ضمیمه ۱ – کاربرد ریاضی در فیزیک
درسنامه (بخش اول) ۱
پرسش‌های چهارگزینه‌ای (بخش اول) ۴
درسنامه (بخش دوم) ۷
پرسش‌های چهارگزینه‌ای (بخش دوم) ۹
پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۲
ضمیمه ۲ – کاربرد مشتق در حرکت‌شناسی
درسنامه ۱۸
پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۲۰
پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۲۲
پاسخ کنکور ۱۴۰۱ ..... ۲۵

ضمیمه ۱ کاربرد ریاضی در فیزیک

بخش اول: مفاهیم اولیه بردار

هر شخصی در درک مسائل فیزیک به ریاضیات برداری نیاز مبرم دارد. از طرفی باید با نوع کمیت فیزیکی که با آن سروکار دارد نیز آشنا باشد.

کمیت برداری

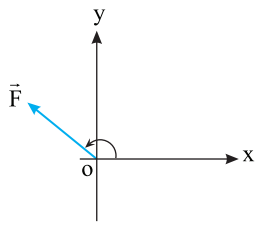
تعریف **کمیتی که علاوه بر بزرگی، دارای جهت (راستا و سو) است و از قاعده‌های جمع برداری پیروی می‌کند را کمیت برداری گویند.**

مانند مکان، جابه‌جایی، سرعت، شتاب، نیرو، میدان گرانشی، میدان الکتریکی و . . . . یک کمیت برداری را با نمادی مانند $\vec{F}$ نمایش می‌دهند.

بزرگی یا اندازهٔ بردار

بزرگی هر بردار یک عدد مثبت است که بیانگر اندازهٔ (مقدار) آن کمیت برداری است. هرگاه یک کمیت برداری را با یک پیکان نمایش دهیم، بزرگی کمیت برداری، متناسب با طول پیکان است. بزرگی یک بردار مانند $\vec{F}$ را با یکی از نمادهای F یا $|\vec{F}|$ نمایش می‌دهند.

جهت بردار



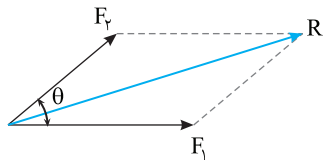
جهت هر بردار دارای دو مشخصه است: راستا و سو

هر راستای معین دارای دو سوی مخالف است. برای نمونه برداری که در امتداد شمال و جنوب است دارای دو سو، یکی رو به شمال و دیگری رو به جنوب است.

برای بیان جهت یک بردار که در صفحهٔ xoy واقع است، قرارداد زیر را به کار می‌بریم:

«جهت هر بردار، زاویه‌ای است که آن بردار با جهت مثبت محور ox، در سوی مثلثاتی (پادساعتگرد) می‌سازد.»

برایند دو بردار



بردار برایند دو بردار، قطر متوازی‌الاضلاعی است که بر دو بردار ساخته می‌شود. اگر زاویهٔ بین دو بردار را θ بنامیم، آن‌گاه:

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\theta$$

چنان‌چه $F_1 = F_2$ باشد:

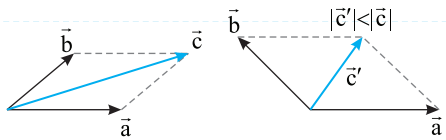
$$R^2 = F_1^2 + F_1^2 + 2F_1^2\cos\theta \Rightarrow R^2 = 2F_1^2(1+\cos\theta)$$

$$R^2 = 2F_1^2\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow R = 2F_1\cos\frac{\theta}{2}$$

پرسش

اگر زاویهٔ بین دو بردار افزایش یابد، بزرگی برایند آن‌ها چه تغییری می‌کند؟

پاسخ همواره کاهش می‌یابد (به شکل‌های روبه‌رو دقت کنید).



پرسش

برایند دو بردار در چه صورتی صفر می‌شود؟

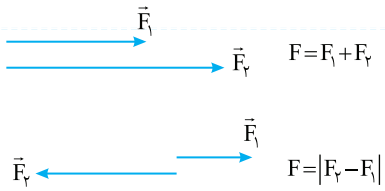
پاسخ در صورتی که بزرگی آن دو برابر و در خلاف جهت هم باشند.

نتیجه برایند دو بردار که با هم زاویه‌ای غیر از ۱۸۰ درجه بسازند، هرگز صفر نمی‌شود.

پرسش

بزرگی برایند دو بردار در چه صورتی بیشینه و در چه صورتی کمینه است؟

پاسخ بزرگی برایند دو بردار در صورتی بیشینه است که دو بردار هم‌جهت باشند و در صورتی کمینه است که دو بردار در خلاف جهت هم باشند.



نتیجه بزرگی برایند دو بردار بین مقدارهای روبه‌رو است: $|F_1-F_2|\le R\le F_1+F_2$

تست ۱ بزرگی دو بردار ۴ واحد و ۳ واحد است. بزرگی برایند آن دو چند واحد می‌تواند باشد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۲ ۴) هر سه گزینه درست هستند.

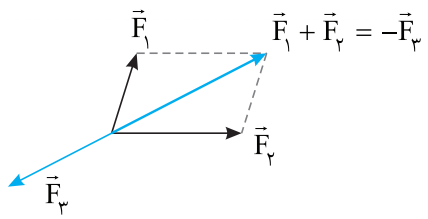
پاسخ هر سه مقدار، بین $|۴-۳|\le R\le ۳+۴$ است، بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

پرسش

در چه صورتی برایند سه بردار صفر می‌شود؟

پاسخ هرگاه بزرگی هر یک از آن‌ها، برابر بزرگی برایند دو بردار دیگر و در خلاف جهت آن باشد.

$$\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=0\Rightarrow\vec{F}_1+\vec{F}_2=-\vec{F}_3$$

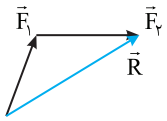


نتیجه برایند n بردار در صورتی صفر می‌شود که برایند n−۱ بردار دلخواه از آن‌ها هم‌اندازهٔ بردار nام و در خلاف جهت آن باشد.

برایند بردارها به روش مثلث (روش چندضلعی)

در این روش هر بردار از انتهای بردار قبلی رسم می‌شود. بردار R که در شکل رنگی نشان داده شده، بردار برایند است.

$$\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$$



نتیجه هرگاه برایند سه بردار صفر شود، تشکیل یک مثلث می‌دهند و بزرگی هر یک از بردارها از مجموع بزرگی دو بردار دیگر کمتر و از تفاضل بزرگی آن دو بیشتر است.

تست ۲ متحرکی جابه‌جایی‌های ۳m، ۴m و ۹m را انجام داده است. کدام گزینه نمی‌تواند برایند این سه بردار جابه‌جایی باشد؟

۱) ۱۲ ۲) ۱ ۳) ۱۰ ۴) ۸

پاسخ بیشینه بزرگی برایند سه بردار وقتی به‌دست می‌آید که آن سه بردار هم جهت باشند: $d_{max}=۹+۴+۳=۱۶$: این سه بردار تشکیل مثلث نمی‌دهند، پس کمینه بزرگی برایند آن‌ها نمی‌تواند صفر شود، بلکه کمینه بزرگی برایند این سه بردار در حالتی است که بردارهای به طول ۳ و ۴ هم‌جهت و در خلاف جهت بردار به طول ۹ باشد. $d_{min}=۹-(۴+۳)=۲$ در این‌صورت $۲\le d\le ۱۶$ است و بردار به طول ۱، در گزینهٔ (۲) نمی‌تواند برایند این سه بردار باشد.
بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

تست ۳ کمینه و بیشینهٔ جابه‌جایی متحرکی که جابه‌جایی‌ها به اندازهٔ ۴m، ۹m و ۶m انجام داده است چند متر می‌باشد؟

۱) ۱۹ و ۱ ۲) ۱۹ و صفر ۳) ۱ و صفر ۴) ۱۷ و ۷

پاسخ بیشینهٔ اندازهٔ برایند سه بردار وقتی است که سه بردار هم‌جهت باشند. $R_{max}=۶+۹+۴=۱۹$

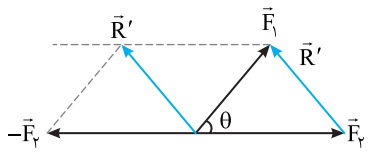
کمینهٔ اندازهٔ برایند این سه بردار برابر صفر است زیرا می‌توانند تشکیل یک مثلث دهند و در شرط مثلث صدق می‌کنند. $R_{min}=۰$

بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

تفاضل دو بردار

تفاضل دو بردار در حل بسیاری از مسائل فیزیک کاربرد دارد. به طور مثال در به‌دست آوردن تغییر مکان برای سرعت متوسط، تغییر سرعت برای شتاب متوسط و . . . . دانستن تفاضل دو بردار بسیار مهم است.

برایند یک بردار با قرینهٔ بردار دیگر را تفاضل دو بردار گویند. $\vec{R}'=\vec{F}_1-\vec{F}_2=\vec{F}_1+(-\vec{F}_2)$



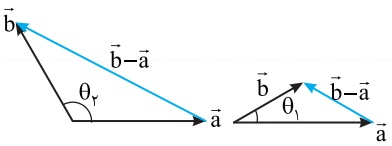
با توجه به شکل روبه‌رو، می‌توان ابتدا قرینهٔ $\vec{F}_2$ را به‌دست آورد و سپس برایند آن را با $\vec{F}_1$ رسم کرد و یا کافی است از انتهای $\vec{F}_2$ برداری به انتهای $\vec{F}_1$ رسم کرد. $R'^2=F_1^2+F_2^2-2F_1F_2\cos\theta$

تذکر اگر $F_1=F_2$ باشد می‌توان ثابت کرد: $R'=2F\sin\frac{\theta}{2}$

پرسش

اگر زاویهٔ بین دو بردار افزایش یابد، بزرگی تفاضل آن‌ها چه تغییری می‌کند؟

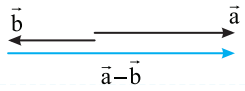
پاسخ همواره افزایش می‌یابد. (با توجه به شکل، وقتی $\theta_2>\theta_1$، تفاضل دو بردار بزرگ‌تر است.)



پرسش

بزرگی تفاضل دو بردار در چه حالتی بیشینه می‌شود؟

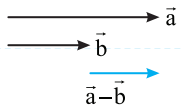
پاسخ وقتی دو بردار در خلاف جهت هم باشند. $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$



پرسش

بزرگی تفاضل دو بردار در چه حالتی کمینه می‌شود؟

پاسخ وقتی دو بردار هم‌جهت باشند. $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$

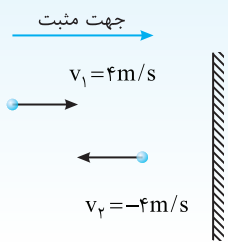


نتیجه بزرگی تفاضل دو بردار، بین مجموع بزرگی آن‌ها و تفاضل بزرگی آن‌ها است. $|F_1-F_2|\le R'\le F_1+F_2$

تست ٤ گلوله‌ای با سرعت افقی $4\,m/s$ به مانع سختی برخورد کرده و با همان سرعت و در همان راستا باز می‌گردد. بزرگی تغییر سرعت آن چند متر بر ثانیه است؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۶

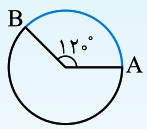
پاسخ این تست ساده، مفهوم جهت بردار را کاملاً مشخص می‌کند. در شکل روبه‌رو، ابتدا یک جهت را به عنوان جهت مثبت در نظر می‌گیریم، مثلاً جهت برخورد. در این‌صورت بازگشت گلوله در جهت منفی است، بنابراین: $|\Delta\vec{v}|=|-4-4|=8\,m/s$



فراموش نکنید گزینهٔ (۱) قطعاً نادرست است. بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

کاربرد تفاضل بردارها در حل مسائل فیزیک

تست ٥ متحرکی با اندازه سرعت ثابت $10\,m/s$ مطابق شکل، کمان AB را طی می‌کند. تغییر بردار سرعت آن چند متر بر ثانیه است؟



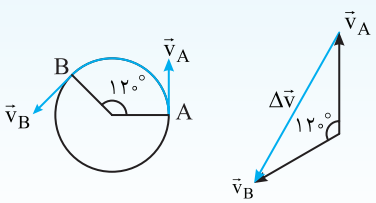
۱) صفر ۲) ۱۰
۳) $10\sqrt{3}$ ۴) ۵

پاسخ می‌دانیم بردار سرعت در هر حرکتی در هر نقطه، بر مسیر حرکت مماس است. بردارهای سرعت در نقطهٔ A و B را رسم کرده و سپس بردارهای $\vec{v}_A$ و $\vec{v}_B$ را از یک نقطه رسم می‌کنیم.

$\Delta\vec{v}=\vec{v}_B-\vec{v}_A$

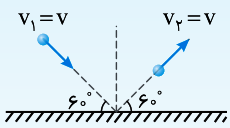
چون $v_A=v_B$ است، بزرگی تغییر بردار سرعت برابر است با:

$\Delta v=2v\sin\frac{\theta}{2}\Rightarrow\Delta v=2\times10\sin\frac{120^\circ}{2}\Rightarrow\Delta v=10\sqrt{3}\,m/s$



بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

تست ۶ مطابق شکل روبه‌رو، ذره‌ای با سرعت $5m/s$ به مانع سختی برخورد کرده و با همان سرعت برمی‌گردد. تغییر سرعت آن چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۵
۲) $5\sqrt{3}$
۳) صفر
۴) ۲/۵

پاسخ ابتدا بردارهای $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ را یک نقطه رسم می‌کنیم. دقت کنید زاویهٔ بین دو بردار ۱۲۰° است.

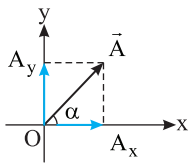
$$\Delta v=2v\sin\frac{\theta}{2}\Rightarrow\Delta v=2\times5\times\sin 60^\circ\Rightarrow\Delta v=5\sqrt{3}m/s$$

بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

تجزیهٔ یک بردار به دو مؤلفهٔ عمود بر هم

می‌توان هر بردار دلخواه مانند $\vec{A}$ را به دو مؤلفهٔ عمود بر هم تجزیه کرد.

A_x و A_y را مؤلفه‌های (همنه‌های) بردار $\vec{A}$ می‌نامند و زاویهٔ بین بردار و محور طول‌ها (x ها) جهت بردار را نشان می‌دهد، این زاویه را با حرف α نشان داده‌ایم. روابط زیر بین A، A_x، A_y و α برقرار است:



$$A=\sqrt{A_x^2+A_y^2}\quad,\quad\tan\alpha=\frac{A_y}{A_x}$$

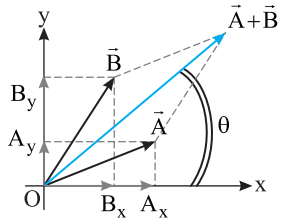
$$A_x=A\cos\alpha\quad,\quad A_y=A\sin\alpha$$

A_x و A_y عدد هستند و برای آنکه بردار $\vec{A}$ را با مؤلفه‌های آن نمایش دهند در امتداد هر یک از محورهای مختصات یک بردار با طول واحد به نام **بردار یکه** اختیار می‌کنند. بردار یکهٔ محور x ها را با $\vec{i}$، بردار یکهٔ محور y ها را با $\vec{j}$ و بردار یکهٔ محور z ها را با $\vec{k}$ نمایش می‌دهند.

در این‌صورت برای نمایش بردار در صفحهٔ xoy خواهیم داشت: $\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}$

برایند و تفاضل دو بردار بر حسب مؤلفه‌ها

ابتدا مؤلفه‌های دو بردار را در امتداد محور x ها و y ها به‌دست می‌آوریم. در این‌صورت می‌توان روابط زیر را نوشت:



$$\vec{A}+\vec{B}=(A_x+B_x)\vec{i}+(A_y+B_y)\vec{j}$$

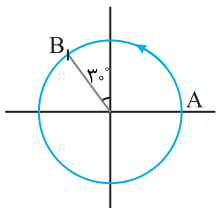
$$\vec{A}-\vec{B}=(A_x-B_x)\vec{i}+(A_y-B_y)\vec{j}$$

$$\tan\theta=\frac{A_y+B_y+\ldots}{A_x+B_x+\ldots}$$

در این رابطه θ زاویهٔ بین بردار برایند و جهت مثبت محور طول‌ها است. در شکل بردار برایند با رنگ آبی نشان داده شده است.

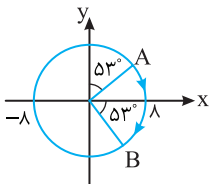
بخش اول
پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- متحرکی کمان AB را طی کرده است. مسافت طی‌شده توسط متحرک چند برابر جابه‌جایی آن می‌باشد؟



۱) ۱
۲) ۳
۳) $\sqrt{3}\pi$
۴) $\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$

۲- در شکل مقابل متحرک کمان A تا B را طی کرده است. بردار جابه‌جایی آن کدام گزینه است؟ (شعاع دایرهٔ مسیر ۸ متر و $\sin 53^\circ=0/8$ است.)



۱) $1/6\vec{i}+11/2\vec{j}$
۲) $-1/6\vec{i}-1/6\vec{j}$
۳) $-1/6\vec{i}-11/2\vec{j}$
۴) $1/6\vec{i}+1/6\vec{j}$

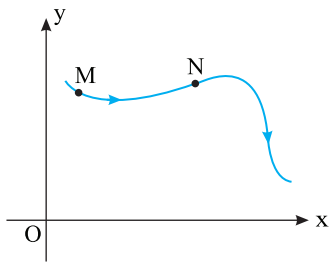
۳- متحرکی در صفحهٔ مختصات xoy ، در مدت ۵ ثانیه از نقطهٔ $A(8,0)$ به نقطهٔ $B(0,8)$ می‌رود. مؤلفهٔ سرعت متوسط آن روی محور ox چند متر بر ثانیه است؟

۱) $-1/6\sqrt{2}$ ۲) $-1/6$ ۳) $1/6\sqrt{2}$ ۴) $1/6$

۴- متحرکی با سرعت ثابت $8m/s$ روی خط $\sqrt{3}y = x - 9$ حرکت می‌کند. جابه‌جایی متحرک در مدت $5s$ در امتداد محور xها چند متر است؟

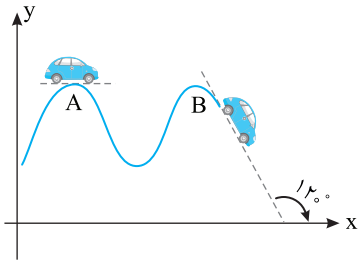
۱) $20\sqrt{3}$ ۲) $10\sqrt{3}$ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰

۵- در شکل روبه‌رو مسیر حرکت جسمی که در صفحهٔ افقی xoy در حرکت است، رسم شده است. کدام گزینه جهت تقریبی بردار شتاب متوسط جسم بین دو لحظهٔ گذر از نقاط M و N را درست نشان می‌دهد؟



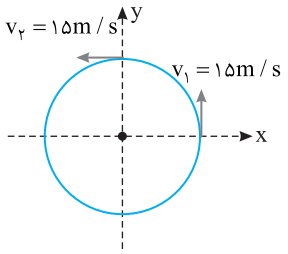
۱) $\rightarrow$
۲) $\swarrow$
۳) $\nearrow$
۴) $\downarrow$

۶- یک خودرو با سرعتی به بزرگی $5m/s$ در مدت $4s$ ، از نقطهٔ A به نقطهٔ B می‌رود. شتاب متوسط آن چند متر بر مجذور ثانیه است؟



۱) ۲/۵
۲) $5\sqrt{3}$
۳) صفر
۴) ۱/۲۵

۷- ذره‌ای مطابق شکل، در صفحهٔ xy ، روی مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند. در لحظه‌های $t_1 = 3s$ و $t_2 = 8s$ ، بردار سرعت ذره مطابق شکل، به‌ترتیب برابر $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ می‌باشد. بردار شتاب متوسط این ذره در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 ، در SI کدام است؟



۱) $3\vec{i} - 4\vec{j}$ ۲) $3\sqrt{2}\,\vec{i} - 3\vec{j}$
۳) $-3\vec{i} - 3\vec{j}$ ۴) $-3\vec{i} - 4\vec{j}$

۸- متحرکی در صفحه حرکت می‌کند و بردار مکان آن در SI به صورت $\vec{r} = 30t\,\vec{i} + 20t^2\vec{j}$ است. بردار سرعت متوسط آن در فاصلهٔ زمانی $t_1 = 0$ و $t_2 = 2s$ ، کدام است؟ سراسری خارج از کشور تجربی - ۹۴

۱) $30\vec{i} + 40\vec{j}$ ۲) $30\vec{i} + 80\vec{j}$ ۳) $60\vec{i} + 40\vec{j}$ ۴) $60\vec{i} + 80\vec{j}$

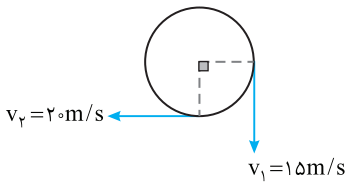
۹- بردار مکان متحرک M در لحظهٔ $t = 0$ به صورت $\vec{r} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$ و در لحظهٔ $t = 4s$ به صورت $\vec{r}_2 = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$ و بردار سرعت متوسط در این فاصله به صورت $\vec{v}_{av} = \vec{i} - 2\vec{j}$ است. حاصل $\frac{\alpha}{\beta}$ کدام است؟ سراسری

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۰- در جابه‌جایی از مکان $\vec{r}_1 = \vec{i} + 2\vec{j}$ به مکان $\vec{r}_2 = -3\vec{i} + 6\vec{j}$ (در SI) سرعت متوسط متحرک $\bar{\vec{v}} = -\vec{i} + \vec{j}$ است. زمان این جابه‌جایی چند ثانیه است؟ سراسری تجربی - ۸۴

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۱- ذره‌ای روی دایره‌ای به شعاع R حرکت می‌کند. سرعت آن در شکل در دو لحظهٔ $t_1 = 2s$ و $t_2 = 6s$ به وسیلهٔ بردارهای v_1 و v_2 نشان داده شده است. اندازهٔ شتاب متوسط متحرک بین این دو لحظه چند متر بر مجذور ثانیه است؟

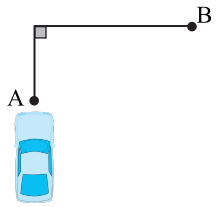


۱) ۶/۲۵ ۲) ۲/۵
۳) ۱/۲۵ ۴) ۸/۷۵

۱۲- متحرکی روی خط $y=\sqrt{3}x$ با سرعت ثابت $100m/s$ حرکت می‌کند. پس از چند ثانیه، متحرک ۵۰۰ متر روی محور x ها جابه‌جا می‌شود؟

۱) $\frac{5}{\sqrt{3}}$ ۲) ۱۰ ۳) ۵ ۴) $\frac{50}{3}$

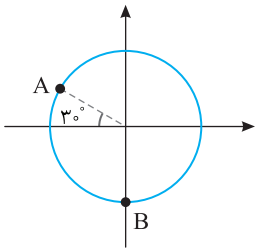
۱۳- اتومبیلی در مسیر نشان داده شده از A تا B حرکت می‌کند و اندازهٔ سرعت آن در تمام این مدت $20m/s$ است. اگر حرکت از A تا B در مدت ۴۰ ثانیه انجام شود، اندازهٔ شتاب متوسط آن در این مدت چند متر بر مجذور ثانیه است؟



۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۳) $2\sqrt{2}$ ۴) صفر

۱۴- اگر متحرک در مدت $10s$ در جهت ساعتگرد از A به B برود و بزرگی سرعت در طول مسیر $3m/s$ باشد، اندازهٔ شتاب متوسط در این مدت چند متر بر مجذور ثانیه است؟

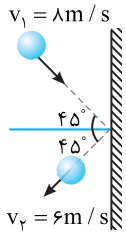


۱) $\frac{3}{10}$ ۲) $\frac{3\sqrt{3}}{10}$

۳) ۰/۶ ۴) $3\sqrt{3}$

تست‌های زیر مربوط به مفهوم تکانه است که در فصل دینامیک با آن آشنا شدید.

