

پاسخ کنکور سراسری ۱۴۰۰

۳ ۱ سطر سوم ماتریس A را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$\text{سطر سوم حاصل ضرب دو ماتریس اول} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ 3 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

اکنون سطر سوم ماتریس A را پیدا می کنیم:

$$\text{سطر سوم A} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ 3 & 7 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ 7 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه های سطر سوم ماتریس A مساوی $7+1-5=3$ است.

۴ ۴ توجه کنید که

$$BA^T A = 52I \Rightarrow B \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = 52I$$

$$B \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = 52I \quad (1)$$

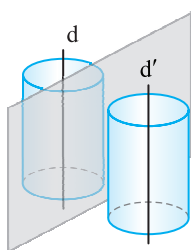
اکنون برای پیدا کردن ماتریس B، طرفین تساوی (۱) را از سمت راست در

وارون ماتریس $\begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ضرب می کنیم. توجه کنید که

$$\begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 14 \end{bmatrix}$$

$$B = 52I \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = 52I \times \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 14 \end{bmatrix} = \frac{52}{26} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 14 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -8 & 28 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماکزیم مقدار درایه های ماتریس B برابر ۲۸ است.



۵ ۱ فرض کنید $k > 0$. مکان هندسی

نقاطی از فضا که از خطهای موازی d و d' به فاصله k هستند، دو سطح استوانه ای با محورهای d و d' هستند (شکل مقابل را ببینید). صفحه هایی که بر این دو سطح استوانه ای مماس هستند، از دو خط d و d' به یک فاصله هستند که در اینجا تعداد آنها حداکثر ۴ تا است. در واقع دو تا از این صفحه ها می توانند طوری

۱ ۱ زاویه بین بردار $\vec{a} = (-1, \alpha, 1)$ و محور Z در فضا برابر 45°

است. بنابراین

$$\cos 45^\circ = \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{|\vec{a}| |\vec{k}|} = \frac{\vec{k} = (0, 0, 1)}{\sqrt{2} \sqrt{1 + \alpha^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2 + \alpha^2 + 1}}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2 + \alpha^2} \Rightarrow \alpha = 0$$

بنابراین $\vec{a} = (-1, 0, 1)$. اکنون به جای بردار $\vec{b} = (-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 2)$ از بردار

$\frac{3}{2}\vec{b} = (-2, 1, 3)$ استفاده می کنیم. در این صورت

$$\vec{a} \times \frac{3}{2}\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

توجه کنید که چون $\vec{a} \times \frac{3}{2}\vec{b} = \frac{3}{2}(\vec{a} \times \vec{b})$ ، پس θ زاویه بین بردار $\vec{a} \times \frac{3}{2}\vec{b}$ و

محور Z است. بنابراین

$$\cos \theta = \frac{(\vec{a} \times \frac{3}{2}\vec{b}) \cdot \vec{k}}{|\vec{a} \times \frac{3}{2}\vec{b}| |\vec{k}|} = \frac{(-1, 1, -1) \cdot (0, 0, 1)}{\sqrt{3} \times \sqrt{1}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

۲ ۱ در شکل زیر، مثلث $TB'C'$ انتقال یافته مثلث ABC تحت

بردار AT و مثلث TPQ ناحیه محدود بین مثلث اولیه و مثلث انتقال یافته

است. بنابر فرض تست، $\frac{S_{TPQ}}{S_{ABC}} = \frac{1}{16}$ (۱)

از طرف دیگر، چون اضلاع مثلث TPQ با اضلاع مثلث ABC دوجه دو

موازی اند، پس زاویه های این دو مثلث مساوی اند. در نتیجه این دو مثلث

متشابه اند. بنابراین نسبت مساحت های این دو مثلث مساوی توان دوم نسبت

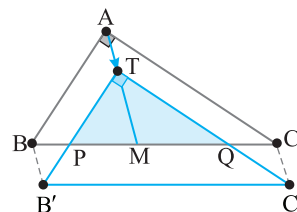
میانهای نظیر آنها است، پس

$$\frac{S_{TPQ}}{S_{ABC}} = \left(\frac{TM}{AM}\right)^2 \xrightarrow{\text{از (۱)}} \left(\frac{TM}{AM}\right)^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{TM}{AM} = \frac{1}{4} \quad (2)$$

چون در مثلث قائم الزاویه، میانه وارد بر وتر نصف وتر است، پس

$$AM = \frac{BC}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{TM}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow TM = 1 \Rightarrow AT = AM - TM = 2 - 1 = 1$$



۹ ۱ توجه کنید که

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4b_1 \\ 4b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5b_1 - 2b_2 \\ 4b_1 + ab_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4b_1 \\ 4b_2 \end{bmatrix}$$

$$5b_1 - 2b_2 = 4b_1 \Rightarrow b_1 = 2b_2 \quad (1) \quad \text{بنابراین}$$

چون b ماتریسی ناصفر است، پس $b_1, b_2 \neq 0$. اکنون می توان نوشت

$$4b_1 + ab_2 = 4b_2 \xrightarrow{\text{از (1)}} 8b_2 + ab_2 = 4b_2 \xrightarrow{\text{تقسیم بر } b_2 \neq 0}$$

$$8 + a = 4 \Rightarrow a = -4$$

۱۰ ۴ توجه کنید که

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & & \\ & & 7 \\ & & 5 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه های قطر اصلی ماتریس A برابر $9+7+5=21$ است.

