بیضی‌گون


سهمی‌گون

۶ (۲) معادلهٔ استاندارد سهمی به‌صورت زیر است:

$$(x-۱)^۲-۱۲y=۶ \Rightarrow (x-۱)^۲=۱۲y+۶ \Rightarrow (x-۱)^۲=۱۲(y+\frac{۱}{۲})$$

پس این سهمی قائم رو به بالا با رأس $F(۱,-\frac{۱}{۲})$ است و $۴a=۱۲$ ، یعنی $a=۳$. بنابراین کانون این سهمی به مختصات زیر است:

$$F'=(\alpha , a+\beta)=(۱, ۳-\frac{۱}{۲})=(۱,\frac{۵}{۲})$$

اکنون مرکز بیضی را پیدا می‌کنیم: $O=\frac{F+F'}{۲}=(۱,۱)$ مرکز بیضی

بنابراین $\sqrt{۱+۱}=\sqrt{۲}$ = فاصلهٔ مرکز بیضی از مبدأ مختصات

۷ (۴) نقطهٔ تلاقی قطرهای $x+y=۱$ و $x-y=۳$ مرکز دایره است:

$$\begin{cases} x+y=۱ \\ x-y=۳ \end{cases} \xrightarrow{+} ۲x=۴ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow y=-۱ \Rightarrow O(۲,-۱)$$ مرکز

همچنین فاصلهٔ مرکز $O(۲,-۱)$ تا خط مماس $۴x+۳y+۵=۰$ برابر شعاع دایره است، یعنی

$$R=\frac{|۴(۲)+۳(-۱)+۵|}{\sqrt{۱۶+۹}}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

از طرف دیگر، طول پاره‌خط OM برابر است با

$$OM=\sqrt{(x_M-x_O)^۲+(y_M-y_O)^۲}=\sqrt{(۴-۲)^۲+(-۲+۱)^۲}=\sqrt{۵}$$

چون $OM>R$ ، پس نقطهٔ M بیرون دایره است. بنابراین

$OM-R=\sqrt{۵}-۲$ = نزدیک‌ترین فاصلهٔ M از دایره

۸ (۲) چون بردار $(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{a}\times\vec{b})$ با بردار $\vec{c}$ موازی است، پس $\vec{a}\times\vec{b}$ با $\vec{c}$ موازی است. در ضمن برای ساده‌تر شدن محاسبات به جای بردار $\vec{b}=(-\frac{۴}{۳},\frac{۲}{۳},۲)$ از بردار $\frac{۳}{۲}\vec{b}=(-۲,۱,۳)$ استفاده می‌کنیم. در واقع بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ با بردار $\vec{a}\times\frac{۳}{۲}\vec{b}$ موازی است. توجه کنید که

$$\vec{a}\times\frac{۳}{۲}\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -۱ & \alpha & ۲ \\ -۲ & ۱ & ۳ \end{vmatrix}=(۳\alpha-۲)\vec{i}-\vec{j}+(-۱+۲\alpha)\vec{k}$$

بنابر فرض سؤال قرار است بردار $\vec{a}\times\frac{۳}{۲}\vec{b}$ با $\vec{c}$ موازی باشد. بنابراین

$$\frac{۳\alpha-۲}{-۱}=\frac{-۱}{۱}=\frac{-۱+۲\alpha}{-۱}$$

در نتیجه

$$\begin{cases} ۳\alpha-۲=۱ \Rightarrow \alpha=۱ \\ -۱+۲\alpha=۱ \Rightarrow \alpha=۱ \end{cases}$$

پس به‌ازای $\alpha=۱$ دو بردار $(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{a}\times\vec{b})$ و $\vec{c}$ موازی‌اند.