۱۵- در شکل روبه‌رو، گلوله‌ای به جرم ۲۰۰g به مانع برخورد کرده و از آن برمی‌گردد، تغییر تکانهٔ جسم چند کیلوگرم متر بر ثانیه است؟



۱) ۰/۴
۲) ۲
۳) ۰/۶
۴) ۲/۸

۱۶- ذره‌ای به جرم m و با سرعت v بر مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند. تغییر تکانهٔ آن در مدت $\frac{1}{3}T$ کدام است؟ (T دورهٔ چرخش ذره است.)

۱) mv ۲) 2mv ۳) $\sqrt{3}mv$ ۴) صفر

۱۷- ذره‌ای به جرم m با تندی ثابت v روی دایره‌ای می‌گردد. در مدت $\frac{T}{4}$، میزان تغییر تکانه چند برابر mv است؟

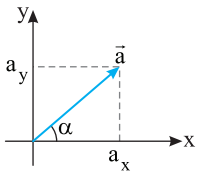
۱) صفر ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) ۲

۱۸- ذره‌ای به جرم m، بر مسیر دایره‌ای با شعاع r و با تندی v حرکت کرده و کمان ۹۰° را طی می‌کند، تغییر نیروی مرکزگرای وارد بر ذره برابر است با:

۱) صفر ۲) $m\frac{v^2}{r}$ ۳) $\sqrt{2}m\frac{v^2}{r}$ ۴) $\sqrt{3}m\frac{v^2}{r}$

ضمیمه ۱ کاربرد ریاضی در فیزیک

بخش دوم: کاربرد بردار در فیزیک



در ریاضیات پایهٔ هشتم و در فیزیک پایهٔ دهم، با بردار و تجزیهٔ آن به دو بردار عمود بر هم روی محور xها و محور yها آشنا شدید و فرا گرفتید که یک بردار را مطابق شکل بر حسب مؤلفه‌هایش می‌توان به صورت زیر نوشت:

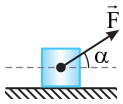
$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$$

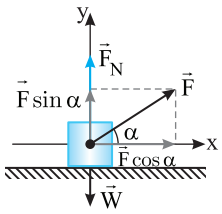
$$a_x = a\cos\alpha \,,\, a_y = a\sin\alpha$$

اکنون می‌خواهیم مسائل ساده‌ای در فیزیک را با این ریاضیات حل کنیم.

در قسمت‌های زیر نیروی عمودی سطح را حساب می‌کنیم.

الف) جسم تحت تأثیر نیروی غیرافقی F کشیده می‌شود:

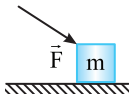




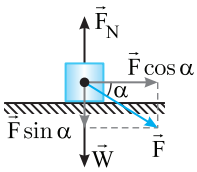
ابتدا نیروی F را در امتداد افق و راستای قائم تجزیه کرده، سپس برایند نیروها را روی محور y ها مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$F_{net_y} = 0 \Rightarrow F_N + F\sin\alpha = W \Rightarrow F_N = mg - F\sin\alpha$$

ب) جسم تحت تأثیر نیروی غیرافقی F هُل داده می‌شود:



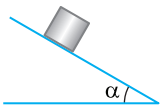
هم‌سنگ نیروی F را از مرکز جرم جسم (گرانیگاه جسم) رسم می‌کنیم.

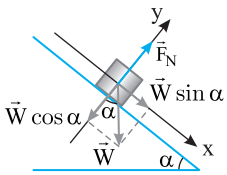


$$F_{net_y} = 0 \Rightarrow F_N = mg + F\sin\alpha$$

پ) جسم روی سطح شیب‌دار:

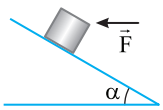
برای یافتن نیروی عمودی سطح، ابتدا نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده و آن‌ها را روی محور x و y مطابق شکل روبه‌رو تجزیه می‌کنیم. برایند نیروها را روی محور y ها برابر صفر قرار می‌دهیم.



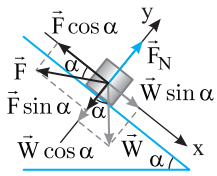


$$F_{net_y} = 0 \Rightarrow F_N = W\cos\alpha$$

ت) بر جسم روی سطح شیب‌دار نیروی افقی F وارد می‌شود:

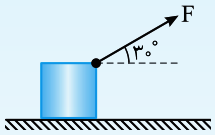


دقت کنید که ابتدا باید محور x و محور y را مشخص کرده و نیروهای وارد بر جسم که در امتداد محور y ها مؤلفه دارند رسم کنیم. محور x موازی سطح شیب‌دار و محور y عمود بر سطح شیب‌دار انتخاب می‌شود.



$$F_{net_y} = 0 \Rightarrow F_N = W\cos\alpha + F\sin\alpha$$

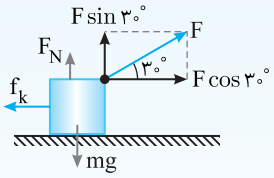
تست ۱ در شکل روبه‌رو نیروی ثابت F جسمی به جرم ۱۵kg را روی سطح افقی با سرعت ثابت روی خط راست جابه‌جا می‌کند. اگر ضریب اصطکاک جنبشی با سطح $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ باشد، نیروی F چند نیوتون است؟



کنکور دهه‌های گذشته

۱) ۵۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۵۰ ۴) ۷۵

پاسخ نیروهای وارد بر جسم هم‌راستا نیستند، بنابراین همهٔ نیروها را به دو مؤلفهٔ افقی و قائم تجزیه می‌کنیم.



$$F_{net_y}=۰$$

$$F_N+F\sin ۳۰^\circ-mg=۰$$

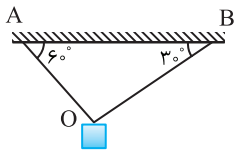
$$F_N=mg-F\sin ۳۰^\circ \Rightarrow F_N=۱۵۰-\frac{F}{۲}$$

سرعت جسم در راستای افقی ثابت است $(a=۰)$:

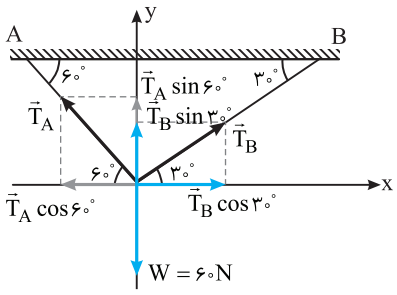
$$F_{net_x}=۰\Rightarrow F\cos ۳۰^\circ-f_k=۰\Rightarrow F\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\mu_k F_N=۰\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}F-\frac{\sqrt{۳}}{۲}(۱۵۰-\frac{F}{۲})=۰\Rightarrow F-۱۵۰+\frac{F}{۲}=۰\Rightarrow F=۱۰۰N$$

بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

مسأله ۱ در شکل روبه‌رو، وزنهٔ ۶۰ نیوتونی که از دو ریسمان OA و OB با جرم ناچیز آویزان است، در تعادل است. کشش نخ‌های OA و OB را بیابید.



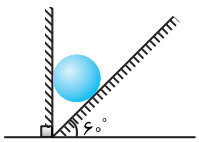
راه‌حل ابتدا نیروهای وارد بر وزنه را رسم می‌کنیم. چون جسم در تعادل است، برایند نیروهای وارد بر آن صفر است، بنابراین مجموع مؤلفه‌ها روی هر محور مختصات صفر خواهد بود.



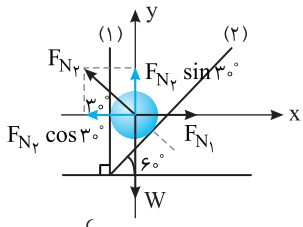
$$F_{net}=۰\Rightarrow\begin{cases}F_{net,x}=۰\Rightarrow T_A\cos ۶۰^\circ=T_B\cos ۳۰^\circ\\ F_{net,y}=۰\Rightarrow W=T_A\sin ۶۰^\circ+T_B\sin ۳۰^\circ\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}T_A=\sqrt{۳}\,T_B\\ \frac{\sqrt{۳}}{۲}T_A+\frac{۱}{۲}T_B=۶۰\end{cases}\Rightarrow T_A=۳۰\sqrt{۳}\,N\ ,\ T_B=۳۰\,N$$

مسأله ۲ یک گوی به وزن ۱۰۰N درون ناوه‌ای قرار دارد. نیرویی که گوی بر هر سطح وارد می‌کند چند نیوتون است؟ (سطوح بدون اصطکاک هستند.)



راه‌حل نمودار نیروهای وارد بر گوی را رسم می‌کنیم. به یاد داشته باشیم همواره سطح بدون اصطکاک، تنها نیرویی عمودی بر سطح (F_N) را بر جسم وارد می‌کند. از طرفی طبق قانون سوم نیوتون، نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند برابر همان نیرویی است که جسم بر سطح وارد می‌کند.

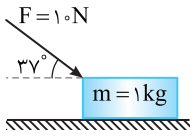


$$F_{net}=۰\Rightarrow\begin{cases}F_{net,x}=۰\Rightarrow F_{N_1}=F_{N_2}\cos ۳۰^\circ\\ F_{net,y}=۰\Rightarrow W=F_{N_2}\sin ۳۰^\circ\Rightarrow ۱۰۰=F_{N_2}\times\frac{۱}{۲}\Rightarrow F_{N_2}=۲۰۰N\end{cases}\ ,\ F_{N_1}=۲۰۰\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۱۰۰\sqrt{۳}\,N$$

شما این مسأله را به کمک قانون سینوس‌ها حل کنید.

بخش دوم
پرسش‌های چهارگزینه‌ای

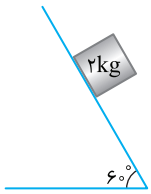
۱۹- در شکل روبه‌رو، نیروی عمودی سطح وارد بر جسم برابر چند نیوتون است؟



$(\sin 37^\circ = 0/6\ ,\ g = 10\,N/kg)$

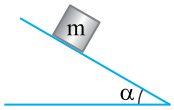
۱) ۱۲ ۲) ۱۴
۳) ۱۶ ۴) ۴

۲۰- نیروی عمودی تکیه‌گاه وارد شده از طرف سطح بر جسم ۲kg برابر چند نیوتون است؟



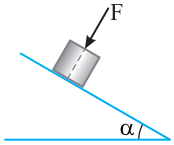
۱) ۵ ۲) ۱۰
۳) ۱۵ ۴) ۲۰

۲۱- در شکل روبه‌رو با افزایش α نیروی عمودی سطح چگونه تغییر می‌کند؟



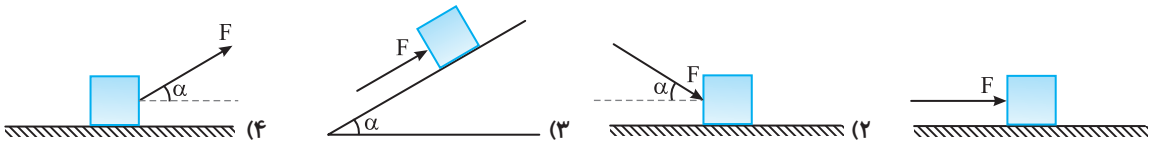
۱) تغییری نمی‌کند.
۲) افزایش می‌یابد.
۳) کاهش می‌یابد.
۴) ابتدا افزایش و سپس کاهش

۲۲- در شکل روبه‌رو نیروی عمودی سطح برابر نیروی وزن است. F برابر کدام گزینه می‌باشد؟



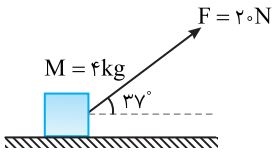
۱) mg ۲) $mg\sin\alpha$
۳) $mg(1-\cos\alpha)$ ۴) $mg(1-\sin\alpha)$

۲۳- مطابق شکل، بر جسمی در ۴ حالت، نیروی F با اندازهٔ یکسان وارد می‌شود و جسم در حرکت است هرگاه ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح در تمام حالات یکسان باشد، نیروی اصطکاک در برابر حرکت در کدام حالت بیشترین مقدار را دارد؟



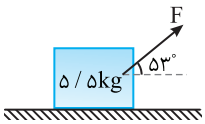
۱) ۲) ۳) ۴)

۲۴- در شکل روبه‌رو، اگر شتاب حرکت برابر $2/25\,m/s^2$ باشد، ضریب اصطکاک جنبشی بین وزنه و سطح افقی کدام است؟ $(g = 10\,N/kg\ ,\ \cos 37^\circ = 0/8)$



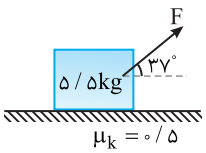
۱) ۰/۵ ۲) ۰/۳۳
۳) ۰/۲۵ ۴) ۰/۲

۲۵- در شکل مقابل، F را به تدریج زیاد می‌کنیم، وقتی به ۲۰ نیوتون رسید وزنه روی سطح افقی شروع به حرکت می‌کند. ضریب اصطکاک ایستایی چقدر است؟ $(\cos 53^\circ = 0/6\ ,\ g = 10\,m/s^2)$



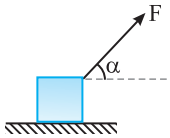
۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$
۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{5}$

۲۶- در شکل زیر جسم با سرعت ثابت در سطح افقی در حال حرکت است. اگر نیروی F دو برابر شود، نیروی اصطکاک جنبشی چند برابر می‌شود؟ $(\sin 37^\circ = 0/6, g = 10\,m/s^2)$ تجربی - ۹۵



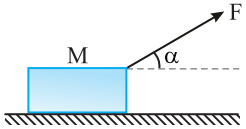
۱) $\frac{3}{8}$ ۲) $\frac{5}{8}$
۳) ۱ ۴) ۲

۲۷- در شکل روبه‌رو، برای این‌که بتوانیم با حداقل مقدار نیروی F، جسم را روی سطح افقی به آستانهٔ حرکت در بیاوریم، زاویهٔ α چقدر باید باشد؟ $(\mu_s = \frac{۳}{۴}\ ,\ g = ۱۰ m/s^۲)$



۱) $\sin\alpha = \frac{۳}{۴}$
۲) $\tan\alpha = \frac{۳}{۴}$
۳) $\cot\alpha = \frac{۳}{۴}$
۴) $\cos\alpha = \frac{۳}{۴}$

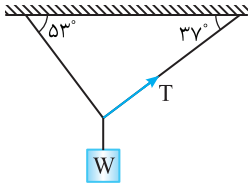
۲۸- مطابق شکل روبه‌رو، به جسمی به جرم M که روی سطح افقی بدون اصطکاکی قرار دارد، نیروی F وارد می‌شود. اگر راستای F ثابت بماند و اندازهٔ آن به تدریج افزایش یابد، کمترین مقدار F چقدر باید باشد تا وزنه از روی سطح بلند شود؟



۱) $\frac{mg}{\sin\alpha}$
۲) $\frac{mg}{\cos\alpha}$
۳) $mg\cos\alpha$
۴) $mg\sin\alpha$

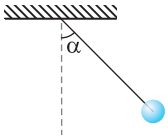
کاربرد ریاضی در فیزیک در حل مسائل تعادل

۲۹- در شکل مقابل جرم نخ‌ها ناچیز است. اگر $T = ۶N$ باشد، W چند نیوتون است؟ سراسری ریاضی - ۸۹
$(\cos ۳۷^\circ = ۰/۸)$



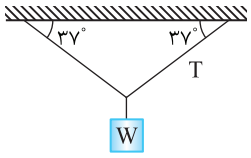
۱) ۸
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۱۴

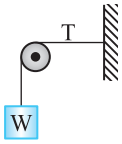
۳۰- در شکل روبه‌رو، گلوله‌ای از یک ریسمان آویزان و مطابق شکل در حال تعادل است. حداقل چند نیرو به آن وارد می‌شود؟ سراسری ریاضی - ۸۹

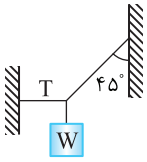


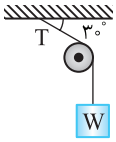
۱) ۴
۲) ۲
۳) ۳
۴) نمی‌توان گفت

۳۱- در کدام‌یک از شکل‌های زیر، نیروی کشش نخ T کوچک‌تر از نیروی وزن W است؟ (جرم نخ، قرقره و اصطکاک ناچیز است.)

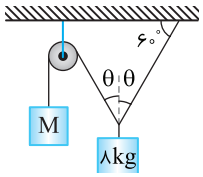
۱)


۲)


۳)


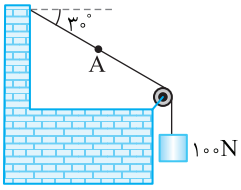
۴)


۳۲- در شکل روبه‌رو دستگاه در حال تعادل است. جرم M چند کیلوگرم است؟ $(g = ۱۰ N/kg)$



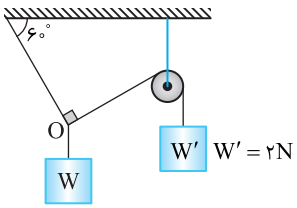
۱) ۸
۲) $۴\sqrt{۳}$
۳) $۴\frac{\sqrt{۳}}{۳}$
۴) $۸\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۳۳- دستگاه مقابل در حال تعادل است. نیروی کشش نخ در نقطهٔ A چند نیوتون است؟ (جرم نخ و اصطکاک ناچیز است.)



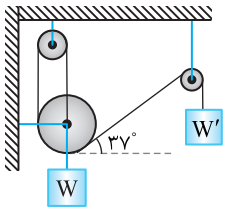
۱) ۵۰
۲) ۱۰۰
۳) ۱۵۰
۴) ۲۰۰

۳۴- در شکل روبه‌رو، وزنه‌ها در حال تعادل‌اند. W چند نیوتون است؟ (جرم قرقره و نخ‌ها و اصطکاک بین آن‌ها ناچیز است.) سراسری خارج از کشور ریاضی - ۸۸



۱) ۴
۲) $۲\sqrt{۳}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

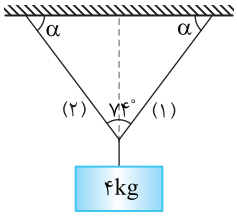
۳۵- در شکل روبه‌رو دستگاه در تعادل است، $\frac{W}{W'}$ کدام است؟ (جنس نخ‌ها یکسان است.)



