

در ریاضیات پایه هشتم و در فیزیک پایه دهم، با بردار و تجزیه آن به دو بردار عمود بر هم روی محور X ها و محور Y ها آشنا شدید و فرا گرفتید که یک بردار را مطابق شکل بر حسب مؤلفه‌هایش می‌توان به صورت زیر نوشت:

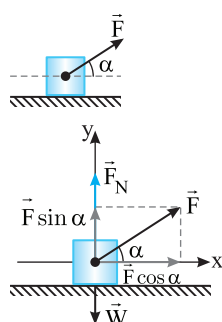
$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$$

$$a_x = a \cos \alpha, a_y = a \sin \alpha$$

اکنون می‌خواهیم مسائل ساده‌ای در فیزیک را با این ریاضیات حل کنیم.

در قسمت‌های زیر نیروی عمودی سطح را حساب می‌کنیم.

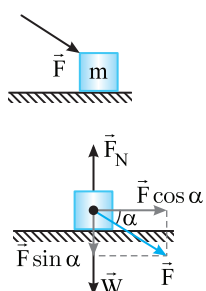
الف) جسم تحت تأثیر نیروی غیرافقی F کشیده می‌شود:



ابتدا نیروی F را در امتداد افق و راستای قائم تجزیه کرده، سپس برابری نیروها را روی محور Y ها مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$F_{\text{net } y} = 0 \Rightarrow F_N + F \sin \alpha = W \Rightarrow F_N = mg - F \sin \alpha$$

ب) جسم تحت تأثیر نیروی غیرافقی F هل داده می‌شود:

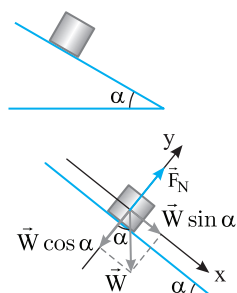


هم‌سنگ نیروی F را از مرکز جرم جسم (گرانیه جسم) رسم می‌کنیم.

$$F_{\text{net } y} = 0 \Rightarrow F_N = mg + F \sin \alpha$$

پ) جسم روی سطح شیب‌دار:

برای یافتن نیروی عمودی سطح، ابتدا نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده و آن‌ها را روی محور X و Y مطابق شکل روبه‌رو تجزیه می‌کنیم. برابری نیروها را روی محور Y ها برابر صفر قرار می‌دهیم.

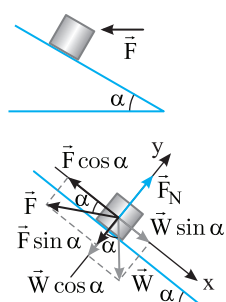


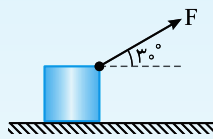
$$F_{\text{net } y} = 0 \Rightarrow F_N = W \cos \alpha$$

ج) بر جسم روی سطح شیب‌دار نیروی افقی F وارد می‌شود:

دقت کنید که ابتدا باید محور X و محور Y را مشخص کرده و نیروهای وارد بر جسم که در امتداد محور Y ها مؤلفه دارند رسم کنیم. محور X موازی سطح شیب‌دار و محور Y عمود بر سطح شیب‌دار انتخاب می‌شود.

$$F_{\text{net } y} = 0 \Rightarrow F_N = W \cos \alpha + F \sin \alpha$$





تست ۱ در شکل روبه‌رو نیروی ثابت F جسمی به جرم ۱۵kg را روی سطح افقی با سرعت ثابت روی خط راست جابه‌جا می‌کند. اگر ضریب اصطکاک جنبشی با سطح $\frac{\sqrt{3}}{۲}$ باشد، نیروی F چند نیوتون است؟

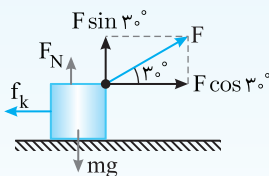
کنکور دهه‌های گذشته

۱۰۰ (۲)

۵۰ (۱)

۷۵ (۴)

۱۵۰ (۳)



پاسخ نیروهای وارد بر جسم هم‌راستا نیستند، بنابراین همه نیروها را به دو مؤلفه افقی و قائم تجزیه می‌کنیم.

$$F_{\text{net}_y} = 0$$

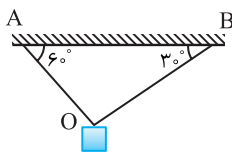
$$F_N + F \sin 30^\circ - mg = 0$$

$$F_N = mg - F \sin 30^\circ \Rightarrow F_N = 150 - \frac{F}{2}$$

سرعت جسم در راستای افقی ثابت است ($a = 0$):

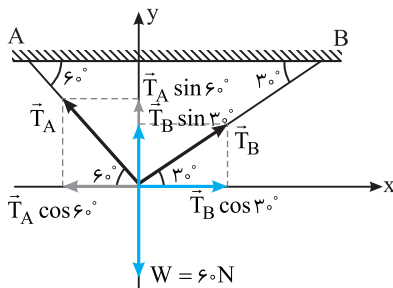
$$F_{\text{net}_x} = 0 \Rightarrow F \cos 30^\circ - f_k = 0 \Rightarrow F \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \mu_k F_N = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} F - \frac{\sqrt{3}}{2} (150 - \frac{F}{2}) = 0 \Rightarrow F - 150 + \frac{F}{4} = 0 \Rightarrow F = 100\text{N}$$

بنابراین گزینه (۲) درست است.



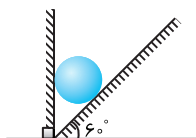
مسئله ۱ در شکل روبه‌رو، وزنه ۶۰ نیوتونی که از دو ریسمان OA و OB با جرم ناچیز آویزان است، در تعادل است. کشش نخ‌های OA و OB را بیابید.

راه‌حل ابتدا نیروهای وارد بر وزنه را رسم می‌کنیم. چون جسم در تعادل است، برابری نیروهای وارد بر آن صفر است، بنابراین مجموع مؤلفه‌ها روی هر محور مختصات صفر خواهد بود.



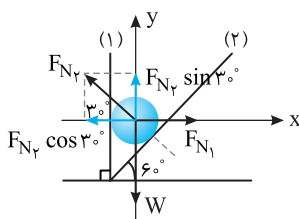
$$F_{\text{net}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} F_{\text{net},x} = 0 \Rightarrow T_A \cos 60^\circ = T_B \cos 30^\circ \\ F_{\text{net},y} = 0 \Rightarrow W = T_A \sin 60^\circ + T_B \sin 30^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_A = \sqrt{3} T_B \\ \frac{\sqrt{3}}{2} T_A + \frac{1}{2} T_B = 60 \end{cases} \Rightarrow T_A = 30\sqrt{3}\text{N}, T_B = 30\text{N}$$



مسئله ۲ یک گوی به وزن ۱۰۰N درون ناوهای قرار دارد. نیرویی که گوی بر هر سطح وارد می‌کند چند نیوتون است؟ (سطوح بدون اصطکاک هستند.)

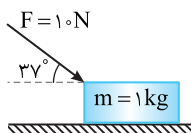
راه‌حل نمودار نیروهای وارد بر گوی را رسم می‌کنیم. به یاد داشته باشیم همواره سطح بدون اصطکاک، تنها نیرویی عمودی بر سطح (F_N) را بر جسم وارد می‌کند. از طرفی طبق قانون سوم نیوتون، نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند برابر همان نیرویی است که جسم بر سطح وارد می‌کند.



$$F_{\text{net}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} F_{\text{net},x} = 0 \Rightarrow F_{N_1} = F_{N_2} \cos 30^\circ \\ F_{\text{net},y} = 0 \Rightarrow W = F_{N_2} \sin 30^\circ \Rightarrow 100 = F_{N_2} \times \frac{1}{2} \Rightarrow F_{N_2} = 200\text{N} \end{cases}$$

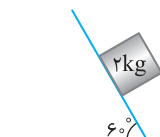
$$F_{N_1} = 200 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 100\sqrt{3}\text{N}$$

شما این مسئله را به کمک قانون سینوس‌ها حل کنید.



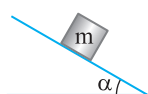
- ۱- در شکل روبه‌رو، نیروی عمودی سطح وارد بر جسم برابر چند نیوتون است؟
($\sin 37^\circ = 0.6$, $g = 10 \text{ N/kg}$)

(۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۱۶ (۴) ۴

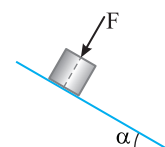


- ۲- نیروی عمودی تکیه‌گاه وارد شده از طرف سطح بر جسم ۲ kg برابر چند نیوتون است؟

(۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۱۵ (۴) ۲۰

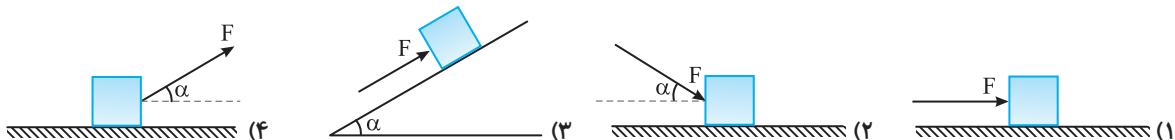


- ۳- در شکل روبه‌رو با افزایش α نیروی عمودی سطح چگونه تغییر می‌کند؟
(۱) تغییری نمی‌کند. (۲) افزایش می‌یابد.
(۳) کاهش می‌یابد. (۴) ابتدا افزایش و سپس کاهش



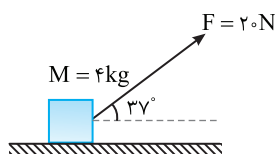
- ۴- در شکل روبه‌رو نیروی عمودی سطح برابر نیروی وزن است. F برابر کدام گزینه می‌باشد؟
(۱) mg (۲) $mg \sin \alpha$ (۳) $mg(1 - \cos \alpha)$ (۴) $mg(1 - \sin \alpha)$

- ۵- مطابق شکل، بر جسمی در ۴ حالت، نیروی F با اندازه یکسان وارد می‌شود و جسم در حرکت است. هرگاه ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح در تمام حالات یکسان باشد، نیروی اصطکاک در برابر حرکت در کدام حالت بیشترین مقدار را دارد؟



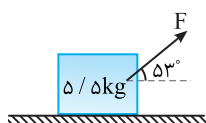
- ۶- در شکل روبه‌رو، اگر شتاب حرکت برابر $2/25 \text{ m/s}^2$ باشد، ضریب اصطکاک جنبشی بین وزنه و سطح افقی کدام است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$, $\cos 37^\circ = 0.8$)

(۱) 0.5 (۲) 0.33 (۳) 0.25 (۴) 0.2



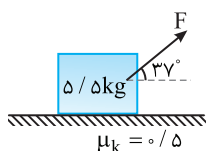
- ۷- در شکل مقابل، F را به تدریج زیاد می‌کنیم، وقتی به ۲۰ نیوتون رسید وزنه روی سطح افقی شروع به حرکت می‌کند. ضریب اصطکاک ایستایی چقدر است؟ ($\cos 53^\circ = 0.6$, $g = 10 \text{ m/s}^2$)

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{5}$



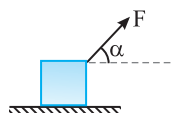
- ۸- در شکل زیر جسم با سرعت ثابت در سطح افقی در حال حرکت است. اگر نیروی F دو برابر شود، نیروی اصطکاک جنبشی چند برابر می‌شود؟ ($\sin 37^\circ = 0.6$, $g = 10 \text{ m/s}^2$)

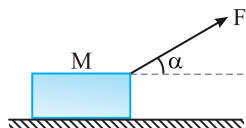
(۱) $\frac{3}{8}$ (۲) $\frac{5}{8}$ (۳) ۱ (۴) ۲



- ۹- در شکل روبه‌رو، برای این که بتوانیم با حداقل مقدار نیروی F، جسم را روی سطح افقی به آستانه حرکت در بیاوریم، زاویه α چقدر باید باشد؟ ($\mu_s = \frac{3}{4}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$)

(۱) $\sin \alpha = \frac{3}{4}$ (۲) $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ (۳) $\cot \alpha = \frac{3}{4}$ (۴) $\cos \alpha = \frac{3}{4}$





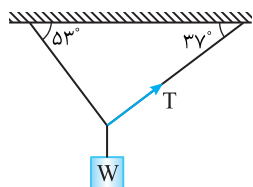
$mg \sin \alpha$ (۴)

$mg \cos \alpha$ (۳)

$\frac{mg}{\cos \alpha}$ (۲)

$\frac{mg}{\sin \alpha}$ (۱)

کاربرد ریاضی در فیزیک در حل مسائل تعادل



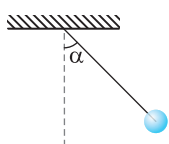
۱۰- در شکل مقابل جرم نخ‌ها ناچیز است. اگر $T = 6N$ باشد، چند نیوتون است؟ [سراسری ریاضی - ۸۹](#)
($\cos 37^\circ = 0.8$)

۱۰ (۲)

۸ (۱)

۱۴ (۴)

۱۲ (۳)



۱۲- در شکل روبه‌رو، گلوله‌ای از یک ریسمان آویزان و مطابق شکل در حال تعادل است. حداقل چند نیرو به آن وارد می‌شود؟ [سراسری ریاضی - ۸۹](#)

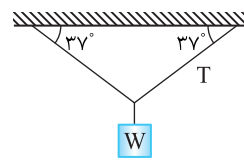
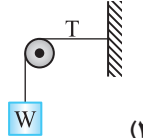
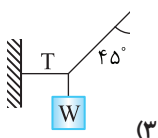
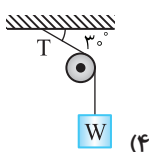
۲ (۲)

۴ (۱)

۴ نمی‌توان گفت (۴)

۳ (۳)

۱۳- در کدام یک از شکل‌های زیر، نیروی کشش نخ T کوچک‌تر از نیروی وزن W است؟ (جرم نخ، قرقره و اصطکاک ناچیز است.)



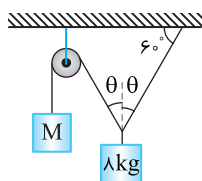
۱۴- در شکل روبه‌رو دستگاه در حال تعادل است. جرم M چند کیلوگرم است؟ ($g = 10 N/kg$)

$4\sqrt{3}$ (۲)

۸ (۱)

$8\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴)

$4\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۳)



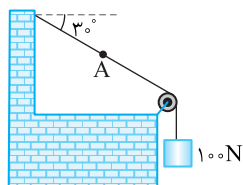
۱۵- دستگاه مقابل در حال تعادل است. نیروی کشش نخ در نقطه A چند نیوتون است؟ (جرم نخ و اصطکاک ناچیز است.)

۱۰۰ (۲)

۵۰ (۱)

۲۰۰ (۴)

۱۵۰ (۳)



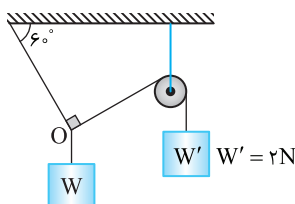
۱۶- در شکل روبه‌رو، وزنه‌ها در حال تعادل‌اند. W چند نیوتون است؟ (جرم قرقره و نخ‌ها و اصطکاک بین آن‌ها ناچیز است.) [سراسری خارج از کشور ریاضی - ۸۸](#)

$2\sqrt{3}$ (۲)

۴ (۱)

$2\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۳)



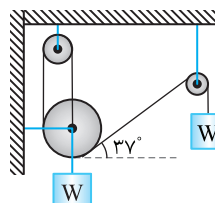
۱۷- در شکل روبه‌رو دستگاه در تعادل است، $\frac{W}{W'}$ کدام است؟ (جنس نخ‌ها یکسان است.)

$\frac{1}{2}$ (۲)

۲ (۱)

۳ (۴)

$2/6$ (۳)



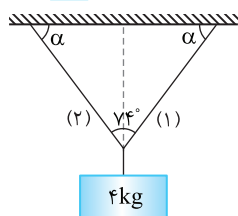
۱۸- اگر در شکل مقابل طول نخ‌های ۱ و ۲ با هم برابر باشند، نیروی کشش هر کدام چند نیوتون است؟ [سراسری خارج از کشور ریاضی - ۸۵](#)
($g = 10 m/s^2$, $\cos 37^\circ = 0.8$)

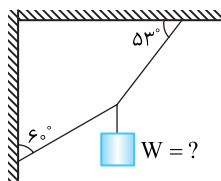
۲۵ (۲)

۲۰ (۱)

۳۵ (۴)

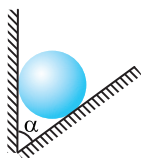
۳۰ (۳)





۱۹- در شکل روبه‌رو بیشینه نیروی کشش قابل تحمل هر نخ 85 N است. بیشینه وزن جسم متصل به نخ‌ها چند نیوتون می‌تواند باشد تا هیچ یک از نخ‌ها پاره نشود؟
($\cos 3^\circ \approx 0.85$, $\sin 53^\circ = 0.8$)

- (۱) ۴۰ (۲) ۵۵ (۳) ۳۸ (۴) ۶۵

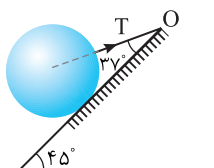


۲۰- در شکل روبه‌رو، وزن کره همگن 8 N و α برابر 53° درجه است. اگر اصطکاک‌ها ناچیز باشد، نیرویی که در حالت تعادل از طرف کره بر دیواره قائم وارد می‌شود، چند نیوتون است؟

سراسری ریاضی - ۸۴

($\sin 53^\circ = 0.8$)

- (۱) صفر (۲) ۴۸ (۳) ۶۰ (۴) ۸۰



۲۱- مطابق شکل، کره‌ای همگن به جرم 4 kg روی سطح شیب‌دار بدون اصطکاک به زاویه شیب 45° درجه قرار دارد. نیروی کشش نخ (T) چند نیوتون است؟

سراسری خارج از کشور ریاضی - ۹۰

($\sin 37^\circ = 0.6$, $g = 10\text{ m/s}^2$)

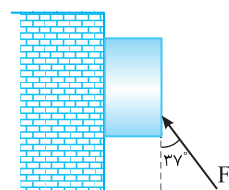
- (۱) ۲۵ (۲) ۴۰ (۳) $25\sqrt{2}$ (۴) $40\sqrt{2}$

۲۲- جسمی به وزن 120 N به وسیله نیروی افقی F به دیوار قائمی که ضریب اصطکاک در آستانه حرکت آن $\frac{1}{4}$ است فشرده می‌شود، حداقل نیروی

کنکور دهه‌های گذشته

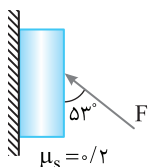
F برحسب نیوتون برای آن که جسم نلغزد برابر است با

- (۱) $2/5$ (۲) ۳۰ (۳) ۱۲۰ (۴) ۴۸۰



۲۳- در شکل روبه‌رو، ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و دیوار 0.5 و وزن جسم 110 N است، حداقل نیروی F برای حفظ تعادل وزنه چند نیوتون است؟
($\sin 37^\circ = 0.6$)

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۱۰ (۳) ۵۵ (۴) ۱۰۰



۲۴- در شکل روبه‌رو، به جسمی به وزن 20 N که به دیوار قائم تکیه دارد، نیروی F وارد می‌شود. بیشترین مقدار F در حالتی که جسم به حال سکون بماند، چند نیوتون است؟

سراسری خارج از کشور ریاضی - ۹۴

($\cos 53^\circ = 0.6$)

- (۱) $\frac{500}{19}$ (۲) $\frac{500}{11}$ (۳) $\frac{200}{19}$ (۴) $\frac{200}{11}$

کاربرد ریاضی در فیزیک

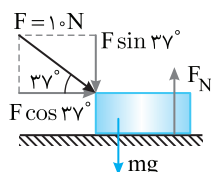
ضمیمه ۱

پاسخ پرسش‌های چهار گزینه‌ای

۱- گزینه ۳

ابتدا با توجه به آنچه در دهم خواندید نیرو را تجزیه می‌کنیم:

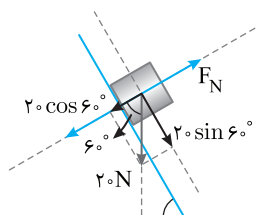
$$F_{y_{\text{net}}} = 0 \Rightarrow F \sin 37^\circ + mg = F_N \Rightarrow F_N = 10 \times 0.6 + 10 = 16 \text{ N}$$



۲- گزینه ۲

نیروها در راستای عمود بر سطح متوازن می‌باشد. بنابراین:

$$F_{y_{\text{net}}} = 0 \Rightarrow F_N = mg \cos 60^\circ \Rightarrow F_N = 20 \cos 60^\circ \Rightarrow F_N = 10 \text{ N}$$



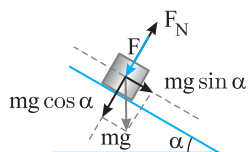
۳- گزینه ۳

روی سطح شیب‌دار نیروی عمودی تکیه‌گاه $F_N = mg \cos \alpha$ است و با افزایش α ، $\cos \alpha$ کاهش می‌یابد.

