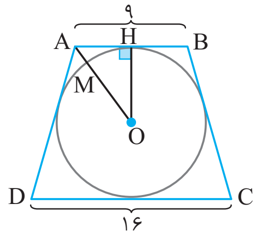
پاسخ کنکور سراسری ۹۹

۹۸۷ (۱) از نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محاطی ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD، به رأس A وصل می‌کنیم تا دایره را در M قطع کند. طول پاره‌خط AM کمترین فاصلهٔ نقاط دایره تا رأس قاعدهٔ کوچک ذوزنقه است. اگر R شعاع دایرهٔ محاطی باشد، آن‌گاه $4R^2=AB\times DC$، پس $4R^2=9\times 16$، در نتیجه $R^2=36$، پس $R=6$. اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAH،

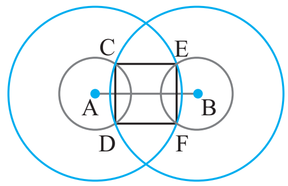
$$\left.\begin{array}{l} AH=\frac{AB}{2}=\frac{9}{2} \\ OH=R=6 \end{array}\right\}\Rightarrow OA^2=OH^2+AH^2$$

$$OA^2=36+\frac{81}{4}=\frac{225}{4}\Rightarrow OA=\frac{15}{2}$$

بنابراین $AM=OA-OM=\frac{15}{2}-6=\frac{3}{2}$



۹۸۸ (۳) نقطهٔ A از دو نقطهٔ D و C به یک فاصله است، پس A روی عمودمنصف CD است. با استدلالی مشابه B روی عمودمنصف EF است. پس AB عمودمنصف CD و EF است. یعنی CD و EF موازی هم و عمود بر AB هستند. همین‌طور فاصلهٔ CE از AB برابر با فاصلهٔ DF از AB است، بنابراین AB||CE||DF. در نتیجه دو خط موازی CD و EF عمود بر دو خط موازی DF و CE هستند. بنابراین چهارضلعی مورد نظر مستطیل است.



۹۸۹ (۱) با دو بار استفاده از قضیهٔ تالس می‌نویسیم:

$$\triangle ABC: ON||BC\Rightarrow \frac{AN}{NB}=\frac{OA}{OC} \qquad (1)$$

$$\triangle ABD: OM||AD\Rightarrow \frac{BM}{AM}=\frac{OB}{OD} \qquad (2)$$

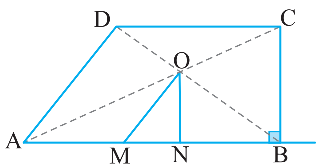
از طرف دیگر،

$$DC||AB\xrightarrow[\text{تشابه}]{\text{قضیهٔ اساسی}}\triangle ODC\sim\triangle OBA\Rightarrow\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD} \qquad (3)$$

بنابراین

$$\text{از (۱)، (۲) و (۳)}\Rightarrow\frac{AN}{NB}=\frac{BM}{AM}\xrightarrow[\text{در صورت}]{\text{ترکیب}}\frac{AB}{NB}=\frac{AB}{AM}$$

$$AM=NB\Rightarrow\frac{AM}{BN}=1$$



۹۹۰ (۲) ارتفاع ذوزنقه‌ها را رسم می‌کنیم و از رأس B پاره‌خط BM را موازی AD رسم می‌کنیم تا ذوزنقهٔ ABCD به متوازی‌الاضلاع ABMD و مثلث BMC تقسیم شود (شکل زیر را ببینید). در این صورت DM=۵ و MC=۴. با فرض MN=x نتیجه می‌گیریم ON=x−۵. بنابراین

$$S_{ABNM}=S_{MNCD}\Rightarrow\frac{1}{2}(h)(5+x)=\frac{1}{2}(h')(9+x)$$

$$\frac{h}{h'}=\frac{9+x}{5+x}\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}\frac{h}{h+h'}=\frac{x+9}{2x+14} \qquad (1)$$

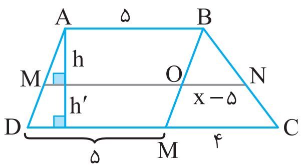
از طرف دیگر،

$$ON||MC\xrightarrow{\text{قضیهٔ اساسی تشابه}}\triangle OBN\sim\triangle MBC$$

$$\frac{ON}{MC}=\frac{h}{h+h'}\Rightarrow\frac{x-5}{4}=\frac{h}{h+h'} \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{\text{(۱) و (۲)}}\frac{x+9}{2x+14}=\frac{x-5}{4}\Rightarrow 2x^2+4x-70=4x+36$$

$$2x^2=106\Rightarrow x^2=53\Rightarrow x=\sqrt{53}$$



۹۹۱ (۳) **راه‌حل اول** فرض کنید DA=x، پس بنابر فرض DG=۳DA نتیجه می‌گیریم AG=۲x، بنابراین

$$AF||ED\xrightarrow{\text{قضیهٔ اساسی تشابه}}\triangle AFG\sim\triangle DEG$$

$$\frac{S_{AFG}}{S_{DEG}}=\left(\frac{AG}{GD}\right)^2=\left(\frac{2x}{3x}\right)^2=\frac{4}{9} \qquad (1)$$

در ضمن دو مثلث GEC و GED دارای ارتفاع مشترک نظیر رأس G هستند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌هایی است که این ارتفاع بر آن‌ها وارد شده است، پس

$$\frac{S_{GED}}{S_{GEC}}=\frac{ED}{EC}=\frac{2}{7}\Rightarrow S_{GED}=\frac{2}{7}S_{GEC} \qquad (2)$$

اکنون از برابری‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $S_{AFG}=\frac{8}{63}S_{GEC}$. از طرف دیگر،

$$AB||DC\xrightarrow{\text{قضیهٔ اساسی تشابه}}\triangle AGB\sim\triangle DGC$$

$$\frac{S_{AGB}}{S_{DGC}}=\left(\frac{AG}{DG}\right)^2=\left(\frac{2x}{3x}\right)^2=\frac{4}{9}\xrightarrow[\text{در صورت}]{\text{تفضیل}}\frac{S_{ABCD}}{S_{DGC}}=\frac{5}{9} \qquad (3)$$