۱) ۲
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۲/۶
۴) ۳

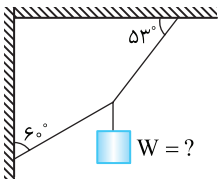
۳۶- اگر در شکل مقابل طول نخ‌های ۱ و ۲ با هم برابر باشند، نیروی کشش هر کدام چند نیوتون است؟ $(g=۱۰m/s^۲ , \cos ۳۷^\circ=۰/۸)$

سراسری خارج از کشور ریاضی- ۸۵



۱) ۲۰
۲) ۲۵
۳) ۳۰
۴) ۳۵

۳۷- در شکل روبه‌رو بیشینه نیروی کشش قابل تحمل هر نخ ۸۵N است. بیشینه وزن جسم متصل به نخ‌ها چند نیوتون می‌تواند باشد تا هیچ یک از نخ‌ها پاره نشود؟ $(\cos ۳۰^\circ \approx ۰/۸۵ \ , \ \sin ۵۳^\circ=۰/۸)$

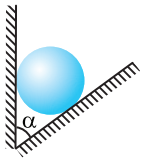


۱) ۴۰
۲) ۵۵
۳) ۳۸
۴) ۶۵

۳۸- در شکل روبه‌رو، وزن کُرهٔ همگن ۸۰ نیوتون و α برابر ۵۳ درجه است. اگر اصطکاک‌ها ناچیز باشد، نیرویی که در حالت تعادل از طرف کُره بر دیوارهٔ قائم وارد می‌شود، چند نیوتون است؟

سراسری ریاضی - ۸۴

$(\sin ۵۳^\circ=۰/۸)$

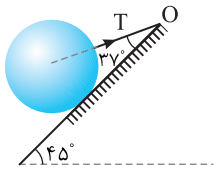


۱) صفر
۲) ۴۸
۳) ۶۰
۴) ۸۰

۳۹- مطابق شکل، کره‌ای همگن به جرم ۴ کیلوگرم روی سطح شیب‌دار بدون اصطکاکی به زاویهٔ شیب ۴۵ درجه قرار دارد. نیروی کشش نخ (T) چند نیوتون است؟

سراسری خارج از کشور ریاضی - ۹۰

$(\sin ۳۷^\circ=۰/۶ \ , \ g=۱۰m/s^۲)$



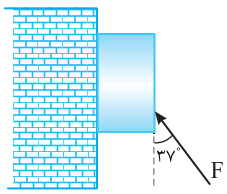
۱) ۲۵
۲) ۴۰
۳) $۲۵\sqrt{۲}$
۴) $۴۰\sqrt{۲}$

۴۰- جسمی به وزن ۱۲۰ N به وسیلهٔ نیروی افقی F به دیوار قائمی که ضریب اصطکاک در آستانه حرکت آن $\frac{۱}{۴}$ است فشرده می‌شود، حداقل نیروی F برحسب نیوتون برای آن‌که جسم نلغزد برابر است با .....

کنکور دهه‌های گذشته

۱) ۲/۵
۲) ۳۰
۳) ۱۲۰
۴) ۴۸۰

۴۱- در شکل روبه‌رو، ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و دیوار ۰/۵ و وزن جسم ۱۱۰N است، حداقل نیروی F برای حفظ تعادل وزنه چند نیوتون است؟ $(\sin ۳۷^\circ=۰/۶)$

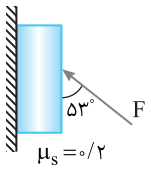


۱) ۱۰
۲) ۱۱۰
۳) ۵۵
۴) ۱۰۰

۴۲- در شکل روبه‌رو، به جسمی به وزن ۲۰N که به دیوار قائم تکیه دارد، نیروی F وارد می‌شود. بیشترین مقدار F در حالتی که جسم به حال سکون بماند، چند نیوتون است؟

سراسری خارج از کشور ریاضی- ۹۴

$(\cos ۵۳^\circ=۰/۶)$

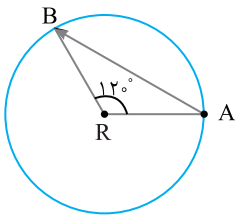


۱) $\frac{۵۰۰}{۱۹}$
۲) $\frac{۵۰۰}{۱۱}$
۳) $\frac{۲۰۰}{۱۹}$
۴) $\frac{۲۰۰}{۱۱}$

ضمیمه ۱ کاربرد ریاضی در فیزیک

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- گزینهٔ ۴ (A) با توجه به شکل، مسافت طی شده برابر طول کمان AB است که $\frac{1}{3}$ محیط دایره یعنی $\frac{1}{3}2\pi R$ می‌باشد و جابه‌جایی برابر با طول وتر AB است که برابر است با:

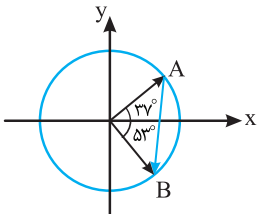


$$|\overrightarrow{AB}|=2R\sin\frac{120^\circ}{2}\Rightarrow|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3}R$$

بنابراین:

$$\frac{\text{مسافت طی شده}}{\text{جابه‌جایی}}=\frac{\frac{2}{3}\pi R}{\sqrt{3}R}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$$

۲- گزینهٔ ۳ (B) ابتدا بردارهای مکان A و B را به‌دست می‌آوریم:

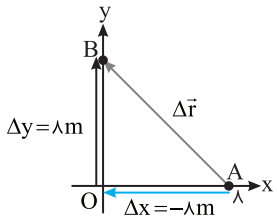


$$\vec{r}_A=8\cos 37^\circ\,\vec{i}+8\sin 37^\circ\,\vec{j}=6/4\,\vec{i}+4/8\,\vec{j}$$

$$\vec{r}_B=8\cos 53^\circ\,\vec{i}-8\sin 53^\circ\,\vec{j}=4/8\,\vec{i}-6/4\,\vec{j}$$

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}_B-\vec{r}_A=4/8\,\vec{i}-6/4\,\vec{j}-6/4\,\vec{i}-4/8\,\vec{j}=-1/6\,\vec{i}-11/2\,\vec{j}$$

۳- گزینهٔ ۲ (B) متحرک در امتداد محور x از نقطهٔ ۸+ به صفر رفته است، پس ۸− متر جابه‌جا شده است.



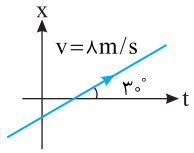
$$v_{av,x}=\frac{-8}{5}=-1/6\,m/s$$

دقت کنید که مسأله سرعت متوسط در امتداد محور x ها را از شما می‌خواهد.

۴- گزینهٔ ۱ (B) ابتدا معادلهٔ خط را به شکل استاندارد آن می‌نویسیم:

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-3\sqrt{3}$$

در این معادله شیب خط $\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$ است و خط با محور x ها زاویهٔ ۳۰° می‌سازد. در این صورت تصویر



بردار سرعت روی محور x ها برابر خواهد بود با:

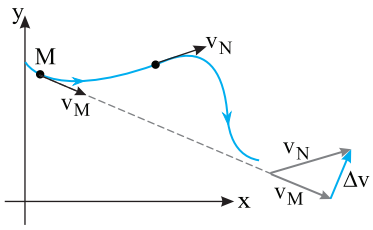
$$v_x=v\cos 30^\circ=8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}\,m/s$$

و جابه‌جایی در امتداد محور xها برابر خواهد شد با:

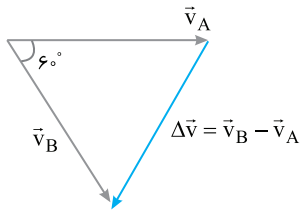
$$\Delta x=v_x t\Rightarrow\Delta x=4\sqrt{3}\times 5\Rightarrow\Delta x=20\sqrt{3}\,m$$

۵- گزینهٔ ۳ (A) بردار سرعت لحظه‌ای در هر لحظه بر مسیر حرکت مماس است و شتاب متوسط برابر تغییر بردار سرعت در یکای زمان بوده و بردار شتاب متوسط در جهت بردار تغییر سرعت می‌باشد.

کافی است هم‌سنگ بردارهای v_M و v_N را رسم کرده و جهت بردار تغییر سرعت را به‌دست بیاوریم تا جهت بردار شتاب متوسط به دست آید.



۶- گزینهٔ ۴ (A) بردار سرعت در هر نقطه بر مسیر حرکت مماس است. هم‌سنگ بردارهای سرعت را از یک نقطه رسم کرده، تغییر بردار سرعت را به‌دست می‌آوریم:



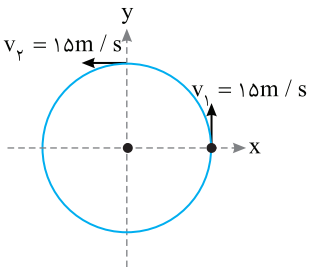
$$\Delta v=2v\sin\frac{\theta}{2}\Rightarrow\Delta v=2\times 5\times\sin\frac{60^\circ}{2}\Rightarrow\Delta v=5\,m/s$$

اکنون به کمک تعریف شتاب متوسط، مقدار شتاب متوسط را به دست می‌آوریم:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a_{av}=\frac{5}{4}\Rightarrow a_{av}=1/25\,m/s^2$$

۷- گزینهٔ ۳ (A)

با توجه به شکل بردار سرعت $\vec{v}_1=15\vec{j}$ و $\vec{v}_2=-15\vec{i}$ است. از این‌رو:



$$\Delta\vec{v}=\vec{v}_2-\vec{v}_1=-15\vec{i}-15\vec{j}$$

$$\vec{a}_{av}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\Rightarrow\vec{a}_{av}=\frac{-15\vec{i}-15\vec{j}}{8-3}\Rightarrow\vec{a}_{av}=-3\vec{i}-3\vec{j}$$

۸- گزینهٔ ۱ (A)

با توجه به تعریف سرعت متوسط خواهیم داشت:

$$\vec{v}_{av}=\frac{\vec{r}_2-\vec{r}_1}{t_2-t_1}=\frac{(60\vec{i}+80\vec{j})-(0)}{2-0}=30\vec{i}+40\vec{j}$$

۹- گزینهٔ ۲ (A)

$$\vec{v}_{av}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\Rightarrow\vec{i}-2\vec{j}=\frac{\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}-2\vec{i}+4\vec{j}}{4-0}\Rightarrow4\vec{i}-8\vec{j}=(\alpha-2)\vec{i}+(\beta+4)\vec{j}$$

دو بردار وقتی با هم برابرند که مؤلفه‌های آن‌ها نظیر به نظیر برابر باشند.

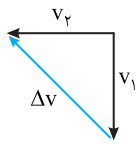
$$\begin{cases}\alpha-2=4\Rightarrow\alpha=6\\-8=\beta+4\Rightarrow\beta=-12\end{cases}\Rightarrow\frac{\alpha}{\beta}=\frac{6}{-12}=-\frac{1}{2}$$

۱۰- گزینهٔ ۳ (A)

$$\vec{v}_{av}=\frac{\vec{r}_2-\vec{r}_1}{t}\Rightarrow-\vec{i}+\vec{j}=\frac{-3\vec{i}+6\vec{j}-\vec{i}-2\vec{j}}{t}\Rightarrow-\vec{i}+\vec{j}=\frac{-4\vec{i}+4\vec{j}}{t}\Rightarrow t=4s$$

۱۱- گزینهٔ ۱ (A)

بردارهای هم‌سنگ v_1 و v_2 را از یک نقطه رسم می‌کنیم و به کمک آن، بزرگی بردار تغییر سرعت را به‌دست می‌آوریم:



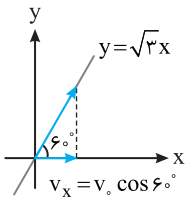
$$\Delta v=\sqrt{v_1^2+v_2^2}=\sqrt{15^2+20^2}=25m/s$$

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{25}{6-2}=6/25m/s^2$$

۱۲- گزینهٔ ۲ (A)

ابتدا مؤلفهٔ سرعت را روی محور x ها به‌دست می‌آوریم:

با توجه به معادلهٔ مسیر حرکت $y=\sqrt{3}x$، شیب خط برابر $\sqrt{3}$ است.

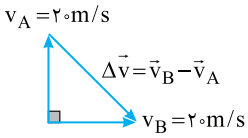


$$\tan\alpha=\sqrt{3}\Rightarrow\alpha=60^\circ\Rightarrow v_x=v\cos\alpha=100\times\frac{1}{2}=50m$$

$$\Delta x=v_x.t\Rightarrow500=50t\Rightarrow t=10s$$

۱۳- گزینهٔ ۲ (A)

تغییرات سرعت را به‌دست می‌آوریم:



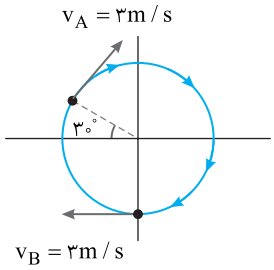
$$\Delta v=\sqrt{(20)^2+(20)^2}=20\sqrt{2}\,m$$

شتاب متوسط خواهد شد:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a_{av}=\frac{20\sqrt{2}}{40}\Rightarrow a_{av}=\frac{\sqrt{2}}{2}m/s^2$$

۱۴- گزینهٔ ۲ (B)

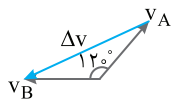
بردار سرعت در هر نقطه بر مسیر حرکت مماس است. هم‌سنگ دو بردار را از یک نقطه رسم می‌کنیم، سپس بردار تغییر سرعت را به‌دست می‌آوریم:



$$\Delta v=2v\sin\frac{120}{2}$$

$$\Delta v=2\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}m/s$$

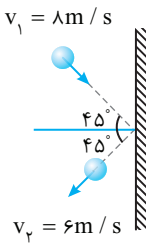
شتاب متوسط برابر است با:

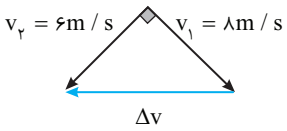


$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{3\sqrt{3}}{10}m/s^2$$

۱۵- گزینهٔ ۲ (B)

هم‌سنگ دو بردار را از یک نقطه رسم می‌کنیم:





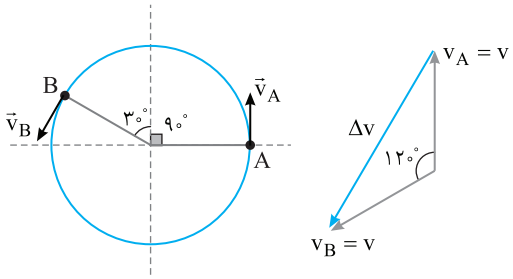
$$\Delta v=\sqrt{v_1^2+v_2^2}$$

$$\Delta v=\sqrt{8^2+6^2}=10m/s$$

تغییر تکانهٔ جسم برابر است با:

$$\Delta P=m\Delta v\Rightarrow\Delta P=0/2\times10=2kg.m/s$$

۱۶- گزینهٔ ۳ (B) در $\frac{1}{3}T$ متحرک $\frac{1}{3}$ دایره را طی کرده است. مثلاً از نقطهٔ A به نقطهٔ B می‌رسد. تغییر تکانه از A تا B برابر است با:

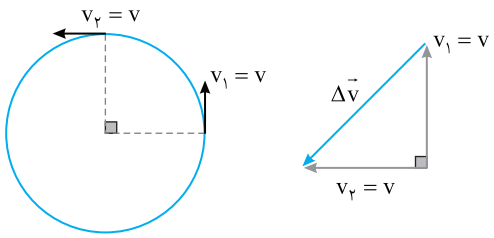


$$P_B - P_A = m\vec{v}_B - m\vec{v}_A \Rightarrow \Delta P = m(\vec{v}_B - \vec{v}_A)$$

$$\Delta P = m(2v\sin\frac{120^\circ}{2})$$

$$\Delta P = m(\sqrt{3}v) \Rightarrow \Delta P = \sqrt{3}mv$$

۱۷- گزینهٔ ۳ (B) متحرک در مدت $\frac{T}{4}$ به اندازهٔ ربع دایره چرخیده است. هم‌سنگ بردارهای سرعت را رسم می‌کنیم:

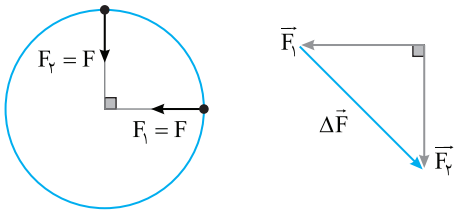


$$\Delta v = 2v\sin\frac{\alpha}{2} = 2v\sin\frac{90^\circ}{2} = \sqrt{2}v$$

$$\Delta P = m\Delta v \Rightarrow \Delta = \sqrt{2}mv$$

۱۸- گزینهٔ ۳ (B) نیروی مرکزگرای وارد بر جسم همواره در امتداد شعاع و به سمت مرکز است و اگر اندازهٔ آن ثابت باشد، جهت بردار نیرو در حال تغییر و نیروی مرکزگرا یک نیروی متغیر است.

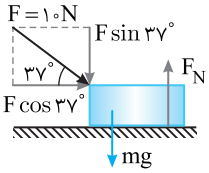
اندازهٔ نیروی مرکزگرا $F = m\frac{v^2}{r}$ است. هم‌سنگ بردارهای نیرو را از یک نقطه رسم می‌کنیم.



$$\Delta\vec{F} = \vec{F}_2 - \vec{F}_1 \xrightarrow{F_1 = F_2} \Delta F = F\sin\frac{\alpha}{2}$$

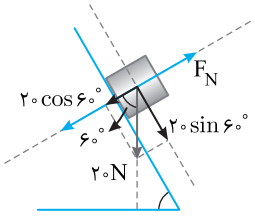
$$\Delta F = 2\frac{mv^2}{r}(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}m\frac{v^2}{r}$$

۱۹- گزینهٔ ۳ (A) ابتدا با توجه به آنچه در دهم خواندید نیرو را تجزیه می‌کنیم:



$$F_{y_{net}} = 0 \Rightarrow F\sin 37^\circ + mg = F_N \Rightarrow F_N = 10\times 0/6 + 10 = 16N$$

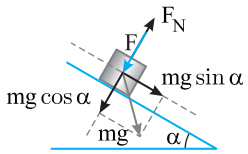
۲۰- گزینهٔ ۲ (A) نیروها در راستای عمود بر سطح متوازن می‌باشد. بنابراین:



$$F_{y_{net}} = 0 \Rightarrow F_N = mg\cos 60^\circ \Rightarrow F_N = 20\cos 60^\circ \Rightarrow F_N = 10N$$

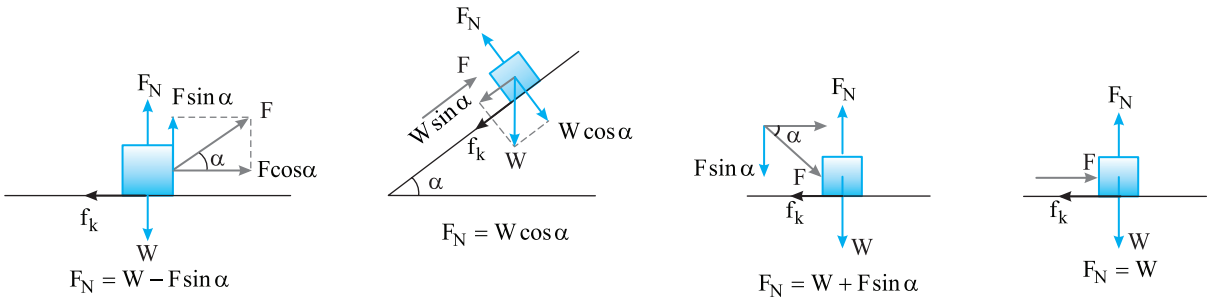
۲۱- گزینهٔ ۳ (A) روی سطح شیب‌دار نیروی عمودی تکیه‌گاه $F_N = mg\cos\alpha$ است و با افزایش α، $\cos\alpha$ کاهش می‌یابد.

۲۲- گزینهٔ ۳ (B) نیروها را در راستای عمود بر سطح شیب‌دار می‌نویسیم:



$$F_N = F + mg\cos\alpha \xrightarrow{F_N = mg} mg = F + mg\cos\alpha \Rightarrow F = mg(1 - \cos\alpha)$$

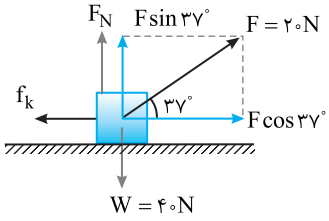
۲۳- گزینهٔ ۲ (B) نیروی اصطکاک جنبشی $(f_k = \mu_k F_N)$ است و هر چه نیروی عمودی تکیه‌گاه بیشتر باشد، اصطکاک بیشتر است.



با توجه به شکل‌های بالا، نیروی اصطکاک در شکل گزینهٔ (۲) از بقیه بیشتر است.