۹ (۱) توجه کنید که

$$\begin{bmatrix} ۵ & -۲ \\ ۴ & a \end{bmatrix}_{۲\times۲}\begin{bmatrix} b_۱ \\ b_۲ \end{bmatrix}_{۲\times۱}=\begin{bmatrix} ۴b_۱ \\ ۴b_۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۵b_۱-۲b_۲ \\ ۴b_۱+ab_۲ \end{bmatrix}_{۲\times۱}=\begin{bmatrix} ۴b_۱ \\ ۴b_۲ \end{bmatrix}$$

بنابراین $۵b_۱-۲b_۲=۴b_۱ \Rightarrow b_۱=۲b_۲ \quad (۱)$

چون b ماتریسی ناصفر است، پس $b_۱ , b_۲ \neq ۰$. اکنون می‌توان نوشت

$$۴b_۱+ab_۲=۴b_۲ \xrightarrow{\text{از } (۱)} ۸b_۲+ab_۲=۴b_۲ \xrightarrow[b_۲\neq۰]{\text{تقسیم بر } b_۲}$$

$$۸+a=۴ \Rightarrow a=-۴$$

۱۰ (۴) توجه کنید که

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۷ & ۸ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۵ \\ ۶ & ۹ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۶ & ۹ & ۳ \\ ۷ & ۸ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۹ & & \\ & ۷ & \\ & & ۵ \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس A برابر ۲۱=۵+۷+۹ است.

۱۱ (۴) چون $A=\begin{bmatrix} ۱ & a & ۳ \\ -۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ ، پس $A^T=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ a & ۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$.

بنابراین

$$AA^T=\begin{bmatrix} ۱ & a & ۳ \\ -۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ a & ۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^۲+۱۰ & a+۲ \\ a+۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

چون AA^T ماتریسی ۲×۲ است، $AA^TB=۵۲I$ و $|B|$ تعریف می‌شود، پس B و I ماتریس‌هایی ۲×۲ هستند. اکنون اگر از دو طرف تساوی $AA^TB=۵۲I$ دترمینان بگیریم، به‌دست می‌آید

$$|AA^TB|=|۵۲I| \Rightarrow |AA^T||B|=۵۲^۲|I|$$

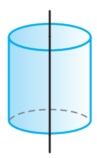
$$\begin{vmatrix} a^۲+۱۰ & a+۲ \\ a+۲ & ۳ \end{vmatrix}\times۱۰۴=۵۲^۲ \Rightarrow (۳a^۲+۳۰-(a+۲)^۲)=\frac{۵۲^۲}{۱۰۴}=۲۶$$

$$۳a^۲+۳۰-a^۲-۴-۴a=۲۶ \Rightarrow ۲a^۲-۴a=۰ \Rightarrow ۲a(a-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=۰ \\ a=۲ \end{cases}$$

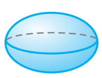
پس مجموع مقادیر ممکن برای a مساوی ۲=۲+۰ است.

۱۲ (۱) خطوطی که بر d عمودند، اگر موازی باشند، در یک صفحه هستند؛ اگر متقاطع باشند، در صفحه‌هایی عمود بر خط d هستند؛ اگر متنافر باشند، هر کدام از آن‌ها در صفحه‌هایی مختلف واقع هستند. در نتیجه چون در فضا بی‌نهایت خط بر یک خط مفروض عمودند، پس خطوط عمود بر یک خط در فضا بی‌نهایت صفحه در فضا تشکیل می‌دهند.

اکنون به نادرستی سایر گزینه‌ها توجه کنید:

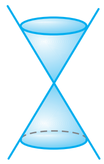


مجموعهٔ نقاط متساوی‌الفاصله از یک خط در فضا روی سطحی استوانه‌ای قرار می‌گیرند. پس گزینهٔ (۲) نادرست است.



مجموعهٔ نقاطی از فضا که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطهٔ ثابت به یک اندازه است، شکلی به نام بیضی‌گون است. پس گزینهٔ (۳) نادرست است.

خطوط گذرا از یک نقطه که با محور گذرا از آن نقطه زاویهٔ یکسان می‌سازند، سطح مخروطی است. پس گزینهٔ (۴) نادرست است.