درضمن دو مثلث GDC و GEC دارای ارتفاع مشترک نظیر از رأس A هستند، پس

$$\frac{S_{GDC}}{S_{GEC}}=\frac{DC}{EC}=\frac{5}{7} \qquad (4)$$

اکنون از تساوی‌های (۳) و (۴) نتیجه می‌گیریم $S_{ABCD}=\frac{25}{63}S_{GEC}$. بنابراین

$$\frac{S_{AFG}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{8}{63}S_{GEC}}{\frac{25}{63}S_{GEC}}=\frac{8}{25}\Rightarrow\frac{S_{AFG}}{S_{ABCD}}=\frac{8}{25}\times 100=32\%$$

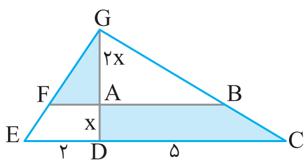
راه‌حل دوم با فرض $AD=x$ نتیجه می‌گیریم $AG=2x$. بنابر قضیهٔ تالس، $\frac{GF}{FE}=\frac{GA}{AD}=2$ و $\frac{GB}{BC}=\frac{GA}{AD}=2$. در نتیجه اندازه‌های روی شکل به‌دست می‌آیند. ارتفاع GH را رسم می‌کنیم تا FB را در H' قطع کند. به‌طور مشابه معلوم می‌شود $\frac{GH'}{HH'}=2$. پس

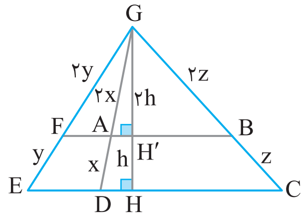
$$\triangle GED: AF \parallel ED \Rightarrow \frac{AF}{ED}=\frac{GF}{GE} \Rightarrow \frac{AF}{2}=\frac{2y}{3y} \Rightarrow AF=\frac{4}{3}$$

$$\triangle GDC: AB \parallel DC \Rightarrow \frac{AB}{DC}=\frac{GB}{GC} \Rightarrow \frac{AB}{5}=\frac{2z}{3z} \Rightarrow AB=\frac{10}{3}$$

بنابراین

$$\frac{S_{AFG}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{1}{2}(2h)(AF)}{\frac{1}{2}h(AB+DC)}=\frac{2\times\frac{4}{3}}{\frac{10}{3}+5}=\frac{8}{25} \Rightarrow \frac{S_{AFG}}{S_{ABCD}}=\frac{8}{25}\times 100=32\%$$



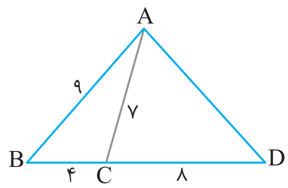


۹۹۲ (۱) بنابر قضیهٔ استوارت،

$$AB^2\times CD+AD^2\times BC=AC^2\times BD+BC\times CD\times BD$$

$$81\times 8+4AD^2=49\times 12+4\times 8\times 12 \xrightarrow{\div 4} 162+AD^2=147+96$$

$$AD^2=81 \Rightarrow AD=9$$



۹۹۳ (۴) توجه کنید که شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر قطر دایرهٔ کوچک‌تر است (شکل زیر را ببینید)، پس اگر OM را رسم کنیم، آن‌گاه زاویهٔ M قائمه است. پس عمود OM وتر CD را نصف می‌کند یعنی $CM=MD$. بنابر رابطه‌های طولی در دایره،

$$MA\times MB=MC\times MD \xrightarrow{MC=MD} MA\times MB=MD^2 \quad (1)$$

درضمن طول کمان AC از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

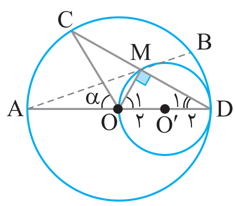
$$\text{طول کمان AC}=\frac{\alpha}{360^\circ}(2\pi R) \Rightarrow \frac{4\pi}{3}=\frac{\alpha}{360^\circ}2\pi\times 4$$

$$\alpha=60^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AC}=60^\circ$$

بنابراین $\hat{D}_1=30^\circ$، پس $\hat{O}_1=60^\circ$. در نتیجه

$$\triangle OMD: \hat{O}_1=60^\circ \Rightarrow MD=\frac{\sqrt{3}}{2}OD=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 4=2\sqrt{3}$$

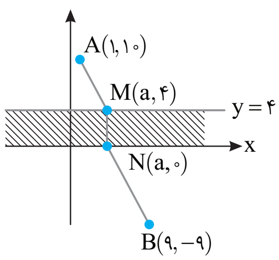
بنابر برابری (۱)، $MA\times MB=MD^2=(2\sqrt{3})^2=12$

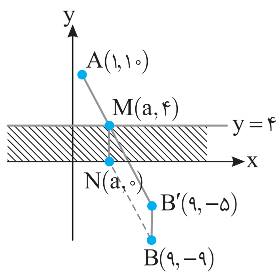


۹۹۴ (۱) با توجه به شکل سمت چپ پاره‌خط MN موازی محور y است. پس طول مینیمم خط شکستهٔ AMNB همان مسئلهٔ احداث پُل است. در نتیجه باید نقطهٔ B را در راستای محور y به اندازهٔ ۴ واحد (طول MN) به بالا انتقال دهیم تا به نقطهٔ B' برسیم، سپس از B' به A وصل می‌کنیم تا M به‌دست آید. سپس عمود MN مسیر مینیمم AMNB را ایجاد می‌کند. طول این مسیر برابر $AB'+MN$ یعنی $AB'+4$ است.

$$AB'=\sqrt{(9-1)^2+(10+5)^2}=\sqrt{64+225}=\sqrt{289}=17$$

پس طول مسیر مینیمم مساوی ۱۷+۴=۲۱ است.