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ a & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{چون } A = \begin{bmatrix} 1 & a & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{پس}$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & a & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ a & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+10 & a+2 \\ a+2 & 3 \end{bmatrix}$$

چون AA^T ماتریسی 2×2 است، $AA^T B = 52I$ و $|B|$ تعریف می شود،

پس B و I ماتریس هایی 2×2 هستند. اکنون اگر از دو طرف تساوی

$$AA^T B = 52I \quad \text{دترمینان بگیریم، به دست می آید}$$

$$|AA^T B| = |52I| \Rightarrow |AA^T| |B| = 52^2 |I|$$

$$\begin{vmatrix} a^2+10 & a+2 \\ a+2 & 3 \end{vmatrix} \times 104 = 52^2 \Rightarrow (3a^2+30-(a+2)^2) = \frac{52^2}{104} = 26$$

$$3a^2+30-a^2-4-4a=26 \Rightarrow 2a^2-4a=0 \Rightarrow 2a(a-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=2 \end{cases}$$

پس مجموع مقادیر ممکن برای a مساوی $0+2=2$ است.

۱۲ ۱ خطوطی که بر d عمودند،

در یک صفحه هستند؛ اگر متقاطع باشند، در صفحه هایی عمود بر خط d هستند؛ اگر متنافر باشند، هر کدام از آنها در صفحه هایی مختلف واقع هستند. در نتیجه چون در فضا بی نهایت خط بر یک خط مفروض عمودند، پس خطوط عمود بر یک خط در فضا بی نهایت صفحه در فضا تشکیل می دهند.

اکنون به نادرستی سایر گزینه ها توجه کنید:

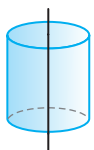
مجموعه نقاط متساوی الفاصله از یک خط در فضا روی سطحی

استوانه ای قرار می گیرند. پس گزینه (۲) نادرست است.

مجموعه نقاطی از فضا که مجموع فواصل آنها از دو نقطه

ثابت به یک اندازه است، شکلی به نام بیضی گون است.

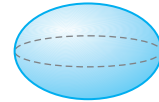
پس گزینه (۳) نادرست است.



بر این دو سطح استوانه ای مماس باشند که هر دو سطح در یک طرف این صفحه ها باشند و دو تا از این صفحه ها می توانند طوری بر این دو سطح استوانه ای مماس باشند که دو سطح در طرفین این صفحه ها باشند. با تغییر مقدار k ، تعداد نامتناهی صفحه با این ویژگی خواهیم داشت. بنابراین گزینه (۱) درست است. در ضمن، چون گزینه (۱) درست است، پس گزینه (۲) نادرست خواهد بود. گزینه های (۳) و (۴) در صفحه به ترتیب تعریف سهمی و بیضی هستند. در فضا این مکان ها سهمی گون و بیضی گون هستند.



سهمی گون



بیضی گون

۶ ۲ معادله استاندارد سهمی به صورت زیر است:

$$(x-1)^2 - 12y = 6 \Rightarrow (x-1)^2 = 12y + 6 \Rightarrow (x-1)^2 = 12(y + \frac{1}{2})$$

پس این سهمی قائم رو به بالا با رأس $F(1, -\frac{1}{2})$ است و $4a=12$ ، یعنی

$a=3$. بنابراین کانون این سهمی به مختصات زیر است:

$$F' = (\alpha, a+\beta) = (1, 3 - \frac{1}{2}) = (1, \frac{5}{2})$$

اکنون مرکز بیضی را پیدا می کنیم: $O = \frac{F+F'}{2} = (1, 1)$ مرکز بیضی

بنابراین فاصله مرکز بیضی از مبدأ مختصات $= \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

۷ ۴ نقطه تلاقی قطره های $x+y=1$ و $x-y=3$ مرکز دایره است:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases} \xrightarrow{+} 2x=4 \Rightarrow x=2 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow O(2, -1) \quad \text{مرکز}$$

همچنین فاصله مرکز $O(2, -1)$ تا خط مماس $4x+3y+5=0$ برابر شعاع

$$R = \frac{|4(2)+3(-1)+5|}{\sqrt{16+9}} = \frac{10}{5} = 2 \quad \text{یعنی}$$

از طرف دیگر، طول پاره خط OM برابر است با

$$OM = \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2} = \sqrt{(4-2)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{5}$$