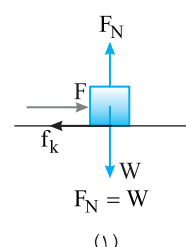
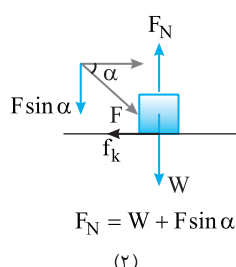
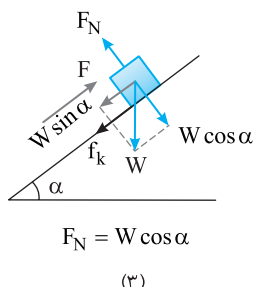
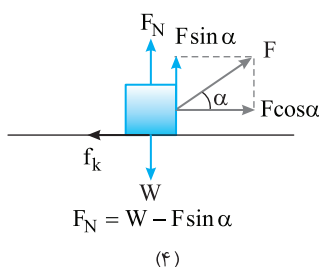
۴- گزینه ۳

نیروها را در راستای عمود بر سطح شیب‌دار می‌نویسیم:

$$F_N = F + mg \cos \alpha \xrightarrow{F_N = mg} mg = F + mg \cos \alpha \Rightarrow F = mg(1 - \cos \alpha)$$



۵- گزینه ۲

نیروی اصطکاک جنبشی $(f_k = \mu_k F_N)$ است و هر چه نیروی عمودی تکیه‌گاه بیشتر باشد، اصطکاک بیشتر است.

با توجه به شکل‌های بالا، نیروی اصطکاک در شکل گزینه (۲) از بقیه بیشتر است.

۶- گزینه ۳

نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم:

$$F_{\text{net}} = Ma$$

$$F \cos 37^\circ - f_k = Ma \quad (۱)$$

$$F_N = W - F \sin 37^\circ \Rightarrow F_N = 40 - (20 \times 0.6) = 28 \text{ N}$$

$$f_k = \mu_k F_N = 28 \mu_k$$

اما نیروی عمودی تکیه‌گاه برابر است با:

و نیروی اصطکاک برابر است با:

حال به کمک رابطه (۱)، ضریب اصطکاک جنبشی را به دست می‌آوریم:

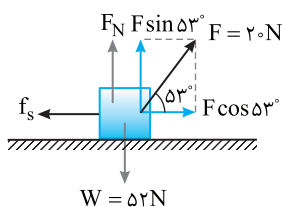
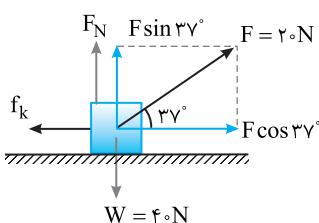
$$20 \times 0.8 - 28 \mu_k = 4 \times 2 / 2.5 \Rightarrow \mu_k = \frac{1}{4} = 0.25$$

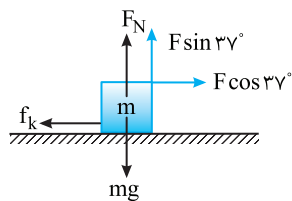
۷- گزینه ۲

جسم وقتی که نیروی $F = 20 \text{ N}$ شده است شروع به حرکت می‌کند. بنابراین اصطکاک ایستاییدر آستانه حرکت $f_{s \text{ max}} = F \cos 53^\circ$ است.

$$f_{s \text{ max}} = F \cos 53^\circ$$

$$\mu_s (W - F \sin 53^\circ) = F \cos 53^\circ \Rightarrow \mu_s (52 - 20 \times 0.8) = 20 \times 0.6 \Rightarrow \mu_s = \frac{12}{36} \Rightarrow \mu_s = \frac{1}{3}$$





۸- گزینه ۲ جسم در حال حرکت افقی است پس برابری نیروها در راستای قائم صفر است:

$$F_N + F \sin 37^\circ = mg \Rightarrow F_N = 55 - \frac{1}{6}F$$

$$f_k = \mu_k F_N = \frac{1}{3} (55 - \frac{1}{6}F) \quad (i)$$

نیروی اصطکاک برابر است با:

سرعت ثابت است، از این رو:

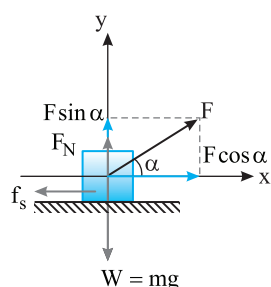
$$F \cos 37^\circ = f_k \Rightarrow \frac{1}{8}F = f_k \Rightarrow \frac{1}{8}F = \frac{1}{3} (55 - \frac{1}{6}F) \Rightarrow \frac{1}{8}F = \frac{1}{3} (55 - \frac{1}{6}F) \Rightarrow F = 25 \text{ N} \xrightarrow{(i)} f_k = \frac{1}{3} (55 - \frac{1}{6} \times 25) = 20 \text{ N}$$

در حالت دوم نیروی عمودی تکیه‌گاه برابر است با:

$$F'_N + 2F \sin 37^\circ = mg \Rightarrow F'_N = 55 - \frac{1}{3}F \Rightarrow F'_N = 55 - \frac{1}{3} \times 25 \Rightarrow F'_N = 55 - 8.33 = 46.67 \text{ N} \Rightarrow f'_k = \mu_k F'_N = \frac{1}{3} \times 46.67 = 15.56 \text{ N}$$

$$\frac{f'_k}{f_k} = \frac{15.56}{20} = \frac{125}{200} = \frac{5}{8}$$

پس نسبت نیروهای اصطکاک برابر است با:



۹- گزینه ۲ نیروی F را تجزیه می‌کنیم، در آستانه حرکت خواهیم داشت:

$$F \cos \alpha = f_{s \max} \Rightarrow F \cos \alpha = \mu_s F_N \Rightarrow F \cos \alpha = \mu_s (W - F \sin \alpha)$$

$$\Rightarrow F \cos \alpha = \frac{3}{4} W - \frac{3}{4} F \sin \alpha \Rightarrow F (\cos \alpha + \frac{3}{4} \sin \alpha) = \frac{3}{4} W$$

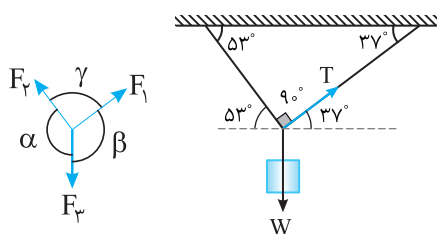
سمت راست رابطه مقدار ثابتی است بنابراین اگر بخواهیم F کمینه باشد باید عبارت $(\cos \alpha + \frac{3}{4} \sin \alpha)$ بیشینه باشد.

در درس ریاضی در مبحث کاربرد مشتق خواهید دید برای آن که بیشینه و کمینه بودن یک تابع را مشخص کنیم مشتق آن را به دست آورده و برابر صفر قرار می‌دهیم. از این رو مشتق عبارت فوق را به دست می‌آوریم:

$$-\sin \alpha + \frac{3}{4} \cos \alpha = 0 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{4} \cos \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \frac{3}{4}$$

۱۰- گزینه ۱ حداقل نیروی F که باعث بلند شدن جسم از سطح می‌شود هنگامی رخ می‌دهد که مؤلفه قائم F نیروی وزن را خنثی کند و نیروی عمودی تکیه‌گاه صفر شود.

$$F \sin \alpha = mg \Rightarrow F = \frac{mg}{\sin \alpha}$$

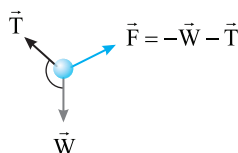


۱۱- گزینه ۲ قانون سینوس‌ها: هرگاه برابری ۳ نیرو صفر شود بین اندازه‌های آن‌ها و سینوس زاویه بین آن‌ها رابطه زیر برقرار است:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0 \Rightarrow \frac{F_1}{\sin \alpha} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{F_3}{\sin \gamma}$$

به کمک قانون سینوس‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{T}{\sin(90^\circ + 53^\circ)} = \frac{W}{\sin 90^\circ} \Rightarrow \frac{6}{\cos 53^\circ} = \frac{W}{1} \Rightarrow \frac{6}{0.6} = W \Rightarrow W = 10 \text{ N}$$

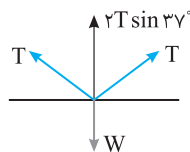


۱۲- گزینه ۳ مطابق شکل روبه‌رو بر گلوله نیروی وزن رو به پایین و نیروی کشش نخ در امتداد نخ وارد می‌شود که با هم زاویه می‌سازند و نمی‌توانند یکدیگر را خنثی کرده و گلوله در تعادل بماند. از این رو حداقل یک نیروی دیگر مانند F لازم است تا هم‌اندازه و در خلاف جهت برایند T و W باشد تا آن‌ها را خنثی کند، بنابراین حداقل سه نیرو بر جسم وارد می‌شود.

۱۳- گزینه ۱



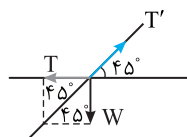
گزینه (۲): T = W



$$F_{\text{net } y} = 0 \Rightarrow 2T \sin 37^\circ = W \Rightarrow T = \frac{W}{1/2}$$

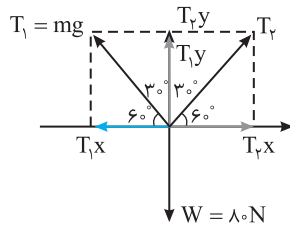


گزینه (۴): در طول نخ کشش یکسان است. T = W



$$\tan 45^\circ = \frac{T}{W} \Rightarrow T = W$$

در شکل گزینه‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴)، T = W است، بنابراین کمترین مقدار کشش نخ در شکل گزینه (۱) است.



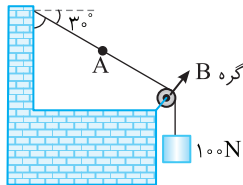
چون دستگاه در تعادل است کشش نخ که از روی قرقره می‌گذرد برابر $T_1 = Mg$ است. از

۱۴- گزینه ۴

طرفی $\theta = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

$$\begin{cases} F_{\text{net}_x} = 0 \Rightarrow T_1 \cos 60^\circ = T_2 \cos 30^\circ \Rightarrow T_1 = T_2 \\ F_{\text{net}_y} = 0 \Rightarrow T_1 \sin 60^\circ + T_2 \sin 30^\circ = 10 \end{cases} \Rightarrow 2T_1 \sin 60^\circ = 10 \Rightarrow T_1 = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ N}$$

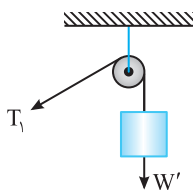
$$T_1 = Mg \Rightarrow \frac{10\sqrt{3}}{3} = 10 \cdot M \Rightarrow M = \frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ kg}$$



نیروی کشش نخ برابر وزن است و در طول نخ همگن با جرم ناچیز مقدار ثابتی است.

$$T = mg = 100 \text{ N}$$

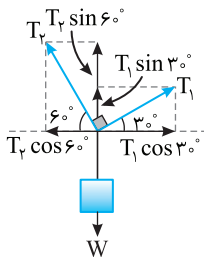
۱۵- گزینه ۲



با توجه به این که وزنه‌ها در حال تعادلند، داریم:

$$\text{در تعادل } W' : T_1 - W' = 0 \Rightarrow T_1 = W' \Rightarrow T_1 = 2 \text{ N}$$

هنگامی که اجسام در حال تعادلند، برآیند نیروهای وارد بر آن‌ها صفر است.



$$F_{\text{net}_x} = 0 \Rightarrow T_1 \cos 30^\circ - T_2 \cos 60^\circ = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} W' - \frac{1}{2} T_2 = 0 \Rightarrow T_2 = \sqrt{3} W'$$

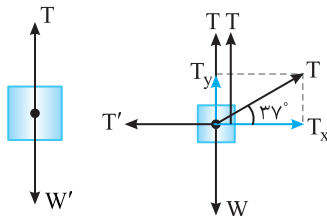
$$F_{\text{net}_y} = 0 \Rightarrow T_1 \sin 30^\circ + T_2 \sin 60^\circ - W = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} W' + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} W' = W \Rightarrow 2W' = W \Rightarrow \frac{W}{W'} = 2 \Rightarrow \frac{W}{2} = 2 \Rightarrow W = 4 \text{ N}$$

با توجه به شکل برای W' می‌توان نوشت:

$$W' = T$$

$$W = T + T + T \sin 37^\circ \Rightarrow W = 2/6 T, \quad \frac{W}{W'} = \frac{2/6 T}{T} = 2/6$$

برای وزنه W می‌توان نوشت:



جسم در تعادل است. پس:

$$F_{\text{net}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} F_{\text{net}_x} \Rightarrow T_1 \cos 53^\circ = T_2 \cos 53^\circ \Rightarrow T_1 = T_2 \\ F_{\text{net}_y} \Rightarrow 2T_1 \sin 53^\circ = W \Rightarrow 2T_1 \sin 53^\circ = W \end{cases}$$

$$T_1 = \frac{W}{2 \sin 53^\circ} = \frac{40}{2 \times 4/5} = 25 \text{ N}$$

نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم. جسم در حال تعادل است:

$$F_{\text{net}_x} = 0 \Rightarrow T_{1x} = T_{2x} \Rightarrow T_1 \cos 53^\circ = T_2 \cos 37^\circ$$

$$T_1 \times 4/5 = T_2 \times 3/4 \Rightarrow T_2 = \frac{16}{15} T_1 \Rightarrow T_2 = \frac{16}{15} \times 25 = 26.67 \text{ N}$$

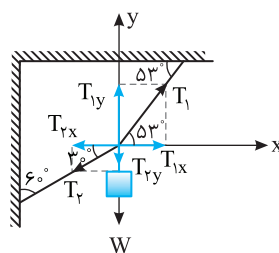
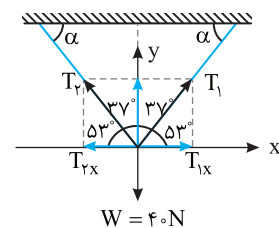
کشش T_1 بزرگ‌تر از T_2 است بنابراین کشش T_1 می‌تواند ۸۵ N باشد. اگر کشش T_2 برابر ۸۵ N شود، کشش

$$T_2 = \frac{16}{15} \times 85 \Rightarrow T_2 = 93.33 \text{ N}$$

T_1 از ۸۵ N بیشتر و نخ پاره می‌شود. بنابراین:

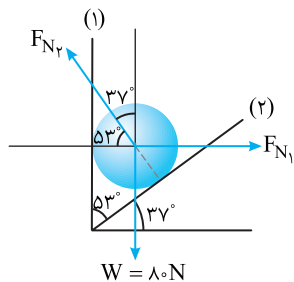
برآیند نیروها روی محور y نیز صفر است از این‌رو:

$$T_1 \sin 53^\circ - W - T_2 \sin 37^\circ = 0 \Rightarrow 85 \times 4/5 - 60 \times \frac{1}{4} = W \Rightarrow W = 38 \text{ N}$$



۱۸- گزینه ۲

۱۹- گزینه ۳

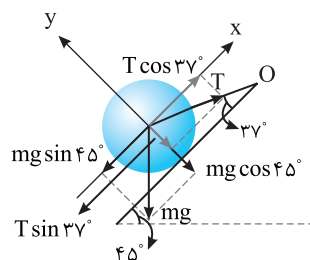


با توجه به شکل روبه‌رو و رسم نیروها، مسأله به کمک قانون سینوس‌ها به راحتی قابل حل است.

۲۰- گزینه ۳

(A)

$$\frac{W}{\sin(90^\circ + 37^\circ)} = \frac{F_{N_1}}{\sin(90^\circ + 53^\circ)} \Rightarrow \frac{\lambda N}{\cos 37^\circ} = \frac{F_{N_1}}{\cos 53^\circ} \Rightarrow \frac{\lambda N}{4/5} = \frac{F_{N_1}}{3/5} \Rightarrow F_{N_1} = 60 \text{ N}$$



نیروهای وارد بر کره را رسم کرده و روی محورهای X و Y مطابق شکل تجزیه می‌کنیم. جسم در

۲۱- گزینه ۳

(B)

تعادل است و باید برآیند نیروهای وارد بر جسم صفر شود.

$$F_{\text{net}} = 0 \Rightarrow F_{\text{net}_x} = 0 \Rightarrow mg \sin 45^\circ = T \cos 37^\circ$$

$$40 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = T \times \frac{4}{5} \Rightarrow T = 25\sqrt{2} \text{ N}$$

شکل مسأله را رسم می‌کنیم. جسم ساکن و در تعادل است. بنابراین:

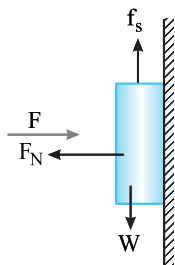
۲۲- گزینه ۴

(B)

$$F_{\text{net}_y} = 0 \Rightarrow W = f_s \Rightarrow f_s = 120 \text{ N}$$

از طرفی نیروی عمودی تکیه‌گاه برابر نیروی F است و می‌توان نوشت:

$$f_s = \mu_s F_N \xrightarrow{F_N = F} 120 = \frac{1}{4} \times F \Rightarrow F = 480 \text{ N}$$



حداقل نیروی F وقتی است که جسم بخواهد به پایین بلغزد در این صورت اصطکاک ایستایی رو

۲۳- گزینه ۴

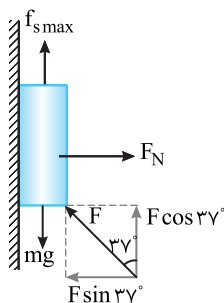
(B)

به بالا است.

$$F_{\text{net}} = 0 \Rightarrow mg = f_{s \text{ max}} + F \cos 37^\circ$$

$$\xrightarrow{F_N = F \sin 37^\circ} mg = \mu_s F \sin 37^\circ + F \cos 37^\circ$$

$$110 = \frac{1}{5} \times F \times \frac{3}{5} + F \left(\frac{4}{5} \right) \Rightarrow F = \frac{110}{1} = 110 \text{ N}$$



بیشترین مقدار F در حالتی است که جسم در آستانه حرکت رو به بالا قرار گیرد. در این حالت نیروی

۲۴- گزینه ۲

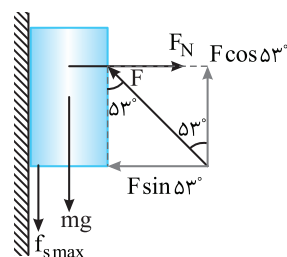
(B)

وزن و نیروی اصطکاک ایستایی آستانه حرکت ($f_{s \text{ max}}$) رو به پایین‌اند. با توجه به شکل:

$$F_N = F \sin 53^\circ, \quad F \cos 53^\circ = mg + f_{s \text{ max}}$$

$$F \cos 53^\circ = mg + \mu_s F_N \Rightarrow F \cos 53^\circ = mg + \mu_s F \sin 53^\circ$$

$$\frac{4}{5} F = 20 + \frac{3}{5} F \times \frac{4}{5} \Rightarrow F = \frac{20}{\frac{4}{5} - \frac{12}{25}} \Rightarrow F = \frac{50}{11} \text{ N}$$



کاربرد مشتق در حرکت شناسی

ضمیمه ۲

در تعریف مشتق در ریاضی متوجه می شویم که مقدار مشتق در هر نقطه برابر شیب خط مماس بر نمودار در آن نقطه است. از طرفی در فیزیک یاد گرفتیم که شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان برابر سرعت لحظه‌ای و شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان برابر شتاب لحظه‌ای است. از ترکیب این دو مفهوم نتایج زیر حاصل می‌شود.