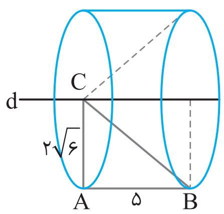
۹۹۵ (۴) از دوران مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC حول خط d یک استوانه که از آن مخروطی جدا شده است به‌دست می‌آید به‌طوری که ارتفاع استوانه و مخروط برابر ۵ و شعاع قاعدهٔ هر دو آن‌ها $2\sqrt{6}$ است.

$$\text{حجم استوانه}=\pi R^2h=\pi(2\sqrt{6})^2(5)=24\times 5\pi$$

$$\text{حجم مخروط}=\frac{1}{3}\pi R^2h=\frac{1}{3}\pi(2\sqrt{6})^2(5)=\frac{24\times 5}{3}\pi$$

بنابراین

$$\text{حجم خواسته شده}=24\times 5\pi-\frac{24\times 5}{3}\pi=\frac{2\times 24\times 5}{3}\pi=80\pi$$



۹۹۶ (۴) **راه‌حل اول** بنابر رابطه‌های طولی در دایره تساوی زیر برقرار است:

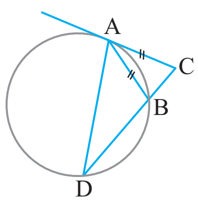
$$CA^2=CB\times CD$$

بنابر قضیهٔ استوارت در مثلث ADC،

$$AC^2\times BD+AD^2\times BC=AB^2\times DC+BD\times BC\times DC$$

$$\xrightarrow[AB=AC]{AC^2=CB\times CD} CB\times CD\times BD+AD^2\times BC$$
$$=CB\times CD\times DC+BD\times BC\times DC$$

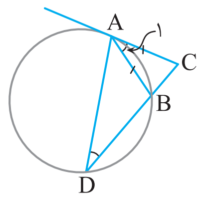
$$AD^2\times BC=CB\times CD\times CD \Rightarrow AD^2=CD^2 \Rightarrow AD=CD$$



راه‌حل دوم زاویهٔ ظلی A_1 و زاویهٔ محاطی D برابرند، زیرا مطابق شکل زیر

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_1=\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}\\ \hat{D}=\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\hat{A}_1=\hat{D}\\ \hat{C}=\hat{C}\end{array}\right\}\xrightarrow{(زز)}\triangle ABC\sim\triangle DAC$$

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{DC}\xrightarrow{AB=AC}AD=DC$$



۹۹۷ (۲) چهارضلعی ABCD محاطی است، پس زاویه‌های مقابل آن مکمل‌اند (شکل زیر را ببینید)، پس $\hat{A}=120^\circ$. با رسم قطر BD و استفاده از قضیهٔ کسینوس‌ها می‌نویسیم:

$$\triangle BDC: BD^2=BC^2+DC^2-2BC\times DC\cos 60^\circ$$

$$BD^2=49+81-2(7)(9)(\frac{1}{2})=67\Rightarrow BD=\sqrt{67}$$

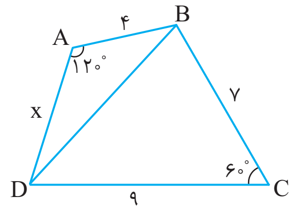
$$\triangle ABD: BD^2=AB^2+AD^2-2AB\times AD\cos 120^\circ$$

$$67=16+x^2-2(4)(x)(-\frac{1}{2})$$

$$67=16+x^2+4x\Rightarrow x^2+4x-51=0$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16+4\times 51}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+51}}{1}\Rightarrow x=-2+\sqrt{55}$$

بنابراین $x+2$ مساوی $\sqrt{55}$ است. دقت کنید که $x=-2-\sqrt{55}$ غیرقابل قبول است.



۹۹۸ (۱) کوچک‌ترین دایرهٔ گذرا از دو نقطهٔ A و B دایره‌ای به قطر AB است. پس مرکز دایره وسط AB و شعاع آن نصف طول پاره خط AB است:

$$O=\frac{A+B}{2}=(-1,\ 3),\quad R=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{36+16}}{2}=\frac{\sqrt{52}}{2}$$

بنابراین معادلهٔ دایره به‌صورت زیر است:

$$(x+1)^2+(y-3)^2=\frac{52}{4}\xrightarrow{y=0}(x+1)^2+9=\frac{52}{4}\Rightarrow(x+1)^2=4$$

$x+1=2$ یا $x+1=-2\Rightarrow x=1$ یا $x=-3$

۹۹۹ (۲) در شکل زیر دایره‌ای به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و گذرنده از نقطهٔ $A(1,-4)$ بر خط $4x+3y=0$ و محور y مماس است. چون دایره بر محور y مماس است، پس طول مرکز آن برابر R است، بنابراین $O(R,\beta)$ مرکز دایره است و

$$R=\frac{|4R+3\beta|}{\sqrt{4^2+3^2}}\Leftarrow \text{فاصلهٔ O تا خط }(4x+3y=0)=\text{فاصلهٔ O تا محور y}$$

$$5R=4R+3\beta,\quad -5R=4R+3\beta$$

مرکز O در ناحیهٔ چهارم مختصات قرار دارد، پس β باید منفی باشد:

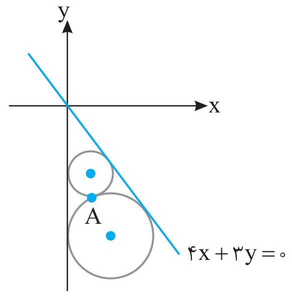
$$-5R=4R+3\beta\Rightarrow\beta=-3R\Rightarrow O(R,-3R)$$

بنابراین

$$OA=R\Rightarrow\sqrt{(R-1)^2+(-3R+4)^2}=R$$

$$R^2+1-2R+9R^2+16-24R=R^2\Rightarrow 9R^2-26R+17=0$$

$$R=\frac{26\pm\sqrt{26\times 26-4\times 9\times 17}}{18}=\frac{13\pm 4}{9}\Rightarrow R=\frac{17}{9},\ R=1$$