۲۴- گزینهٔ ۳ (B)

نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم:



$$F_{net}=Ma$$

$$F\cos 37^\circ - f_k = Ma \qquad (1)$$

اما نیروی عمودی تکیه‌گاه برابر است با:

$$F_N = W - F\sin 37^\circ \Rightarrow F_N = 40-(20\times 0/6)=28\,N$$

و نیروی اصطکاک برابر است با:

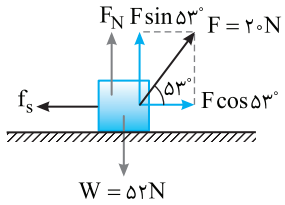
$$f_k=\mu_k F_N = 28\mu_k$$

حال به کمک رابطهٔ (۱)، ضریب اصطکاک جنبشی را به‌دست می‌آوریم:

$$20\times 0/8-28\mu_k=4\times 2/25 \Rightarrow \mu_k=\frac{1}{4}=0/25$$

۲۵- گزینهٔ ۲ (B)

جسم وقتی که نیروی $F=20N$ شده است شروع به حرکت می‌کند، بنابراین اصطکاک ایستایی در آستانهٔ حرکت $f_{s\,max}=F\cos 53^\circ$ است.



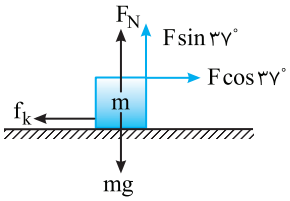
$$f_{s\,max}=F\cos 53^\circ$$

$$\mu_s(W-F\sin 53^\circ)=F\cos 53^\circ \Rightarrow \mu_s(52-20\times 0/8)=20\times 0/6$$

$$\mu_s=\frac{12}{36}\Rightarrow \mu_s=\frac{1}{3}$$

۲۶- گزینهٔ ۲ (B)

جسم در حال حرکت افقی است پس برایند نیروها در راستای قائم صفر است:



$$F_N+F\sin 37^\circ = mg \Rightarrow F_N = 55-0/6F$$

نیروی اصطکاک برابر است با:

$$f_k=\mu_k F_{N_1}=\frac{1}{2}(55-0/6F) \qquad (1)$$

سرعت ثابت است، از این رو:

$$F\cos 37^\circ = f_k \Rightarrow 0/8F=f_k \Rightarrow 0/8F=27/5-0/3F \Rightarrow 1/1F=27/5 \Rightarrow F=25N \xrightarrow{(1)} f_k=\frac{1}{2}(55-0/6\times 25)=20N$$

در حالت دوم نیروی عمودی تکیه‌گاه برابر است با:

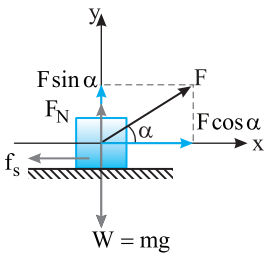
$$F'_N+2F\sin 37^\circ = mg \Rightarrow F'_N=55-1/2F \Rightarrow F'_N=55-1/2\times 25 \Rightarrow F'_N=55-30=25N \Rightarrow f'_k=\mu_k F'_N=\frac{1}{2}\times 25=12/5N$$

پس نسبت نیروهای اصطکاک برابر است با:

$$\frac{f'_k}{f_k}=\frac{12/5}{20}=\frac{125}{200}=\frac{5}{8}$$

۲۷- گزینهٔ ۲ (C)

نیروی F را تجزیه می‌کنیم، در آستانهٔ حرکت خواهیم داشت:



$$F\cos\alpha = f_{s\,max} \Rightarrow F\cos\alpha=\mu_s F_N \Rightarrow F\cos\alpha=\mu_s(W-F\sin\alpha)$$

$$\Rightarrow F\cos\alpha=\frac{3}{4}W-\frac{3}{4}F\sin\alpha \Rightarrow F(\cos\alpha+\frac{3}{4}\sin\alpha)=\frac{3}{4}W$$

سمت راست رابطه مقدار ثابتی است بنابراین اگر بخواهیم F کمینه باشد باید عبارت $(\cos\alpha+\frac{3}{4}\sin\alpha)$ بیشینه باشد. در درس ریاضی در مبحث کاربرد مشتق خواهید دید برای آن که بیشینه و کمینه بودن یک تابع را مشخص کنیم مشتق آن را به دست آورده و برابر صفر قرار می‌دهیم. از این رو مشتق عبارت فوق را به دست می‌آوریم:

$$-\sin\alpha+\frac{3}{4}\cos\alpha=0 \Rightarrow \sin\alpha=\frac{3}{4}\cos\alpha \Rightarrow \tan\alpha=\frac{3}{4}$$

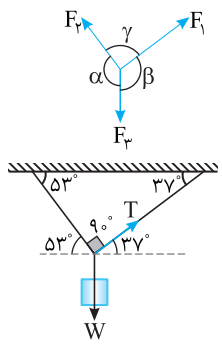
۲۸- گزینهٔ ۱ (B)

حداقل نیروی F که باعث بلند شدن جسم از سطح می‌شود هنگامی رخ می‌دهد که مؤلفهٔ قائم F نیروی وزن را خنثی کند و نیروی عمودی تکیه‌گاه صفر شود.

$$F\sin\alpha=mg \Rightarrow F=\frac{mg}{\sin\alpha}$$

۲۹- گزینهٔ ۲ (A)

قانون سینوس‌ها: هرگاه برایند ۳ نیرو صفر شود بین اندازه‌های آن‌ها و سینوس زاویهٔ بین آن‌ها رابطهٔ زیر برقرار است:



$$\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=0 \Rightarrow \frac{F_1}{\sin\alpha}=\frac{F_2}{\sin\beta}=\frac{F_3}{\sin\gamma}$$

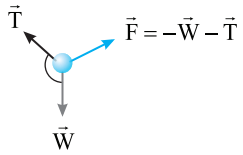
به کمک قانون سینوس‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{T}{\sin(90^\circ+53^\circ)}=\frac{W}{\sin 90^\circ}$$

$$\frac{6}{\cos 53^\circ}=\frac{W}{1}\Rightarrow \frac{6}{0/6}=W \Rightarrow W=10N$$

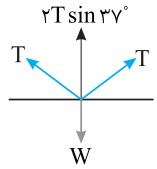
۳۰- گزینهٔ ۳ (B)

مطابق شکل روبه‌رو بر گلوله نیروی وزن رو به پایین و نیروی کشش نخ در امتداد نخ وارد می‌شود که با هم زاویه می‌سازند و نمی‌توانند یکدیگر را خنثی کرده و گلوله در تعادل بماند. از این رو حداقل یک نیروی دیگر مانند F لازم است تا هم‌اندازه و در خلاف جهت برایند T و W باشد تا آن‌ها را خنثی کند، بنابراین حداقل سه نیرو بر جسم وارد می‌شود.



۳۱- گزینهٔ ۱ (B)

در شکل گزینهٔ (۱):

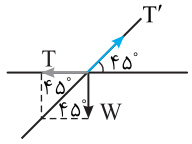


$$F_{net_y}=0\Rightarrow 2T\sin 37^\circ=W\Rightarrow T=\frac{W}{1/2}$$

در شکل گزینهٔ (۲):

$T=W$

در شکل گزینهٔ (۳):



$$\tan 45^\circ=\frac{T}{W}\Rightarrow T=W$$

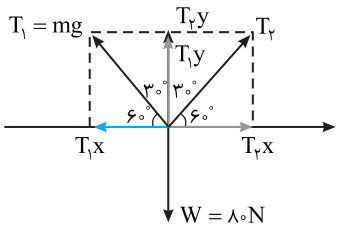
در شکل گزینهٔ (۴):

در طول نخ کشش یکسان است. $T=W$

در شکل گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴)، $T=W$ است، بنابراین کمترین مقدار کشش نخ در شکل گزینهٔ (۱) است.

۳۲- گزینهٔ ۴ (B)

چون دستگاه در تعادل است کشش نخی که از روی قرقره می‌گذرد برابر $T_1=Mg$ است. از طرفی $\theta=90^\circ-60^\circ=30^\circ$



$$F_{net_x}=0\Rightarrow T_1\cos 60^\circ=T_2\cos 60^\circ\Rightarrow T_1=T_2$$

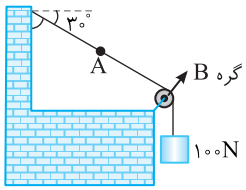
$$F_{net_y}=0\Rightarrow T_1\sin 60^\circ+T_2\sin 60^\circ=80\Rightarrow 2T_1\sin 60^\circ=80\Rightarrow T_1=\frac{80}{\sqrt{3}}=\frac{80\sqrt{3}}{3}N$$

$$T_1=Mg\Rightarrow\frac{80\sqrt{3}}{3}=10M\Rightarrow M=\frac{8\sqrt{3}}{3}kg$$

۳۳- گزینهٔ ۲ (A)

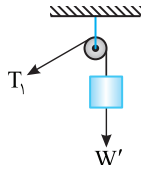
نیروی کشش نخ برابر وزن است و در طول نخ همگن با جرم ناچیز مقدار ثابتی است.

$T=mg=100N$



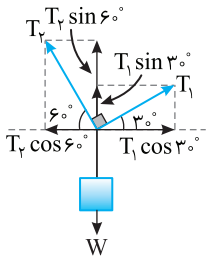
۳۴- گزینهٔ ۱ (B)

با توجه به اینکه وزنه‌ها در حال تعادلند، داریم:



در تعادل $W':T_1-W'=0\Rightarrow T_1=W'\Rightarrow T_1=2N$

هنگامی که اجسام در حال تعادلند، برایند نیروهای وارد بر آن‌ها صفر است.



$$F_{net_x}=0\Rightarrow T_1\cos 30^\circ-T_2\cos 60^\circ=0\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}W'-\frac{1}{2}T_2=0\Rightarrow T_2=\sqrt{3}W'$$

$$F_{net_y}=0\Rightarrow T_1\sin 30^\circ+T_2\sin 60^\circ-W=0\Rightarrow\frac{1}{2}W'+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}W'=W\Rightarrow 2W'=W$$

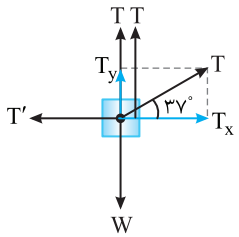
$$\Rightarrow\frac{W}{W'}=2\Rightarrow\frac{W}{2}=2\Rightarrow W=4N$$

۳۵- گزینهٔ ۳ (B)

با توجه به شکل برای W' می‌توان نوشت:

$W'=T$

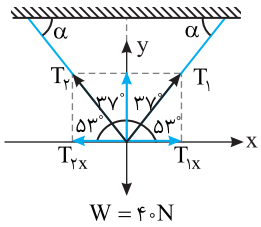
برای وزنهٔ W می‌توان نوشت:



$$W=T+T+T\sin 37^\circ\Rightarrow W=2/6T$$

بنابراین:

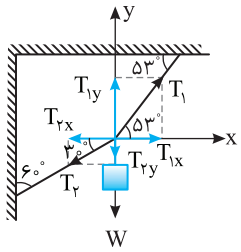
$$\frac{W}{W'}=\frac{2/6T}{T}=2/6$$



۳۶- گزینهٔ ۲ جسم در تعادل است. پس:

$$F_{net}=0\Rightarrow\begin{cases}F_{net_x}\Rightarrow T_1\cos 53^\circ=T_2\cos 53^\circ\Rightarrow T_1=T_2\\ F_{net_y}\Rightarrow 2T_{1_y}=W\Rightarrow 2T_1\sin 53^\circ=W\end{cases}$$

$$T_1=\frac{W}{2\sin 53^\circ}=\frac{40}{2\times 0/8}=25N$$



۳۷- گزینهٔ ۳ نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم. جسم در حال تعادل است:

$$F_{net_x}=0\Rightarrow T_{1x}=T_{2x}\Rightarrow T_1\cos 53^\circ=T_2\cos 30^\circ$$

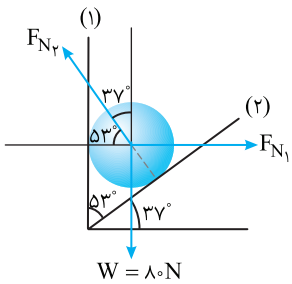
$$T_1\times 0/6=T_2\times 0/85\Rightarrow T_2=\frac{0/6}{0/85}T_1\Rightarrow T_2=\frac{60}{85}T_1$$

کشش T_1 بزرگ‌تر از T_2 است بنابراین کشش T_1 می‌تواند ۸۵N باشد، اگر کشش T_2 برابر ۸۵N شود، کشش T_1 از ۸۵N بیشتر و نخ پاره می‌شود. بنابراین:

$$T_2=\frac{60}{85}\times 85\Rightarrow T_2=60N$$

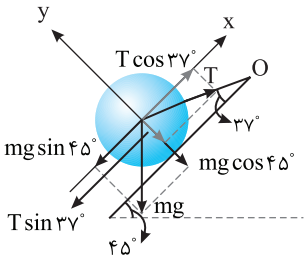
برایند نیروها روی محور yها نیز صفر است از این‌رو:

$$T_1\sin 53^\circ-W-T_2\sin 30^\circ=0\Rightarrow 85\times 0/8-60\times\frac{1}{2}=W\Rightarrow W=38N$$



۳۸- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل روبه‌رو و رسم نیروها، مسأله به کمک قانون سینوس‌ها به راحتی قابل حل است.

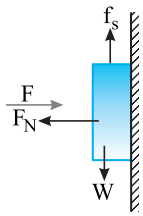
$$\frac{W}{\sin(90^\circ+37^\circ)}=\frac{F_{N_1}}{\sin(90^\circ+53^\circ)}\Rightarrow\frac{80}{\cos 37^\circ}=\frac{F_{N_1}}{\cos 53^\circ}\Rightarrow\frac{80}{0/8}=\frac{F_{N_1}}{0/6}\Rightarrow F_{N_1}=60N$$



۳۹- گزینهٔ ۳ نیروهای وارد بر کره را رسم کرده و روی محورهای x و y مطابق شکل تجزیه می‌کنیم. جسم در تعادل است و باید برایند نیروهای وارد برجسم صفر شود.

$$F_{net}=0\Rightarrow F_{net_x}=0\Rightarrow mg\sin 45^\circ=T\cos 37^\circ$$

$$40\times\frac{\sqrt{2}}{2}=T\times 0/8\Rightarrow T=25\sqrt{2}N$$

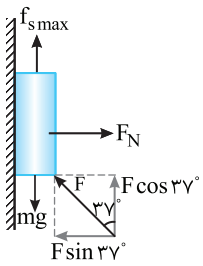


۴۰- گزینهٔ ۴ شکل مسأله را رسم می‌کنیم. جسم ساکن و در تعادل است. بنابراین:

$$F_{net_y}=0\Rightarrow W=f_s\Rightarrow f_s=120N$$

از طرفی نیروی عمودی تکیه‌گاه برابر نیروی F است و می‌توان نوشت:

$$f_s=\mu_sF_N\xrightarrow{F_N=F}120=\frac{1}{4}\times F\Rightarrow F=480N$$

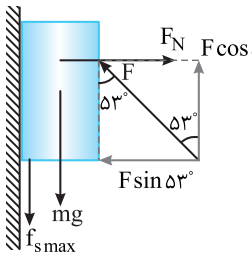


۴۱- گزینهٔ ۴ حداقل نیروی F وقتی است که جسم بخواهد به پایین بلغزد در این صورت اصطکاک ایستایی رو به بالا است.

$$F_{net}=0\Rightarrow mg=f_{s\,max}+F\cos 37^\circ$$

$$\xrightarrow{F_N=F\sin 37^\circ}mg=\mu_sF\sin 37^\circ+F\cos 37^\circ$$

$$110=0/5\times F\times 0/6+F(0/8)\Rightarrow F=\frac{110}{1/1}=100N$$



۴۲- گزینهٔ ۲ بیشترین مقدار F در حالتی است که جسم در آستانهٔ حرکت رو به بالا قرار گیرد. در این حالت نیروی وزن mg و نیروی اصطکاک ایستایی آستانهٔ حرکت (f_{smax}) رو به پایین‌اند. با توجه به شکل:

$$F_N=F\sin 53^\circ\quad,\quad F\cos 53^\circ=mg+f_{s\,max}$$

$$F\cos 53^\circ=mg+\mu_sF_N\Rightarrow F\cos 53^\circ=mg+\mu_sF\sin 53^\circ$$

$$0/6F=20+0/2F\times 0/8\Rightarrow F=\frac{20}{0/44}\Rightarrow F=\frac{500}{11}N$$

ضمیمه ۲ کاربرد مشتق در حرکت‌شناسی

در تعریف مشتق در ریاضی متوجه می‌شویم که مقدار مشتق در هر نقطه برابر شیب خط مماس بر نمودار در آن نقطه است. از طرفی در فیزیک یاد گرفتیم که شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان برابر سرعت لحظه‌ای و شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان برابر شتاب لحظه‌ای است. از ترکیب این دو مفهوم نتایج زیر حاصل می‌شود.

۱- مشتق اول معادلهٔ مکان - زمان نسبت به زمان برابر سرعت لحظه‌ای است. $v = x'$

۲- مشتق اول معادلهٔ سرعت - زمان نسبت به زمان برابر شتاب لحظه‌ای است هم‌چنین مشتق دوم معادلهٔ مکان - زمان نسبت به زمان نیز برابر شتاب لحظه‌ای است. $a = v' = x''$

اکنون با حل دو مسأله به چگونگی استفاده از این نتایج می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که دانستن این مفاهیم در حل مسائلی که در آن‌ها معادلهٔ مکان - زمان را در اختیار داریم چه‌قدر حل مسأله را راحت‌تر می‌کند.

مسأله ۱ **معادلهٔ مکان - زمان متحرکی که روی محور xها در حرکت است. در SI به صورت $x = t^2 - 4t + 3$ است، در چه لحظه‌ای متحرک تغییر جهت می‌دهد؟**

راه‌حل قبلاً برای حل این مسأله معادلهٔ داده شده را با معادلهٔ حرکت شتاب ثابت $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$ مقایسه می‌کردیم اما اکنون کافی است از x مشتق بگیریم.

$$x = t^2 - 4t + 3 \xrightarrow{v = x'} v = 2t - 4$$

برای لحظهٔ تغییر جهت کافی است سرعت را مساوی صفر قرار دهیم.

$$v = 0 \Rightarrow 2t - 4 = 0 \Rightarrow t = 2s$$

در مسألهٔ بعدی، از یک معادلهٔ درجه ۳ کمک گرفته‌ایم تا نشان دهیم با داشتن معادلهٔ مکان - زمان و به‌کار بردن مشتق می‌توان همان مفاهیمی را که از قبل بلد بوده‌ایم به‌کار ببریم.

مسأله ۲ **معادلهٔ حرکت متحرکی روی خط راست در SI به صورت $x = t^3 - 3t^2 + 6$ است.**

الف) در لحظهٔ $t = 2s$ اندازهٔ مکان، سرعت و شتاب متحرک را بیابید.

ب) اندازهٔ سرعت متوسط را در بازهٔ زمانی $t = 1s$ تا $t = 4s$ بیابید.

پ) اندازهٔ شتاب متوسط را در $5s$ آغازین حرکت بیابید.

ت) در چه مکان و در چه زمانی متحرک روی خط راست تغییر جهت می‌دهد؟

ث) در چه مدتی حرکت تندشونده و در چه مدتی حرکت کندشونده است؟

ج) اندازهٔ جابه‌جایی متحرک را در ۳ ثانیهٔ آغازین حرکت آن بیابید.

چ) مسافت طی شده در مدت $3s$ آغازین چند متر است؟

ح) اندازهٔ جابه‌جایی متحرک را در ثانیهٔ پنجم حرکت آن بیابید.

راه‌حل الف) مکان در لحظهٔ $t = 2s$ خواهد شد:

$$x = t^3 - 3t^2 + 6 \xrightarrow{t=2s} x = 8 - 12 + 6 = 2m$$

برای یافتن سرعت لحظه‌ای از معادلهٔ حرکت مشتق می‌گیریم:

$$v = x' \Rightarrow v = 3t^2 - 6t \xrightarrow{t=2s} v = 0$$

و برای یافتن شتاب لحظه‌ای از معادلهٔ سرعت مشتق می‌گیریم:

$$a = v' \Rightarrow a = 6t - 6 \xrightarrow{t=2s} a = 6m/s^2$$

دقت کنید در لحظهٔ $t = 2s$ در مکان $+2$ متری مبدأ، برای یک لحظه سرعت صفر شده است اما شتاب صفر نیست.

هرگاه در یک لحظه سرعت متحرکی صفر شود، لزومی ندارد که در آن لحظه، شتاب متحرک نیز صفر شود.