چون $OM > R$ ، پس نقطه M بیرون دایره است. بنابراین

$$\text{نزدیک ترین فاصله } M \text{ از دایره} = OM - R = \sqrt{5} - 2$$

۸ ۲ چون بردار $(\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{a} \times \vec{b})$ یا بردار \vec{c} موازی است، پس $\vec{a} \times \vec{b}$

با \vec{c} موازی است. در ضمن برای ساده تر شدن محاسبات به جای بردار

$$\vec{b} = (-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 2) \quad \text{از بردار } \vec{b} = (-2, 1, 3) \text{ استفاده می کنیم. در واقع بردار}$$

$\vec{a} \times \vec{b}$ با بردار $\vec{a} \times \frac{3}{4}\vec{b}$ موازی است. توجه کنید که

$$\vec{a} \times \frac{3}{4}\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & \alpha & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (\alpha-2)\vec{i} - \vec{j} + (-1+2\alpha)\vec{k}$$

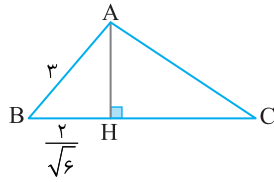
بنابر فرض سؤال قرار است بردار $\vec{a} \times \frac{3}{4}\vec{b}$ با \vec{c} موازی باشد. بنابراین

$$\frac{3\alpha-2}{-1} = \frac{-1}{1} = \frac{-1+2\alpha}{-1}$$

در نتیجه

$$\begin{cases} 3\alpha-2=1 \Rightarrow \alpha=1 \\ -1+2\alpha=1 \Rightarrow \alpha=1 \end{cases}$$

پس به ازای $\alpha=1$ دو بردار $(\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{a} \times \vec{b})$ و \vec{c} موازی اند.



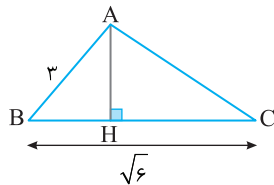
راه حل دوم مساحت مثلث ABC را به کمک ضرب خارجی پیدا می‌کنیم

$$\overline{BA} \times \overline{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overline{BA} \times \overline{BC}| = \frac{1}{2} \sqrt{25+9+16} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

در ضمن $|\overline{BC}| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$. بنابراین

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC \Rightarrow \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} AH \times \sqrt{6} \Rightarrow AH = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$



خطوط گذرا از یک نقطه که با محور گذرا از آن نقطه زاویه یکسان می‌سازند، سطح مخروطی است. پس گزینه (۴) نادرست است.

۱۳ طرفین معادله بیضی را بر ۱۰۰ تقسیم می‌کنیم:

$$25(x-1)^2 + 16(y+1)^2 = 100 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{\frac{25}{4}} = 1$$

پس این بیضی یک بیضی قائم با مرکز $O'(1, -1)$ است و

$$\begin{cases} a^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow a = \frac{5}{2} \\ b^2 = 4 \Rightarrow b = 2 \end{cases}$$

بنابراین

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4} \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

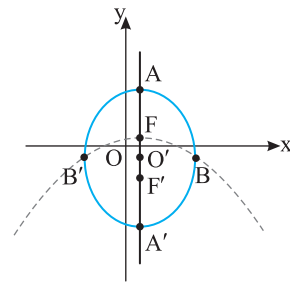
با توجه به شکل $O'F' = O'F = c = \frac{3}{2}$. چون $OF < OF'$ ، پس کانون‌ها به

مختصات $F(1, \frac{1}{2})$ و $F'(1, -\frac{5}{2})$ هستند. اکنون F رأس و F' کانون سهمی

مورد نظر است. با توجه به جایگاه رأس و کانون، این سهمی قائم رو به پایین است و مقدار a در سهمی مساوی $FF' = 3$ است. با توجه به معادله سهمی قائم رو به پایین،

$$(x-\alpha)^2 = -4a(y-\beta) \Rightarrow (x-1)^2 = -12(y-\frac{1}{2}) \Rightarrow (x-1)^2 = -12y+6$$

● توجه کنید معادله بیضی در کتاب هندسه ۳ نظام جدید حذف شده است.



۱۴ راه حل اول مختصات پیکان‌های \overline{BA} و \overline{BC} را پیدا می‌کنیم:

$$\overline{BA} = A - B = (-2, 2, 1)$$

$$\overline{BC} = C - B = (-1, -1, 2)$$

چون پیکان \overline{BH} تصویر پیکان \overline{BA} روی پیکان \overline{BC} است، پس

$$|\overline{BH}| = \frac{|\overline{BA} \cdot \overline{BC}|}{|\overline{BC}|} = \frac{|2-2+2|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

در ضمن $|\overline{BA}| = \sqrt{4+4+1} = 3$. بنابراین

$$\triangle ABH: AH^2 = AB^2 - BH^2 \Rightarrow AH^2 = 9 - \frac{4}{6} = 9 - \frac{2}{3} = \frac{25}{3}$$

$$AH = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$