۱۰۰۰ (۳) دایره به قطر FF' بیضی را در نقطهٔ M قطع کرده است، پس زاویهٔ M محاطی و روبه‌رو به قطر FF' است، پس $\hat{M}=90^\circ$، یعنی مثلث MFF' قائم‌الزاویه است. از طرف دیگر بنابر فرض،

$$2b=2\sqrt{7}\Rightarrow b=\sqrt{7},\quad 2a=8\Rightarrow a=4$$

پس $c^2=a^2-b^2=16-7=9\Rightarrow c=3$

بنابراین $\triangle MFF': MF^2+MF'^2=FF'^2=(2c)^2=36\qquad(1)$

درضمن $MF+MF'=2a=8$، پس

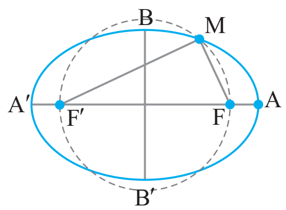
$$(MF+MF')^2=64\Rightarrow MF^2+MF'^2+2MF\times MF'=64$$

$$\xrightarrow{\text{از }(1)}36+2MF\times MF'=64\Rightarrow MF\times MF'=14$$

در نتیجه $MF\times MF'=14$ و $MF+MF'=8$. با فرض $S=8$ و $P=14$ می‌توان نوشت

$$x^2-Sx+P=0\Rightarrow x^2-8x+14=0\Rightarrow x=\frac{8\pm\sqrt{64-4\times 14}}{2}=4\pm\sqrt{2}$$

بنابراین فاصلهٔ M از یک کانون $4+\sqrt{2}$ و از کانون دیگر $4-\sqrt{2}$ است، پس فاصلهٔ M تا کانون نزدیک‌تر $4-\sqrt{2}$ است.



۱۰۰۱ (۲) سهمی $y^2+ay+bx+1=0$ افقی است، پس عرض رأس سهمی با عرض کانون آن برابر و مساوی ۲− است. معادلهٔ سهمی را استاندارد می‌کنیم:

$$(y+\frac{a}{2})^2-\frac{a^2}{4}=-bx-1\Rightarrow(y+\frac{a}{2})^2=-bx-1+\frac{a^2}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{عرض رأس سهمی }-2\text{ است}}-\frac{a}{2}=-2\Rightarrow a=4$$

در نتیجه معادلهٔ سهمی به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$(y+2)^2=-bx+3\Rightarrow(y+2)^2=-b(x-\frac{3}{b})$$

بـا فـرض $b<0$ نتیجه می‌گیریم دهانهٔ سـهمی رو به راسـت اسـت و رأس آن $S(\alpha,\beta)=(\frac{3}{b},-2)$ است و $4a=-b$، پس $a=\frac{-b}{4}$. مختصات کانون این سهمی به‌صورت مقابل است: $F(a+\alpha,\beta)=(-\frac{b}{4}+\frac{3}{b},-2)=(-\frac{1}{4},-2)$

بنابراین

$$-\frac{b}{4}+\frac{3}{b}=-\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{-b^2+12}{4b}=-\frac{1}{4}\Rightarrow 4b^2-4b-48=0$$

$$b^2-b-12=0\Rightarrow(b-4)(b+3)=0\Rightarrow b=4 \text{ یا } b=-3$$

پس کمترین مقدار b برابر -3 است.

۱۰۰۲ (۴) ابتدا ماتریس A^2 و سپس درایه‌های سطر اول ماتریس A^3 را پیدا می‌کنیم.

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}2&1&5\\-3&0&4\\1&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&5\\-3&0&4\\1&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&2&24\\-2&-3&-7\\4&1&9\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}6&2&24\\-2&-3&-7\\4&1&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&5\\-3&0&4\\1&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30&6&86\\?&?&?\\?&?&?\end{bmatrix}$$

۱۰۰۳ (۳) با فرض $B=\begin{bmatrix}2&3\\4&5\end{bmatrix}$ نتیجه می‌گیریم

$$B^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}5&-3\\-4&2\end{bmatrix}$$

و با فرض $C=\begin{bmatrix}2&-1\\-4&3\end{bmatrix}$ نتیجه می‌گیریم $C^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3&1\\4&2\end{bmatrix}$

اکنون طرفین رابطهٔ ماتریسی داده شده را از چپ در B^{-1} و از راست در C^{-1} ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix}2&3\\4&5\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}2&-1\\-4&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0\\0&8\end{bmatrix}\Rightarrow X=B^{-1}\begin{bmatrix}4&0\\0&8\end{bmatrix}C^{-1}$$

$$X=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}5&-3\\-4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&0\\0&8\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3&1\\4&2\end{bmatrix}$$

$$=-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}20&-24\\-16&16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1\\4&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&6\\4&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1\\4&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&7\\-4&-4\end{bmatrix}$$

۱۰۰۴ (۳) حاصل دترمینان را برحسب سطر اول بسط می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix}-4&1&1\\1&2-x&1\\3&2&3-x\end{vmatrix}=0\Rightarrow-4(-1)^2\begin{vmatrix}2-x&1\\2&3-x\end{vmatrix}$$

$$+1(-1)^3\begin{vmatrix}1&1\\3&3-x\end{vmatrix}+1(-1)^4\begin{vmatrix}1&2-x\\3&2\end{vmatrix}=0$$

$$-4(6+x^2-5x-2)-1(3-x-3)+1(2-6+3x)=0$$

$$-16-4x^2+20x+x-4+3x=0$$

$$-4x^2+24x-20=0\xrightarrow[-4]{\text{تقسیم بر}}x^2-6x+5=0$$

$$(x-1)(x-5)=0\Rightarrow x=1 \text{ یا } x=5$$

۱۰۰۵ (۱) طول وتر این مثلث $2x+3$ است. پس بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$(2x+3)^2=(2x+1)^2+(x+1)^2$$