به معادلهٔ شتاب-زمان $a = 6t - 6$ نگاه کنید در لحظهٔ $t = 0$، شتاب $-6m/s^2$، در لحظهٔ $t = 1s$ شتاب صفر و ... است یعنی شتاب در حال تغییر است و حرکت دارای شتاب متغیر است. **پس اگر معادله حرکت تابع درجهٔ ۳ و بالاتر باشد، معرف حرکت با شتاب متغیر است.**

ب) متأسفانه بعضی از دانش‌پژوهان برای حل این قسمت زمان‌های $1s$ و $4s$ را در معادلهٔ سرعت قرار می‌دهند، سپس سرعت‌های به‌دست آمده را جمع کرده و بر دو تقسیم می‌کنند. در حالی که بارها بیان شده سرعت متوسط جابه‌جایی در یکای زمان است و باید در لحظات $1s$ و $4s$ مکان متحرک را به‌دست آوریم و با توجه به این‌که شتاب متوسط یعنی تغییر سرعت در یکای زمان، داریم:

$$\begin{cases} v_{av} = \dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \\ t_1 = 1s \Rightarrow x_1 = 1 - 3 + 6 = 4m \\ t_2 = 4s \Rightarrow x_2 = 64 - 48 + 6 = 22m \end{cases} \Rightarrow v_{av} = \frac{22 - 4}{4 - 1} = 6m/s$$

پ) در حل این قسمت نیز در لحظهٔ $t=0$ و $t=5s$، به کمک معادلهٔ سرعت- زمان، سرعت لحظه‌ای متحرک را به‌دست می‌آوریم و با توجه به این که شتاب متوسط یعنی تغییر سرعت در واحد زمان، داریم:

$$\begin{cases} t_1=0 \Rightarrow v_1=0 \\ t_2=5s \Rightarrow v_2=45m/s \end{cases} \Rightarrow a_{av}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1} \Rightarrow a_{av}=\frac{45-0}{5-0}=9m/s^2$$

ت) متحرکی که روی محور x ها در حرکت است، برای آن‌که تغییر جهت دهد، ابتدا باید سرعتش صفر گردد.

$$v=0 \Rightarrow 3t^2-6t=0 \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=2s \end{cases}$$

لحظهٔ $t=0$ آغاز حرکت است و لحظهٔ $t=2s$ جواب مسأله است. $t=2s \Rightarrow x=+2m$

تذکر: البته دربارهٔ تغییر جهت روی خط راست علاوه بر صفر شدن سرعت باید سرعت در آن لحظه تغییر علامت بدهد که در تابع درجه ۲ در دو طرف ریشه همواره تغییر علامت داریم و $t=2s$ جواب است.

ث) در حرکت تندشونده روی خط راست، سرعت متحرک در حال افزایش است، پس بردار سرعت و بردار شتاب آن هم‌جهت و هم‌علامت هستند. $(av>0)$ و در حرکت کندشونده روی خط راست، سرعت متحرک در حال کاهش است، پس بردار سرعت و بردار شتاب در خلاف جهت هم هستند و علامت آن‌ها مخالف هم است. $(av<0)$

با توجه به این توضیحات باید ابتدا سرعت و شتاب را تعیین علامت کنیم، از این رو از ریاضیات کمک می‌گیریم.

$$v=3t^2-6t=0 \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=2s \end{cases} \quad , \quad a=6t-6=0 \Rightarrow t=1s$$

در تابع درجه ۲، علامت، در بین دو ریشه مخالف علامت ضریب t^2 و در خارج از دو ریشه، موافق علامت ضریب t^2 است.

در تابع درجه ۱، علامت در سمت چپ ریشه مخالف علامت ضریب t و در سمت راست ریشه، موافق علامت ضریب t است. اکنون با دانسته‌های بالا جدول زیر را رسم می‌کنیم.

t	0		1		2		$+\infty$
v	0	−		−	0	+	
a		−	0	+		+	
av		+ تندشونده		− کندشونده	لحظهٔ تغییر جهت حرکت	+ تندشونده	

تذکر: دقت شود که علامت شتاب به تنهایی نوع حرکت را روی خط راست مشخص نمی‌کند و باید علامت سرعت و شتاب هر دو تعیین شود.

ج) برای یافتن جابه‌جایی در سه ثانیهٔ آغازین، مکان در $t=0$ و $t=3s$ را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} t_1=0 \Rightarrow x_1=0-0+6=6m \\ t_2=3s \Rightarrow x_2=3^3-3(3)^2+6=6m \end{cases} \Rightarrow \Delta x=x_2-x_1=0$$

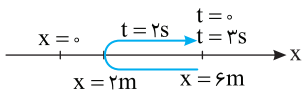
پس جابه‌جایی متحرک در 3s آغازین، صفر است.

دقت شود که مکان متحرک در لحظهٔ $t=3s$، +۶ متری مبدأ است. یعنی مفهوم مکان و جابه‌جایی یکسان نیست.

چ) اشتباه نکنید مسافت طی شده ۱۲ متر نمی‌شود. باید در حل این نوع مسائل مشخص گردد که متحرک در بازهٔ زمانی داده شده تغییر جهت داده است یا نه؟

از این رو باید مشخص گردد که در چه لحظه‌ای و در چه مکانی متحرک تغییر جهت می‌دهد. $v=0 \Rightarrow 3t^2-6t=0 \Rightarrow t=2s \quad , \quad x=2m$

حال به شکل روبه‌رو دقت کنید:



در مدت 3s متحرک از $x=6m$ به $x=2m$ رفته و سپس به $x=6m$ برگشته است، پس در مجموع ۸ متر مسافت طی کرده است.

ح) همان‌گونه که قبلاً بیان شد، باید مکان‌های متحرک را در $t=5s$ و $t=4s$ به‌دست آورده، آن‌ها را از هم کم کرد.

$$\begin{cases} t=5s \Rightarrow x=5^3-3(5)^2+6=56m \\ t=4s \Rightarrow x=4^3-3(4)^2+6=22m \end{cases} \Rightarrow x_{(5)}=56-22=34m$$

با این مثال ساده، تفاوت مکان، تغییر مکان، مسافت طی شده، جابه‌جایی در t ثانیه و جابه‌جایی در ثانیهٔ t ام بررسی شد.

ضمیمه ۲
پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- متحرکی روی محور x حرکت می‌کند. اگر $x'>0$ باشد، کدام گزینه درست است؟
۱) حرکت تندشونده است.
۲) حرکت کندشونده است.
۳) حرکت یکنواخت و در جهت مثبت محور x است.
۴) با توجه به شرایط هر کدام از سه حالت ممکن است.

۲- معادلهٔ حرکت متحرکی در SI به‌صورت $x=t^3-3t+1$ است. در چه مکانی برحسب متر، متحرک تغییر جهت می‌دهد؟
۱) -1 ۲) $+1$ ۳) $+2$ ۴) -2

۳- معادلهٔ حرکت متحرکی در SI به‌صورت $x=t^3-3t+1$ است. مسافت طی‌شده در ثانیهٔ دوم حرکت چند متر است؟
۱) ۳ ۲) ۴ ۳) -1 ۴) صفر

۴- معادلهٔ حرکت متحرکی در SI به‌صورت $x=t^3-3t+1$ است. مسافت طی‌شده در دو ثانیهٔ اول حرکت چند متر است؟
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۶

۵- اگر معادلهٔ حرکت متحرکی که روی خط راست در حرکت است در SI به‌صورت $x=2t^3+3t$ باشد، مسافت طی شده در ثانیهٔ دوم چند متراست؟
۱) ۵ ۲) ۱۷ ۳) ۲۲ ۴) ۲۷

۶- معادلهٔ مکان- زمان متحرکی که روی محور x ها حرکت می‌کند در SI به‌صورت $x=t^3-6t$ است. در کدام بازهٔ زمانی متحرک در جهت منفی محور در حال حرکت است؟
۱) $0<t<2$ ۲) $t>2$ ۳) $t>\sqrt{2}$ ۴) $0<t<\sqrt{2}$

۷- معادلهٔ حرکت متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند در SI به‌صورت $x=-t^2+4t+5$ است. مسافت طی شدهٔ این متحرک در ۵ ثانیهٔ اول حرکتش چند متر است؟
۱) صفر ۲) ۵ ۳) -5 ۴) ۱۳

۸- معادلهٔ حرکت متحرکی که روی محور x ها حرکت می‌کند در SI به‌صورت $x=t^3+2t^2-4$ است. در کدام بازهٔ زمانی، متحرک در خلاف جهت محور x ها در حرکت است؟
۱) $0<t<\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}<t<2$ ۳) $t>0$ ۴) هیچ‌کدام

۹- معادلهٔ حرکت متحرکی که روی محور x ها حرکت می کند در SI به‌صورت $x=-t^3-2t^2-4$ است. در کدام بازهٔ زمانی، حرکت کندشونده است؟
۱) $0<t<1$ ۲) $t>1$
۳) $t>0$ ۴) هرگز حرکت کندشونده نخواهد بود.

۱۰- معادلهٔ حرکت متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند در SI به‌صورت $x=\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2-4t$ است. متحرک چند بار تغییر جهت می‌دهد؟
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۱- معادلهٔ حرکت متحرکی که روی محور x ها حرکت می‌کند در SI به‌صورت $x=t^3-3t^2+3t-1$ است. متحرک چند بار تغییر جهت می‌دهد؟
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۲- معادلهٔ سرعت متحرکی در SI به‌صورت $v=-6t^2+6t$ است. اگر حرکت متحرک در مسیر مستقیم بوده و مکان در لحظهٔ $t=1s$ نقطهٔ $x=-2m$ باشد، معادلهٔ مکان کدام است؟ سراسری ریاضی - ۸۶
۱) $x=-12t+6$ ۲) $x=-12t+10$
۳) $x=-3t^2+3t-3$ ۴) $x=-2t^3+3t^2-3$

۱۳- معادلهٔ مکان- زمان جسمی در SI به‌صورت $x=-t^2+4t-4$ است. در فاصلهٔ زمانی بین $t_1=0$ تا $t_2=4s$، مسافت طی شده توسط جسم چند متر است؟ سراسری خارج از کشور تجربی-۸۸
۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۴- **معادلهٔ مکان-زمان متحرکی در SI به صورت $x=t^{۳}-۶t^{۲}+۹t-۸$ است. کدام گزینه درست است؟**

۱) در $t=۲s$ بردار شتاب تغییر جهت می‌دهد.
۲) در $t=۱s$ بردار سرعت تغییر جهت می‌دهد.
۳) در $t=۴s$ حرکت تندشونده است.
۴) هر سه گزینه درست است.

۱۵- **معادلهٔ سرعت- زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $v=۲۰۰-۸t^{۲}$ است. کدام گزینه درست است؟ $(t\geq ۰)$**

سراسری خارج از کشور ریاضی-۹۱

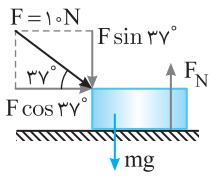
۱) بزرگی شتاب در حال کاهش است
۲) از صفر تا ۵ ثانیه حرکت تندشونده است.
۳) در لحظهٔ $t=۵s$ جهت شتاب تغییر می‌کند.
۴) حرکت ابتدا در جهت محور x، سپس خلاف جهت محور x است.

۱۶- **معادلهٔ حرکت جسمی که روی محور x حرکت می‌کند در SI به صورت $x=۳t^{۲}-t^{۳}+۱$ است. در بازهٔ زمانی بین $t=۰$ تا $t=۲s$، .....**

۱) جهت شتاب عوض نمی‌شود.
۲) جهت حرکت جسم تغییر نمی‌کند.
۳) جهت حرکت یک بار عوض می‌شود.
۴) حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده می‌شود.

ضمیمه ۲ کاربرد مشتق در حرکت‌شناسی

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای



۱- گزینهٔ ۴ (A) مشتق مکان نسبت به زمان برابر سرعت لحظه‌ای است $v=x'$ و علامت سرعت به تنهایی دربارهٔ نوع حرکت چیزی را مشخص نمی‌کند. $x'>0$ تنها نشان می‌دهد که متحرک در جهت مثبت محور در حال پیشروی است و ممکن است مقدار سرعت ثابت باشد و یا سرعت در حال کاهش (حرکت کندشونده) و یا در حال افزایش (حرکت تندشونده) باشد.

فراموش نکنیم که برای مشخص شدن کندشونده و تندشونده بودن حرکت باید علامت سرعت و علامت شتاب هر دو مشخص باشد. اگر بردار سرعت و شتاب هم‌علامت باشند $(av>0)$ حرکت تندشونده و اگر بردار سرعت و شتاب هم‌علامت نباشند $(av<0)$ حرکت کندشونده است.

۲- گزینهٔ ۱ (A) متحرکی که روی خط راست (محور x ها) در حرکت است، برای تغییر جهت ابتدا باید سرعتش صفر شود. از این‌رو ابتدا معادلهٔ سرعت- زمان را به کمک مشتق‌گیری از معادلهٔ مکان- زمان به دست آورده، لحظهٔ صفر شدن سرعت و تغییر جهت را حساب می‌کنیم:

$$v=x'\Rightarrow v=3t^2-3\xrightarrow{v=0}3t^2-3=0\Rightarrow t^2=1\Rightarrow t=1s$$

$$x=t^3-3t+1\Rightarrow x=1-3+1\Rightarrow x=-1m$$

۳- گزینهٔ ۲ (A) بازهٔ زمانی ثانیهٔ دوم یعنی از $t=1s$ تا $t=2s$. ابتدا بررسی می‌کنیم که آیا در این بازه سرعت صفر می‌شود و متحرک تغییر جهت می‌دهد یا نه؟

$$v=x'\Rightarrow v=3t^2-3\xrightarrow{v=0}3t^2-3=0\Rightarrow t=1s$$

بنابراین در بازهٔ مورد نظر تغییر جهت رخ نمی‌دهد و مسافت طی شده با جابه‌جایی متحرک یکسان است:

$$\begin{cases}t_1=1s\Rightarrow x_1=1-3+1=-1m\\ t_2=2s\Rightarrow x_2=8-3\times2+1=+3m\end{cases}\Rightarrow\Delta x=x_2-x_1\Rightarrow\Delta x=3-(-1)=4m$$

۴- گزینهٔ ۴ (B) بازهٔ زمانی دو ثانیهٔ اول یعنی از $t=0$ تا $t=2s$. ابتدا بررسی می‌کنیم که آیا در این بازه، سرعت صفر می‌شود و متحرک تغییر جهت می‌دهد یا نه؟

$$v=x'\Rightarrow v=3t^2-3\xrightarrow{v=0}3t^2-3=0\Rightarrow t=1s$$

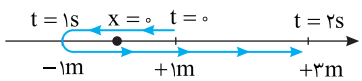
$$x=(1)^3-3\times(1)^2+1\Rightarrow x=-1m$$

بنابراین متحرک در لحظهٔ $t=1s$ و مکان $x=-1m$ تغییر جهت داده است.

اکنون مکان متحرک در ابتدا و انتهای بازهٔ مورد نظر را به‌دست می‌آوریم:

$$t=0\Rightarrow x=+1m$$

$$t=2s\Rightarrow x=8-6+1=+3m$$



پس متحرک از مکان $+1m$ به مکان $-1m$ رفته و سپس به مکان $x=+3m$ برگشته است و مسافت طی‌شده برابر است با: $2+4=6m$

۵- گزینهٔ ۲ (A) مسافت طی‌شده در ثانیهٔ دوم، یعنی مسافت طی‌شده در بازهٔ زمانی $t=1s$ تا $t=2s$. بنابراین در معادلهٔ حرکت $t_1=1s$ و $t_2=2s$ را قرار می‌دهیم و مکان‌های حاصل را از هم کم می‌کنیم:

$$x=2t^3+3t:\begin{cases}t=1s\Rightarrow x_1=5m\\ t=2s\Rightarrow x_2=22m\end{cases}\Rightarrow\Delta x_{(2)}=22-5=17m$$

دقت کنید اگر معادلهٔ سرعت- زمان این متحرک را به‌دست آوریم سرعت صفر نمی‌شود و متحرک در هیچ لحظه‌ای پس از $t=0$ تغییر جهت نمی‌دهد و مسافت طی‌شده همان جابه‌جایی است.

$$v=x'\Rightarrow v=6t^2+3\Rightarrow v\neq0$$

۶- گزینهٔ ۴ (A) ابتدا معادلهٔ سرعت- زمان را به‌دست می‌آوریم. در مدتی که متحرک دارای سرعت منفی می‌باشد، متحرک در حال حرکت در جهت منفی محور است.

$$v=x'\Rightarrow v=3t^2-6\Rightarrow 3t^2-6=0\Rightarrow t^2=2\Rightarrow t=\sqrt{2}s$$

اکنون سرعت را تعیین علامت می‌کنیم؛ با توجه به جدول روبه‌رو، متحرک در بازهٔ $t=0$ تا $t=\sqrt{2}s$ در جهت منفی محور در حال حرکت است.

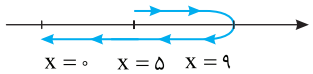
t	۰		$\sqrt{2}$		$+\infty$
v		−	۰	+	
			تغییر جهت		

۷- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول:** مسافت طی شده یعنی طول کل مسیری که متحرک در ۵ ثانیه طی می‌کند. پس باید بررسی کرد که متحرک متوقف می‌شود و جهت حرکت خود را تغییر می‌دهد یا خیر؟ برای این منظور ابتدا معادلهٔ سرعت- زمان را به‌دست می‌آوریم:

$$v=\frac{dx}{dt}\Rightarrow v=-2t+4\xrightarrow{v=0}-2t+4=0\Rightarrow t=2s$$

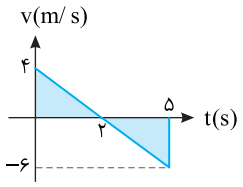
پس در لحظهٔ $t=2s$ سرعت صفر شده و متحرک تغییر جهت می‌دهد. حال مکان تغییر جهت را نیز به‌دست می‌آوریم:

$$x=-t^2+4t+5\xrightarrow{t=2s}x=-4+8+5=9m$$



در لحظهٔ $t=0$ متحرک در مکان $+5m$، در لحظهٔ $t=2s$ در مکان $+9m$ و در لحظهٔ $t=5s$ در مکان $x=0$ است. پس در کل، مسافت طی شده برابر است با: $4+9=13m$

راه‌حل دوم: می‌توانیم نمودار سرعت - زمان $v=-2t+4$ را در مدت $5s$ رسم کرده و قدرمطلق سطح‌های محصور بین نمودار و محور زمان را جمع کنیم.



$$\text{مسافت طی شده}=\left|\frac{4\times2}{2}\right|+\left|\frac{-6\times3}{2}\right|=13m$$

۸- گزینهٔ ۴ ابتدا معادلهٔ سرعت- زمان را به‌دست آورده و آن را تعیین علامت می‌کنیم. در بازهٔ زمانی که سرعت منفی است، متحرک در خلاف جهت محور x ها در حرکت است و در بازهٔ زمانی که سرعت مثبت است، متحرک در جهت مثبت محور در حرکت است.

$$v=x'\Rightarrow v=3t^2+4t=0\Rightarrow t=0\quad,\quad t=-\frac{4}{3}s\ \text{غ ق ق}$$

در تمام مدت حرکت متحرک پس از لحظهٔ $t=0$، همواره سرعت مثبت و همواره حرکت در جهت مثبت محور x ها است.

۹- گزینهٔ ۴ در حرکت کندشونده، سرعت متحرک در حال کاهش است و بردار شتاب و بردار سرعت در خلاف جهت هم هستند. معادلهٔ سرعت- زمان و معادلهٔ شتاب- زمان را به‌دست آورده و آن‌ها را تعیین‌علامت می‌کنیم:

t	۰		$+\infty$
v		−	
a		−	
av		+	

$$v=x'\Rightarrow v=-3t^2-4t\xrightarrow{v=0}\begin{cases}t=0\\ t=-\frac{4}{3}s\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

$$a=v\Rightarrow a=-6t-4\xrightarrow{a=0}t=-\frac{2}{3}s\ \text{غ ق ق}$$

با توجه به جدول تعیین‌علامت، هرگز حرکت این متحرک کندشونده نخواهد بود.

۱۰- گزینهٔ ۲ متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، لحظه‌ای تغییر جهت می‌دهد که سرعتش صفر شده و سرعت تغییر علامت بدهد.

معادلهٔ سرعت- زمان را به‌دست آورده، سرعت را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$v=x'\Rightarrow v=t^2+3t-4$$

$$v=0\Rightarrow t^2+3t-4=0\Rightarrow(t-1)(t+4)=0\Rightarrow\begin{cases}t=1s\\ t=-4s\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

در لحظهٔ $t=1s$ متحرک تغییر جهت می‌دهد.

۱۱- گزینهٔ ۱ متحرک لحظه‌ای تغییر جهت می‌دهد که سرعتش صفر شده و سرعت تغییر علامت بدهد.

$$v=x'\Rightarrow v=3t^2-6t+3\xrightarrow{v=0}3(t^2-2t+1)=0\Rightarrow3(t-1)^2=0\Rightarrow t=1s$$

با آن‌که در لحظهٔ $t=1s$ سرعت صفر می‌شود اما تغییر علامت نمی‌دهد و سرعت $3(t-1)^2$ همواره مثبت است بنابراین متحرک در هیچ لحظه‌ای تغییر جهت نمی‌دهد.