۱- مشتق اول معادله مکان - زمان نسبت به زمان برابر سرعت لحظه‌ای است.

۲- مشتق اول معادله سرعت - زمان نسبت به زمان برابر شتاب لحظه‌ای است همچنین مشتق دوم معادله مکان - زمان نسبت به زمان نیز برابر شتاب لحظه‌ای است.

اکنون با حل دو مسأله به چگونگی استفاده از این نتایج می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که دانستن این مفاهیم در حل مسائلی که در آن‌ها معادله مکان - زمان را در اختیار داریم چه قدر حل مسأله را راحت‌تر می‌کند.

مسأله ۱

معادله مکان - زمان متحرکی که روی محور x ها در حرکت است. در SI به صورت $x = t^2 - 4t + 3$ است، در چه لحظه‌ای متحرک تغییر

جهت می‌دهد؟

راه حل

قبلاً برای حل این مسأله معادله داده شده را با معادله حرکت شتاب ثابت $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$ مقایسه می‌کردیم اما اکنون کافی است از

$$x = t^2 - 4t + 3 \xrightarrow{v=x'} v = 2t - 4$$

x مشتق بگیریم.

$$v = 0 \Rightarrow 2t - 4 = 0 \Rightarrow t = 2s$$

برای لحظه تغییر جهت کافی است سرعت را مساوی صفر قرار دهیم.

در مسأله بعدی، از یک معادله درجه ۳ کمک گرفته‌ایم تا نشان دهیم با داشتن معادله مکان - زمان و به کار بردن مشتق می‌توان همان مفاهیمی را که از قبل بلد بوده‌ایم به کار ببریم.

مسأله ۲

معادله حرکت متحرکی روی خط راست در SI به صورت $x = t^3 - 3t^2 + 6$ است.

الف) در لحظه $t = 2s$ اندازه مکان، سرعت و شتاب متحرک را بیابید. ب) اندازه سرعت متوسط را در بازه زمانی $t = 1s$ تا $t = 4s$ بیابید.

پ) اندازه شتاب متوسط را در $5s$ آغازین حرکت بیابید. ت) در چه مکان و در چه زمانی متحرک روی خط راست تغییر جهت می‌دهد؟

ث) در چه مدتی حرکت تندشونده و در چه مدتی حرکت کندشونده است؟ ج) اندازه جابه‌جایی متحرک را در $3s$ ثانیه آغازین حرکت آن بیابید.

چ) مسافت طی شده در مدت $3s$ آغازین چند متر است؟ ح) اندازه جابه‌جایی متحرک را در ثانیه پنجم حرکت آن بیابید.

راه حل

$$x = t^3 - 3t^2 + 6 \xrightarrow{t=2s} x = 8 - 12 + 6 = 2m$$

الف) مکان در لحظه $t = 2s$ خواهد شد:

$$v = x' \Rightarrow v = 3t^2 - 6t \xrightarrow{t=2s} v = 0$$

برای یافتن سرعت لحظه‌ای از معادله حرکت مشتق می‌گیریم:

$$a = v' \Rightarrow a = 6t - 6 \xrightarrow{t=2s} a = 6m/s^2$$

و برای یافتن شتاب لحظه‌ای از معادله سرعت مشتق می‌گیریم:

دقت کنید در لحظه $t = 2s$ در مکان $+2$ متری مبدأ، برای یک لحظه سرعت صفر شده است اما شتاب صفر نیست.

هرگاه در یک لحظه سرعت متحرکی صفر شود، لزومی ندارد که در آن لحظه، شتاب متحرک نیز صفر شود.

به معادله شتاب-زمان $a = 6t - 6$ نگاه کنید در لحظه $t = 0$ ، شتاب $-6m/s^2$ ، در لحظه $t = 1s$ شتاب صفر و ... است یعنی شتاب در حال تغییر

است و حرکت دارای شتاب متغیر است. پس اگر معادله حرکت تابع درجه ۳ و بالاتر باشد، معرف حرکت با شتاب متغیر است.

ب) متأسفانه بعضی از دانش‌پژوهان برای حل این قسمت زمان‌های $1s$ و $4s$ را در معادله سرعت قرار می‌دهند، سپس سرعت‌های به‌دست آمده را جمع کرده و بر دو تقسیم می‌کنند. در حالی که بارها بیان شده سرعت متوسط جابه‌جایی در یکای زمان است و باید در لحظات $1s$ و $4s$ مکان متحرک را به‌دست آوریم و با توجه به این که شتاب متوسط یعنی تغییر سرعت در یکای زمان، داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{av} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \\ t_1 = 1s \Rightarrow x_1 = 1 - 3 + 6 = 4m \\ t_2 = 4s \Rightarrow x_2 = 64 - 48 + 6 = 22m \end{array} \right. \Rightarrow v_{av} = \frac{22 - 4}{4 - 1} = 6m/s$$

پ) در حل این قسمت نیز در لحظه $t = 0$ و $t = 5$ s، به کمک معادله سرعت- زمان، سرعت لحظه‌ای متحرک را به دست می‌آوریم و با توجه به این که شتاب متوسط یعنی تغییر سرعت در واحد زمان، داریم:

$$\begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 0 \\ t_2 = 5 \text{ s} \Rightarrow v_2 = 45 \text{ m/s} \end{cases} \Rightarrow a_{av} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow a_{av} = \frac{45 - 0}{5 - 0} = 9 \text{ m/s}^2$$

ت) متحرکی که روی محور x ها در حرکت است، برای آن که تغییر جهت دهد، ابتدا باید سرعتش صفر گردد.

$$v = 0 \Rightarrow 3t^2 - 6t = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \text{ s} \end{cases}$$

لحظه $t = 0$ آغاز حرکت است و لحظه $t = 2$ s جواب مسأله است.

تذکر: البته درباره تغییر جهت روی خط راست علاوه بر صفر شدن سرعت باید سرعت در آن لحظه تغییر علامت بدهد که در تابع درجه ۲ در دو طرف ریشه همواره تغییر علامت داریم و $t = 2$ s جواب است.

ث) در حرکت تندشونده روی خط راست، سرعت متحرک در حال افزایش است، پس بردار سرعت و بردار شتاب آن هم جهت و هم علامت هستند. ($av > 0$) و در حرکت کندشونده روی خط راست، سرعت متحرک در حال کاهش است، پس بردار سرعت و بردار شتاب در خلاف جهت هم هستند و علامت آن‌ها مخالف هم است. ($av < 0$)

با توجه به این توضیحات باید ابتدا سرعت و شتاب را تعیین علامت کنیم، از این رو از ریاضیات کمک می‌گیریم.

$$v = 3t^2 - 6t = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \text{ s} \end{cases}, \quad a = 6t - 6 = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ s}$$

در تابع درجه ۲، علامت، در بین دو ریشه مخالف علامت ضریب t^2 و در خارج از دو ریشه، موافق علامت ضریب t^2 است. در تابع درجه ۱، علامت در سمت چپ ریشه مخالف علامت ضریب t و در سمت راست ریشه، موافق علامت ضریب t است. اکنون با دانسته‌های بالا جدول زیر را رسم می‌کنیم.

t	0	1	2	$+\infty$
v	0	-	0	+
a	-	0	+	+
av	+	-	لحظه	+
	تندشونده	تغییر جهت کندشونده حرکت		تندشونده

تذکر: دقت شود که علامت شتاب به تنهایی نوع حرکت را روی خط راست مشخص نمی‌کند و باید علامت سرعت و شتاب هر دو تعیین شود.

ج) برای یافتن جابه‌جایی در سه ثانیه آغازین، مکان در $t = 0$ و $t = 3$ s را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 - 0 + 6 = 6 \text{ m} \\ t_2 = 3 \text{ s} \Rightarrow x_2 = 3^3 - 3(3)^2 + 6 = 6 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = 0$$

پس جابه‌جایی متحرک در ۳ s آغازین، صفر است.

دقت شود که مکان متحرک در لحظه $t = 3$ s، $+6$ متری مبدأ است. یعنی مفهوم مکان و جابه‌جایی یکسان نیست.

ج) اشتباه نکنید مسافت طی شده ۱۲ متر نمی‌شود. باید در حل این نوع مسائل مشخص گردد که متحرک در بازه زمانی داده شده تغییر جهت داده است یا نه؟

از این رو باید مشخص گردد که در چه لحظه‌ای و در چه مکانی متحرک تغییر جهت می‌دهد. $x = 2 \text{ m}$ ، $t = 2 \text{ s}$ ، $v = 0 \Rightarrow 3t^2 - 6t = 0 \Rightarrow t = 2 \text{ s}$

حال به شکل روبه‌رو دقت کنید:

در مدت ۳ s متحرک از $x = 6 \text{ m}$ به $x = 2 \text{ m}$ رفته و سپس به $x = 6 \text{ m}$ برگشته است، پس در مجموع ۸ متر مسافت طی کرده است.

ج) همان‌گونه که قبلاً بیان شد، باید مکان‌های متحرک را در $t = 5$ s و $t = 4$ s به دست آورده، آن‌ها را از هم کم کرد.

$$\begin{cases} t = 5 \text{ s} \Rightarrow x = 5^3 - 3(5)^2 + 6 = 56 \text{ m} \\ t = 4 \text{ s} \Rightarrow x = 4^3 - 3(4)^2 + 6 = 22 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow x_{(5)} = 56 - 22 = 34 \text{ m}$$

با این مثال ساده، تفاوت مکان، تغییر مکان، مسافت طی شده، جابه‌جایی در t ثانیه و جابه‌جایی در ثانیه t ام بررسی شد.



- ۱- متحرکی روی محور x حرکت می‌کند. اگر $x' > 0$ باشد، کدام گزینه درست است؟
 (۱) حرکت تندشونده است.
 (۲) حرکت کندشونده است.
 (۳) حرکت یکنواخت و در جهت مثبت محور x است.
 (۴) با توجه به شرایط هر کدام از سه حالت ممکن است.
- ۲- معادله حرکت متحرکی در SI به صورت $x = t^3 - 3t + 1$ است. در چه مکانی برحسب متر، متحرک تغییر جهت می‌دهد؟
 (۱) -۱ (۲) +۱ (۳) +۲ (۴) -۲
- ۳- معادله حرکت متحرکی در SI به صورت $x = t^3 - 3t + 1$ است. مسافت طی شده در ثانیه دوم حرکت چند متر است؟
 (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) -۱ (۴) صفر
- ۴- معادله حرکت متحرکی در SI به صورت $x = t^3 - 3t + 1$ است. مسافت طی شده در دو ثانیه اول حرکت چند متر است؟
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۱ (۴) ۶
- ۵- اگر معادله حرکت متحرکی که روی خط راست در حرکت است در SI به صورت $x = 2t^3 + 3t$ باشد، مسافت طی شده در ثانیه دوم چند متر است؟
 (۱) ۵ (۲) ۱۷ (۳) ۲۲ (۴) ۲۷
- ۶- معادله مکان- زمان متحرکی که روی محور x ها حرکت می‌کند در SI به صورت $x = t^3 - 6t$ است. در کدام بازه زمانی متحرک در جهت منفی محور در حال حرکت است؟
 (۱) $0 < t < 2$ (۲) $t > 2$ (۳) $t > \sqrt{2}$ (۴) $0 < t < \sqrt{2}$
- ۷- معادله حرکت متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند در SI به صورت $x = -t^2 + 4t + 5$ است. مسافت طی شده این متحرک در ۵ ثانیه اول حرکتش چند متر است؟
 (۱) صفر (۲) ۵ (۳) -۵ (۴) ۱۳
- ۸- معادله حرکت متحرکی که روی محور x ها حرکت می‌کند در SI به صورت $x = t^3 + 2t^2 - 4$ است. در کدام بازه زمانی، متحرک در خلاف جهت محور x ها در حرکت است؟
 (۱) $0 < t < \frac{4}{3}$ (۲) $\frac{4}{3} < t < 2$ (۳) $t > 0$ (۴) هیچ کدام
- ۹- معادله حرکت متحرکی که روی محور x ها حرکت می‌کند در SI به صورت $x = -t^3 - 2t^2 - 4$ است. در کدام بازه زمانی، حرکت کندشونده است؟
 (۱) $0 < t < 1$ (۲) $t > 1$ (۳) $t > 0$ (۴) هرگز حرکت کندشونده نخواهد بود.
- ۱۰- معادله حرکت متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند در SI به صورت $x = \frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 4t$ است. متحرک چند بار تغییر جهت می‌دهد؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳
- ۱۱- معادله حرکت متحرکی که روی محور x ها حرکت می‌کند در SI به صورت $x = t^3 - 3t^2 + 3t - 1$ است. متحرک چند بار تغییر جهت می‌دهد؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳
- ۱۲- معادله سرعت متحرکی در SI به صورت $v = -6t^2 + 6t$ است. اگر حرکت متحرک در مسیر مستقیم بوده و مکان در لحظه $t = 1s$ نقطه $x = -2m$ باشد، معادله مکان کدام است؟
 (۱) $x = -12t + 6$ (۲) $x = -12t + 10$ (۳) $x = -3t^2 + 3t - 3$ (۴) $x = -2t^3 + 3t^2 - 3$
- ۱۳- معادله مکان- زمان جسمی در SI به صورت $x = -t^2 + 4t - 4$ است. در فاصله زمانی بین $t_1 = 0$ تا $t_2 = 4s$ ، مسافت طی شده توسط جسم چند متر است؟
 (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۱۴- معادله مکان-زمان متحرکی در SI به صورت $x = t^3 - 6t^2 + 9t - 8$ است. کدام گزینه درست است؟

- (۱) در $t = 2s$ بردار شتاب تغییر جهت می‌دهد.
 (۲) در $t = 1s$ بردار سرعت تغییر جهت می‌دهد.
 (۳) در $t = 4s$ حرکت تندشونده است.
 (۴) هر سه گزینه درست است.

۱۵- معادله سرعت- زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $v = 200 - 8t^2$ است. کدام گزینه درست است؟ ($t \geq 0$)

سراسری خارج از کشور ریاضی-۹۱

(۱) بزرگی شتاب در حال کاهش است

(۲) از صفر تا ۵ ثانیه حرکت تندشونده است.

(۳) در لحظه $t = 5s$ جهت شتاب تغییر می‌کند.

(۴) حرکت ابتدا در جهت محور x ، سپس خلاف جهت محور x است.

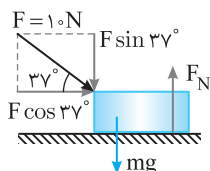
۱۶- معادله حرکت جسمی که روی محور x حرکت می‌کند در SI به صورت $x = 3t^2 - t^3 + 1$ است. در بازه زمانی بین $t = 0$ تا $t = 2s$ ، 

- (۱) جهت شتاب عوض نمی‌شود.
 (۲) جهت حرکت جسم تغییر نمی‌کند.
 (۳) جهت حرکت یک بار عوض می‌شود.
 (۴) حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده می‌شود.

ضمیمه

کاربرد مشتق در حرکت شناسی

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای



۱- گزینه ۴ مشتق مکان نسبت به زمان برابر سرعت لحظه‌ای است $v = x'$ و علامت سرعت به تنهایی درباره نوع حرکت چیزی را مشخص نمی‌کند. $x' > 0$ تنها نشان می‌دهد که متحرک در جهت مثبت محور در حال پیشروی است و ممکن است مقدار سرعت ثابت باشد و یا سرعت در حال کاهش (حرکت کندشونده) و یا در حال افزایش (حرکت تندشونده) باشد.

فراموش نکنیم که برای مشخص شدن کندشونده و تندشونده بودن حرکت باید علامت سرعت و علامت شتاب هر دو مشخص باشد. اگر بردار سرعت و شتاب هم علامت باشند ($av > 0$) حرکت تندشونده و اگر بردار سرعت و شتاب هم علامت نباشند ($av < 0$) حرکت کندشونده است.

۲- گزینه ۱ متحرکی که روی خط راست (محور x ها) در حرکت است، برای تغییر جهت ابتدا باید سرعتش صفر شود. از این رو ابتدا معادله سرعت- زمان را به کمک مشتق‌گیری از معادله مکان- زمان به دست آورده، لحظه صفر شدن سرعت و تغییر جهت را حساب می‌کنیم:

$$v = x' \Rightarrow v = 3t^2 - 3 \xrightarrow{v=0} 3t^2 - 3 = 0 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = 1s$$

$$x = t^3 - 3t + 1 \Rightarrow x = 1 - 3 + 1 \Rightarrow x = -1m$$

۳- گزینه ۲ بازه زمانی ثانیه دوم یعنی از $t = 1s$ تا $t = 2s$. ابتدا بررسی می‌کنیم که آیا در این بازه سرعت صفر می‌شود و متحرک تغییر جهت می‌دهد یا نه؟

$$v = x' \Rightarrow v = 3t^2 - 3 \xrightarrow{v=0} 3t^2 - 3 = 0 \Rightarrow t = 1s$$

بنابراین در بازه مورد نظر تغییر جهت رخ نمی‌دهد و مسافت طی شده با جابه‌جایی متحرک یکسان است:

$$\begin{cases} t_1 = 1s \Rightarrow x_1 = 1 - 3 + 1 = -1m \\ t_2 = 2s \Rightarrow x_2 = 8 - 6 + 1 = 3m \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 \Rightarrow \Delta x = 3 - (-1) = 4m$$

۴- گزینه ۴ بازه زمانی دو ثانیه اول یعنی از $t = 0$ تا $t = 2s$. ابتدا بررسی می‌کنیم که آیا در این بازه، سرعت صفر می‌شود و متحرک تغییر جهت می‌دهد یا نه؟

$$v = x' \Rightarrow v = 3t^2 - 3 \xrightarrow{v=0} 3t^2 - 3 = 0 \Rightarrow t = 1s$$

$$x = (1)^3 - 3 \times (1) + 1 \Rightarrow x = -1m$$

بنابراین متحرک در لحظه $t = 1s$ و مکان $x = -1m$ تغییر جهت داده است.