$$4x^2+9+12x=4x^2+1+4x+x^2+1+2x\Rightarrow x^2-6x-7=0$$

$$(x-7)(x+1)=0\Rightarrow x=7\ ,\ x=-1$$

مقـدار $x=-1$ قابـل قبول نیسـت چـون طول ضلـع $x+1$ بـه‌ازای آن صفر می‌شود. به‌ازای $x=7$ اندازهٔ اضلاع مثلث برابر ۱۷، ۱۵ و ۸ هستند، بنابراین

$$S=\frac{1}{2}(8)(15)=60$$

۱۰۰۶ (۳) در ذوزنقـهٔ متساوی‌السـاقین محیطـی حاصل‌ضـرب دو قاعـده مساوی مربع قطر دایرهٔ محاطی است. اگر R شعاع دایرهٔ محاطی باشد، آن‌گاه

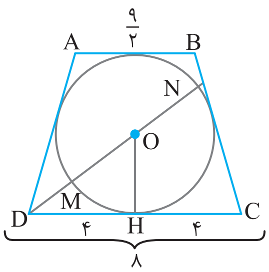
$$AB\times DC=4R^2\Rightarrow\frac{9}{2}\times8=4R^2\Rightarrow R^2=9\Rightarrow R=3$$

اکنون از مرکز O به رأس D خطی رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطه‌های M و N قطـع کند. در این صورت طول پاره‌خط DM نزدیک‌ترین و طول پاره‌خط DN دورترین فاصلهٔ نقاط دایره تا رأس D هسـتند. مسلماً $DN=DO+R$. برای به‌دست آوردن اندازهٔ DO در مثلث قائم‌الزاویهٔ ODH، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

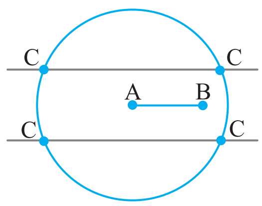
$$OD^2=OH^2+DH^2=3^2+4^2=25\Rightarrow OD=5$$

بنابراین

$$\text{فاصلهٔ دورترین نقاط دایره تا نقطهٔ } D=OD+R=5+3=8$$



۱۰۰۷ (۴) مجموعـهٔ نقاطی کـه از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۷ هسـتند دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۷ است و مجموعهٔ نقاطی که از AB به فاصلهٔ ۵ هستند دو خط مـوازی AB در طرفین آن اسـت. نقاط تلاقی ایـن دو خط موازی با دایره، چهار نقطه است که جواب این سؤال هستند.

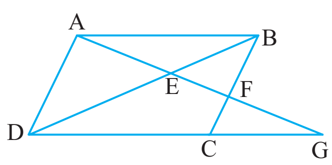


۱۰۰۸ (۱) بنابر قضیهٔ اساسی تشابه،

$$AD||BF\Rightarrow\triangle ADE\sim\triangle FBE\Rightarrow\frac{AE}{EF}=\frac{DE}{BE}\quad(1)$$

$$AB||DG\Rightarrow\triangle AEB\sim\triangle GED\Rightarrow\frac{DE}{EB}=\frac{EG}{AE}\quad(2)$$

$$\xrightarrow{(1)\text{ و }(2)}\frac{AE}{EF}=\frac{EG}{AE}\Rightarrow AE^2=EF\times EG$$



۱۰۰۹ (۱) با توجه به شکل زیر، دو مثلث OAB و OCD متشابه‌اند زیرا $AB||DC$. پس

$$\triangle OAB \sim \triangle OCD \Rightarrow \frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{DC}$$

$$=\frac{۵}{۹} \xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب}} \frac{OA}{AC}=\frac{OB}{BD}=\frac{۵}{۱۴}$$

بنابراین

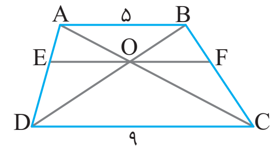
$$\triangle ADC: OE||DC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{OE}{DC}=\frac{OA}{AC}$$

$$\frac{OE}{۹}=\frac{۵}{۱۴} \Rightarrow OE=\frac{۴۵}{۱۴}$$

$$\triangle BDC: OF||DC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{OF}{DC}=\frac{OB}{BD}$$

$$\frac{OF}{۹}=\frac{۵}{۱۴} \Rightarrow OF=\frac{۴۵}{۱۴}$$

پس $EF=OE+OF=\frac{۹۰}{۱۴}=\frac{۴۵}{۷}$.



۱۰۱۰ (۲) به کمک قضیهٔ تالس x را به دست می‌آوریم:

$$AB||DC \Rightarrow \frac{EA}{AD}=\frac{EB}{BC} \Rightarrow \frac{۵}{x}=\frac{۳x-۴}{۴} \Rightarrow ۳x^{۲}-۴x-۲۰=۰$$

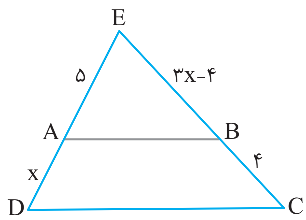
$$x=\frac{۴\pm\sqrt{۱۶+۲۴۰}}{۶}=\frac{۲\pm\sqrt{۴+۶۰}}{۳} \Rightarrow x=\frac{۱۰}{۳} \text{ یا } x=-۲$$

مسلماً $x=-۲$ قابل قبول نیست. پس با فرض $x=\frac{۱۰}{۳}$ مسئله را حل می‌کنیم:

$$AB||DC \Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle DCE$$

$$\frac{S_{ABE}}{S_{DCE}}=(\frac{EA}{ED})^{۲}=(\frac{۵}{۵+x})^{۲} \Rightarrow \frac{S_{ABE}}{S_{DCE}}=(\frac{۵}{۵+\frac{۱۰}{۳}})^{۲}=\frac{۲۵}{\frac{۲۵\times۲۵}{۹}}=\frac{۹}{۲۵}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{S_{ABE}}{S_{ABCD}}=\frac{۹}{۱۶} \Rightarrow S_{ABCD}=\frac{۱۶}{۹}S_{ABE}$$



