پاسخ کنکور سراسری ۱۴۰۱

۱ **(۲)** ابتدا ماتریس AB را پیدا می‌کنیم:

$$AB=\begin{bmatrix} x & -1 & -x \\ 0 & 0 & 4 \\ y & z & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2z & \frac{1}{2} & 2 \\ 2z & 0 & -4y \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2xz-2z & 0 & 2x+4y \\ 0 & 2 & 0 \\ 2yz+2z^2 & \frac{y}{2}+\frac{z}{2} & 2y-4yz \end{bmatrix}$$

ماتریس AB ماتریس اسکالر است، پس درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی صفر و درایه‌های روی قطر اصلی همگی برابر یکدیگرند. بنابراین

$$\begin{cases} 2xz-2z=2 \Rightarrow xz-z=1 \xrightarrow{\text{از }(1)} -xy+y=1 \\ 2y-4yz=2 \Rightarrow y-2yz=1 \xrightarrow{\text{از }(1)} y+2y^2=1 \\ 2x+4y=0 \Rightarrow x=-2y \\ 2yz+2z^2=0 \xrightarrow{z\neq 0} y=-z \quad (1) \\ \frac{y}{2}+\frac{z}{2}=0 \Rightarrow y=-z \end{cases}$$

در نتیجه

$$2y^2+y-1=0 \Rightarrow y=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{-1\pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} y=-1 \\ y=\frac{1}{2}\ (\text{غ.ق.ق}) \end{cases}$$

بنابراین

$$-xy+y=1 \xrightarrow{y=-1} -xy-1=1 \Rightarrow xy=-2$$

دقت کنید $z\neq 0$ زیرا در غیر این صورت مقدار $2xz-2z$ برابر صفر است و با اسکالر بودن ماتریس AB در تناقض است.

۲ **(۳)** ابتدا دترمینان A را به‌دست می‌آوریم:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=1(-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}+(-1)(-1)^3\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$+(-3)(-1)^4\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1(3-2)+1(12-4)-3(4-2)=1+8-6=3$$

بنابراین

$$\begin{bmatrix} 2|A| & |A| \\ 1 & \frac{2}{|A|} \end{bmatrix}X=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}X=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

اکنون طرفین تساوی ماتریسی بالا را در وارون ماتریس $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ یعنی ماتریس $\frac{1}{1}\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -3 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$ از سمت چپ ضرب می‌کنیم. در نتیجه

$$X=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -3 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -15 & 6 \end{bmatrix}$$

پس کوچک‌ترین درایهٔ قطر اصلی ماتریس X برابر ۶ است.

۳ **(۱)** با انتخاب دو مقدار دلخواه برای m دو قطر دایره را به‌دست آورده از تلاقی این دو قطر مرکز دایره به‌دست می‌آید.

$$\left.\begin{array}{l} m=2 \Rightarrow 3y=6 \Rightarrow y=2 \\ m=-1 \Rightarrow -3x=6 \Rightarrow x=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{مرکز دایره } O(-2,2)$$

چون A روی دایره است، پس

$$R=OA=\sqrt{(-1+2)^2+(1-2)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

بنابراین $\text{محیط دایره}=2\pi R=2\sqrt{2}\pi$

۴ **(۲)** اگر در سهمی افقی از معادلهٔ سهمی نسبت به y مشتق گرفته مساوی صفر قرار دهیم، آن‌گاه عرض رأس سهمی به‌دست می‌آید، پس

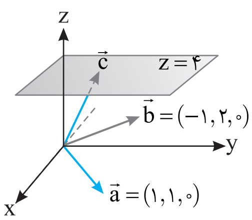
$$f'_y=0 \Rightarrow 4y-2a=0 \xrightarrow{y=1} 4-2a=0 \Rightarrow a=2$$

در ضمن رأس سهمی در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند، پس

$$2-2a-8+b=0 \xrightarrow{a=2} 2-4-8+b=0 \Rightarrow b=10$$

بنابراین $\frac{a}{b}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

۵ **(۴)** ارتفاع بردار $\vec{h}$ برابر ۴ است، پس انتهای بردار $\vec{h}$ روی صفحهٔ $z=4$ قرار دارد. در ضمن بردار $\vec{h}$ بر بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود نیست زیرا $\vec{a}\cdot\vec{h}\neq 0$ و $\vec{b}\cdot\vec{h}\neq 0$، بنابراین بردار $\vec{h}$ روی صفحهٔ $z=4$ قرار دارد. در نتیجه انتهای بردار $\vec{c}$ روی صفحهٔ $z=4$ واقع است، بنابراین مختصات بردار $\vec{c}$ به صورت $(x,y,4)$ است. بنابر فرض سؤال،



$$\vec{a}\cdot\vec{c}=1 \Rightarrow (1,1,0)\cdot(x,y,4)=1 \Rightarrow x+y=1$$

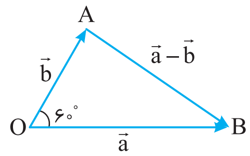
$$\vec{b}\cdot\vec{c}=5 \Rightarrow (-1,2,0)\cdot(x,y,4)=5 \Rightarrow -x+2y=5$$

بنابراین

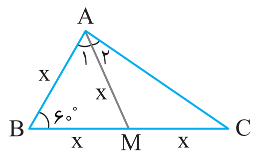
$$\begin{cases} x+y=1 \\ -x+2y=5 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} 3y=6 \rightarrow y=2,\ x=-1$$

پس $\vec{c}=(-1,2,4)$ و $|\vec{c}|=\sqrt{1+4+16}=\sqrt{21}$.