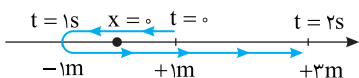
$$t = 0 \Rightarrow x = +1m$$

اکنون مکان متحرک در ابتدا و انتهای بازه مورد نظر را به دست می‌آوریم:

$$t = 2s \Rightarrow x = 8 - 6 + 1 = 3m$$

پس متحرک از مکان $+1m$ به مکان $-1m$ رفته و سپس به مکان $x = 3m$ برگشته است و مسافت طی شده

$$2 + 4 = 6m \text{ برابر است با:}$$



۵- گزینه ۲ مسافت طی‌شده در ثانیه دوم، یعنی مسافت طی‌شده در بازه زمانی $t = 1s$ تا $t = 2s$. بنابراین در معادله حرکت $t_1 = 1s$ و $t_2 = 2s$ را قرار می‌دهیم و مکان‌های حاصل را از هم کم می‌کنیم:

$$x = 2t^3 + 3t: \begin{cases} t = 1s \Rightarrow x_1 = 5m \\ t = 2s \Rightarrow x_2 = 22m \end{cases} \Rightarrow \Delta x_{(2)} = 22 - 5 = 17m$$

دقت کنید اگر معادله سرعت- زمان این متحرک را به دست آوریم سرعت صفر نمی‌شود و متحرک در هیچ لحظه‌ای پس از $t = 0$ تغییر جهت نمی‌دهد و مسافت طی‌شده همان جابه‌جایی است.

$$v = x' \Rightarrow v = 6t^2 + 3 \Rightarrow v \neq 0$$

۶- گزینه ۴ ابتدا معادله سرعت- زمان را به دست می‌آوریم. در مدتی که متحرک دارای سرعت منفی می‌باشد، متحرک در حال حرکت در جهت منفی محور است.

$$v = x' \Rightarrow v = 3t^2 - 6 \Rightarrow 3t^2 - 6 = 0 \Rightarrow t^2 = 2 \Rightarrow t = \sqrt{2}s$$

اکنون سرعت را تعیین علامت می‌کنیم؛ با توجه به جدول روبه‌رو، متحرک در بازه $t = 0$ تا $t = \sqrt{2}s$ در جهت منفی محور در حال حرکت است.

t	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
v	-	0	+

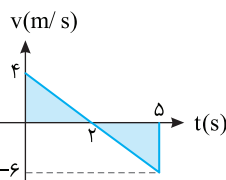
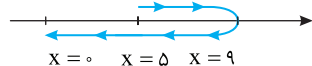
تغییر جهت

۷- گزینه ۴ **راه حل اول:** مسافت طی شده یعنی طول کل مسیری که متحرک در ۵ ثانیه طی می کند. پس باید بررسی کرد که متحرک متوقف می شود و جهت

حرکت خود را تغییر می دهد یا خیر؟ برای این منظور ابتدا معادله سرعت- زمان را به دست می آوریم: $v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v = -2t + 4 \xrightarrow{v=0} -2t + 4 = 0 \Rightarrow t = 2s$

پس در لحظه $t = 2s$ سرعت صفر شده و متحرک تغییر جهت می دهد. حال مکان تغییر جهت را نیز به دست می آوریم:

$$x = -t^2 + 4t + 5 \xrightarrow{t=2s} x = -4 + 8 + 5 = 9m$$



در لحظه $t = 0$ متحرک در مکان $+5m$ ، در لحظه $t = 2s$ در مکان $+9m$ و در لحظه $t = 5s$ در مکان $x = 0$ است. پس در کل، مسافت طی شده برابر است با:

راه حل دوم: می توانیم نمودار سرعت- زمان $v = -2t + 4$ را در مدت $5s$ رسم کرده و قدرمطلق سطح های محصور بین نمودار و محور زمان را جمع کنیم.

$$\text{مسافت طی شده} = \left| \frac{4 \times 2}{2} \right| + \left| \frac{-6 \times 3}{2} \right| = 13m$$

۸- گزینه ۴ **ابتدا معادله سرعت- زمان را به دست آورده و آن را تعیین علامت می کنیم.** در بازه زمانی که سرعت منفی است، متحرک در خلاف جهت محور x ها در حرکت است و در بازه زمانی که سرعت مثبت است، متحرک در جهت مثبت محور در حرکت است.

$$v = x' \Rightarrow v = 3t^2 + 4t = 0 \Rightarrow t = 0, \quad t = -\frac{4}{3}s$$

در تمام مدت حرکت متحرک پس از لحظه $t = 0$ ، همواره سرعت مثبت و همواره حرکت در جهت مثبت محور x ها است.

۹- گزینه ۴ **در حرکت کندشونده، سرعت متحرک در حال کاهش است و بردار شتاب و بردار سرعت در خلاف جهت هم هستند.** معادله سرعت- زمان و معادله شتاب- زمان را به دست آورده و آن ها را تعیین علامت می کنیم:

t	0	$+\infty$
v	-	
a	-	
av	+	

$$v = x' \Rightarrow v = -3t^2 - 4t \xrightarrow{v=0} \begin{cases} t = 0 \\ t = -\frac{4}{3}s \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$a = v' \Rightarrow a = -6t - 4 \xrightarrow{a=0} t = -\frac{2}{3}s \text{ غ ق ق}$$

با توجه به جدول تعیین علامت، هرگز حرکت این متحرک کندشونده نخواهد بود.

۱۰- گزینه ۲ **متحرکی که روی خط راست حرکت می کند، لحظه ای تغییر جهت می دهد که سرعتش صفر شده و سرعت تغییر علامت بدهد.**

$$v = x' \Rightarrow v = t^2 + 3t - 4$$

$$v = 0 \Rightarrow t^2 + 3t - 4 = 0 \Rightarrow (t-1)(t+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1s \\ t = -4s \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

در لحظه $t = 1s$ متحرک تغییر جهت می دهد.

۱۱- گزینه ۱ **متحرک لحظه ای تغییر جهت می دهد که سرعتش صفر شده و سرعت تغییر علامت بدهد.**

$$v = x' \Rightarrow v = 3t^2 - 6t + 3 \xrightarrow{v=0} 3(t^2 - 2t + 1) = 0 \Rightarrow 3(t-1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1s$$

با آن که در لحظه $t = 1s$ سرعت صفر می شود اما تغییر علامت نمی دهد و سرعت $3(t-1)^2$ همواره مثبت است بنابراین متحرک در هیچ لحظه ای تغییر جهت نمی دهد.

۱۲- گزینه ۴ **می دانیم سرعت لحظه ای، مشتق مکان نسبت به زمان است، بنابراین باید از خود بپرسیم از چه عبارتی مشتق بگیریم تا $-6t^2$ به دست آید که قطعاً $-2t^3$ به ذهن ما می رسد و با گرفتن مشتق از $3t^2$ عبارت $6t$ به دست می آید، از این رو معادله مکان- زمان متحرک خواهد شد:**

$$x = -2t^3 + 3t^2 + x_0$$

$$-2 = 2 \times (1)^3 + 3 \times (1)^2 + x_0 \Rightarrow x_0 = -3m$$

$$x = -2t^3 + 3t^2 - 3$$

البته بدون حل نیز می توان گزینه (۴) را انتخاب کرد، زیرا معادله سرعت- زمان تابع درجه ۲ است و قطعاً معادله مکان- زمان تابع درجه ۳ است.

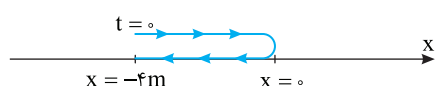
۱۳- گزینه ۴ **هرگاه در یک پرسش، که معادله مکان- زمان در آن مشخص است در مورد مسافت طی شده سؤال شود، ابتدا باید مشخص گردد که در بازه زمانی مورد نظر، متحرک تغییر جهت می دهد یا نه؟ برای این منظور باید تعیین کرد در چه لحظه ای و در چه مکانی سرعت صفر می شود.**

$$v = x' \Rightarrow v = -2t + 4 \xrightarrow{v=0} -2t + 4 = 0 \Rightarrow t = 2s$$

$$x = -(2)^2 + 4 \times 2 - 4 = 0$$

$$t_1 = 0 \Rightarrow x_1 = -4m$$

حال مکان متحرک را در ابتدا و انتهای بازه زمانی به دست می آوریم:



$$t_2 = 4s \Rightarrow x_2 = -16 + 16 - 4 = -4m$$

$$d = 4 + 4 = 8m$$

با توجه به شکل مسافت طی شده برابر است با:

۱۴- گزینه ۴

ابتدا معادله سرعت- زمان و معادله شتاب- زمان را به کمک مشتق گیری به دست می آوریم.

$$v = x' \Rightarrow v = 3t^2 - 12t + 9$$

$$a = v' \Rightarrow a = 6t - 12$$

$$a = 0 \Rightarrow 6t - 12 = 0 \Rightarrow t = 2s$$

برای تغییر جهت بردار شتاب باید ابتدا شتاب صفر شود و سپس تغییر علامت دهد. از این رو شتاب را برابر صفر قرار می دهیم.

معادله شتاب تابع درجه یک است که در دو طرف ریشه اش تغییر علامت می دهد بنابراین در $t = 2s$ بردار شتاب تغییر جهت می دهد. گزینه (۱) درست است.

برای بررسی تغییر جهت بردار سرعت، معادله سرعت را برابر صفر قرار می دهیم.

$$3t^2 - 12t + 9 = 0 \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow (t-1)(t-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1s \\ t = 3s \end{cases}$$

در معادله درجه ۲ در دو طرف ریشه تغییر علامت وجود دارد پس سرعت در لحظه های $t = 1s$ و $t = 3s$ تغییر علامت می دهد و گزینه (۲) درست است.

در لحظه $t = 4s$ سرعت و شتاب را به دست می آوریم:

$$\left. \begin{aligned} v &= 3(4)^2 - 12(4) + 9 \Rightarrow v = 48 - 48 + 9 = 9 > 0 \\ a &= 6(4) - 12 = 12 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow av > 0$$

حرکت تندشونده

بنابراین گزینه (۳) نیز درست است.

۱۵- گزینه ۴

ابتدا معادله شتاب- زمان را با مشتق گیری از معادله سرعت- زمان به دست می آوریم.

$$a = v' \Rightarrow a = -16t$$

کاملاً مشخص است که با گذشت زمان، بزرگی شتاب در حال افزایش است و گزینه (۱) نادرست است، همچنین گزینه (۳).

سرعت را تعیین علامت می کنیم.

$$v = 0 \Rightarrow 200 - 8t^2 = 0 \Rightarrow t^2 = 25 \Rightarrow t = 5s, t = -5s \quad \text{غ.ق.ق.}$$

علامت تابع بین دو ریشه مخالف علامت ضریب t^2 بوده و مطابق جدول روبه رو در بازه صفر تا $+5s$ سرعت مثبت اما شتاب $(a = -16t)$ منفی بوده و حرکت

کندشونده است بنابراین گزینه (۲) نادرست است. همچنین در بازه صفر تا $+5s$ علامت سرعت مثبت بوده و حرکت در جهت محور x ها است و برای $t > 5s$ علامت سرعت منفی شده و در خلاف جهت محور x ها بوده بنابراین گزینه (۴) درست است.

t	$-\infty$	-5	۰	$+5$	$+\infty$
v		-	+	+	-
a		-	-	-	-

غ.ق.ق.

۱۶- گزینه ۲

معادله سرعت- زمان و معادله شتاب- زمان را به کمک مشتق گیری به دست می آوریم.

$$v = x' \Rightarrow v = 6t - 3t^2 \xrightarrow{a = \frac{dv}{dt}} a = 6 - 6t$$

ریشه معادله شتاب- زمان را به دست می آوریم زیرا در لحظه ای که شتاب صفر می شود و تغییر علامت می دهد جهت بردار شتاب عوض می شود.

$$a = 0 \Rightarrow 6 - 6t = 0 \Rightarrow t = 1s$$

تابع درجه یک بوده و علامت آن در دو طرف ریشه تغییر می کند، پس جهت بردار شتاب در لحظه $t = 1s$ عوض می شود و گزینه (۱) نادرست است.

ریشه معادله سرعت- زمان را به دست می آوریم.

t	$-\infty$	۰	۱	۲	$+\infty$
v		+	+	-	-
a		+	-	-	-
av		+	-	+	+

غ.ق.ق.

تندشونده

کندشونده

تندشونده

$$v = 0 \Rightarrow 6t - 3t^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2s \end{cases}$$

پس در بازه صفر تا $2s$ علامت سرعت عوض نمی شود و جهت حرکت جسم تغییر نمی کند بنابراین گزینه (۲) درست و گزینه (۳) نادرست است. هر چند که حل مسأله

تمام شده، گزینه (۴) را نیز بررسی می کنیم. هر دو معادله سرعت و شتاب را تعیین علامت می کنیم با توجه به جدول گزینه (۴) نادرست است.

پاسخ سوالات آزمون‌های سراسری ۱۴۰۱

۱ ۲۱۰۱ A

امواج مکانیکی برای انتشار نیاز به محیط مادی دارند. امواج صوتی از نوع امواج مکانیکی هستند بنابراین برای انتشار نیاز به محیط مادی دارند. پرتوهای X، رادیویی و فروسرخ از جنس امواج الکترومغناطیسی بوده و می‌توانند در خلأ منتشر شوند و برای انتشار به محیط مادی نیاز ندارند.

۴ ۲۱۰۲ A

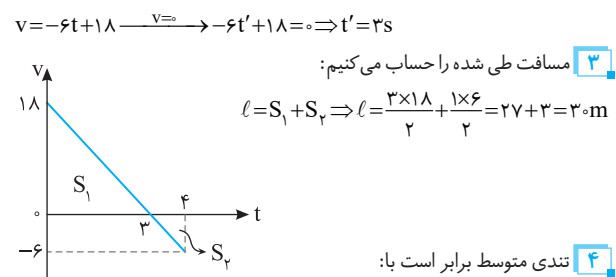
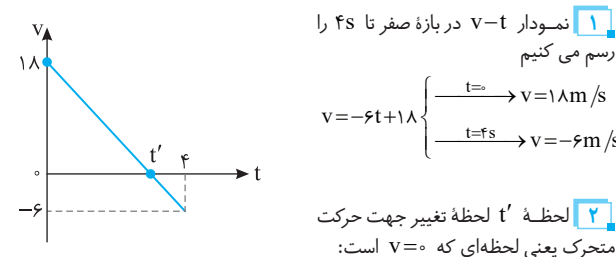
یادآوری: انرژی الکترون در ترازهای اتم هیدروژن از رابطه $E_n = \frac{-E_R}{n^2}$ به دست می‌آید.

در اتم هیدروژن $n=1$ تراز پایه، $n=2$ اولین حالت برانگیخته و تراز $n=3$ دومین حالت برانگیخته است، انرژی در دو حالت را می‌نویسیم و بر هم تقسیم می‌کنیم/

$$E_A = \frac{-E_R}{n^2} \Rightarrow \begin{cases} E_3 = \frac{-E_R}{3^2} = \frac{-E_R}{9} \\ E_1 = \frac{-E_R}{1^2} = -E_R \end{cases} \xrightarrow{\div} \frac{E_3}{E_1} = \frac{\frac{-E_R}{9}}{-E_R} = \frac{1}{9}$$

۲ ۲۱۰۳ B

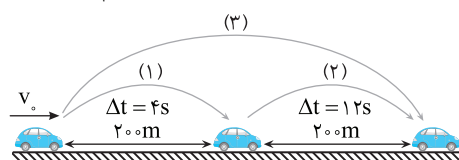
خط فکری: برای به دست آوردن تندی متوسط و یا مسافت طی شده بهتر است نمودار سرعت - زمان ($v-t$) متحرک را رسم کرده و از سطح زیر نمودار کمک گرفت.



۴ ۲۱۰۴ B

خط فکری: بازه زمانی t_1 تا $t_2 = t_1 + 16(s)$ یعنی کل مدت مورد بررسی ۱۶s است. و در این ۱۶s، متحرک ۴۰۰m جابه‌جا شده است. بنابراین نصف این مسیر یعنی ۲۰۰m را در ۴s و ۲۰۰ متر بعدی را در ۱۲-۴=۸s طی کرده است. از این رو کافی شما از معادله جابجایی - مکان در حرکت با شتاب ثابت یک بار در ۴s و بار دیگر در کل مدت ۱۶s استفاده کنید.

مسیر حرکت را رسم می‌کنیم و با توجه به اینکه جابجایی متحرک در زمان‌های مختلف داده شده است. برای مسیرهای (۱) و (۲) معادله $\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t$ را می‌نویسیم.



$$(1) \Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t \Rightarrow 200 = \frac{1}{2}a(4)^2 + 4v_0 \Rightarrow 200 = 8a + 4v_0 \quad (I)$$

$$(2) \Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t \Rightarrow 400 = \frac{1}{2}a(16)^2 + 16v_0 \Rightarrow 400 = 128a + 16v_0 \quad (II)$$

حال با حل دستگاه دو معادله دو مجهول شتاب حرکت را حساب می‌کنیم

$$\begin{cases} -4(8a + 4v_0) = -200 \\ 128a + 16v_0 = 400 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -32a - 16v_0 = -200 \\ 128a + 16v_0 = 400 \end{cases} \xrightarrow{+} 96a = -400$$

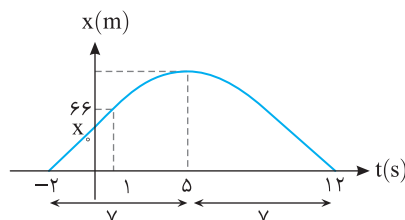
$$\Rightarrow a = \frac{-400}{96} \Rightarrow a = \frac{-25}{6} \text{ m/s}^2$$

بزرگی شتاب خواسته شده است از این‌رو:

$$|a| = \frac{25}{6} \text{ m/s}^2$$

۳ ۲۱۰۵ C

نکته: نمودار مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت یک سهمی است و سهمی نسبت به محور گذرا از رأس سهمی دارای تقارن است.



با توجه به نمودار ریشه‌های این سهمی $t=12s$ و $t=-2s$ است. بنابراین معادله آن خواهد شد:

$$x = A(t-12)(t+2)$$

باید مختصات $t=1s$ و $x=66m$ در این معادله صدق کند.

$$66 = A(1-12)(1+2) \Rightarrow A = -2$$

معادله را کامل می‌کنیم.

$$x = -2(t-12)(t+2)$$

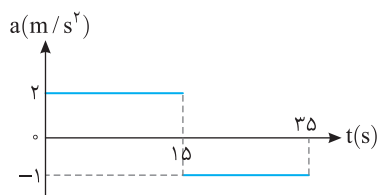
اکنون کافی است که در این معادله $t=0$ را قرار داده و مکان اولیه را حساب کنیم:

$$x_0 = -2(0-12)(0+2) \Rightarrow x_0 = 48m$$

۱ ۲۱۰۶ B

خط فکری: نمودار شتاب - زمان، اطلاعات خاصی از حرکت به ما نمی‌دهد بنابراین از نقاط روی نمودار استفاده کرده و به کمک روابط حرکت با شتاب ثابت مسئله را حل می‌کنیم. سرعت و مکان متحرک در $t=2s$ به ما داده شده است، با استفاده از آن‌ها و با توجه به اینکه در بازه ۲s تا ۱۵s، شتاب ثابت و $12m/s^2$ است مکان و سرعت متحرک در $t=15s$ را حساب کرده سپس در بازه ۱۵s تا ۳۵s نیز به کمک معادله مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت مکان در $t=35s$ را به دست می‌آوریم.

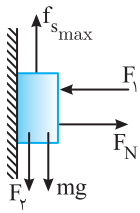
۱ در لحظه $t=2s$ مکان $-16m$ و سرعت $-6m/s$ و شتاب ثابت $2m/s^2$ است بنابراین مکان در لحظه $t=15s$ خواهد شد:



$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \times 2 \times (13)^2 + (-6) \times 13 + (-16)$$

$$x_1 = 169 + (-78) - 16 \Rightarrow x_1 = 75m$$

B ۲۱۰۹ ۱



۱ ابتدا نیروهای وارد بر قطعه چوب را رسم می‌کنیم. دقت کنید قطعه چوب در آستانه لغزش رو به پایین قرار دارد و در نتیجه نیروی اصطکاک بیشینه ($f_{s_{\max}}$) و رو به بالا است.