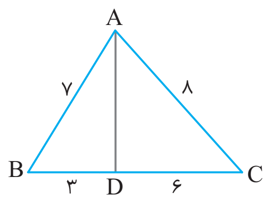
۱۰۱۱ (۲) با استفاده از قضیهٔ استوارت،

$$AB^{۲}\times DC+AC^{۲}\times BD=AD^{۲}\times BC+BD\times DC\times BC$$

$$۴۹\times۶+۶۴\times۳=AD^{۲}\times۹+۳\times۶\times۹ \xrightarrow{\div۳} ۴۹\times۲+۶۴$$

$$=AD^{۲}\times۳+۶\times۹$$

$$۱۶۲=۳AD^{۲}+۵۴ \Rightarrow AD^{۲}=۳۶ \Rightarrow AD=۶$$



۱۰۱۲ (۳) از مرکز O به نقطهٔ M وصل می‌کنیم در این صورت $O\hat{M}D$ زاویهٔ محاطی روبه‌رو به قطر OD است، پس $O\hat{M}D=۹۰^{\circ}$، بنابراین OM بر وتر CD عمود است. پس OM وتر CD را نصف می‌کند، یعنی

$$CM=MD \quad (۱)$$

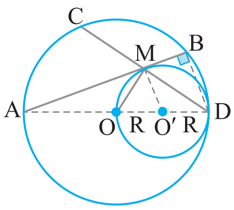
$$A\hat{M}O'=\hat{B}=۹۰^{\circ} \Rightarrow MO'||BD$$

$$\xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{AM}{MB}=\frac{AO'}{O'D}=\frac{۳R}{R}=۳ \Rightarrow AM=۳MB \qquad (۲)$$

روابط طولی در دایره: $MA\times MB=MC\times MD$

$$\xrightarrow{\text{از (۱) و (۲)}} ۳MB\times MB=MC\times MC$$

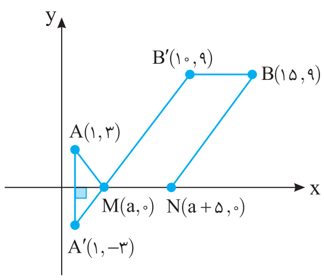
$$\frac{MC^{۲}}{MB^{۲}}=۳ \Rightarrow \frac{MC}{MB}=\sqrt{۳}$$



۱۰۱۳ (۳) با توجه به شکل و موقعیت نقاط A، B، M و N این سؤال همان مسئلهٔ شبه‌هرون است که می‌خواهیم از A به B برویم به‌طوری که $MN=۵$ قسمتی از مسیر در ساحل رودخانه باشد. برای تعیین مسیر مینیمم ابتدا B را بـه انـدازهٔ ۵ واحد در راسـتای محور x به طـرف A منتقل می‌کنیـم تا به B' برسـیم و بازتاب A را نسـبت به محور x نقطهٔ A' می‌نامیم. از A' به B' وصل می‌کنیم تا محور x در نقطهٔ M قطع شود. مسیر AMNB مسیر مینیمم است و طول آن برابر $A'B'+BB'$ است:

$$\begin{cases} A'(۱,-۳) \\ B'(۱۰,۹) \end{cases} \Rightarrow A'B'=\sqrt{(۱۰-۱)^{۲}+(۹+۳)^{۲}}=\sqrt{۸۱+۱۴۴}=\sqrt{۲۲۵}=۱۵$$

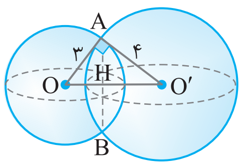
طول مسیر مینیمم $=A'B'+BB'=۱۵+۵=۲۰$



۱۰۱۴ (۴) تلاقی دو کره یک دایره اسـت. در شـکل AH شعاع دایرهٔ مورد نظر اسـت. چـون $OA=۳$، $O'A=۴$ و $OO'=۵$، پـس مثلث OAO' قائم‌الزاویه است. بنابراین با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم:

$$AH\times OO'=OA\times O'A \Rightarrow AH\times۵=۳\times۴ \Rightarrow AH=\frac{۱۲}{۵}$$

$$\text{مساحت دایره}=\pi AH^{۲}=\pi(\frac{۱۲}{۵})^{۲}=\frac{۱۴۴}{۲۵}\pi=۵/۷۶\pi$$



۱۰۱۵ (۴) دو زاویهٔ محاطی N و D روبه‌رو به یک کمان هستند، پس مساوی‌اند.

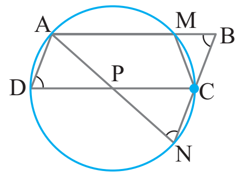
مثلث ABN متساوی‌الساقین است $\hat{D}=\hat{N}\xrightarrow{\hat{D}=\hat{B}}\hat{B}=\hat{N}$

در ضمن بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب،

$$\begin{cases} AB||DC \\ BN \text{ مورب}\end{cases}\Rightarrow \hat{B}=P\hat{C}N$$

$\xrightarrow{\hat{B}=\hat{N}} \hat{N}=P\hat{C}N \Rightarrow$ مثلث PCN متساوی‌الساقین است

دو زاویهٔ $P\hat{C}N$ و $P\hat{A}D$ محاطی روبه‌رو به کمان DN هستند، پس برابرند. در نتیجه مثلث PAD با مثلث PCN متشابه و در نتیجه متساوی‌الساقین است. از طرف دیگر دو وتر AM و DC موازی‌اند، پس دو کمان AD و MC که بین آن‌ها هستند، مساوی‌اند، پس $AD=MC$. در ضمن $AD=BC$، پس $BC=MC$، یعنی مثلث BMC متساوی‌الساقین است. بنابراین در این شکل چهار مثلث متساوی‌الساقین ABN، PCN، PAD و BMC وجود دارد.