۱۲- گزینهٔ ۴ می‌دانیم سرعت لحظه‌ای، مشتق مکان نسبت به زمان است، بنابراین باید از خود بپرسیم از چه عبارتی مشتق بگیریم تا $-6t^2$ به‌دست آید که قطعاً $-2t^3$ به ذهن ما می‌رسد و با گرفتن مشتق از $3t^2$ عبارت $6t$ به‌دست می‌آید، از این‌رو معادلهٔ مکان- زمان متحرک خواهد شد: $x=-2t^3+3t^2+x_0$

با توجه به فرض پرسش در $t=1s$، $x=-2m$ می‌باشد:

$$-2=2\times(1)^3+3\times(1)^2+x_0\Rightarrow x_0=-3m$$

$$x=-2t^3+3t^2-3$$

البته بدون حل نیز می‌توان گزینهٔ (۴) را انتخاب کرد، زیرا معادلهٔ سرعت- زمان تابع درجهٔ ۲ است و قطعاً معادلهٔ مکان- زمان تابع درجهٔ ۳ است.

۱۳- گزینهٔ ۴ هرگاه در یک پرسش، که معادلهٔ مکان- زمان در آن مشخص است در مورد مسافت طی‌شده سؤال شود، ابتدا باید مشخص گردد که در بازهٔ زمانی مورد نظر، متحرک تغییر جهت می‌دهد یا نه؟ برای این منظور باید تعیین کرد در چه لحظه‌ای و در چه مکانی سرعت صفر می‌شود.

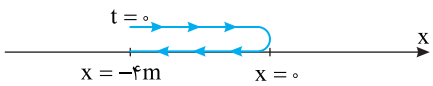
$$v=x'\Rightarrow v=-2t+4\xrightarrow{v=0}-2t+4=0\Rightarrow t=2s$$

$$x=-(2)^2+4\times2-4=0$$

حال مکان متحرک را در ابتدا و انتهای بازهٔ زمانی به‌دست می‌آوریم:

$$t_1=0\Rightarrow x_1=-4m$$

$$t_2=4s\Rightarrow x_2=-16+16-4=-4m$$



با توجه به شکل مسافت طی‌شده برابر است با: $d=4+4=8m$

۱۴- گزینهٔ ۴ ابتدا معادلهٔ سرعت- زمان و معادلهٔ شتاب- زمان را به کمک مشتق‌گیری به دست می‌آوریم.

$$v=x'\Rightarrow v=۳t^۲-۱۲t+۹$$
$$a=v'\Rightarrow a=۶t-۱۲$$

برای تغییر جهت بردار شتاب باید ابتدا شتاب صفر شود و سپس تغییر علامت دهد. از این‌رو شتاب را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$a=۰\Rightarrow ۶t-۱۲=۰\Rightarrow t=۲s$$

معادلهٔ شتاب تابع درجه یک است که در دو طرف ریشه‌اش تغییر علامت می‌دهد بنابراین در $t=۲s$ بردار شتاب تغییر جهت می‌دهد. گزینهٔ (۱) درست است.

برای بررسی تغییر جهت بردار سرعت، معادلهٔ سرعت را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$۳t^۲-۱۲t+۹=۰\Rightarrow t^۲-۴t+۳=۰\Rightarrow (t-۱)(t-۳)=۰\Rightarrow \begin{cases} t=۱s \\ t=۳s \end{cases}$$

در معادلهٔ درجه ۲ در دو طرف ریشه تغییر علامت وجود دارد پس سرعت در لحظه‌های $t=۱s$ و $t=۳s$ تغییر علامت می‌دهد و گزینهٔ (۲) درست است.

در لحظهٔ $t=۴s$ سرعت و شتاب را به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} v=۳(۴)^۲-۱۲(۴)+۹\Rightarrow v=۴۸-۴۸+۹=۹>۰ \\ a=۶(۴)-۱۲=۱۲>۰ \end{array}\right\}\Rightarrow av>۰ \quad \text{حرکت تندشونده}$$

بنابراین گزینهٔ (۳) نیز درست است.

۱۵- گزینهٔ ۴ ابتدا معادلهٔ شتاب-زمان را با مشتق‌گیری از معادلهٔ سرعت- زمان به دست می‌آوریم.

$$a=v'\Rightarrow a=-۱۶t$$

کاملاً مشخص است که با گذشت زمان، بزرگی شتاب در حال افزایش است و گزینهٔ (۱) نادرست است، همچنین گزینهٔ (۳).

سرعت را تعیین علامت می‌کنیم.

$$v=۰\Rightarrow ۲۰۰-۸t^۲=۰\Rightarrow t^۲=۲۵\Rightarrow t=۵s,\ t=-۵s \qquad \text{غ.ق.ق.}$$

علامت تابع بین دو ریشه مخالف علامت ضریب $t^۲$ بوده و مطابق جدول روبه‌رو در بازهٔ صفر تا $+۵s$ سرعت مثبت اما شتاب $(a=-۱۶t)$ منفی بوده و حرکت کندشونده است بنابراین گزینهٔ (۲) نادرست است. همچنین در بازهٔ صفر تا $+۵s$ علامت سرعت مثبت بوده و حرکت در جهت محور xها است و برای $t>۵s$ علامت سرعت منفی شده و در خلاف جهت محورxها بوده بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

t	$-\infty$		-۵		۰		$+۵$		$+\infty$
v		−	۰	+		+	۰	−	
a						−		−	
		غ.ق.ق.							

۱۶- گزینهٔ ۲ معادلهٔ سرعت- زمان و معادلهٔ شتاب-زمان را به کمک مشتق‌گیری به‌دست می‌آوریم.

$$v=x'\Rightarrow v=۶t-۳t^۲ \xrightarrow{a=\frac{dv}{dt}} a=۶-۶t$$

ریشهٔ معادلهٔ شتاب- زمان را به دست می‌آوریم زیرا در لحظه‌ای که شتاب صفر می‌شود و تغییر علامت می‌دهد جهت بردار شتاب عوض می‌شود.

$$a=۰\Rightarrow ۶-۶t=۰\Rightarrow t=۱s$$

تابع درجه یک بوده و علامت آن در دو طرف ریشه تغییر می‌کند، پس جهت بردار شتاب در لحظهٔ $t=۱s$ عوض می‌شود و گزینهٔ (۱) نادرست است.

ریشهٔ معادلهٔ سرعت- زمان را به دست می‌آوریم.

t	$-\infty$		۰		۱		۲		$+\infty$
v			۰	+		+	۰	−	
a		غ.ق.ق.		+	۰	−		−	
av				+ تندشونده		− کندشونده		+ تندشونده	

$$v=۰ \Rightarrow ۶t-۳t^۲=۰\Rightarrow \begin{cases} t=۰ \\ t=۲s \end{cases}$$

پس در بازهٔ صفر تا ۲s علامت سرعت عوض نمی‌شود و جهت حرکت جسم تغییر نمی‌کند بنابراین گزینهٔ (۲) درست و گزینهٔ (۳) نادرست است. هر چند که حل مسأله تمام شده، گزینهٔ (۴) را نیز بررسی می‌کنیم. هر دو معادلهٔ سرعت و شتاب را تعیین علامت می‌کنیم با توجه به جدول گزینهٔ (۴) نادرست است.

پاسخ آزمون‌های سراسری ۱۴۰۱

A ۲۵۰۲ | ۱

امواج مکانیکی برای انتشار نیاز به محیط مادی دارند. امواج صوتی از نوع امواج مکانیکی هستند بنابراین برای انتشار نیاز به محیط مادی دارند.

پرتوهای x، رادیویی و فروسرخ از جنس امواج الکترومغناطیسی بوده و می‌توانند در خلأ منتشر شوند و برای انتشار به محیط مادی نیاز ندارند.

A ۲۵۰۳ | ۴

یادآوری انرژی الکترون در ترازهای اتم هیدروژن از رابطهٔ $E_n=\frac{-E_R}{n^2}$ به‌دست می‌آید.

در اتم هیدروژن $n=1$ تراز پایه، $n=2$ اولین حالت برانگیخته و تراز $n=3$ دومین حالت برانگیخته است، انرژی در دو حالت را می‌نویسیم و بر هم تقسیم می‌کنیم.

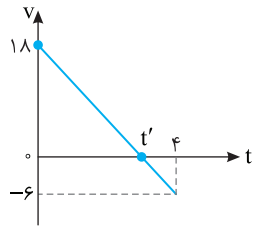
$$E_A=\frac{-E_R}{n^2}\Rightarrow\begin{cases}E_3=\frac{-E_R}{3^2}=\frac{-E_R}{9}\\ E_1=\frac{-E_R}{1^2}=-E_R\end{cases}\xrightarrow{\div}\frac{E_3}{E_1}=\frac{\frac{-E_R}{9}}{-E_R}=\frac{1}{9}$$

B ۲۵۰۴ | ۲

خط فکری برای به‌دست آوردن تندی متوسط و یا مسافت طی شده بهتر است نمودار سرعت - زمان $(v-t)$ متحرک را رسم کرده و از سطح زیر نمودار کمک گرفت.

۱ نمودار $v-t$ در بازهٔ صفر تا ۴s را رسم می‌کنیم

$$v=-6t+18\begin{cases}\xrightarrow{t=0}v=18m/s\\ \xrightarrow{t=4s}v=-6m/s\end{cases}$$

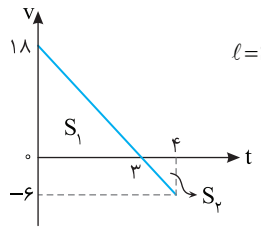


۲ لحظهٔ t' لحظهٔ تغییر جهت حرکت متحرک یعنی لحظه‌ای که $v=0$ است:

$$v=-6t+18\xrightarrow{v=0}-6t'+18=0\Rightarrow t'=3s$$

۳ مسافت طی شده را حساب می‌کنیم:

$$\ell=S_1+S_2\Rightarrow\ell=\frac{3\times18}{2}+\frac{1\times6}{2}=27+3=30m$$



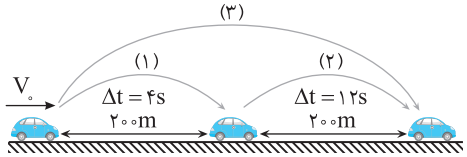
۴ تندی متوسط برابر است با:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow s'_{av}=\frac{30}{4}=7/5m/s$$

B ۲۵۰۵ | ۴

خط فکری بازهٔ زمانی t_1 تا $t_2=t_1+16(s)$ یعنی کل مدت مورد بررسی ۱۶s است. و در این ۱۶s، متحرک ۴۰۰m جابه‌جا شده است. بنابراین نصف این مسیر یعنی ۲۰۰m را در ۴s و ۲۰۰ متر بعدی را در $16-4=12$ طی کرده است. از این رو کافی شما از معادلهٔ جابه‌جایی - مکان در حرکت با شتاب ثابت یک بار در ۴s و بار دیگر در کل مدت ۱۶s استفاده کنید.

مسیر حرکت را رسم می‌کنیم و با توجه به اینکه جابه‌جایی متحرک در زمان‌های مختلف داده شده است. برای مسیرهای (۱) و (۳) معادلهٔ $\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t$ را می‌نویسیم.



$$(1)\ \Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow200=\frac{1}{2}a(4)^2+4v_0\Rightarrow200=8a+4v_0\quad(I)$$

$$(3)\ \Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow400=\frac{1}{2}a\times(16)^2+16v_0\Rightarrow400=128a+16v_0\quad(II)$$

حال با حل دستگاه دو معادله دو مجهول شتاب حرکت را حساب می‌کنیم

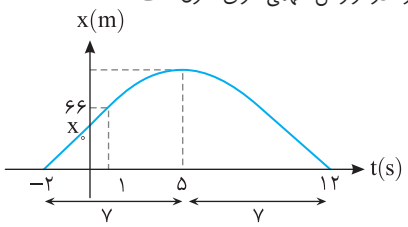
$$\begin{cases}-4(8a+4v_0=200)\\ 128a+16v_0=400\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-32a-16v_0=-800\\ 128a+16v_0=400\end{cases}\xrightarrow{+}96a=-400$$

$$\Rightarrow a=\frac{-400}{96}\Rightarrow a=\frac{-25}{6}m/s^2$$

بزرگی شتاب خواسته شده است از این‌رو: $|a|=\frac{25}{6}m/s^2$

C ۲۵۰۶ | ۳

نکته نمودار مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت یک سهمی است و سهمی نسبت به محور گذرا از رأس سهمی دارای تقارن است.



با توجه به نمودار ریشه‌های این سهمی $t=-2s$ و $t=12s$ است. بنابراین معادلهٔ آن خواهد شد:

$$x=A(t-12)(t+2)$$

باید مختصات $t=1s$ و $x=66m$ در این معادله صدق کند.

$$66=A(1-12)(1+2)\Rightarrow A=-2$$

معادله را کامل می‌کنیم.

$$x=-2(t-12)(t+2)$$

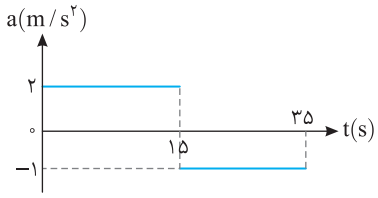
اکنون کافی است که در این معادله $t=0$ را قرار داده و مکان اولیه را حساب کنیم:

$$x_0=-2(0-12)(0+2)\Rightarrow x_0=48m$$

B ۲۵۰۷ | ۱

خط فکری نمودار شتاب - زمان، اطلاعات خاصی از حرکت به ما نمی‌دهد بنابراین از نقاط روی نمودار استفاده کرده و به کمک روابط حرکت با شتاب ثابت مسئله را حل می‌کنیم. سرعت و مکان متحرک در $t=2s$ به ما داده شده است. با استفاده از آن‌ها و با توجه به اینکه در بازهٔ ۲s تا ۱۵s، شتاب ثابت و $12m/s^2$ است مکان و سرعت متحرک در $t=15s$ را حساب کرده سپس در بازهٔ ۱۵s تا ۳۵s نیز به کمک معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت مکان در $t=35s$ را به دست می‌آوریم.

۱ در لحظهٔ $t=2s$، مکان $-16m$ و سرعت $-6m/s$ و شتاب ثابت $2m/s^2$ است بنابراین مکان در لحظهٔ $t=15s$ خواهد شد:



$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow x_1=\frac{1}{2}\times2\times(13)^2+(-6)\times13+(-16)$$

$$x_1=169+(-78)-16\Rightarrow x_1=75m$$

۲ سرعت در لحظهٔ $t=15s$ را حساب می‌کنیم

$$v_1=at+v_0\Rightarrow v_1=2\times13-6\Rightarrow v_1=20m/s$$

۳ سرعت $v_1=20m/s$ سرعت اولیهٔ قسمت دوم حرکت و مکان $x_1=75m$

مکان اولیهٔ این قسمت است بنابراین می‌توان به کمک معادلهٔ مکان - زمان مکان در $t=35s$ را حساب کرد.

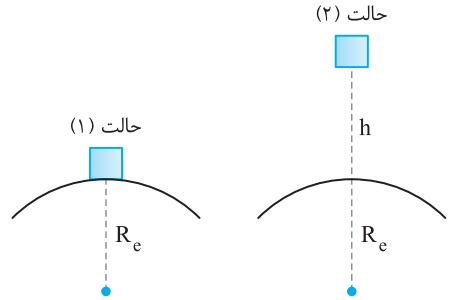
$$x_2=\frac{1}{2}a_2t_2^2+v_1t+x_1\Rightarrow x_2=\frac{1}{2}\times(-1)\times(20)^4+20\times20+75$$

$$x_2=-200+400+75\Rightarrow x_2=275m\Rightarrow \vec{x}_2=275\vec{i}$$

۴ | ۲۵۰۸

شتاب گرانش ۹۹ درصد کاهش یافته؛ $g'=g-\frac{99}{100}g\Rightarrow g'=\frac{1}{100}g$

شتاب گرانش از رابطهٔ $g=G\frac{M_e}{r^2}$ به دست می‌آید که r فاصله از مرکز زمین است



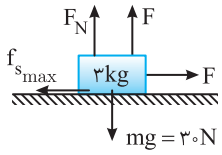
$$\frac{GM_e}{(h+R_e)^2}=\frac{1}{100}\frac{GM_e}{R_e^2}$$

$$\left(\frac{R_e}{h+R_e}\right)^2=\frac{1}{100}\Rightarrow\frac{R_e}{h+R_e}=\frac{1}{10}\Rightarrow 10R_e+h+R_e\Rightarrow h=9R_e$$

B | ۲ | ۲۵۰۹

حالت اول: جسم در آستانهٔ حرکت بوده و نیروی اصطکاک آن نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه $f_{s_{max}}$ است:

نیروی عمودی سطح را به دست می‌آوریم:



در راستای قائم جسم حرکت نمی‌کند: $F+F_N=mg$

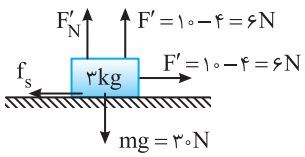
$\Rightarrow F_N=30-F$

در راستای افقی جسم در آستانهٔ حرکت بوده و هنوز حرکت نکرده: $F=f_{s_{max}}$

$$\xrightarrow[F_N=30-F]{f_{s_{max}}=\mu_sF_N}F=\mu_s(30-F)\xrightarrow{\mu_s=0/5}F=0/5(30-F)$$

$$\Rightarrow F+0/5F=15\Rightarrow 1/5F=15\Rightarrow F=10N$$

حالت دوم: هر کدام از نیروهای F، ۴N کاهش یافته و F=۱۰N به ۶N می‌رسد. دقت کنید که چون نیروی در راستای قائم کاهش یافته پس F_N افزایش می‌یابد و نیروی

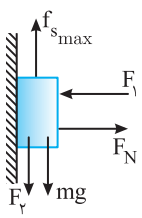


F افقی نیز کاهش یافته، در واقع در قسمت قبلی با نیروی ۱۰N و نیروی عمودی سطح ۳۰−۱۰=۲۰N جسم در آستانهٔ حرکت بوده پس در این حالت که نیروی افقی $F'=6N$ شده و نیروی عمودی سطح $F'_N=30-6=24N$ افزایش یافته جسم همچنان ساکن می‌ماند و نیروی اصطکاک برابر نیروی F' است.

$F'=f_s\Rightarrow f_s=6N$

B | ۱ | ۲۵۱۰

۱ ابتدا نیروهای وارد بر قطعه چوب را رسم می‌کنیم، دقت کنید قطعه چوب در آستانهٔ لغزش رو به پایین قرار دارد و در نتیجه نیروی اصطکاک بیشینه $(f_{s_{max}})$ و رو به بالا است:



۲ نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت را حساب می‌کنیم.

$$F_{net_y}=0\Rightarrow f_{s_{max}}=F_2+mg\xrightarrow[F_2=3/5N,\,m=0/25kg]{f_{s_{max}}}f_{s_{max}}=3/5+2/5=6N$$

۳ نیرویی که دیوار به چوب وارد می‌کند از رابطهٔ $R=\sqrt{F_{s_{max}}^2+F_N^2}$ به‌دست می‌آید نیروی عمودی سطح خواهد شد.

$$R=\sqrt{f_{s_{max}}^2+F_N^2}\Rightarrow 10=\sqrt{6^2+F_N^2}\Rightarrow 100=36+F_N^2\Rightarrow F_N=8N$$

۴ $f_{s_{max}}$ برابر μ_sF_N است:

$$f_{s_{max}}=\mu_sF_N\Rightarrow 6=\mu_s\times8\Rightarrow\mu_s=\frac{6}{8}=0/75$$

B | ۳ | ۲۵۱۱

خط فکری ابتدا دورهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم.

با توجه به شکل:

$$5\frac{\lambda}{4}=25\Rightarrow\lambda=20cm=0/2m$$

$$\lambda=vT\Rightarrow\frac{2}{10}=10\times T\Rightarrow T=0/02s$$

حال برای بررسی گزارهٔ (الف) دقت کنید که گفته شده مسافتی که موج در هر ثانیه طی می‌کند، با توجه اینکه سرعت انتشار موج $10m/s$ است پس این مسافت برابر است با:

$\Delta x=vt=10\times1=10m$

پس گزارهٔ (الف) نادرست است.

گزارهٔ (ب): هر ذره از محیط در مدت یک نوسان، مسافت ۴A را طی می‌کند. بنابراین با توجه به اینکه $T=0/02s$ است، در ۰/۰۱ ثانیه تعداد نوسان‌های هر ذره از محیط برابر است با:

$$N=\frac{t}{T}=\frac{0/01}{0/02}=\frac{1}{2}$$

و ذره مسافت ۲A یعنی ۴۰cm را طی می‌کند و این گزاره درست است.

گزارهٔ (پ) در مورد جابه‌جایی است. اگر ذره‌ای در نقطه تعادل باشد بعد از ۰/۰۱s یعنی $\frac{T}{2}$ مجدداً در نقطهٔ تعادل است و جابه‌جایی‌اش صفر است. و اگر ذره‌ای در مکان بیشینه باشد پس از $\frac{T}{2}$ در مکان کمینه قرار دارد و جابه‌جایی آن برابر ۲A خواهد شد.