۲ نیروی اصطکاک آستانه حرکت را حساب می‌کنیم.

$$f_{s_{\max}} = 0 \Rightarrow f_{s_{\max}} = F_1 + mg \xrightarrow{F_1 = 3/5 N, m = 2/5 kg} f_{s_{\max}} = 3/5 + 2/5 = 6/5 N$$

۳ نیرویی که دیوار به چوب وارد می‌کند از رابطه $R = \sqrt{f_{s_{\max}}^2 + F_N^2}$ به دست

$$\text{می‌آید نیروی عمودی سطح خواهد شد.}$$

$$R = \sqrt{f_{s_{\max}}^2 + F_N^2} \Rightarrow 10 = \sqrt{6^2 + F_N^2} \Rightarrow 100 = 36 + F_N^2 \Rightarrow F_N = 8 N$$

۴ $f_{s_{\max}}$ برابر $\mu_s F_N$ است:

$$f_{s_{\max}} = \mu_s F_N \Rightarrow 6 = \mu_s \times 8 \Rightarrow \mu_s = \frac{6}{8} = 0.75$$

B ۲۱۱۰ ۳

خط فکری ابتدا دوره حرکت را به دست می‌آوریم. با توجه به شکل:

$$\Delta \lambda_f = 25 \Rightarrow \lambda = 2.5 \text{ cm} = 0.025 \text{ m}$$

$$\lambda = vT \Rightarrow \frac{2}{10} = 10 \times T \Rightarrow T = 0.02 \text{ s}$$

حال برای بررسی گزاره (الف) دقت کنید گفته شده مسافتی که موج در هر ثانیه طی می‌کند، با توجه اینکه سرعت انتشار موج 10 m/s است پس این مسافت برابر است با: $\Delta x = vt = 10 \times 1 = 10 \text{ m}$

پس گزاره (الف) نادرست است.

گزاره (ب): هر ذره از محیط در مدت یک نوسان، مسافت $4A$ را طی می‌کند. بنابراین با توجه به اینکه $T = 0.02 \text{ s}$ است، در $1/0.02 = 50$ ثانیه تعداد نوسان‌های هر ذره از محیط برابر است با:

$$N = \frac{t}{T} = \frac{0.01}{0.02} = \frac{1}{2}$$

و ذره مسافت $2A$ یعنی 4 cm را طی می‌کند و این گزاره درست است.

گزاره (پ) در مورد جابه‌جایی است. اگر ذره‌ای در نقطه تعادل باشد بعد از $1/0.02 = 50$ یعنی $\frac{T}{2}$ مجدداً در نقطه تعادل است و جابه‌جایی‌اش صفر است. و اگر ذره‌ای در مکان

بیشینه باشد پس از $\frac{T}{2}$ در مکان کمینه قرار دارد و جابه‌جایی آن برابر $2A$ خواهد شد.

پس جابه‌جایی بستگی به مکان اولیه ذره دارد و این گزاره نادرست است.

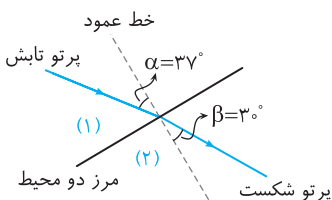
بررسی گزاره (ت): $2/0.02 = 100$ برابر یک دوره است و جابه‌جایی هر ذره در مدت یک دوره همواره برابر صفر است. پس گزاره‌های (ب) و (ت) درست‌اند.

B ۲۱۱۱ ۴

خط فکری برای به دست آوردن نسبت سرعت‌ها در دو محیط (v_1/v_2) باید از قانون شکست عمومی استفاده کنید. اما قبل از آن باید زاویه تابش (θ_1) و زاویه شکست (θ_2) را به کمک شکل مشخص کنید.

نکته زاویه‌ای که جبهه موج با مرز بین دو محیط می‌سازد برابر زاویه‌ای است که پرتو آن با خط عمود بر مرز می‌سازد.

۱ با توجه به نکته بالا نمودار پرتویی به صورت روبه‌رو بوده و زاویه تابش و زاویه شکست به ترتیب برابر $\theta_1 = 37^\circ$ و $\theta_2 = 3^\circ$ است.



۲ سرعت در لحظه $t = 1.5 \text{ s}$ را حساب می‌کنیم

$$v_1 = at + v_0 \Rightarrow v_1 = 2 \times 1.5 - 6 \Rightarrow v_1 = 2 \text{ m/s}$$

۳ سرعت $v_1 = 2 \text{ m/s}$ سرعت اولیه قسمت دوم حرکت و مکان $x_1 = 7.5 \text{ m}$ مکان اولیه این قسمت است بنابراین می‌توان به کمک معادله مکان - زمان مکان در $t = 3.5 \text{ s}$ را حساب کرد.

$$x_2 = \frac{1}{2} a_2 t_2^2 + v_1 t_2 + x_1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2} \times (-1) \times (2)^2 + 2 \times 2 + 7.5$$

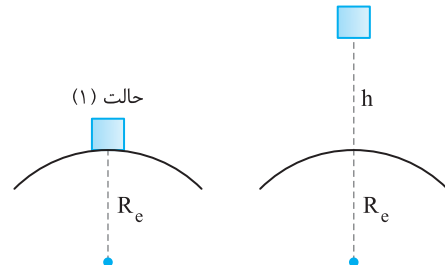
$$x_2 = -2 + 4 + 7.5 \Rightarrow x_2 = 27.5 \text{ m} \Rightarrow \bar{x}_2 = 27.5 \text{ m}$$

B ۲۱۰۷ ۴

شتاب گرانش 99% درصد کاهش یافته:

$$g' = g - \frac{99}{100} g \Rightarrow g' = \frac{1}{100} g$$

شتاب گرانش از رابطه $g = G \frac{M_e}{r^2}$ به دست می‌آید که r فاصله از مرکز زمین است

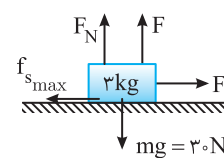


$$\frac{GM_e}{(h+R_e)^2} = \frac{1}{100} \frac{GM_e}{R_e^2}$$

$$\left(\frac{R_e}{h+R_e}\right)^2 = \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{R_e}{h+R_e} = \frac{1}{10} \Rightarrow 10R_e = h+R_e \Rightarrow h = 9R_e$$

B ۲۱۰۸ ۲

حالت اول: جسم در آستانه حرکت بوده و نیروی اصطکاک آن نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه $f_{s_{\max}}$ است: نیروی عمودی سطح را به دست می‌آوریم:



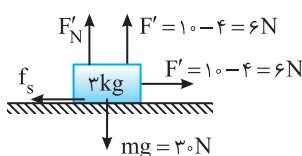
$$F + F_N = mg \text{ در راستای قائم جسم حرکت نمی‌کند}$$

$$\Rightarrow F_N = 30 - F$$

$$F = f_{s_{\max}} \text{ در راستای افقی جسم در آستانه حرکت بوده و هنوز حرکت نکرده}$$

$$\xrightarrow{f_{s_{\max}} = \mu_s F_N} F = \mu_s (30 - F) \xrightarrow{\mu_s = 0.5} F = 0.5(30 - F)$$

$$\Rightarrow F + 0.5F = 15 \Rightarrow 1.5F = 15 \Rightarrow F = 10 \text{ N}$$



حالت دوم: هر کدام از نیروهای F .

4 N کاهش یافته و $F = 10 \text{ N}$ به 6 N می‌رسد، دقت کنید که چون نیروی در راستای قائم کاهش یافته پس F_N افزایش می‌یابد و نیروی

افقی نیز کاهش یافته، در واقع در قسمت قبلی با نیروی 10 N و نیروی عمودی سطح $F = 10 \text{ N}$ ، جسم در آستانه حرکت بوده پس در این حالت که نیروی افقی $F' = 6 \text{ N}$ شده و نیروی عمودی سطح $F'_N = 30 - 6 = 24 \text{ N}$ افزایش یافته جسم همچنان ساکن می‌ماند و نیروی اصطکاک برابر نیروی F' است.

$$F' = f_s \Rightarrow f_s = 6 \text{ N}$$

۲۱۱۴ B

۱. رشته بَرَاکت $n'=4$ است و دومین خط آن یعنی گذار از $n=6$ به $n=4$ است.

اولین خطر رشته بَرَاکت $n'=4, n=5$

دومین خطر رشته بَرَاکت $n'=4, n=6$

۲. طول موج این خط طیف را از رابطه ریدبرگ بر حسب R حساب می‌کنیم.

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{36} \right) = R \left(\frac{9-4}{144} \right) \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{5R}{144} \Rightarrow \lambda = \frac{144}{5R}$$

۳. رشته بالمر $n'=2$ بوده و چهارمین خط آن یعنی گذار از $n=6$ به $n=2$ چهارمین خطر رشته بالمر سومین خطر رشته بالمر دومین خطر رشته بالمر اولین خطر رشته بالمر

$$n'=2, n=3 \quad n'=2, n=4 \quad n'=2, n=5 \quad n'=2, n=6$$

۴. طول موج این خط طیف را نیز به کمک رابطه ریدبرگ حساب می‌کنیم.

$$\frac{1}{\lambda'} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \Rightarrow \frac{1}{\lambda'} = R \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{36} \right) \Rightarrow \frac{1}{\lambda'} = R \left(\frac{32}{144} \right) \Rightarrow \lambda' = \frac{144}{32R}$$

۵. حال نسبت $\frac{\lambda}{\lambda'}$ را به دست می‌آوریم:

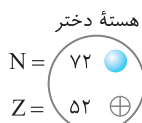
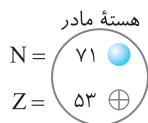
$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\frac{144}{5R}}{\frac{144}{32R}} \Rightarrow \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{32}{5}$$

$$n' = n', \quad n = m + n'$$

میانبر m امین خط رشته n' یعنی:

۲۱۱۵ B

راه حل اول: هسته مادر را با نماد X و هسته دختر را با نماد Y نشان می‌دهیم:



$$Z = 53$$

$$Z = 52$$

$$A = Z + N \Rightarrow A = 53 + 71 = 124$$

$$A = Z + N \Rightarrow A = 52 + 72 = 124$$

$$\frac{A}{Z} X \Rightarrow \frac{124}{53} X$$

$$\frac{A}{Z} Y \Rightarrow \frac{124}{52} Y$$

$$\frac{124}{53} X \rightarrow \frac{124}{52} Y + \dots$$

حال معادله واکنش را می‌نویسیم:

برای آنکه عدد اتمی دو طرف معادله یکسان باشد ذره ${}^0_{+1}e$ گسیل شده باشد.

یعنی در واپاشی گسیل پوزیترون داریم.

راه حل دوم: با توجه به شکل هسته‌ها، یک پروتون به یک نوترون تبدیل شده چون تعداد پروتون هسته دختر یک واحد کم و تعداد نوترون آن یک واحد افزایش یافته است.

در واپاشی (گسیل) پوزیترون یک پروتون به یک نوترون تبدیل می‌شود.

۲۱۱۶ B

یادآوری: تندی انتشار موج در تار برابر است با:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{F\ell}{m}} = \sqrt{\frac{F}{\rho A}} = \frac{1}{D} \sqrt{\frac{F}{\rho \pi}}$$

با توجه به اینکه چگالی و سطح مقطع داده شده از رابطه $v = \sqrt{\frac{F}{\rho A}}$ برای حل استفاده

می‌کنیم، دقت کنید در این رابطه باید واحد چگالی $\frac{kg}{m^3}$ باشد و بنابراین ابتدا $\frac{g}{cm^3}$

را به $\frac{kg}{m^3}$ تبدیل می‌کنیم:

$$\rho = 8 \frac{g}{cm^3} = 8 \times 10^{-3} \frac{kg}{m^3}, \quad A = 2mm^2 = 2 \times 10^{-6} m^2$$

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho A}} \Rightarrow 25 = \sqrt{\frac{F}{8 \times 10^{-3} \times 2 \times 10^{-6}}} \xrightarrow{\text{به توان دو}} 625 = \frac{F}{16 \times 10^{-9}} \Rightarrow F = 10 N$$

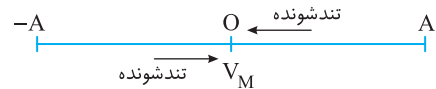
۲. حال با توجه به قانون شکست عمومی:

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2} \Rightarrow \frac{\sin 37^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{v_1}{v_2} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{4}{5}$$

۲۱۱۷ B

نکته: در مدت یک دوره، $\frac{T}{2}$ ثانیه حرکت تندشونده است.

نکته: هرگاه نوسانگر در حال حرکت به‌سوی حالت تعادل باشد حرکت تندشونده است.



۱. با توجه به معادله حرکت $x = 0.2 \cos 4\pi t$ دوره را حساب می‌کنیم.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow 4\pi = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{1}{2} s$$

۲. بازه زمانی $t_1 = \frac{1}{12} s$ تا $t_2 = \frac{1}{6} s$ با دوره مقایسه می‌کنیم.

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{12}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{\Delta t}{T} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{6} T = \frac{1}{12} s$$

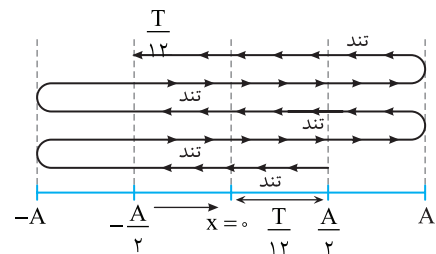
۳. در بازه $2T$ به مدت نصف بازه یعنی T حرکت تند شونده است.

۴. اما در مدت $\frac{T}{6}$ چگونه است؟ برای این منظور مکان نوسانگر در ابتدای بازه

$(t = \frac{1}{12} s)$ را باید مشخص کنیم.

$$x = 0.2 \cos 4\pi \left(\frac{1}{12} \right) \Rightarrow x = 0.2 \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 0.1 m \Rightarrow x = \frac{1}{2} A$$

۵. مسیر حرکت را مشخص می‌کنیم.



۶. با توجه به مسیر در مدت حرکت از $x = 0$ تا $x = \frac{A}{2}$ حرکت تندشونده و در

مدت $2T$ بعدی نیز به مدت T حرکت کندشونده است یعنی در کل زمان حرکت

$$\Delta t = T + \frac{T}{2} = \frac{12T}{12} + \frac{6T}{12} \xrightarrow{T=\frac{1}{2}s} \Delta t = \frac{18}{24} s$$

تندشونده خواهد شد:

۲۱۱۸ B

خط فکری: در حل این نوع مسائل ابتدا باید طول موج را حساب کنید. سپس به

کمک رابطه ریدبرگ n و n' را به دست بیاورید اما در اغلب این مسائل شما باید در واقع n و n' را حدس بزنید. برای این منظور از گزینه‌ها کمک بگیرید.

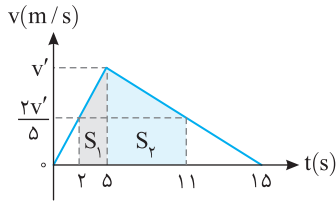
۱. ابتدا طول موج بسامد 2.5×10^{15} هرتز را حساب می‌کنیم:

$$\lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow \lambda = \frac{3 \times 10^8}{2.5 \times 10^{15}} \Rightarrow \lambda = \frac{10^{-7}}{0.75} \Rightarrow \lambda = \frac{4}{3} \times 10^{-7} m = \frac{400}{3} nm$$

۲. حال به کمک معادله ریدبرگ n و n' را به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \Rightarrow \frac{3}{400} = \frac{1}{100} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \Rightarrow \frac{3}{4} = \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

با توجه به گزینه‌ها مشخص می‌شود که $n=2$ و $n'=1$ است.



$$v' = 20 \text{ m/s}$$

$$v_p = ?$$

$$\Delta t = 5 \text{ s} \quad a = -2 \text{ m/s}^2 \quad t = 12 \text{ s}$$

$$v_p = at + v' \Rightarrow v_p = -14 + 20 \Rightarrow v_p = 6 \text{ m/s}$$

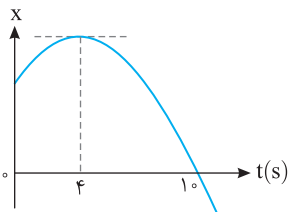
در بازه ۵s تا ۱۵s شتاب برابر

$$\frac{-v'}{t} = \frac{-20}{10} = -2 \text{ m/s}^2 \text{ است و}$$

سرعت در هر ثانیه ۲m/s^۲ کم

می‌شود:

۱ ۲۱۱۹ B



شتاب حرکت را

ثابت و برابر a می‌گیریم، سرعت در

t=4s که رأس سهمی است برابر

صفر است زیرا در نمودار x-t

شیب خط مماس برابر سرعت بوده

که مطابق شکل این شیب در لحظه

t=4s برابر صفر است:

۱ سرعت در t=4s برابر

صفر است، سرعت در t=2s را

به‌دست می‌آوریم:

$$v_p = at + v_1 \Rightarrow 0 = 2a + v_1$$

$$\Rightarrow v_1 = -2a$$

تندی در t=2s برابر |2a| است.

۲ سرعت در لحظه t=4s

برابر صفر است، سرعت در

t=8s را به‌دست می‌آوریم:

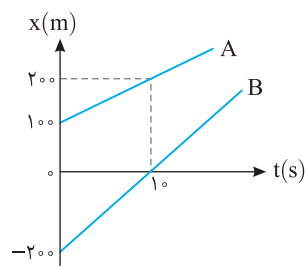
$$v_p = at + v_1 \Rightarrow v_p = 4a$$

تندی در t=8s برابر |4a| است.

$$\frac{v_p}{v_1} = \frac{|4a|}{|-2a|} = 2$$

۳ نسبت تندی v_p و v_۱ را حساب می‌کنیم:

۳ ۲۱۲۰ B



معادله حرکت دو

متحرک را می‌نویسیم، فاصله دو

متحرک برابر |x_A - x_B| بوده که

باید کمتر یا مساوی ۲۰ متر باشد.

۱ شیب خط نمودار x-t

برابر سرعت متحرک است:

$$v_A = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{200 - 100}{10 - 0} = 10 \text{ m/s}$$

$$v_B = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{200 - (-200)}{10 - 0} = 40 \text{ m/s}$$

۲ معادله حرکت دو متحرک را می‌نویسیم:

$$x_A = v_A t + x_0 \Rightarrow x_A = 10t + 100$$

$$x_B = v_B t + x_0 \Rightarrow x_B = 40t - 200$$

۲ ۲۱۱۷ B

خط فکری شتاب حرکت مثبت بوده و با توجه به سؤال متحرک در جهت محور x

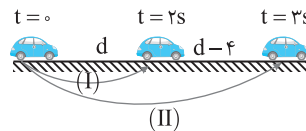
در حال حرکت بوده پس سرعت نیز مثبت است. حرکت تندشونده (av > 0) با شتاب

ثابت بوده و تغییر جهت نداریم بنابراین مسافت و جابه‌جایی با هم برابر است.

۱ جابه‌جایی در بازه ۰ تا ۲s را برابر d می‌گیریم و جابه‌جایی در بازه ۲s تا ۳s برابر

d-۴ متر است. سؤال سرعت اولیه را خواسته بنابراین برای بازه ۰ تا ۲s و ۲s تا ۳s به

کمک رابطه $\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$ سؤال را حل می‌کنیم:



$$\text{I) } d = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \xrightarrow{t=2s} d = \frac{1}{2}a(2)^2 + v_0(2)$$

$$\Rightarrow d = 2a + 2v_0 \xrightarrow{a=4} d = 8 + 2v_0$$

$$\text{II) } 2d - 4 = \frac{1}{2}a(t')^2 + v_0 t' \xrightarrow{t'=3s} 2d - 4 = \frac{1}{2}a(3)^2 + v_0(3)$$

$$\xrightarrow{a=4} 2d - 4 = 18 + 3v_0 \Rightarrow 2d = 22 + 3v_0$$

۲ حال با توجه به دو معادله دو مجهول بالا، v_۰ را حساب می‌کنیم:

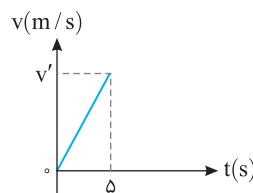
$$\left. \begin{array}{l} d = 8 + 2v_0 \xrightarrow{\times 2} 2d = 16 + 4v_0 \\ 2d = 22 + 3v_0 \xrightarrow{\times 1} 2d = 22 + 3v_0 \end{array} \right\} \xrightarrow{+} 0 = 6 - v_0 \Rightarrow v_0 = 6 \text{ m/s}$$

۲ ۲۱۱۸ B

سرعت متحرک در لحظه ۵s را v' می‌گیریم.