۱۰۱۶ (۱) از B به C وصل کرده و با استفاده از قضیهٔ کسینوس‌ها می‌نویسیم:

$$\triangle ABC: BC^۲=AB^۲+AC^۲-۲AB\times AC\cos ۶۰^\circ$$

$$BC^۲=۲۵+۴۹-۲(۵)(۷)(\frac{۱}{۲})=۳۹$$

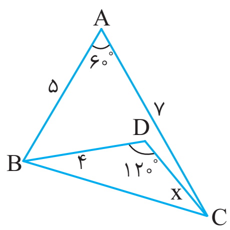
$$\triangle BDC: BC^۲=BD^۲+DC^۲-۲BD\times DC\cos ۱۲۰^\circ$$

$$۳۹=۱۶+x^۲-۲(۴)(x)(-\frac{۱}{۲})\Rightarrow ۳۹=۱۶+x^۲+۴x$$

$$x^۲+۴x-۲۳=۰\Rightarrow x=\frac{-۴\pm\sqrt{۱۶+۴\times۲۳}}{۲}=-۲\pm\sqrt{۴+۲۳}=-۲\pm\sqrt{۲۷}$$

مسلماً $x=-۲-\sqrt{۲۷}$ قابل قبول نیست، پس $x=-۲+\sqrt{۲۷}$. بنابراین

$$x+۲=\sqrt{۲۷}=۳\sqrt{۳}$$



۱۰۱۷ (۴) بنابر فرض سؤال وتر AB به طول $۲\sqrt{۲۱}$ است، پس $AH=\sqrt{۲۱}$. با به‌دست آوردن OH شعاع OA را پیدا می‌کنیم:

$$OH=\frac{|۵+۳۶-۱۵|}{\sqrt{۲۵+۱۴۴}}=\frac{۲۶}{۱۳}=۲$$

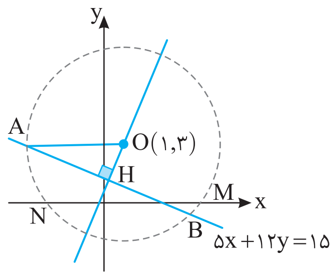
$$\triangle OAH: OA^۲=OH^۲+AH^۲=۴+۲۱=۲۵\Rightarrow OA=۵\Rightarrow R=۵$$

معادلهٔ دایره: $(x-۱)^۲+(y-۳)^۲=۲۵$

اکنون نقاط برخورد این دایره با محور x را تعیین می‌کنیم:

$$y=۰\Rightarrow (x-۱)^۲+۹=۲۵\Rightarrow(x-۱)^۲=۱۶\Rightarrow\begin{cases}x-۱=۴\Rightarrow x=۵\\x-۱=-۴\Rightarrow x=-۳\end{cases}$$

نقاط تلاقی دایره با محور x نقطه‌های $M(۵,۰)$ و $N(-۳,۰)$ است و فاصلهٔ این دو نقطه مساوی $MN=۸$ است.



۱۰۱۸ (۱) مطابق شکل مرکز دایره $O(\alpha,R)$ است. در واقع عرض مرکز برابر شعاع دایره است. در ضمن فاصلهٔ مرکز O از دو خط $۳x-۴y=۰$ و $y=۰$ برابر است.

فاصلهٔ O تا $(۳x-۴y=۰)$ = فاصلهٔ O تا $(y=۰)$

$$|R|=\frac{|۳\alpha-۴R|}{\sqrt{۹+۱۶}}\Rightarrow R=\frac{|۳\alpha-۴R|}{۵}\Rightarrow\begin{cases}۵R=۳\alpha-۴R\\۵R=-۳\alpha+۴R\end{cases}$$

چون O در ناحیهٔ اول دستگاه مختصات قرار دارد، پس باید α مثبت باشد:

$$۵R=۳\alpha-۴R\Rightarrow ۳\alpha=۹R\Rightarrow\alpha=۳R\Rightarrow O(۳R,R)$$

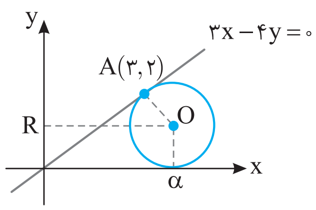
از طرف دیگر،

$$OA=R\Rightarrow\sqrt{(۳R-۳)^۲+(R-۲)^۲}=R\xrightarrow{\text{توان دو}}$$

$$۹R^۲+۹-۱۸R+R^۲+۴-۴R=R^۲\Rightarrow ۹R^۲-۲۲R+۱۳=۰$$

$$R=\frac{۲۲\pm\sqrt{۲۲\times۲۲-۴\times۹\times۱۳}}{۲\times۹}=\frac{۱۱\pm\sqrt{۱۱\times۱۱-۹\times۱۳}}{۹}$$

$$=\frac{۱۱\pm\sqrt{۱۲۱-۱۱۷}}{۹}=\frac{۱۱\pm۲}{۹}\Rightarrow R=\frac{۱۳}{۹},R=۱$$



۱۰۱۹ (۲) بنابر فرض سؤال،

$$۲b=۴\sqrt{۶}\Rightarrow b=۲\sqrt{۶},\quad ۲a=۱۴\Rightarrow a=۷$$

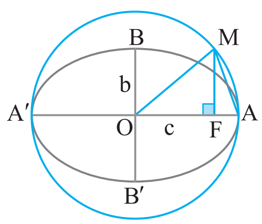
پس $c^۲=a^۲-b^۲=۴۹-۲۴=۲۵\Rightarrow c=۵$

نقطهٔ O مرکز بیضی و در نتیجه مرکز دایرهٔ به قطر AA' است، پس $OM=OA=۷$.