۱۳ **۳** طرفین معادلهٔ بیضی را بر ۱۰۰ تقسیم می‌کنیم:

$$۲۵(x-۱)^۲+۱۶(y+۱)^۲=۱۰۰\Rightarrow \frac{(x-۱)^۲}{۴}+\frac{(y+۱)^۲}{\frac{۲۵}{۴}}=۱$$

پس این بیضی یک بیضی قائم با مرکز $O'(۱,-۱)$ است و

$$\begin{cases} a^۲=\frac{۲۵}{۴}\Rightarrow a=\frac{۵}{۲} \\ b^۲=۴\Rightarrow b=۲ \end{cases}$$

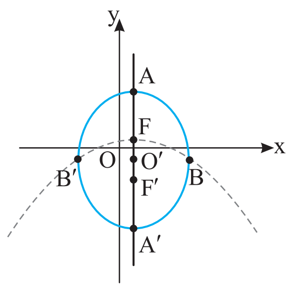
بنابراین

$$c^۲=a^۲-b^۲=\frac{۲۵}{۴}-۴=\frac{۹}{۴}\Rightarrow c=\frac{۳}{۲}$$

با توجه به شکل $O'F'=O'F=c=\frac{۳}{۲}$. چون $OF<OF'$، پس کانون‌ها به مختصات $F(۱,\frac{۱}{۲})$ و $F'(۱,-\frac{۵}{۲})$ هستند. اکنون F رأس و F' کانون سهمی مورد نظر است. با توجه به جایگاه رأس و کانون، این سهمی قائم رو به پایین است و مقدار a در سهمی مساوی $FF'=۳$ است. با توجه به معادلهٔ سهمی قائم رو به پایین،

$$(x-\alpha)^۲=-۴a(y-\beta)\Rightarrow(x-۱)^۲=-۱۲(y-\frac{۱}{۲})\Rightarrow(x-۱)^۲=-۱۲y+۶$$

● توجه کنید معادلهٔ بیضی در کتاب هندسهٔ ۳ نظام جدید حذف شده است.



۱۴ **۲** **راه‌حل اول** مختصات پیکان‌های $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\overrightarrow{BA}=A-B=(-۲,۲,۱)$$
$$\overrightarrow{BC}=C-B=(-۱,-۱,۲)$$

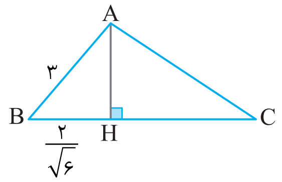
چون پیکان $\overrightarrow{BH}$ تصویر پیکان $\overrightarrow{BA}$ روی پیکان $\overrightarrow{BC}$ است، پس

$$|\overrightarrow{BH}|=\frac{|\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\frac{|-۲-۲+۲|}{\sqrt{۱+۱+۴}}=\frac{۲}{\sqrt{۶}}$$

در ضمن $|\overrightarrow{BA}|=\sqrt{۴+۴+۱}=۳$. بنابراین

$$\triangle ABH: AH^۲=AB^۲-BH^۲\Rightarrow AH^۲=۹-\frac{۴}{۶}=۹-\frac{۲}{۳}=\frac{۲۵}{۳}$$

$$AH=\frac{۵}{\sqrt{۳}}=\frac{۵\sqrt{۳}}{۳}$$



راه‌حل دوم مساحت مثلث ABC را به کمک ضرب خارجی پیدا می‌کنیم

$$\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -۲ & ۲ & ۱ \\ -۱ & -۱ & ۲ \end{vmatrix}=۵\vec{i}+۳\vec{j}+۴\vec{k}$$

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}|=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۵+۹+۱۶}=\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}$$

در ضمن $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{۱+۱+۴}=\sqrt{۶}$. بنابراین

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AH\times BC\Rightarrow\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۱}{۲}AH\times\sqrt{۶}\Rightarrow AH=\frac{۵\sqrt{۲}}{\sqrt{۶}}=\frac{۵\sqrt{۳}}{۳}$$