پس جابه‌جایی بستگی به مکان اولیه ذره دارد و این گزاره نادرست است.

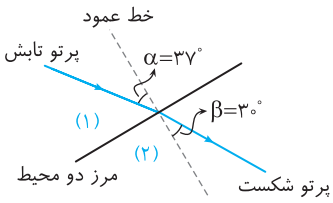
بررسی گزارهٔ (ت): ۰/۰۲s برابر یک دوره است و جابه‌جایی هر ذره در مدت یک دوره همواره برابر صفر است. پس گزاره‌های (ب) و (ت) درست‌اند.

B | ۴ | ۲۵۱۲

خط فکری برای به‌دست آوردن نسبت سرعت‌ها در دو محیط (v_1/v_2) باید از قانون شکست عمومی استفاده کنید. اما قبل از آن باید زاویهٔ تابش (θ_1) و زاویهٔ شکست (θ_2) را به کمک شکل مشخص کنید.

نکته زاویه‌ای که جبههٔ موج با مرز بین دو محیط می‌سازد برابر زاویه‌ای است که پرتو آن با خط عمود بر مرز می‌سازد.

۱ با توجه به نکتهٔ بالا نمودار پرتویی به‌صورت روبه‌رو بوده و زاویهٔ تابش و زاویهٔ شکست به ترتیب برابر $\theta_1=37^\circ$ و $\theta_2=30^\circ$ است.



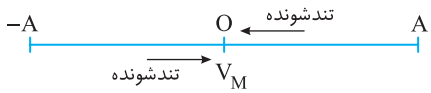
۲ حال با توجه به قانون شکست عمومی:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{v_1}{v_2}\Rightarrow\frac{\sin37^\circ}{\sin30^\circ}=\frac{v_1}{v_2}\Rightarrow\frac{0/6}{0/5}=\frac{v_1}{v_2}\Rightarrow\frac{v_1}{v_2}=\frac{6}{5}$$

B ۲۵۱۳ ۴

نکته در مدت یک دوره، $\frac{T}{2}$ ثانیه حرکت تندشونده است.

نکته هرگاه نوسانگر در حال حرکت به‌سوی حالت تعادل باشد حرکت تندشونده است.



۱ با توجه به معادلهٔ حرکت $x=0/02\cos 4\pi t$ دوره را حساب می‌کنیم.

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow 4\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{1}{2}s$$

۲ بازهٔ زمانی $t_1=\frac{1}{12}s$ تا $t_2=\frac{7}{6}s$ را با دوره مقایسه می‌کنیم.

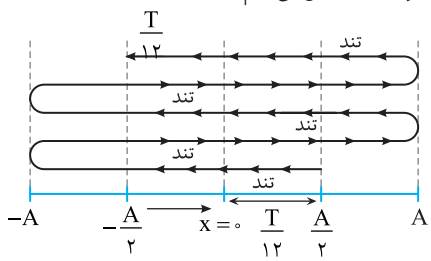
$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{7}{6}-\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}}\Rightarrow\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{14-1}{12}}{\frac{1}{2}}\Rightarrow\Delta t=\frac{13}{6}T=2T+\frac{T}{6}$$

۳ در بازهٔ $2T$ به مدت نصف بازه یعنی T حرکت تند شونده است.

۴ اما در مدت $\frac{T}{6}$ چگونه است؟ برای این منظور مکان نوسانگر در ابتدای بازه $(t=\frac{1}{12}s)$ را باید مشخص کنیم.

$$x=0/02\cos 4\pi(\frac{1}{12})\Rightarrow x=0/02\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=0/01m\Rightarrow x=\frac{1}{2}A$$

۵ مسیر حرکت را مشخص می‌کنیم.



۶ با توجه به مسیر در مدت حرکت از $x=0$ تا $\frac{A}{2}$، $\frac{T}{12}$ حرکت تندشونده و در مدت $2T$ بعدی نیز به مدت T حرکت کندشونده است یعنی در کل زمان حرکت تندشونده خواهد شد:

$$\Delta t=T+\frac{T}{12}=\frac{13T}{12}\xrightarrow{T=\frac{1}{2}s}\Delta t=\frac{13}{24}s$$

B ۲۵۱۴ ۱

خط فکری در حل این نوع مسائل ابتدا باید طول موج را حساب کنید. سپس به کمک رابطهٔ ریدبرگ n و n′ را به‌دست بیاورید اما در اغلب این مسائل شما باید در واقع n و n′ را حدس بزنید. برای این منظور از گزینه‌ها کمک بگیرید.

۱ ابتدا طول موج بسامد $2/25\times10^{15}$ هرتز را حساب می‌کنیم:

$$\lambda=\frac{c}{f}\Rightarrow\lambda=\frac{3\times10^8}{2/25\times10^{15}}\Rightarrow\lambda=\frac{10^{-7}}{0/75}\Rightarrow\lambda=\frac{4}{3}\times10^{-7}m=\frac{400}{3}nm$$

۲ حال به کمک معادلهٔ ریدبرگ n و n′ را به‌دست می‌آوریم

$$\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})\Rightarrow\frac{3}{400}=\frac{1}{100}(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})\Rightarrow\frac{3}{4}=(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})$$

با توجه به گزینه‌ها مشخص می‌شود که $n'=1$ و $n=2$ است.

B ۲۵۱۵ ۳

۱ رشتهٔ براکت $n'=4$ است و دومین خط آن یعنی گذار از $n=6$ به $n=4$ است.

اولین خط رشتهٔ براکت $n'=4, n=5$

دومین خط رشتهٔ براکت $n'=4, n=6$

۲ طول موج این خط طیف را از رابطهٔ ریدبرگ برحسب R حساب می‌کنیم.

$$\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})\Rightarrow\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{16}-\frac{1}{36})=R(\frac{9-4}{144})\Rightarrow\frac{1}{\lambda}=\frac{5R}{144}\Rightarrow\lambda=\frac{144}{5R}$$

۳ رشتهٔ بالمر $n'=2$ بوده و چهارمین خط آن یعنی گذار از $n=6$ به $n'=2$ چهارمین خط رشتهٔ بالمر سومین خط رشتهٔ بالمر دومین خط رشتهٔ بالمر اولین خط رشتهٔ بالمر

$n'=2, n=3$ $\quad n'=2, n=4$ $\quad n'=2, n=5$ $\quad n'=2, n=6$

۴ طول موج این خط طیف را نیز به کمک رابطهٔ ریدبرگ حساب می‌کنیم.

$$\frac{1}{\lambda'}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})\Rightarrow\frac{1}{\lambda'}=R(\frac{1}{4}-\frac{1}{36})\Rightarrow\frac{1}{\lambda'}=R(\frac{32}{144})\Rightarrow\lambda'=\frac{144}{32R}$$

۵ حال نسبت $\frac{\lambda}{\lambda'}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\lambda}{\lambda'}=\frac{\frac{144}{5R}}{\frac{144}{32R}}\Rightarrow\frac{\lambda}{\lambda'}=\frac{32}{5}$$

میانبر m امین خط رشتهٔ n′ یعنی: $n'=n',\quad n=m+n'$

B ۲۵۱۶ ۳

راه‌حل اول: هستهٔ مادر را با نماد X و هستهٔ دختر را با نماد Y نشان می‌دهیم:

$Z=53$ $\qquad$ $Z=52$

$A=Z+N\Rightarrow A=53+71=124$ $\qquad$ $A=Z+N\Rightarrow A=52+72=124$

${}^{A}_{Z}X\Rightarrow{}^{124}_{53}X$ $\qquad$ ${}^{A}_{Z}Y\Rightarrow{}^{124}_{52}Y$

حال معادلهٔ واکنش را می‌نویسیم:

${}^{124}_{53}X\rightarrow{}^{124}_{52}Y+\cdots$

برای آنکه عدد اتمی دو طرف معادله یکسان باشد باید ذرهٔ ${}^{0}_{+1}e$ گسیل شده باشد، یعنی در واپاشی گسیل پوزیترون داریم.

راه‌حل دوم: با توجه به شکل هسته‌ها، یک پروتون به یک نوترون تبدیل شده چون تعداد پروتون هستهٔ دختر یک واحد کم و تعداد نوترون آن یک واحد افزایش یافته است. در واپاشی (گسیل) پوزیترون یک پروتون به یک نوترون تبدیل می‌شود.

B ۲۵۱۷ ۱

یادآوری تندی انتشار موج در تار برابر است با:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=\sqrt{\frac{F\ell}{m}}=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}=\frac{2}{D}\sqrt{\frac{F}{\rho\pi}}$$

با توجه به اینکه چگالی و سطح مقطع داده شده از رابطهٔ $v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}$ برای حل استفاده می‌کنیم، دقت کنید در این رابطه باید واحد چگالی $\frac{kg}{m^3}$ باشد و بنابراین ابتدا $8\frac{g}{cm^3}$ را به $\frac{kg}{m^3}$ تبدیل می‌کنیم:

$$\rho=8\frac{g}{cm^3}=8000\frac{kg}{m^3}\quad,\quad A=2mm^2=2\times10^{-6}m^2$$

$$v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}\Rightarrow 25=\sqrt{\frac{F}{8000\times2\times10^{-6}}}\xrightarrow{\text{به توان دو}}625=\frac{F}{16\times10^{-3}}\Rightarrow F=10N$$

B ۲۵۱۸ ۳

۱ بسامد تار مرتعش از رابطهٔ $f_n=\frac{nv}{2\ell}$ به‌دست می‌آید. $160Hz$ برابر f_2 و $320Hz$ برابر f_4 است بنابراین:

$$\begin{cases}f_4=\frac{4v}{2\ell}\\ f_2=\frac{2v}{2\ell}\end{cases}\Rightarrow f_4-f_2=\frac{2v}{2\ell}\xrightarrow[f_2=160Hz]{f_4=320Hz}\frac{2v}{2\ell}=160Hz$$

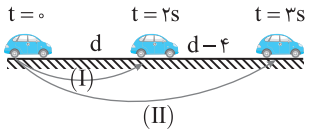
بسامد f_1 برابر $\frac{v}{2\ell}$ و بسامد f_3 برابر $\frac{3v}{2\ell}$ است:

$$f_3-f_1=\frac{3v}{2\ell}-\frac{v}{2\ell}\Rightarrow\frac{2v}{2\ell}=160Hz$$

B ۲۵۱۹ ۲

خط فکری شتاب حرکت مثبت بوده و با توجه به سؤال متحرک در جهت محور x در حال حرکت بوده پس سرعت نیز مثبت است. حرکت تندشونده $(av>0)$ با شتاب ثابت بوده و تغییر جهت نداریم بنابراین مسافت و جابه‌جایی با هم برابر است.

۱ جابه‌جایی در بازهٔ ۰ تا ۲s را برابر d می‌گیریم و جابه‌جایی در بازهٔ ۲s تا ۳s برابر $d-4$ متر است. سؤال سرعت اولیه را خواسته بنابراین برای بازهٔ ۰ تا ۲s و ۰ تا ۳s به کمک رابطهٔ $\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t$ سؤال را حل می‌کنیم:



$$I)\ d=\frac{1}{2}at^2+v_0t \xrightarrow{t=2s} d=\frac{1}{2}a(2)^2+v_0(2)$$

$$\Rightarrow d=2a+2v_0 \xrightarrow{a=4} d=8+2v_0$$

$$II)\ 2d-4=\frac{1}{2}a(t')^2+v_0t' \xrightarrow{t'=3s} 2d-4=4/5a+3v_0$$

$$\xrightarrow{a=4} 2d-4=18+3v_0 \Rightarrow 2d=22+3v_0$$

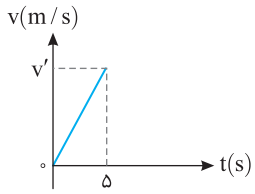
۲ حال با توجه به دو معادله دو مجهول بالا، v_0 را حساب می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} d=8+2v_0 \xrightarrow{\times -2} -2d=-16-4v_0 \\ 2d=22+3v_0 \xrightarrow{\times 1} 2d=22+3v_0 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 0=6-v_0 \Rightarrow v_0=6m/s$$

B ۲۵۲۰ ۲

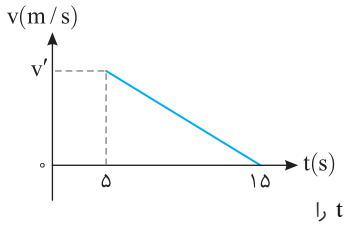
سرعت متحرک در لحظهٔ ۵s را v' می‌گیریم.

۱ شتاب در بازهٔ ۰ تا ۵s برابر شیب خط نمودار در این بازه است:



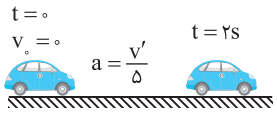
$$a_1=\frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a_1=\frac{v'}{5}$$

۲ شتاب در بازهٔ ۵s تا ۱۵s برابر شیب خط نمودار در این بازه است:



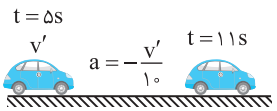
$$a_2=\frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a_2=\frac{-v'}{10}$$

۳ سرعت در t=۲s و t=۱۱s را حساب می‌کنیم:



$$v_2=at+v_1 \Rightarrow v_{t=2s}=\frac{v'}{5}\times 2$$

$$\Rightarrow v_{t=2s}=\frac{2v'}{5}$$



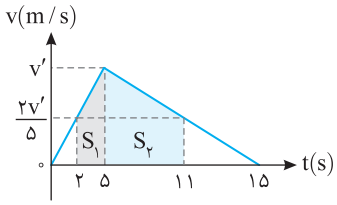
$$v_2=at+v_1 \xrightarrow{\Delta t=6s}$$

$$v_{t=11s}=\frac{-v'}{10}\times 6+v'=\frac{4v'}{10}=\frac{2v'}{5}$$

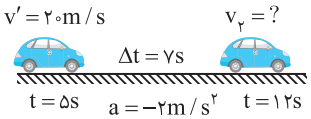
۴ حال با توجه به سطح زیر نمودار v−t که برابر جابه‌جایی است خواهیم داشت:

$$\Delta x=S_1+S_2 \Rightarrow 126=\frac{3(\frac{2v'}{5}+v')}{2}+\frac{6(\frac{2v'}{5}+v')}{2}$$

$$\Rightarrow 126=2/1v'+4/2v' \Rightarrow 126=6/3v' \Rightarrow v'=20m/s$$



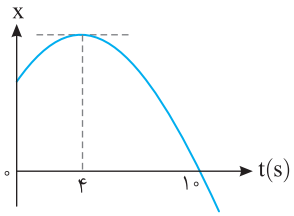
در بازهٔ ۵s تا ۱۵s شتاب برابر $\frac{-v'}{10}=\frac{-20}{10}=-2m/s^2$ است و سرعت در هر ثانیه $2m/s^2$ کم می‌شود:



$$v_2=at+v' \Rightarrow v_2=-14+20 \Rightarrow v_2=6m/s$$

B ۲۵۲۱ ۱

خط فکری شتاب حرکت را ثابت و برابر a می‌گیریم، سرعت در t=۴s که رأس سهمی است برابر صفر است زیرا در نمودار x−t شیب خط مماس برابر سرعت بوده که مطابق شکل این شیب در لحظهٔ t=۴s برابر صفر است:



۱ سرعت در t=۴s برابر صفر است، سرعت در t=۲s را به‌دست می‌آوریم:

$$v_2=at+v_1 \Rightarrow 0=2a+v_1$$

$$\Rightarrow v_1=-2a$$

تندی در t=۲s برابر $|2a|$ است.

۲ سرعت در لحظهٔ t=۴s برابر صفر است، سرعت در t=۸s را به‌دست می‌آوریم:

$$v_3=at+v_2 \Rightarrow v_3=4a$$

تندی در t=۸s برابر $|4a|$ است.

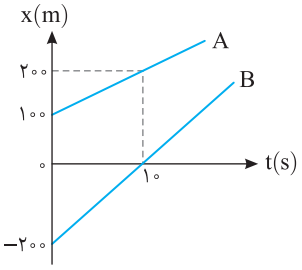
۳ نسبت تندی v_3 و v_1 را حساب می‌کنیم:

$$\frac{v_3}{v_1}=\frac{|4a|}{|2a|}=2$$

B ۲۵۲۲ ۳

خط فکری معادلهٔ حرکت دو متحرک را می‌نویسیم. فاصلهٔ دو متحرک برابر $|x_A-x_B|$ بوده که باید کمتر یا مساوی ۲۰ متر باشد.

۱ شیب خط نمودار x−t برابر سرعت متحرک است:



$$v_A=\frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=10s]{x_0=100m,\ x_1=200m} v_A=\frac{100}{10}=10m/s$$

$$v_B=\frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=10s]{x_0=-200m,\ x_1=0} v_B=\frac{200}{10}=20m/s$$

۲ معادلهٔ حرکت دو متحرک را می‌نویسیم:

$$x_A=v_At+x_0 \Rightarrow x_A=10t+100$$

$$x_B=v_Bt+x_0 \Rightarrow x_B=20t-200$$

۳ خواستهٔ سؤال این است که فاصلهٔ دو متحرک از هم کمتر یا مساوی ۲۰ متر باشد:

$$|x_B-x_A|\le 20m \Rightarrow |20t-200-10t-100|\le 20$$

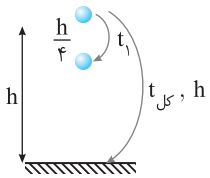
$$\Rightarrow |10t-300|\le 20 \Rightarrow -20\le 10t-300\le 20$$

$$\Rightarrow 280\le 10t\le 320 \Rightarrow 28\le t\le 32$$

بنابراین بازهٔ زمانی برابر $32-28=4s$ است.

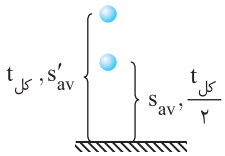
B ۲۵۲۳ ۳

ابتدا مدت بازهٔ زمانی سقوط در جابه‌جایی h و $\frac{3h}{4}$ پایانی مسیر را به‌دست می‌آوریم:



$$\begin{cases} \frac{h}{4}=\frac{1}{2}gt_1^2 \\ h=\frac{1}{2}gt_{کل}^2 \end{cases} \xrightarrow{\div} \frac{1}{4}=\frac{t_1^2}{t_{کل}^2} \Rightarrow t_1=\frac{t_{کل}}{2}$$

بنابراین $\frac{h}{4}$ اول مسیر در مدت نصف زمان کل سقوط و $\frac{3h}{4}$ دیگر مسیر نیز در مدت نصف دیگر طی خواهد شد:



$$s_{av}=\frac{\frac{3h}{4}}{\frac{t_{کل}}{2}} \xrightarrow{s_{av}=15} 15=\frac{3h}{2t_{کل}} \Rightarrow \frac{h}{t_{کل}}=10\frac{m}{s}$$

$$s'_{av}=\frac{h}{t_{کل}}=10\frac{m}{s}$$

B ۲۵۲۴ ۲

تکانه: حاصلضرب جرم در بردار سرعت جسم است.

وقتی که جرم ثابت است برای دو برابر شدن تکانه کافی است سرعت جسم دو برابر شود. بنابراین ابتدا، شتاب حرکت را حساب می‌کنیم، سپس مدت زمانی که سرعت دو برابر می‌شود را به‌دست می‌آوریم.