$$\triangle OMF: MF^۲=OM^۲-OF^۲\Rightarrow MF^۲=a^۲-c^۲=b^۲\Rightarrow MF=b$$

$$\triangle AMF: AM^۲=MF^۲+AF^۲\xrightarrow[MF=b]{AF=a-c}AM^۲=b^۲+(a-c)^۲$$

$$AM^۲=(۲\sqrt{۶})^۲+(۷-۵)^۲=۲۴+۴=۲۸\Rightarrow AM=۲\sqrt{۷}$$



۱۰۲۰ (۱) معادلهٔ سهمی را استاندارد می‌کنیم:

$$(y+\frac{a}{۲})^{۲}=-bx+۹+\frac{a^{۲}}{۴}$$

چون $y=۱$ محور تقارن سهمی است، پس

$$-\frac{a}{۲}=۱\Rightarrow a=-۲$$

پس معادلهٔ سهمی به صورت زیر در می‌آید:

$$(y-۱)^{۲}=-bx+۱۰\Rightarrow(y-۱)^{۲}=-b(x-\frac{۱۰}{b})$$

پس این سهمی افقی است و رأس آن $S(h\,,k)=(\frac{۱۰}{b},۱)$ است و چون علامت b مشـخص نیسـت دهانهٔ سهمی یا به چپ یا به راست باز می‌شود. اگر $b>۰$، آن‌گاه دهانهٔ سهمی به چپ باز می‌شود $۴a=b$، پس $a=\frac{b}{۴}$ و

$$\text{معادلهٔ خط هادی}: x=a+h\xrightarrow{x=\frac{۱۳}{۴}}\frac{۱۳}{۴}=\frac{b}{۴}+\frac{۱۰}{b}$$

$$\xrightarrow[\text{ضرب می کنیم}]{\text{در } ۴b}۱۳b=b^{۲}+۴۰\Rightarrow b^{۲}-۱۳b+۴۰=۰$$

$$(b-۸)(b-۵)=۰\Rightarrow b=۸\,,b=۵$$

چون این مقادیر در گزینهٔ (۱) وجود دارند، پس لزومی به بررسی حالت $b<۰$ نیست.

۱۰۲۱ (۲) ابتدا ماتریس $A^{۲}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A^{۲}=A\times A=\begin{bmatrix}۳&-۳&۴\\۲&-۳&۴\\۰&-۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳&-۳&۴\\۲&-۳&۴\\۰&-۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳&-۴&۴\\۰&-۱&۰\\-۲&۲&-۳\end{bmatrix}$$

اکنون فقط درایه‌های سطر اول ماتریس $A^{۴}$ را پیدا می‌کنیم:

$$A^{۴}=A^{۲}\times A^{۲}=\begin{bmatrix}۳&-۴&۴\\۰&-۱&۰\\-۲&۲&-۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳&-۴&۴\\۰&-۱&۰\\-۲&۲&-۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\?&?&?\\?&?&?\end{bmatrix}$$

۱۰۲۲ (۲) طرفین تسـاوی $AX=A^{-۱}$ را از سمت چپ در $A^{-۱}$ ضرب می‌کنیم تا ماتریس X به‌دست آید:

از طرف دیگر،

$$AX=A^{-۱}\Rightarrow X=(A^{-۱})^{۲}\qquad(۱)$$

$$A=\begin{bmatrix}\frac{۳}{۴}&\frac{۱}{۲}\\۲&۱\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{\frac{۳}{۴}-۱}\begin{bmatrix}۱&-\frac{۱}{۲}\\-۲&\frac{۳}{۴}\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-۱}=-۴\begin{bmatrix}۱&-\frac{۱}{۲}\\-۲&\frac{۳}{۴}\end{bmatrix}$$

$$A^{-۱}=\begin{bmatrix}-۴&۲\\۸&-۳\end{bmatrix}\xrightarrow{(۱)}X=(A^{-۱})^{۲}=\begin{bmatrix}-۴&۲\\۸&-۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۴&۲\\۸&-۳\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}۳۲&-۱۴\\-۵۶&۲۵\end{bmatrix}$$

۱۰۲۳ (۳) دترمینان را برحسب سطر اول بسط می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix}۱&۲&۳\\-۲&۴&x+۵\\x-۱&۶&-۱\end{vmatrix}=۰\Rightarrow ۱(-۱)^{۲}\begin{vmatrix}۴&x+۵\\۶&-۱\end{vmatrix}+۲(-۱)^{۳}\begin{vmatrix}-۲&x+۵\\x-۱&-۱\end{vmatrix}$$

$$+۳(-۱)^{۴}\begin{vmatrix}-۲&۴\\x-۱&۶\end{vmatrix}=۰\Rightarrow(-۴-۶x-۳۰)+(-۲)(۲-x^{۲}-۴x+۵)$$

$$+۳(-۱۲-۴x+۴)=۰\Rightarrow -۶x-۳۴+۲x^{۲}+۸x-۱۴-۲۴-۱۲x=۰$$

$$۲x^{۲}-۱۰x-۷۲=۰\xrightarrow{\div ۲}x^{۲}-۵x-۳۶=۰\Rightarrow(x-۹)(x+۴)=۰$$

$$x=۹\,,x=-۴$$

۱۰۲۴ (۲) طول مستطیل ABCD را x و عرض آن را y در نظر می‌گیریم. بنابر فرض سؤال $x=۱/۵y-۲$، بنابراین

$$S_{ABCD}=۱۹۲\Rightarrow xy=۱۹۲\Rightarrow(\frac{۳}{۲}y-۲)y=۱۹۲$$

$$\frac{۳}{۲}y^{۲}-۲y-۱۹۲=۰\xrightarrow{\text{ضرب در } ۲}۳y^{۲}-۴y-۳۸۴=۰$$

$$y=\frac{۴\pm\sqrt{۱۶+۴\times۳\times۳۸۴}}{۶}=\frac{۲\pm\sqrt{۴+۱۱۵۲}}{۳}=\frac{۲\pm۳۴}{۳}\Rightarrow y=۱۲$$

پس $x=۱۶$، در نتیجه

$$\text{محیط مستطیل}=۲(x+y)=۲(۱۶+۱۲)=۵۶$$