۱ شتاب در بازه ۰ تا ۵s برابر شیب

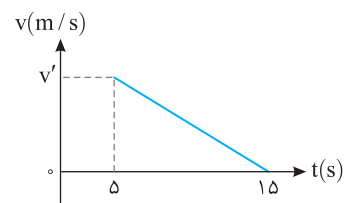
خط نمودار در این بازه است:



$$a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a_1 = \frac{v'}{5}$$

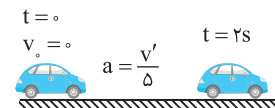
۲ شتاب در بازه ۵s تا ۱۵s برابر شیب خط نمودار در این بازه است:

$$a_p = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a_p = \frac{-v'}{10}$$



۳ سرعت در t=2s و t=11s را

حساب می‌کنیم:

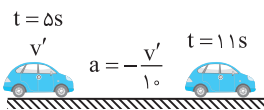


$$t=0 \quad v_0=0 \quad a=\frac{v'}{5}$$

$$t=2s$$

$$v_p = at + v_1 \Rightarrow v_{t=2s} = \frac{v'}{5} \times 2$$

$$\Rightarrow v_{t=2s} = \frac{2v'}{5}$$



$$t=5s$$

$$a = -\frac{v'}{10}$$

$$t=11s$$

$$v_p = at + v_1 \xrightarrow{\Delta t=6s}$$

$$v_{t=11s} = \frac{-v'}{10} \times 6 + v' = \frac{4v'}{10} = \frac{2v'}{5}$$

۴ حال با توجه به سطح زیر نمودار v-t که برابر جابه‌جایی است خواهیم داشت:

$$\Delta x = S_1 + S_2 \Rightarrow 126 = \frac{3(\frac{2v'}{5} + v')}{2} + \frac{6(\frac{2v'}{5} + v')}{2}$$

$$\Rightarrow 126 = 2/1v' + 4/2v' \Rightarrow 126 = 6/3v' \Rightarrow v' = 20 \text{ m/s}$$

۴ ۲۱۲۴ B

با توجه به تعریف تراز شدت صوت ابتدا، شدت صوت در فاصله ۵۰ متری چشمه را به دست می آوریم:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} \xrightarrow{\beta = 60 \text{ dB}} 60 = 10 \log \frac{I}{10^{-12}} \Rightarrow I = 10^{-6} \frac{W}{m^2}$$

اکنون با استفاده از شدت صوت، توان چشمه را حساب می کنیم:

$$I = \frac{P}{A} \Rightarrow I = \frac{P}{4\pi r^2} \Rightarrow 10^{-6} = \frac{P}{4\pi \times 3^2} \Rightarrow P = 0.3W = 30 \text{ mW}$$

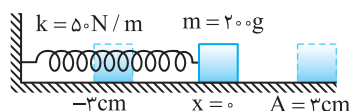
۱ ۲۱۲۵ B

نکته: هرگاه وزنه متصل به فنر را از حالت تعادل کشیده و رها کنیم مقدار کشیدگی برابر دامنه نوسان سامانه جرم فنر است.

۱ دوره حرکت را حساب می کنیم:

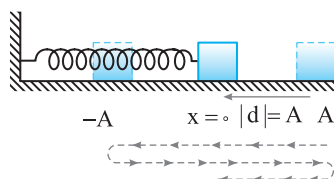
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \xrightarrow{m = 100 \text{ g}} T = 2\pi \sqrt{\frac{0.1}{50}} \Rightarrow T = 0.28 \text{ s}$$

$$T = \frac{2}{5} \Rightarrow T = 0.4 \text{ s}$$



۲ بازه زمانی $\Delta t = 0.5 \text{ s}$ را با دوره مقایسه می کنیم:

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{0.5}{0.4} \Rightarrow \Delta t = \frac{5}{4} T = T + \frac{T}{4}$$



۳ مسیر حرکت وزنه در مدت

نیم ثانیه اول را رسم می کنیم.

با توجه به مسیر حرکت نوسانگر

در مدت $\frac{5}{4} T$ مسافتی برابر

$$\frac{\ell}{d} = \frac{5A}{A} = 5 \quad \text{را طی می کند و جابه جایی آن برابر A است. از این رو:}$$

۴ ۲۱۲۶ A

آونگ در هر ثانیه یک نوسان انجام می دهد بنابراین دوره آن $T = 1 \text{ s}$ است. با توجه به رابطه دوره آونگ، طول آن را حساب می کنیم:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \xrightarrow{g = \pi^2} 1 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{\pi^2}} \Rightarrow \ell = 0.25 \text{ m} \Rightarrow \ell = 25 \text{ cm}$$

۲ ۲۱۲۷ B

۱ فنر را از حالت تعادل ۴ cm کشیده و رها کرده ایم بنابراین دامنه حرکت $A = 4 \text{ cm}$ است.

۲ انرژی مکانیکی نوسانگر را به دست می آوریم:

$$E = \frac{1}{2} k A^2 \xrightarrow{k = 50 \text{ N/cm} = 5000 \text{ N/m}} E = \frac{1}{2} \times 5000 \times (4 \times 10^{-2})^2$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} \times 5000 \times 16 \times 10^{-4} \Rightarrow E = 4 \text{ J}$$

نکته: انرژی مکانیکی نوسانگر همواره برابر بیشینه انرژی جنبشی آن است $(K_m = E)$.

۳ وقتی تندی نوسانگر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ تندی بیشینه است نسبت انرژی جنبشی نوسانگر به

انرژی جنبشی بیشینه خواهد شد:

$$\frac{K}{K_m} = \frac{\frac{1}{2} m v^2}{\frac{1}{2} m v_m^2} \Rightarrow \frac{K}{K_m} = \left(\frac{v}{v_m}\right)^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2} K_m \Rightarrow K = \frac{1}{2} E \Rightarrow K = 2 \text{ J}$$

۴ اختلاف K و E خواهد شد:

۳ خواسته سؤال این است که فاصله دو متحرک از هم کمتر یا مساوی ۲۰ متر باشد:

$$|x_B - x_A| \leq 20 \text{ m} \Rightarrow |20t - 200 - 10t - 100| \leq 20$$

$$\Rightarrow |10t - 300| \leq 20 \Rightarrow -20 \leq 10t - 300 \leq 20$$

$$\Rightarrow 280 \leq 10t \leq 320 \Rightarrow 28 \leq t \leq 32$$

بنابراین بازه زمانی برابر $32 - 28 = 4 \text{ s}$ است.

۲ ۲۱۲۱ B

تکانه: حاصلضرب جرم در بردار سرعت جسم است.

وقتی که جرم ثابت است برای دو برابر شدن تکانه کافی است سرعت جسم دو برابر شود. بنابراین ابتدا، شتاب حرکت را حساب می کنیم، سپس مدت زمانی که سرعت دو برابر می شود را به دست می آوریم.

۱ به کمک قانون دوم نیوتون شتاب حرکت خواهد شد:

$$F_{\text{net}} = ma \xrightarrow{F_{\text{net}} = 4 \text{ N}} 4 = 20 \cdot a \Rightarrow a = 0.2 \text{ m/s}^2$$

۲ با توجه به فرض مسئله:

$$P_f = 2P_i \Rightarrow mv_f = 2mv_i \Rightarrow v_f = 2v_i \Rightarrow v_f = 2 \times 5 \Rightarrow v_f = 10 \text{ m/s}$$

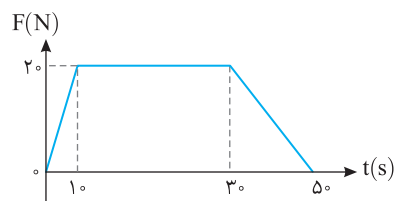
۳ با توجه به تعریف شتاب خواهیم داشت:

$$a = \frac{v_f - v_i}{\Delta t} \Rightarrow 0.2 = \frac{10 - 5}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{5}{0.2} \Rightarrow \Delta t = 25 \text{ s}$$

۳ ۲۱۲۲ B

به کمک سطح زیر نمودار نیرو - زمان، تغییر تکانه را حساب می کنیم:

$$\Delta P = S = (50 + 20) \times \frac{2}{2} = 70 \text{ kgm/s}$$



نیروی خالص متوسط وارد بر جسم برابر آهنگ تغییر تکانه است. از این رو می توان

$$F_{\text{av}} = \frac{\Delta P}{\Delta t} \Rightarrow F_{\text{av}} = \frac{70}{5} \Rightarrow F_{\text{av}} = 14 \text{ N}$$

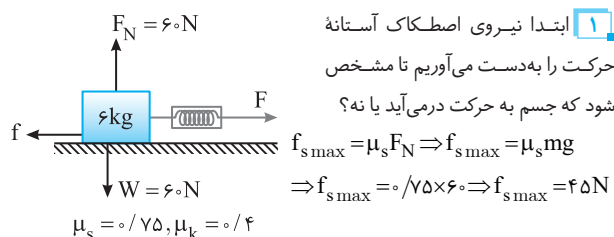
نوشت:

۱ ۲۱۲۳ B

۱ ابتدا نیروی اصطکاک آستانه

حرکت را به دست می آوریم تا مشخص

شود که جسم به حرکت درمی آید یا نه؟



۲ نیروی کشسانی نیروسنج ۲۵ N بوده و از $f_{s \text{ max}}$ کمتر است بنابراین جسم

ساکن می ماند و نیروی اصطکاک ایستایی وارد بر جسم خواهد شد:

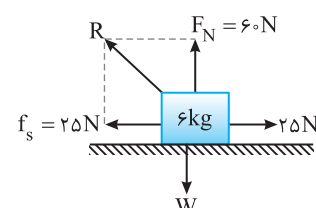
$$F_{\text{net}} = 0 \Rightarrow f_s = F_e \Rightarrow f_s = 25 \text{ N}$$

۳ بنا به قانون سوم نیوتون

نیروی که جسم بر سطح وارد

می کند هم اندازه نیرویی است که

سطح بر جسم وارد می کند.



$$R = \sqrt{F_s^2 + F_N^2} \Rightarrow R = \sqrt{25^2 + 60^2} \Rightarrow R = 65 \text{ N}$$

$$Z = 82 + 2 = 84$$

بنابراین این عدد اتمی Z برابر است با:

$$A = 207 + 4 = 211$$

عدد جرمی A برابر است با:

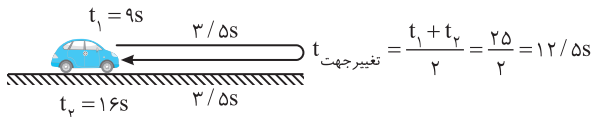
۲۲۱۳۳ B

خط فکری جابه‌جایی متحرک روی محور x در بازه $t_1 = 9s$ تا $t_2 = 16s$ صفر

شده است، یعنی متحرک یک مسیر رفت و برگشت را طی کرده است. از طرفی شتاب ثابت است، بنابراین مسیر رفت و برگشت قرینه هستند و دقیقاً چون وسط بازه زمانی

یعنی $\frac{9+16}{2} = 12.5s$ متحرک متوقف شده و برمی‌گردد.

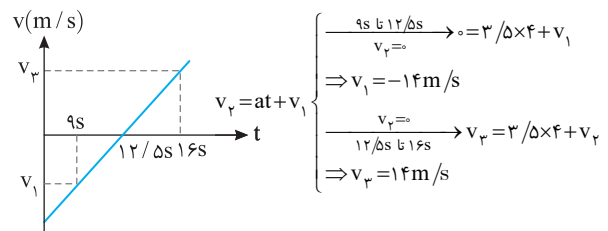
یعنی متحرک با شتاب $4m/s^2$ در مدت $12.5s - 9s = 3.5s$ متوقف شده و برمی‌گردد.



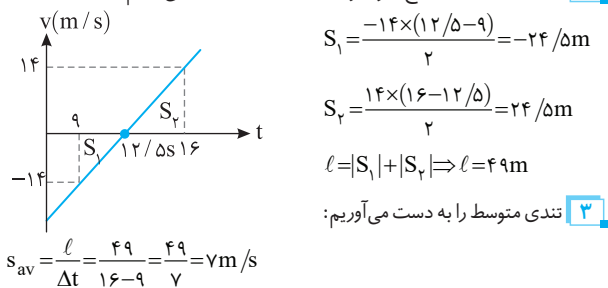
۱ چون تندی متوسط خواسته شده و باید مسافت را حساب کنیم، برای اینکار نمودار

سرعت - زمان را رسم می‌کنیم. دقت کنید که شتاب $4m/s^2$ بوده و چون تغییر

جهت داشتیم باید سرعت صفر شود پس سرعت اولیه منفی است:



۲ حال با استفاده از سطح زیر نمودار مسافت را به دست می‌آوریم:



۳ تندی متوسط را به دست می‌آوریم:

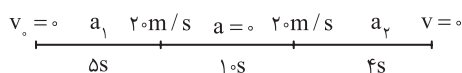
۲۲۱۳۴ B

خط فکری شتاب متوسط $(a_{av} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1})$ را باید حساب کنیم، بنابراین باید

در لحظه $t_1 = 2s$ و $t_2 = 17s$ سرعت حرکت متحرک را به دست بیاوریم. البته حرکت متحرک از سه قسمت تشکیل شده در قسمت اول و سوم باید شتاب را حساب کنیم سپس به سراغ سرعت‌ها برویم.

راه حل اول:

۱ در مدت $5s$ سرعت متحرک از صفر به $20m/s$ رسیده است، با توجه به رابطه $v_2 = at + v_1$ شتاب حرکت در $5s$ نخست را به دست می‌آوریم:



$$v_2 = at + v_1 \Rightarrow 20 = 5a + 0 \Rightarrow a_1 = 4m/s^2$$

۲ در بازه زمانی $t = 5s$ تا $t = 15s$ (به مدت $10s$) سرعت ثابت و برابر $20m/s$

است. در این لحظه اتومبیل ترمز می‌کند و در مدت $4s$ (بازه $15s$ تا $19s$) متوقف می‌شود. شتاب را در این مدت حساب می‌کنیم.

$$v_2 = at + v_1 \xrightarrow{v_2=0} 0 = 4a_2 + 20 \Rightarrow a_2 = -5m/s^2$$

۲۲۱۳۵ A

یادآوری هرگاه پرتو نور از محیط رقیق وارد محیط غلیظ شود، پرتو به خط عمود نزدیک می‌شود.

نکته ضریب شکست یک محیط شفاف برای طول موج‌های کوتاه‌تر بیشتر است یعنی این پرتوها بیشتر منحرف می‌شوند.

طول موج نور آبی از طول موج نور قرمز کمتر است بنابراین وقتی این دو پرتو وارد شیشه می‌شوند، نور آبی بیشتر منحرف شده و به خط عمود نزدیک‌تر می‌شود.

۲۲۱۳۶ B

انرژی فوتون B ، 25% از انرژی فوتون A کمتر است.

$$E_B = E_A - 0.25E_A \Rightarrow E_B = \frac{3}{4}E_A \quad (I)$$

$$\text{انرژی هر فوتون از رابطه } E = hf = \frac{hc}{\lambda} \text{ به دست می‌آید. از این‌رو:}$$

$$\xrightarrow{(I)} \frac{hc}{\lambda_B} = \frac{3}{4} \times \frac{hc}{\lambda_A} \Rightarrow \lambda_A = \frac{3}{4}\lambda_B \quad (II)$$

بنا به فرض مسئله $\lambda_B - \lambda_A = 50nm$ است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\lambda_B - \frac{3}{4}\lambda_B = 50 \Rightarrow \frac{1}{4}\lambda_B = 50 \Rightarrow \lambda_B = 200nm$$

$$\lambda_A = \frac{3}{4} \times 200 \Rightarrow \lambda_A = 150nm$$

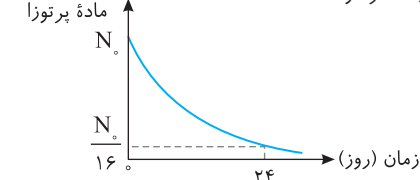
بسامد هر پرتو را حساب کرده و از هم کم می‌کنیم:

$$f = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \begin{cases} \text{A} \rightarrow f_A = \frac{3 \times 10^8}{150 \times 10^{-9}} \Rightarrow f_A = 2 \times 10^{15} \text{ Hz} \\ \text{B} \rightarrow f_B = \frac{3 \times 10^8}{200 \times 10^{-9}} \Rightarrow f_B = 1.5 \times 10^{15} \text{ Hz} \end{cases}$$

$$\Delta f = 2 \times 10^{15} - 1.5 \times 10^{15} \Rightarrow \Delta f = 0.5 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

۲۲۱۳۷ A

۱ تعداد نیمه‌عمر خواهد شد: تعداد هسته‌های ماده پرتوزا



$$N = \frac{N_0}{2^n} \Rightarrow \frac{N_0}{16} = \frac{N_0}{2^n}$$

$$2^n = 16 \Rightarrow n = 4$$

$$T = \frac{t}{n} = \frac{24 \text{ روز}}{4} \Rightarrow T = 6 \text{ روز}$$

۲ نیمه‌عمر را حساب می‌کنیم:

۲۲۱۳۸ A

یادآوری رابطه تکانه و انرژی جنبشی به صورت $K = \frac{p^2}{2m}$ است:

$$\frac{K_A}{K_B} = \frac{\frac{p_A^2}{2m_A}}{\frac{p_B^2}{2m_B}} \Rightarrow \frac{K_A}{K_B} = \left(\frac{p_A}{p_B}\right)^2 \times \frac{m_B}{m_A}$$

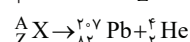
$$\xrightarrow{p_A = p_B} \frac{K_A}{K_B} = \frac{m_B}{m_A} \xrightarrow{m_A = 4m_B} m_B = 4m_A$$

۲۲۱۳۹ B

یادآوری ذره آلفا دارای دو پروتون و دو نوترون بوده $(\alpha = {}^4_2\text{He})$ و هنگام واپاشی

آلفا ۴ واحد از عدد جرمی و ۲ واحد از عدد اتمی کاسته می‌شود.

واکنش هسته‌ای را می‌نویسیم و در آن هسته مادر را به صورت ${}^A_Z X$ نمایش می‌دهیم



۲۱۳۵ B

یادآوری: در نمودار مکان - زمان در نقاط کمینه و بیشینه، سرعت متحرک صفر است.
 ۱. تندی متحرک در مکان $x = 25m$ که رأس سهمی بوده برابر صفر است. با توجه به فرض سؤال در مکان $x = -375m$ نیز تندی $40m/s$ است، بنابراین به کمک رابطه مستقل از زمان، شتاب حرکت را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} x(m) \\ 25 \\ 0 \\ t \end{aligned} \quad \begin{aligned} v=0 \\ v_1^2 - v_1^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 1600 = 2a(x_1 - x_1) \\ \Rightarrow 1600 = 2a(-375 - 25) \\ 1600 = -800a \Rightarrow a = -2m/s^2 \end{aligned}$$

۲. در بازه زمانی t تا متحرک با شتاب $a = -2m/s^2$ به اندازه $\Delta x = 25m$ جابه‌جا شده و سرعت نهایی آن صفر شده است. ابتدا با توجه به رابطه $v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$ سرعت اولیه را حساب کرده و سپس به کمک معادله سرعت زمان t را به دست می‌آوریم:

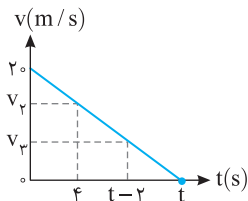
$$\begin{aligned} x(m) \\ 25 \\ 0 \\ t \end{aligned} \quad \begin{aligned} v=0 \\ v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \xrightarrow{a=-2m/s^2, v=0} \\ -v_0^2 = -4 \times 25 \Rightarrow v_0^2 = 100 \\ \Rightarrow v_0 = 10m/s \end{aligned}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = -2t + 10 \Rightarrow t = 5s$$

سهمی نسبت به محور قائم گذرا از رأس آن تقارن دارد از این رو متحرک در لحظه $t = 10s$ از مکان $x = 0$ عبور کرده و در بازه $10s$ تا مکان متحرک مثبت بوده و بردار مکان در جهت محور x است.