۶ (۱) در نظر بگیرید $|\vec{a}|=2|\vec{b}|$. در این صورت بردار $\vec{a}-\vec{b}$ مطابق شکل مقابل خواهد بود. در مثلث OAB یک زاویهٔ 60° و اندازهٔ دو ضلع این زاویهٔ 60° به نسبت ۱ به ۲ هستند. پس مثلث OAB قائم‌الزاویه است و $\hat{A}=90^\circ$، پس $\hat{B}=30^\circ$. در نتیجه زاویهٔ بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ برابر 30° است.



نکته: توجه کنید اگر در مثلث ABC، $\hat{B}=60^\circ$، $AB=x$ و $BC=2x$، آن‌گاه $\hat{A}=90^\circ$. زیرا اگر میانهٔ AM وارد بر BC را رسم کنید، آن‌گاه مثلث ABM متساوی‌الاضلاع و مثلث AMC متساوی‌الساقین است؛ پس $\hat{A}_1=60^\circ$ و $\hat{A}_2=30^\circ$، در نتیجه $\hat{A}=90^\circ$.



۷ (۲) وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix}-1&2\\4&-3\end{bmatrix}$ برابر $A^{-1}=\frac{1}{-5}\begin{bmatrix}-3&-2\\-4&-1\end{bmatrix}$ است. پس

$$\alpha A+\beta I=A^{-1}\Rightarrow\alpha\begin{bmatrix}-1&2\\4&-3\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\frac{1}{-5}\begin{bmatrix}-3&-2\\-4&-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-\alpha+\beta&2\alpha\\4\alpha&-3\alpha+\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5}&\frac{2}{5}\\\frac{4}{5}&\frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\begin{cases}-\alpha+\beta=\frac{3}{5}\Rightarrow-\frac{1}{5}+\beta=\frac{3}{5}\Rightarrow\beta=\frac{4}{5}\\2\alpha=\frac{2}{5}\Rightarrow\alpha=\frac{1}{5}\end{cases}$$

در نتیجه $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}}=4$.

۸ (۱) ابتدا درایه‌های ماتریس A^2 را به‌دست آوریم:

$$A^2=A\times A$$

$$=\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-4&4\\0&-1&0\\-2&2&-3\end{bmatrix}$$

اکنون فقط درایه‌های سطر اول ماتریس A^3 را به‌دست می‌آوریم:

$$A^3=A^2\times A$$

$$=\begin{bmatrix}3&-4&4\\0&-1&0\\-2&2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\?&?&?\\?&?&?\end{bmatrix}$$

بنابراین درایه‌های سطر اول ماتریس A^3 به‌صورت $\begin{bmatrix}1&-1&0\end{bmatrix}$ است.

۹ (۲) برای مشخص شدن راه‌حل هر دو دایره را ترسیم می‌کنیم؛ سپس مرکز و شعاع دایره‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$x^2-8x+y^2+15=0\Rightarrow O(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})=(4,0)$$

$$R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{64-60}}{2}=1$$

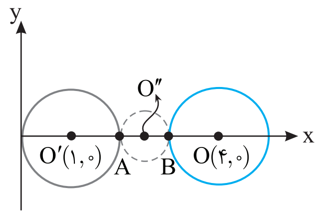
$$x^2-2x+y^2=0\Rightarrow O'(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})=(1,0)$$

$$R'=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{4}}{2}=1$$

مطابق شکل دایرهٔ خطچین به مرکز O'' و شعاع R'' مرکزش روی محور x قرار دارد و بر هر دو دایره مماس خارج است. در شکل AB قطر دایرهٔ خطچین است چون $A(2,0)$ و $B(3,0)$ است. پس $O''=\frac{A+B}{2}=(\frac{5}{2},0)$ و $R''=\frac{AB}{2}=\frac{1}{2}$. بنابراین معادلهٔ این دایره به صورت زیر است:

$$(x-\frac{5}{2})^2+(y-0)^2=\frac{1}{4}\Rightarrow x^2+\frac{25}{4}-5x+y^2=\frac{1}{4}$$

$$x^2+y^2-5x+6=0$$



۱۰ (۳) ابتدا معادلهٔ بیضی را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$x^2+4y^2-16y-2x+16=0\Rightarrow(x^2-2x)+4(y^2-4y)+16=0$$

$$(x-1)^2-1+4[(y-2)^2-4]+16=0\Rightarrow(x-1)^2+4(y-2)^2=1$$

$$(x-1)^2+\frac{(y-2)^2}{\frac{1}{4}}=1$$

بنابراین بیضی افقی با مقادیر $a^2=1$ و $b^2=\frac{1}{4}$ است، پس

$$c^2=a^2-b^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\Rightarrow c=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین فاصلهٔ دو کانون برابر $2c=\sqrt{3}$ است. «توجه کنید معادلهٔ بیضی در کتاب درسی هندسه ۳ مطرح نشده است، پس این سؤال خارج از سرفصل کتاب درسی است».