۲۱۳۶ B

نمودار سرعت - زمان خط راست است، پس شتاب حرکت ثابت است. اگر شتاب حرکت را a در نظر بگیریم در هر ثانیه سرعت به اندازه a تغییر می‌کند. حال با توجه به شتاب a سرعت در لحظه $t = 4s$ و در لحظه $2s$ قبل از توقف را حساب می‌کنیم:



$$v_2 = at + v_1 \begin{cases} \xrightarrow{t=4s} v_2 = 4a + v_1 \\ \xrightarrow{v_2=0, t=2} 0 = 2a + v_1 \Rightarrow v_1 = -2a \end{cases}$$

حال با توجه به رابطه $\Delta x = \frac{v_1 + v_2}{2} \Delta t$ مسافت طی شده را در $4s$ نخست و $2s$ آخر حرکت را به دست می‌آوریم:

$$d_1 = \frac{v_1 + v_2}{2} \Delta t_1 \xrightarrow{v_1=20m/s, v_2=20+4a} d_1 = \frac{40+4a}{2} (4) \Rightarrow d_1 = 80 + 8a$$

$$d_2 = \frac{v_2 + v_3}{2} \Delta t_2 \xrightarrow{v_2=0, v_3=-2a} d_2 = \frac{-2a}{2} \times 2 \Rightarrow d_2 = -2a$$

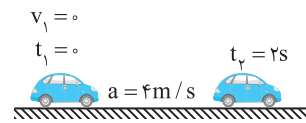
با توجه به سؤال نسبت $\frac{d_1}{d_2}$ برابر 36 است، از این رو خواهیم داشت:

$$\frac{d_1}{d_2} = 36 \Rightarrow \frac{80+8a}{-2a} = 36 \Rightarrow 80+8a = -72a \Rightarrow 80 = -80a \Rightarrow a = -1m/s^2$$

بزرگی شتاب برابر $|a| = 1m/s^2$ است.

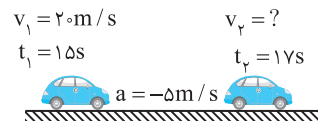
۳. سرعت در $t_1 = 2s$ و $t_2 = 17s$ را حساب می‌کنیم:

الف) در لحظه $t_1 = 2s$ شتاب حرکت $4m/s^2$ و سرعت اولیه صفر است:



$$v = at + v_0 \xrightarrow{t=2s} v_1 = 2 \times 4 + 0 \Rightarrow v_1 = 8m/s$$

ب) در لحظه $t_2 = 17s$ شتاب حرکت $-5m/s^2$ و سرعت در ابتدای بازه این شتاب یعنی $t_1 = 15s$ برابر $20m/s$ است.



$$v = at + v_0 \Rightarrow v_2 = -5 \times 2 + 20 \Rightarrow v_2 = 10m/s$$

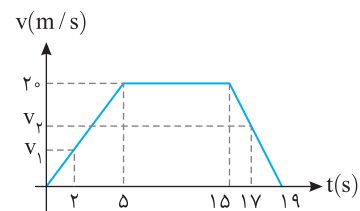
۴. شتاب متوسط را حساب می‌کنیم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{10 - 20}{17 - 15} = -5m/s^2$$

راه حل دوم:

نمودار $v-t$ متحرک را رسم کنیم. در مدت $5s$ سرعت از صفر به $20m/s$ رسیده و در مدت $5s$ تا $15s$ سرعت ثابت و در مدت $4s$ تا $19s$ سرعت از $20m/s$ به صفر رسیده است:

حال با توجه به تشابه، سرعت در $t_1 = 2s$ و $t_2 = 17s$ به دست می‌آوریم:



$$\frac{v_1}{2} = \frac{20}{5} \Rightarrow v_1 = 8m/s$$

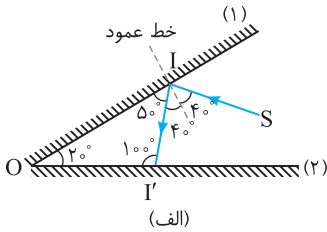
$$\frac{v_2}{2} = \frac{20}{4} \Rightarrow v_2 = 10m/s$$

در نهایت شتاب متوسط را به دست می‌آوریم:

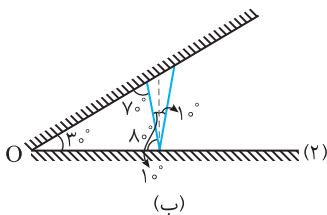
$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a_{av} = \frac{10 - 8}{17 - 2} = \frac{2}{15}m/s^2$$

B ۴ ۲۱۴۰

خط فکری در حل این مسائل باید یک‌به‌یک، زاویه تابش و بازتاب در هر بار برخورد نور به هر آینه را ادامه داده تا لحظه‌ای که دیگر پرتو به آینه‌ای برخورد نکند البته شما باید مقداری هندسه بدانید و اینکه مجموع زوایای داخلی مثلث 180° است، سپس بروید و با حوصله مسئله را حل کنید.



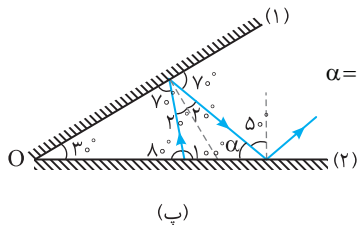
۱ زاویه تابش بر سطح آینه (۱) بنا بر فرض مسئله 40° است و بنا بر قانون بازتاب عمومی، زاویه بازتاب نیز 40° و زاویه‌ای که پرتو بازتاب با سطح آینه (۱) می‌سازد 50° خواهد بود.



۲ به مثلث OII' شکل (الف) نگاه کنید، زاویه‌ای که پرتو تابیده به سطح آینه (۲) با آینه می‌سازد 100° است. اگر خط عمود را رسم کنید در شکل (ب)

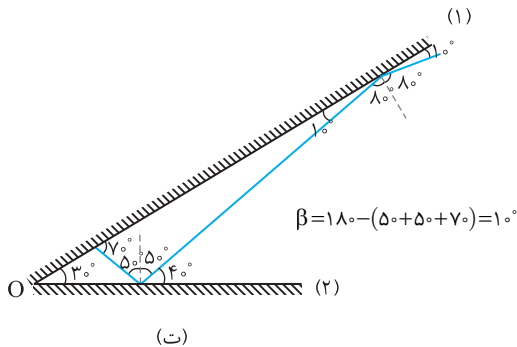
مشخص می‌شود که زاویه تابش 10° است. پرتو بازتاب وقتی به آینه (۱) می‌رسد با آن زاویه 110° می‌سازد.

۳ برای پرتویی که مجدد به آینه (۱) با زاویه 70° برخورد کرده خط عمود رسم می‌کنیم زاویه تابش 20° می‌شود:

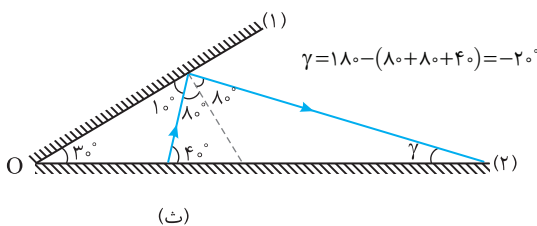


$$\alpha = 180 - (20 + 20 + 100) = 40^\circ$$

با توجه به شکل (ت) زاویه پرتویی که مجدد به سطح (۱) می‌تابد با آن 10° است.

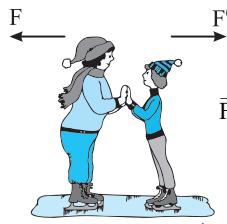


پرتویی که به سطح (۱) تابیده شده دارای زاویه تابش 80° است.



بنابراین هیچگاه زاویه γ تشکیل نمی‌شود و آخرین زاویه تابش برابر 80° است.

A ۴ ۲۱۳۷



نیروهای $\vec{F}$ و $\vec{F}'$ کنش و واکنش یکدیگرند پس این دو نیرو هم‌اندازه و خلاف جهت‌اند.

$$\vec{F} = -\vec{F}'$$

$$F = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m}$$

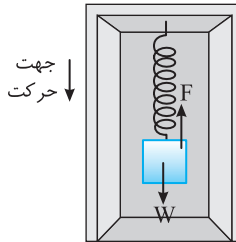
شتاب از رابطه $F = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m}$ به دست می‌آید. چون دو نیرو هم‌اندازه‌اند،

پس هرچه جرم شخصی بیشتر باشد شتاب حرکت او کمتر است:

$$a = \frac{F}{m}$$

$$F = F' \Rightarrow a_1 < a_2$$

B ۴ ۲۱۳۸



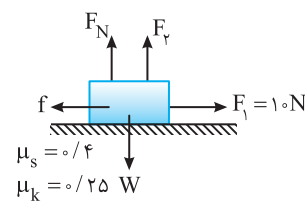
آسانسور از حال سکون رو به پایین شروع به حرکت می‌کند. نیروهای وارد بر وزنه را رسم می‌کنیم. بر وزنه دو نیرو (۱) وزن رو به پایین (۲) نیروی کشسانی فنر رو به بالا وارد می‌شود. بنا به قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:

$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow W - F = ma \Rightarrow mg - kx = ma$$

$$\frac{x = 35 - 26 = 9 \text{ cm}}{k = 200 \text{ N/m}, a = 1 \text{ m/s}^2} \rightarrow m \times 10 - 200 \times \frac{9}{100} = m \times 1$$

$$\Rightarrow 10m - m = 18 \Rightarrow 9m = 18 \Rightarrow m = 2 \text{ kg}$$

C ۴ ۲۱۳۹



خط فکری نیروی F_1 از

صفر تا 20 N در حال تغییر است بنابراین نیروی اصطکاک آستانه حرکت ($f_{s \max}$) در حال تغییر است. شما باید مشخص کنید که ابتدا صفر نیوتون بوده و

در نهایت چند نیوتون می‌شود و با مقایسه نیروی جلوبر F_1 با $f_{s \max}$ مشخص کنید که جسم در حال سکون می‌ماند و یا اینکه به حرکت درمی‌آید.

۱ نیروی عمودی سطح و نیروی اصطکاک آستانه حرکت را وقتی $F_1 = 0$ است حساب می‌کنیم:

$$F_1 = 0 \Rightarrow F_N = W \Rightarrow F_N = 40 \text{ N}$$

نیروی اصطکاک آستانه حرکت:

$$f_{s \max} = \mu_s F_N \Rightarrow f_{s \max} = 0.4 \times 40 = 16 \text{ N}$$

۲ نیروی $F_1 = 10 \text{ N}$ را با $f_{s \max} = 16 \text{ N}$ مقایسه می‌کنیم $F_1 < f_{s \max}$ است. به همین دلیل تا لحظه‌ای که $f_{s \max} \leq 10 \text{ N}$ شود، جسم ساکن می‌ماند و نیروی اصطکاک برابر نیروی F_1 بوده و اصطکاک ثابت می‌ماند ($f_s = F_1 = 10 \text{ N}$)

۳ با افزایش F_1 ، نیروی عمودی سطح ($\downarrow F_N = W - F_1 \uparrow$) کاهش می‌یابد که سبب کاهش $f_{s \max}$ می‌شود. وقتی $F_1 = 20 \text{ N}$ می‌شود، F_N و $f_{s \max}$ را به دست می‌آوریم.

$$F_N = W - F_1 \xrightarrow{F_1 = 20 \text{ N}} F_N = 40 - 20 = 20 \text{ N}$$

$$f_{s \max} = \mu_s F_N \Rightarrow f_{s \max} = 0.4 \times 20 \Rightarrow f_{s \max} = 8 \text{ N}$$

۴ در این حالت $F_1 = 10 \text{ N} > f_{s \max}$ بوده یعنی جسم به حرکت درمی‌آید و نیروی اصطکاک، نیروی اصطکاک جنبشی خواهد بود که از $f_{s \max}$ کمتر است، یعنی

$$F_N = W - F_1 \xrightarrow{F_1 = 20 \text{ N}} F_N = 40 - 20 = 20 \text{ N}$$

$$f_{s \max} = \mu_s F_N \Rightarrow f_{s \max} = 0.4 \times 20 \Rightarrow f_{s \max} = 8 \text{ N}$$

اصطکاک، کاهش می‌یابد و برابر خواهد شد با:

$$F_k = \mu_k F_N \Rightarrow F_k = 0.25 \times 20 = 5 \text{ N}$$

در نتیجه ابتدا اصطکاک ثابت است و سپس کاهش می‌یابد.

بسامد را حساب می‌کنیم.

$$E = 2\pi^2 m A^2 f^2 \xrightarrow{A=2 \times 10^{-2}, m=9.1 \times 10^{-31}} E = 2\pi^2 \times 9.1 \times 10^{-31} \times (2 \times 10^{-2})^2 f^2 \Rightarrow 2 \times 10^{-3} = 2\pi^2 \times 9.1 \times 10^{-31} \times (2 \times 10^{-2})^2 f^2$$

$$\Rightarrow 10^{-2} = (2\pi^2 \times 9.1 \times 10^{-31}) f^2 \xrightarrow{\text{از طرفین جذر می‌گیریم}} 10^{-1} = 2 \times 2 \times 10^{-2} f \Rightarrow f = 5 \text{ Hz}$$

۲۲۴۴ C

۱ انرژی فوتون را برحسب الکترون ولت به دست می‌آوریم.

$$E = \frac{4/0.8 \times 10^{-19}}{1/6 \times 10^{-19}} \Rightarrow E = 2/55 \text{ eV}$$

۲ در گذار الکترون از مدار n به n' ، الکترون فوتونی با اختلاف انرژی دو تراز گسیل می‌کند. از این رو انرژی الکترون در ترازهای مختلف را از رابطه $E_n = -E_R / n^2$ به دست می‌آوریم و مشخص می‌کنیم اختلاف انرژی کدام ترازها برابر $2/55 \text{ eV}$ می‌شود.

$$E_n = -\frac{E_R}{n^2} \Rightarrow \begin{cases} n=1 \rightarrow E_1 = -13/6 \text{ eV} \\ n=2 \rightarrow E_2 = -13/6 \times \frac{1}{4} = -3/4 \text{ eV} \\ n=3 \rightarrow E_3 = -13/6 \times \frac{1}{9} = -1/54 \text{ eV} \\ n=4 \rightarrow E_4 = -13/6 \times \frac{1}{16} = -1/8 \text{ eV} \end{cases}$$

بنابراین اختلاف انرژی ترازهای $n=4$ و $n'=2$ برابر $-1/8 - (-3/4) = 2/55 \text{ eV}$ است.

۳ شعاع مدار چهارم خواهد شد. $r_n = n^2 a_0 \xrightarrow{n=4} r_4 = 16 a_0$

۴۲۴۵ B

۱ بیشترین بسامد گسیلی (یعنی کوتاه‌ترین طول موج) گسیلی و قتی است که الکترون از تراز بینهایت به تراز $n'=3$ در رشته پاشن برود. با توجه به رابطه ریدبرگ کوتاه‌ترین طول موج را حساب می‌کنیم.

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = 0.01 \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{\infty} \right) \Rightarrow \lambda_{\min} = 90 \text{ nm}$$

۲ بیشینه بسامد خواهد شد:

$$f_{\max} = \frac{c}{\lambda_{\min}} = \frac{3 \times 10^8}{90 \times 10^{-9}} \Rightarrow f_{\max} = \frac{1}{3} \times 10^{15} \text{ Hz}$$

۳ کمترین بسامد گسیلی (یعنی بلندترین موج) وقتی گسیل می‌شود که الکترون از تراز $n=4$ به تراز $n'=3$ در رشته پاشن برود از این رو خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \Rightarrow \frac{1}{\lambda_{\max}} = \frac{1}{100} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16} \right) = \frac{1}{100} \left(\frac{16-9}{144} \right)$$

$$\Rightarrow \lambda_{\max} = \frac{900 \times 16}{7} \text{ nm}$$

۴ کمترین بسامد را حساب می‌کنیم.

$$f_{\min} = \frac{c}{\lambda_{\max}} = \frac{3 \times 10^8}{\frac{900 \times 16}{7} \times 10^{-9}} \Rightarrow f_{\min} = \frac{7}{48} \times 10^{15} \text{ Hz}$$

۵ اختلاف دو بسامد را حساب می‌کنیم.

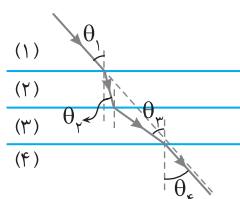
$$f_{\max} - f_{\min} = \frac{1}{3} \times 10^{15} - \frac{7}{48} \times 10^{15} \Rightarrow \Delta f = \left(\frac{16-7}{48} \right) \times 10^{15} = \frac{9}{48} \times 10^{15}$$

$$\Rightarrow \Delta f = 1/5 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

۴۲۴۶

یادآوری در هسته‌های سبک مانند اکسیژن $^{16}_8\text{O}$ ، تعداد نوترون‌ها (N) و تعداد پروتون‌ها (Z) با هم برابر است و هرچه در جدول تناوبی به سمت هسته‌های (عناصر) سنگین‌تر با عدد اتمی بزرگ‌تر برویم تعداد نوترون‌ها افزایش می‌یابد. با توجه به یادآوری بالا، در هسته‌های پایدار سنگین‌تر نسبت N/Z بزرگ‌تر است.

۳۲۴۱ B



نکته هرچه زاویه‌ای که پرتو با خط

عمود می‌سازد بزرگتر باشد، تندی نور در آن محیط بیشتر است.

۱ پرتو ورودی از محیط (۱) با پرتو خروجی

در محیط (۴) با هم موازی هستند.

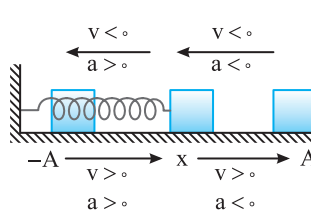
($\theta_1 = \theta_4$) در نتیجه تندی نور در این دو محیط با هم برابر است.

۲ زاویه بین پرتو و خط عمود در محیط (۲) (θ_p) از سه محیط دیگر کمتر و زاویه

بین پرتو و خط عمود در محیط (۳) (θ_p) از سه محیط دیگر بیشتر است بنابراین:

$$v_p < v_1 = v_4 < v_3$$

۱۲۴۲ C



خط فکری به مسیر حرکت

سامانه جرم - فنر شکل روبه‌رو دقت کنید. در مدتی که نوسانگر از مکان $-A$ به سوی مرکز نوسان می‌رود بردار شتاب و سرعت در جهت

محور x هستند که این بازه $\frac{T}{4}$ طول می‌کشد. ابتدا دوره را به دست بیاورید و معین

کنید که بازه زمانی داده شده چه کسری از دوره است؟ مکان نوسانگر در ابتدای بازه $t_1 = 0/5s$ را به دست آورده و مسیر حرکت تا $t_2 = 5s$ را دنبال کنید تا مشخص شود

چه مدتی a و v همزمان مثبت هستند.

۱ با توجه به معادله $x = 0.4 \cos \frac{\pi}{4} t$ دوره خواهد شد:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 4s$$

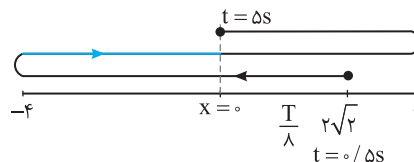
۲ بازه $t_1 = 0/5s$ تا $t_2 = 5s$ را با دوره مقایسه می‌کنیم.

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{5-0/5}{4} = \frac{4/5}{4} \Rightarrow \Delta t = \frac{9}{4} T = T + \frac{T}{4}$$

۳ مکان در ابتدای بازه $t_1 = 0/5s$ را به دست می‌آوریم.

$$x = 0.4 \cos \frac{\pi}{4} \times \left(\frac{1}{4} \right) = 0.4 \cos \frac{\pi}{4} = 0.4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = 0.2\sqrt{2} \text{ m} = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

۴ به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده از مکان $2\sqrt{2}$ مسیر را دنبال می‌کنیم.



۵ بنابراین تنها در قسمت رنگی مسیر $\left(\frac{T}{4} \right)$ و a و v همزمان مثبت هستند.

$$\frac{T}{4} = \frac{4}{4} = 1s$$

۱۲۴۳ B

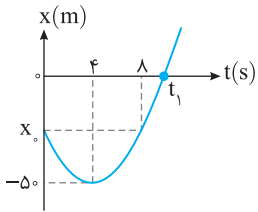
خط فکری مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل برابر انرژی مکانیکی نوسانگر بوده و انرژی مکانیکی نوسانگر $E = 2\pi^2 m A^2 f^2$ است. بنابراین کافی است K و U را با هم جمع کرده سپس به کمک رابطه انرژی مکانیکی بسامد را حساب کنیم.

انرژی مکانیکی برابر است با:

$$E = K + U \xrightarrow{K=5 \times 10^{-3} \text{ J}, U=15 \times 10^{-3} \text{ J}} E = 5 \times 10^{-3} + 15 \times 10^{-3} \Rightarrow E = 20 \times 10^{-3} \text{ J}$$

B ۲۱۵۱ ۱

خط‌نقشه هرگاه سرعت متوسط در یک بازه زمانی صفر شود، یعنی متحرک در ابتدا و انتهای بازه در یک مکان قرار دارد. از طرفی در حرکت با شتاب ثابت نمودار مکان - زمان سهمی است و سهمی نسبت به محور گذرا از رأس آن دارای تقارن است و در بازه زمانی یکسان در دو طرف محور مکان یکسان است. اکنون با توجه به این نکات مسئله را حل می‌کنیم.



۱. در مدت Δt اول سرعت متوسط صفر است یعنی مکان متحرک در $t=0$ و $t=8s$ یکسان است و این دو لحظه نسبت به محور دارای تقارن بوده و مختصات رأس سهمی خواهد شد $(t=4s, x=-5m)$.

۲. تندی در لحظه t_1 برابر $20m/s$ بوده و از طرفی شیب خط مماس در این لحظه مثبت است یعنی سرعت متحرک در این لحظه $20m/s$ است و در لحظه $t=4s$ سرعت صفر است. در بازه زمانی t_1 تا $4s$ متحرک جابه‌جایی $\Delta x = +5m$ را طی کرده است، بنابراین به کمک معادله مستقل از زمان شتاب حرکت خواهد شد:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 20^2 - 0 = 2a(+5) \Rightarrow a = 4m/s^2$$

۳. سرعت اولیه را حساب می‌کنیم.

$$v = at + v_0 \xrightarrow{t=4s, v=0} 0 = 4 \times 4 + v_0 \Rightarrow v_0 = -16m/s$$

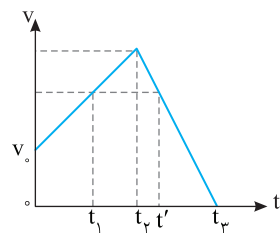
یادآوری در حرکت با شتاب ثابت در یک بازه زمانی معین، سرعت متوسط میانگین سرعت ابتدایی و انتهایی متحرک در آن بازه است.

$$v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

۴. سرعت متوسط در بازه $t=0$ تا $t=t_1$ خواهد شد:

$$v_{av} = \frac{-16 + 20}{2} = 2m/s$$

B ۲۱۵۲ ۲

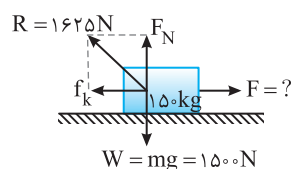


۱. در تمام لحظات در بازه زمانی t_1 تا t_3 ، تندی متحرک از تندی آن در بازه زمانی 0 تا t_1 بیشتر است. بنابراین تندی متوسط در بازه t_1 تا t_3 قطعاً از تندی متوسط در بازه 0 تا t_1 بیشتر است و گزینه (۱) حذف می‌شود.

۲. در مقایسه بازه t_1 تا t_3 با بازه t_1 تا t_2 مشخص است که در بازه t_2 تا t_3 با گذشت زمان تندی متحرک به صفر می‌رسد. در این صورت تندی متوسط در بازه t_1 تا t_2 با بازه t_2 تا t_3 بیشتر است و گزینه (۴) نیز حذف می‌شود.

۳. در بازه صفر تا t_3 نیز در یک مدت زمان طولانی تندی در هر لحظه از تندی در بازه t_1 تا t_2 کوچک‌تر است از این رو تندی متوسط در این بازه از تندی متوسط در بازه t_1 تا t_2 کمتر خواهد بود و گزینه (۲) درست است.

B ۲۱۵۳ ۴



یادآوری نیرویی که سطح زمین به جسم وارد می‌کند (R) برابرند نیروی اصطکاک (f_k) و نیروی عمودی سطح است $(R = \sqrt{f_k^2 + F_N^2})$.

۱. جسم در راستای قائم حرکتی ندارد بنابراین $F_N = W \Rightarrow F_N = 1500N$

B ۲۱۴۷ ۳

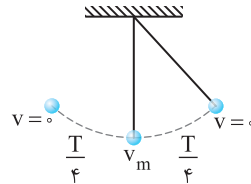
نیمه عمر ماده پرتوزا ۴۵ دقیقه یعنی $\frac{45}{60} = \frac{3}{4}h$ است، بنابراین تعداد نیمه‌عمرهای این ماده در مدت ۳h خواهد شد:

$$n = \frac{t}{T_{\frac{1}{2}}} \Rightarrow n = \frac{3}{\frac{3}{4}} = 4$$

مقدار ماده اولیه باقی‌مانده را حساب می‌کنیم.

$$N = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \frac{N}{N_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \Rightarrow \frac{N}{N_0} = \frac{1}{16}$$

B ۲۱۴۸ ۱



۱. تندی آونگ هنگام عبور از مرکز نوسان (حالت قائم) بیشینه است و زمانی که طول می‌کشد تا آونگ از انتهای مسیر به مرکز نوسان برسد $\frac{T}{4}$ است و زمانی که طول می‌کشد تا آونگ از یک انتهای مسیر به انتهای دیگر برود $\frac{T}{2}$ ثانیه است، بنابراین با توجه به فرض مسئله می‌توان نوشت:

$$\frac{T_A}{4} = \frac{T_B}{2} \Rightarrow T_A = 2T_B \quad (1)$$

۲. دوره آونگ $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ است، دوره را در رابطه (۱) جای گذاری می‌کنیم.

$$2\pi\sqrt{\frac{\ell_A}{g}} = 2(2\pi)\sqrt{\frac{\ell_B}{g}} \Rightarrow \ell_A = 4\ell_B$$

B ۲۱۴۹ ۲

۱. تندی انتشار موج در تار را حساب می‌کنیم.

$$f_n = \frac{nv}{\ell} \xrightarrow{n=1, \text{مد اصلی}} 125 = \frac{v}{2 \times 1} \Rightarrow v = 250m/s$$

۲. چگالی خطی جرم را به دست می‌آوریم.

$$\mu = \frac{m}{\ell} \xrightarrow{m=9g=9 \times 10^{-3}kg, \ell=1m} \mu = 9 \times 10^{-3}kg/m$$

۳. نیروی کشش تار خواهد شد:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow 250 = \sqrt{\frac{F}{9 \times 10^{-3}}} \Rightarrow (250)^2 = \frac{F}{9 \times 10^{-3}}$$

$$F = 562500 \times 10^{-3}N \Rightarrow F = 562.5N$$

B ۲۱۵۰ ۳

۱. به کمک معادله مستقل از زمان، شتاب حرکت متحرک را حساب می‌کنیم.

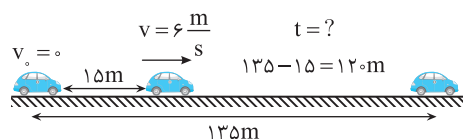
$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow (6)^2 - 0 = 2a \times 15 \Rightarrow a = \frac{36}{30} \Rightarrow a = 1.2m/s^2$$

۲. در قسمت دوم مسیر، متحرک مسافت $135 - 15 = 120m$ را طی کرده است. زمان این قسمت را به کمک معادله جابه‌جایی - زمان به دست می‌آوریم. سرعت اولیه این قسمت $6m/s$ است.

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t \Rightarrow 120 = \frac{1}{2} \times 1.2t^2 + 6t \Rightarrow 0.6t^2 + 6t - 120 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{دو طرف را به } 0.6 \text{ تقسیم می‌کنیم}} t^2 + 10t - 200 = 0 \Rightarrow (t+20)(t-10) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=10s \\ t=-20s \text{ غ ق} \end{cases}$$





۲ ۲۱۵۶ B

با توجه به تعریف تکانه و قانون دوم نیوتون خواهیم داشت:

$$F_{\text{net}} = ma \xrightarrow{a = \Delta v / \Delta t} F_{\text{net}} = \frac{m \Delta v}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta p = m \Delta v}$$

$$F_{\text{net}} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Rightarrow \Delta p = F_{\text{net}} \Delta t$$

نیروی خالص وارد بر جسم مطابق شکل مسئله خواهد شد:

$$F_{\text{net}} = F - f_k = 100 - 60 \Rightarrow F_{\text{net}} = 40 \text{ N}$$

تغییر تکانه در مدت یک ثانیه را حساب می‌کنیم.

$$\Delta p = F_{\text{net}} \Delta t \Rightarrow \Delta p = 40 \times 1 \Rightarrow \Delta p = 40 \text{ kgm/s}$$

۳ ۲۱۵۷ B

اختلاف تراز شدت صوت A و B از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\beta_A - \beta_B = 10 \log \frac{I_A}{I_B}$$

با توجه به فرض مسئله $\beta_A - \beta_B = 10 \text{ dB}$ و $I_A = 0.4 \text{ W/m}^2$ است. از این رو خواهیم داشت:

$$10 = 10 \log \frac{0.4}{I_B} \Rightarrow \log \frac{0.4}{I_B} = 1 \Rightarrow \frac{0.4}{I_B} = 10$$

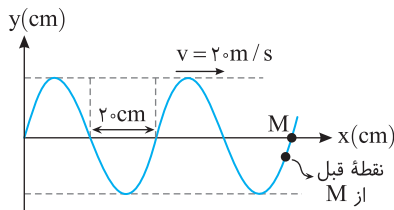
$$\Rightarrow I_B = \frac{0.4}{10} = 0.04 \text{ W/m}^2$$

در این صورت اختلاف شدت این دو صوت خواهد شد:

$$I_A - I_B = 0.4 - 0.04 = 0.36 \text{ W/m}^2 \Rightarrow I_A - I_B = 36 \text{ mW/m}^2$$

۴ ۲۱۵۸ B

خط فکری در حل مسائل نقش موج معمولاً ابتدا از روی محور افقی، طول موج را حساب کرده سپس به کمک تندی انتشار موج دوره را حساب می‌کنیم و بعد از آن با توجه به جهت حرکت موج، رفتار نقطه مورد نظر را بررسی می‌کنیم.



$$\frac{\lambda}{2} = 2 \text{ cm} \Rightarrow \lambda = 4 \text{ cm}$$

گام اول: یافتن طول موج:

$$T = \frac{\lambda}{v} \Rightarrow T = \frac{4}{2} \Rightarrow T = 2 \text{ s}$$

گام دوم: یافتن دوره:

گام سوم: نقطه M در حال گذر از مرکز نوسانش بوده و نقطه قبل از M پایین‌تر از نقطه M است. یعنی M در حال حرکت رو به پایین و دارای بیشینه تندی است.

$$v_m = A\omega \Rightarrow v_m = A \frac{2\pi}{T} \xrightarrow{A = 0.2 \text{ m}} v_m = 0.2 \times \frac{2\pi}{2} \times \frac{1}{2} \Rightarrow v_m = \frac{\pi}{2} \text{ m/s}$$

۲ ۲۱۵۹ B

۱ معادله حرکت نوسانگر به صورت $x = 0.4 \cos 4\pi t$ است. بنابراین دوره حرکت آن خواهد شد:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow 4\pi = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{1}{2} \Rightarrow T = 0.5 \text{ s}$$

۲ اندازه بازه زمانی $t_1 = 0.1 \text{ s}$ تا $t_2 = 1/35 \text{ s}$ برابر $t_2 - t_1 = 1/35 - 0.1 = 1/35 - 1/10 = 1/35 - 2/70 = 2/70 - 1/35 = 1/70 \text{ s}$ است. این بازه را با دوره مقایسه می‌کنیم.

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{1/70}{0.5} \Rightarrow \frac{\Delta t}{T} = \frac{1}{35} \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{35} T \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{35} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{70} \text{ s}$$

۲ نیروی اصطکاک جنبشی را به کمک نیرویی که سطح به جسم وارد می‌کند حساب می‌کنیم.

$$1625 = \sqrt{f_k^2 + (1500)^2} \Rightarrow (1625)^2 = f_k^2 + (1500)^2 \\ \Rightarrow f_k^2 = (1625)^2 - (1500)^2 \Rightarrow f_k^2 = (1625 - 1500)(1625 + 1500) \\ f_k^2 = 125(3125) \Rightarrow f_k^2 = 125 \times (125 \times 25) \Rightarrow f_k = 125 \times 5 = 625 \text{ N}$$

۳ با توجه به قانون دوم نیوتون خواهیم داشت:

$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow F - f_k = ma \xrightarrow{a = 2 \text{ m/s}^2} F - 625 = 150 \times 2 \\ \Rightarrow F = 925 \text{ N}$$

۴ ۲۱۵۴ B

۱ جهت مثبت را رو به پایین در نظر می‌گیریم.

سرعت برخورد گلوله به زمین را حساب می‌کنیم.

$$v^2 = +2gy \Rightarrow v^2 = 2 \times 10 \times 20 \Rightarrow v = 20 \text{ m/s}$$

۲ تندی برگشت رو به بالا 10 m/s است. چون جهت مثبت را رو به پایین در نظر گرفته‌ایم، سرعت برگشت رو به بالا -10 m/s می‌شود، بنابراین بزرگی شتاب در بازه زمانی تماس توپ با زمین خواهد شد:

$$|a| = \frac{|\Delta v|}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t = 0.2 \text{ s}} |a| = \frac{|-10 - 20|}{0.2} \Rightarrow |a| = 150 \text{ m/s}^2$$

۳ نیروی متوسط وارد بر گلوله را به کمک قانون دوم نیوتون حساب می‌کنیم.

$$F_{\text{av}} = ma \xrightarrow{m = 0.2 \text{ kg}} F_{\text{av}} = 0.2 \times 150 \Rightarrow F_{\text{av}} = 30 \text{ N}$$

۱ ۲۱۵۵ B

خط فکری معادله حرکت دو متحرک را به کمک نمودار مکان - زمان نوشته و با هم برابر قرار می‌دهیم. نمودار هر دو خط راست مایل است. بنابراین حرکت هر دو متحرک با سرعت ثابت صورت می‌گیرد.

۱ سرعت متحرک A برابر است با:

$$v_A = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_A = \frac{0.16}{8} = 2 \text{ m/s}$$

مکان اولیه A، $x_{0A} = +16 \text{ m}$ بوده و معادله حرکت A خواهد شد:

$$x = vt + x_0 \Rightarrow x_A = -2t + 16$$

۲ سرعت متحرک B را حساب می‌کنیم.

$$v_B = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_B = \frac{-25 - (-29)}{8} \Rightarrow v_B = \frac{1}{2} \text{ m/s}$$

مکان اولیه متحرک B، $x_{0B} = -29 \text{ m}$ بوده و معادله حرکت B خواهد شد:

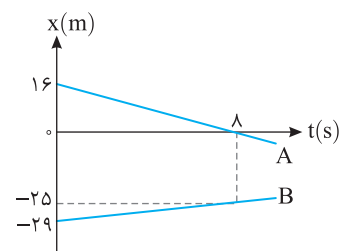
$$x = vt + x_0 \Rightarrow x_B = \frac{1}{2}t - 29$$

۳ دو معادله را برابر قرار داده و لحظه رسیدن دو متحرک به هم را به دست می‌آوریم.

$$x_A = x_B \Rightarrow -2t + 16 = \frac{1}{2}t - 29 \Rightarrow 45 = \frac{5}{2}t \Rightarrow t = 18 \text{ s}$$

۴ مکان رسیدن دو متحرک به هم خواهد شد:

$$x = -2 \times 18 + 16 \Rightarrow x = -36 + 16 \Rightarrow x = -20 \text{ m}$$





یادآوری در هر دوره نوسانگر مسافتی چهار برابر دامنه ($4A$) را طی می‌کند و در نیم دوره مسافت $2A$ را طی می‌کند.

۲ مسافت طی شده توسط نوسانگر را حساب می‌کنیم.

$$\ell = 4A + 4A + 2A \Rightarrow \ell = 10A \xrightarrow{A = 0.04 \text{ m}} \ell = 10 \times 0.04 \\ \Rightarrow \ell = 0.4 \text{ m} \Rightarrow \ell = \frac{2}{5} \text{ m}$$

B ۲۱۶۰ ۳

۱ انرژی الکترون در تراز سوم ($n=3$) را حساب می‌کنیم.

$$E_n = -\frac{E_R}{n^2} \quad E_R = 13.6 \text{ eV} \Rightarrow E_3 = -\frac{13.6}{3^2} \Rightarrow E_3 = -\frac{13.6}{9} \text{ eV}$$

۲ اختلاف انرژی تراز سوم و تراز پایه را به دست می‌آوریم.

$$E_3 - E_1 = -\frac{13.6}{9} - (-13.6) \Rightarrow \Delta E = \frac{13.6}{9} \times 8 \text{ eV}$$

۳ اختلاف انرژی دو تراز به صورت یک فوتون الکترومغناطیسی گسیل می‌شود بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta E = hf \xrightarrow{h = 4 \times 10^{-15} \text{ eV.s}} \frac{13.6}{9} \times 8 = 4 \times 10^{-15} f \\ \Rightarrow f \sim \frac{3}{0.222 \times 10^{-15}} \text{ Hz} \Rightarrow f = 30.22 / 2 \text{ THz}$$

B ۲۱۶۱ ۲

خط فکری نیروهای وارد بر صندوق را رسم می‌کنیم و به کمک قانون دوم نیوتون، شتاب حرکت را حساب کرده و جابه‌جایی صندوق در مدت 2 s را با استفاده از فرمول‌های حرکت‌شناسی به دست می‌آوریم و سرانجام کار نیروی F ($W = Fd$) را حساب می‌کنیم.

۱ نیروی اصطکاک را حساب می‌کنیم.

$$f_k = \mu_k F_N \xrightarrow{\mu_k = 0.4} f_k = 0.4 \times 500 = 200 \text{ N}$$

۲ بنا به قانون دوم نیوتون:

$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow F - f_k = ma \Rightarrow 220 - 200 = 50a \Rightarrow a = 0.4 \text{ m/s}^2$$

۳ جابه‌جایی متحرک در مدت 2 s خواهد شد:

$$\Delta x = d = \frac{1}{2} at^2 \Rightarrow d = \frac{1}{2} \times 0.4 \times 2^2 \Rightarrow d = 0.8 \text{ m}$$

۴ کار نیروی F را به دست می‌آوریم.

$$W = Fd \Rightarrow W = 220 \times 0.8 \Rightarrow W = 176 \text{ J}$$