۱ به کمک قانون دوم نیوتون شتاب حرکت خواهد شد:

$$F_{net}=ma \xrightarrow{F_{net}=4N} 4=20a \Rightarrow a=0/2m/s^2$$

۲ با توجه به فرض مسئله:

$$P_2=2P_1 \Rightarrow mv_2=2mv_1 \Rightarrow v_2=2v_1 \Rightarrow v_2=2\times5 \Rightarrow v_2=10m/s$$

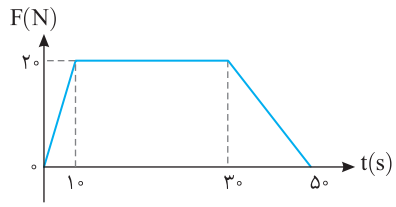
۳ با توجه به تعریف شتاب خواهیم داشت:

$$a=\frac{v_2-v_1}{\Delta t} \Rightarrow 0/2=\frac{10-5}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t=\frac{5}{0/2} \Rightarrow \Delta t=25s$$

B ۲۵۲۵ ۳

به کمک سطح زیر نمودار نیرو - زمان، تغییر تکانه را حساب می‌کنیم:

$$\Delta P=S=(50+20)\times\frac{20}{2}=700kgm/s$$

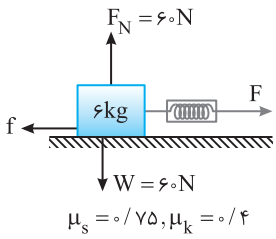


نیروی خالص متوسط وارد بر جسم برابر آهنگ تغییر تکانه است. از این‌رو می‌توان نوشت:

$$F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t} \Rightarrow F_{av}=\frac{700}{50} \Rightarrow F_{av}=14N$$

B ۲۵۲۶ ۱

۱ ابتدا نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم تا مشخص شود که جسم به حرکت درمی‌آید یا نه؟



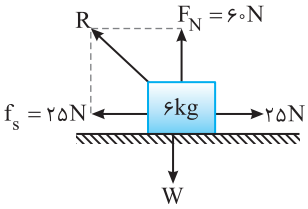
$$f_{s\,max}=\mu_s F_N \Rightarrow f_{s\,max}=\mu_s mg$$

$$\Rightarrow f_{s\,max}=0/75\times60 \Rightarrow f_{s\,max}=45N$$

۲ نیروی کشسانی نیروسنج ۲۵N بوده و از $f_{s\,max}$ کمتر است بنابراین جسم ساکن می‌ماند و نیروی اصطکاک ایستایی وارد بر جسم خواهد شد:

$$F_{net}=0 \Rightarrow f_s=F_e \Rightarrow f_s=25N$$

۳ بنا به قانون سوم نیوتون نیرویی که جسم بر سطح وارد می‌کند هم‌اندازهٔ نیرویی است که سطح بر جسم وارد می‌کند.



$$R=\sqrt{F_s^2+F_N^2}$$

$$\Rightarrow R=\sqrt{25^2+60^2} \Rightarrow R=65N$$

B ۲۵۲۷ ۱

۱ جسم در هر دقیقه (t=۶۰s) ، ۳۰ دور می‌چرخد بنابراین دوره خواهد شد:

$$T=\frac{t}{N} \Rightarrow T=\frac{60}{30} \Rightarrow T=2s$$

۲ تندی حرکت جسم را حساب می‌کنیم:

$$v=\frac{2\pi r}{T} \xrightarrow{r=2m} v=\frac{2\pi\times2}{2} \Rightarrow v=2\pi\, m/s$$

۳ انرژی جنبشی جسم را به‌دست می‌آوریم:

$$K=\frac{1}{2}mv^2 \xrightarrow{m=5kg} K=\frac{1}{2}\times5\times(2\pi)^2 \Rightarrow K=10\pi^2 J$$

B ۲۵۲۸ ۴

با توجه به تعریف تراز شدت صوت ابتدا، شدت صوت در فاصلهٔ ۵۰ متری چشمه را به‌دست می‌آوریم:

$$\beta=10\log\frac{I}{I_0} \xrightarrow{\beta=60dB} 60=10\log\frac{I}{10^{-12}} \Rightarrow I=10^{-6}\frac{W}{m^2}$$

اکنون با استفاده از شدت صوت، توان چشمه را حساب می‌کنیم:

$$I=\frac{P}{A} \Rightarrow I=\frac{P}{4\pi r^2} \Rightarrow 10^{-6}=\frac{P}{4\times3\times50^2} \Rightarrow P=0/03W=30mW$$

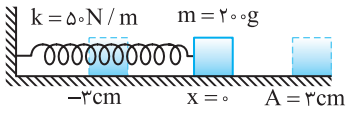
B ۲۵۲۹ ۱

نکته هرگاه وزنهٔ متصل به فنر را از حالت تعادل کشیده و رها کنیم مقدار کشیدگی برابر دامنهٔ نوسان سامانهٔ جرم فنر است.

۱ دورهٔ حرکت را حساب می‌کنیم:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \xrightarrow{\pi=\sqrt{10}} T=2\times\sqrt{10}\times\sqrt{\frac{0/2}{50}}$$

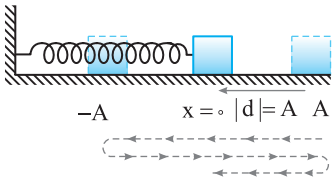
$$T=\frac{2}{5}s \Rightarrow T=0/4s$$



۲ بازهٔ زمانی $\Delta t=0/5s$ را با دوره مقایسه می‌کنیم:

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{0/5}{0/4} \Rightarrow \Delta t=\frac{5}{4}T=T+\frac{T}{4}$$

۳ مسیر حرکت وزنه در مدت نیم ثانیهٔ اول را رسم می‌کنیم.



با توجه به مسیر حرکت نوسانگر در مدت $\frac{5}{4}T$ مسافتی برابر 5A را طی می‌کند و جابه‌جایی آن برابر A است. از این‌رو:

$$\frac{\ell}{d}=\frac{5A}{A}=5$$

A ۲۵۳۰ ۴

آونگ در هر ثانیه یک نوسان انجام می‌دهد بنابراین دورهٔ آن $T=1s$ است. با توجه به رابطهٔ دورهٔ آونگ، طول آن را حساب می‌کنیم:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\xrightarrow{g=\pi^2}1=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{\pi^2}}\Rightarrow\ell=0/25m\Rightarrow\ell=25cm$$

B ۲۵۳۱ ۲

۱ فنر را از حالت تعادل $4cm$ کشیده و رها کرده‌ایم بنابراین دامنهٔ حرکت $A=4cm$ است.

۲ انرژی مکانیکی نوسانگر را به‌دست می‌آوریم:

$$E=\frac{1}{2}kA^2\xrightarrow[A=4cm]{k=5N/cm=500N/m}E=\frac{1}{2}\times500(4\times10^{-2})^2$$

$$\Rightarrow E=\frac{1}{2}\times500\times16\times10^{-4}\Rightarrow E=0/4J$$

نکته انرژی مکانیکی نوسانگر همواره برابر بیشینه انرژی جنبشی آن است $(K_m=E)$.

۳ وقتی تندی نوسانگر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ تندی بیشینه است نسبت انرژی جنبشی نوسانگر به انرژی جنبشی بیشینه خواهد شد:

$$\frac{K}{K_m}=\frac{\frac{1}{2}mv^2}{\frac{1}{2}mv_m^2}\Rightarrow\frac{K}{K_m}=(\frac{\sqrt{2}}{2})^2\Rightarrow K=\frac{1}{2}K_m\Rightarrow K=\frac{1}{2}E\Rightarrow K=0/2J$$

۴ اختلاف K و E خواهد شد: $E-K=0/4-0/2=0/2J$

A ۲۵۳۲ ۳

یادآوری هرگاه پرتو نور از محیط رقیق وارد محیط غلیظ شود، پرتو به خط عمود نزدیک می‌شود.

نکته ضریب شکست یک محیط شفاف برای طول موج‌های کوتاه‌تر بیشتر است یعنی این پرتوها بیشتر منحرف می‌شوند.

طول موج نور آبی از طول موج نور قرمز کمتر است بنابراین وقتی این دو پرتو وارد شیشه می‌شوند، نور آبی بیشتر منحرف شده و به خط عمود نزدیک‌تر می‌شود.

B ۲۵۳۳ ۴

انرژی فوتون B، ۲۵٪ از انرژی فوتون A کمتر است.

$$E_B=E_A-0/25E_A\Rightarrow E_B=\frac{3}{4}E_A\quad(I)$$

انرژی هر فوتون از رابطهٔ $E=hf=\frac{hc}{\lambda}$ به‌دست می‌آید. از این‌رو:

$$\xrightarrow{(I)}\frac{hc}{\lambda_B}=\frac{3}{4}\times\frac{hc}{\lambda_A}\Rightarrow\lambda_A=\frac{3}{4}\lambda_B\quad(II)$$

بنا به فرض مسئله $\lambda_B-\lambda_A=50nm$ است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\lambda_B-\frac{3}{4}\lambda_B=50\Rightarrow\frac{1}{4}\lambda_B=50\Rightarrow\lambda_B=200nm$$

$$\lambda_A=\frac{3}{4}\times200\Rightarrow\lambda_A=150nm$$

بسامد هر پرتو را حساب کرده و از هم کم می‌کنیم:

$$f=\frac{c}{\lambda}\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{A}f_A=\frac{3\times10^8}{150\times10^{-9}}\Rightarrow f_A=2\times10^{15}Hz\\ \xrightarrow{B}f_B=\frac{3\times10^8}{200\times10^{-9}}\Rightarrow f_B=1/5\times10^{15}Hz\end{cases}$$

$$\Delta f=2\times10^{15}-1/5\times10^{15}\Rightarrow\Delta f=5\times10^{14}Hz$$

B ۲۵۳۴ ۳

ابتدا بیشینهٔ انرژی جنبشی الکترون را حساب می‌کنیم:

$$K_m=\frac{1}{2}mv_m^2\Rightarrow K_m=\frac{1}{2}\times9\times10^{-31}\times(5\times10^5)^2$$

$$\Rightarrow K_m=\frac{1}{2}\times9\times25\times10^{-21}J=4/5\times25\times10^{-21}J$$

یکای انرژی جنبشی را به eV تبدیل می‌کنیم:

$$K_m=\frac{4/5\times25\times10^{-21}}{1/6\times10^{-19}}\simeq\frac{4/5\times25\times10^{-2}}{1/6}eV$$

نکته دقت کنید که hc برابر $1/24eV.\mu m$ داده شده پس در رابطهٔ $\frac{hc}{\lambda}$ اگر طول موج را نیز برحسب میکرومتر قرار دهیم، انرژی برحسب eV به‌دست می‌آید.

با توجه به نظریهٔ اینشتین داریم:

$$K_{max}=hf-W_0\Rightarrow K_{max}=\frac{hc}{\lambda}-W_0\Rightarrow\frac{4/5\times25\times10^{-2}}{1/6}=\frac{1/24}{\lambda}-4/46$$

چون سؤال مقدار تقریبی طور موج نور را خواسته پس به جای ۱/۶، ۱/۵ قرار می‌دهیم:

$$\frac{4/5\times25\times10^{-2}}{1/5}=\frac{1/24}{\lambda}-4/46\Rightarrow0/75=\frac{1/24}{\lambda}-4/46$$

$$\Rightarrow\frac{1/24}{\lambda}=5/21\Rightarrow\lambda=\frac{1/24}{5/21}\mu m$$

طول موج برحسب نانومتر خواسته شده پس طول موج به‌دست آمده برحسب میکرومتر را در ۱۰۰۰ ضرب می‌کنیم:

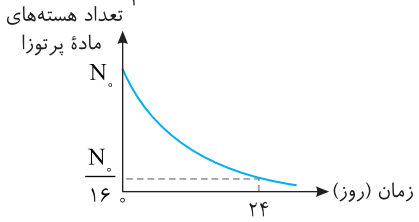
$$\lambda=\frac{1/24}{5/21}\times1000=\frac{1240}{5/21}$$

λ به‌دست آمده از ۲۰۰ بزرگ‌تر و از ۳۰۰ کوچک‌تر است بنابراین گزینهٔ (۳) مقدار تقریبی خواسته شدهٔ سؤال است.

A ۲۵۳۵ ۳

۱ تعداد نیمه‌عمر خواهد شد: $N=\frac{N_0}{2^n}\Rightarrow\frac{N_0}{16}=\frac{N_0}{2^n}\Rightarrow2^n=16\Rightarrow n=4$

۲ نیمه‌عمر را حساب می‌کنیم: $T=\frac{t}{n}\xrightarrow{t=24\text{ روز}}T=\frac{24}{4}=6$ روز



A ۲۵۳۶ ۱

یادآوری رابطهٔ تکانه و انرژی جنبشی به‌صورت $K=\frac{P^2}{2m}$ است:

$$\frac{K_A}{K_B}=\frac{\frac{P_A^2}{2m_A}}{\frac{P_B^2}{2m_B}}\Rightarrow\frac{K_A}{K_B}=(\frac{P_A}{P_B})^2\times\frac{m_B}{m_A}$$

$$\xrightarrow[K_A=4K_B]{P_A=P_B}4=\frac{m_B}{m_A}\xrightarrow{m_A=2kg}m_B=8kg$$

A ۲۵۳۷ ۴

یادآوری ذرهٔ آلفا دارای دو پروتون و دو نوترون بوده $(\alpha={}^4_2He)$ و هنگام واپاشی آلفا ۴ واحد از عدد جرمی و ۲ واحد از عدد اتمی کاسته می‌شود.

واکنش هسته‌ای را می‌نویسیم و در آن هستهٔ مادر را به صورت ${}^A_ZX$ نمایش می‌دهیم

$${}^A_ZX\rightarrow{}^{207}_{82}Pb+{}^4_2He$$

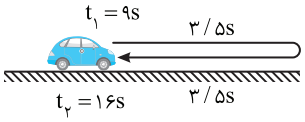
بنابراین این عدد اتمی Z برابر است با: $Z=82+2=84$

عدد جرمی A برابر است با: $A=207+4=211$

B ۲۵۳۸ ۲

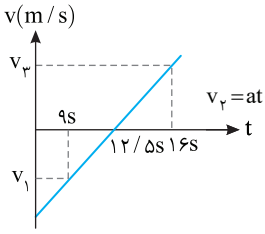
خط فکری جابه‌جایی متحرک روی محور xها در بازهٔ $t_1=9s$ تا $t_2=16s$ صفر شده است، یعنی متحرک یک مسیر رفت و برگشت را طی کرده است. از طرفی شتاب ثابت است، بنابراین مسیر رفت و برگشت قرینه هستند و دقیقاً چون وسط بازهٔ زمانی یعنی $\frac{9+16}{2}=12/5s$ متحرک متوقف شده و برمی‌گردد، یعنی متحرک با شتاب

$4m/s^2$ در مدت $12/5-9=3/5s$ متوقف شده و برمی‌گردد.



$t_{\text{تغییرجهت}}=\frac{t_1+t_2}{2}=\frac{25}{2}=12/5s$

۱ چون تندی متوسط خواسته شده و باید مسافت را حساب کنیم، برای اینکار نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم. دقت کنید که شتاب $+4m/s^2$ بوده و چون تغییر جهت داشتیم باید سرعت صفر شود پس سرعت اولیه منفی است:



$v_2=at+v_1$

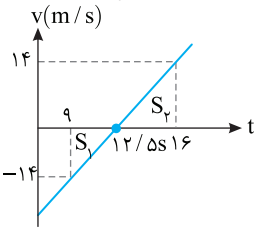
$\xrightarrow[v_2=0]{9s \text{ تا } 12/5s} 0=3/5\times4+v_1$

$\Rightarrow v_1=-14m/s$

$\xrightarrow[12/5s \text{ تا } 16s]{v_2=0} v_3=3/5\times4+v_2$

$\Rightarrow v_3=14m/s$

۲ حال با استفاده از سطح زیر نمودار مسافت را به دست می‌آوریم:



$S_1=\frac{-14\times(12/5-9)}{2}=-24/5m$

$S_2=\frac{14\times(16-12/5)}{2}=24/5m$

$\ell=|S_1|+|S_2|\Rightarrow \ell=49m$

۳ تندی متوسط را به دست می‌آوریم:

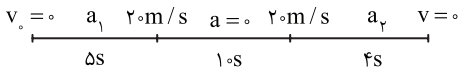
$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{49}{16-9}=\frac{49}{7}=7m/s$

B ۲۵۳۹ ۳

خط فکری شتاب متوسط $(a_{av}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1})$ را باید حساب کنیم، بنابراین باید در لحظهٔ $t_1=2s$ و $t_2=17s$ سرعت حرکت متحرک را به دست بیاوریم. البته حرکت متحرک از سه قسمت تشکیل شده در قسمت اول و سوم باید شتاب را حساب کنیم سپس به سراغ سرعت‌ها برویم.

راه‌حل اول:

۱ در مدت 5s سرعت متحرک از صفر به $20m/s$ رسیده است، با توجه به رابطهٔ $v_2=at+v_1$ شتاب حرکت در 5s نخست را به دست می‌آوریم:



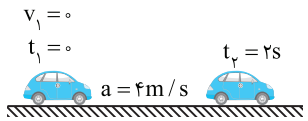
$v_2=at+v_1\Rightarrow 20=5a+0\Rightarrow a_1=4m/s^2$

۲ در بازهٔ زمانی $t=5s$ تا $t=15s$ (به مدت 10s) سرعت ثابت و برابر $20m/s$ است. در این لحظه اتومبیل ترمز می‌کند و در مدت 4s (بازهٔ 15s تا 19s) متوقف می‌شود. شتاب را در این مدت حساب می‌کنیم.

$v_2=at+v_1\xrightarrow[v_1=20m/s]{v_2=0}0=4a_2+20\Rightarrow a_2=-5m/s^2$

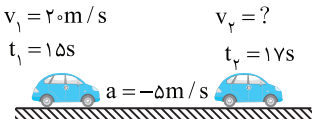
۳ سرعت در $t_1=2s$ و $t_2=17s$ را حساب می‌کنیم:

الف) در لحظهٔ $t_1=2s$ شتاب حرکت $4m/s^2$ و سرعت اولیه صفر است:



$v=at+v_0\xrightarrow{t=2s}v_1=2\times4+0\Rightarrow v_1=8m/s$

ب) در لحظهٔ $t_2=17s$ شتاب حرکت $-5m/s^2$ و سرعت در ابتدای بازهٔ این شتاب یعنی $t_1=15s$ برابر $20m/s$ است.



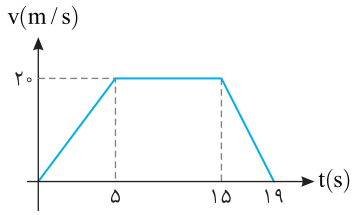
$v=at+v_0\Rightarrow v_2=-5\times2+20\Rightarrow v_2=10m/s$

۴ شتاب متوسط را حساب می‌کنیم:

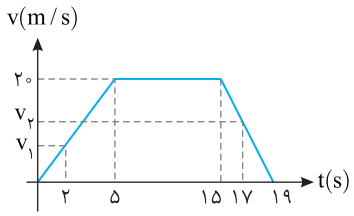
$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{10-8}{17-2}=\frac{2}{15}m/s^2$

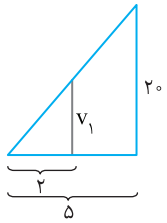
راه‌حل دوم:

نمودار v−t متحرک را رسم کنیم. در مدت ۰ تا 5s سرعت از صفر به $20m/s$ رسیده و در مدت 5s تا 15s سرعت ثابت و در مدت 15s تا 19s سرعت از $20m/s$ به صفر رسیده است:

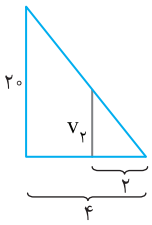


حال با توجه به تشابه، سرعت در $t_1=2s$ و $t_2=17s$ به دست می‌آوریم:





$\frac{v_1}{2}=\frac{20}{5}\Rightarrow v_1=8m/s$



$\frac{v_2}{2}=\frac{20}{4}\Rightarrow v_2=10m/s$

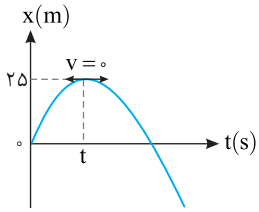
در نهایت شتاب متوسط را به دست می‌آوریم:

$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a_{av}=\frac{10-8}{17-2}=\frac{2}{15}m/s^2$

B ۲۵۴۰ ۳

یادآوری در نمودار مکان - زمان در نقاط کمینه و بیشینه، سرعت متحرک صفر است.

۱ تندی متحرک در مکان $x=25m$ که رأس سهمی بوده برابر صفر است. با توجه به فرض سؤال در مکان $x=-375m$ نیز تندی $40m/s$ است، بنابراین به کمک رابطهٔ مستقل از زمان، شتاب حرکت را به دست می‌آوریم:

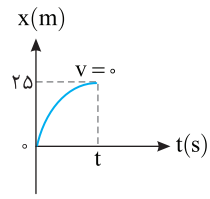


$v_2^2-v_1^2=2a\Delta x\Rightarrow 1600=2a(x_2-x_1)$

$\Rightarrow 1600=2a(-375-25)$

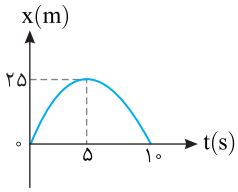
$1600=-800a\Rightarrow a=-2m/s^2$

۲ در بازهٔ زمانی ۰ تا t متحرک با شتاب $a=-2m/s^2$ به اندازهٔ $\Delta x=25m$ جابه‌جا شده و سرعت نهایی آن صفر شده است. ابتدا با توجه به رابطهٔ $v^2-v_0^2=2a\Delta x$ سرعت اولیه را حساب کرده و سپس به کمک معادلهٔ سرعت زمان t را به دست می‌آوریم:



$$v^2-v_0^2=2a\Delta x \xrightarrow[v=0]{a=-2m/s^2}$$
$$-v_0^2=-4\times25\Rightarrow v_0^2=100$$
$$\Rightarrow v_0=10m/s$$

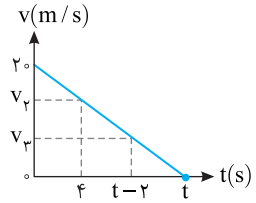
$$v=at+v_0\Rightarrow 0=-2t+10\Rightarrow t=5s$$



سهمی نسبت به محور قائم گذرا از رأس آن تقارن دارد از این رو متحرک در لحظهٔ $t=10s$ از مکان $x=0$ عبور کرده و در بازهٔ ۰ تا ۱۰s مکان متحرک مثبت بوده و بردار مکان در جهت محور x است.

B ۲۵۴۱ ۲

نمودار سرعت - زمان خط راست است، پس شتاب حرکت ثابت است. اگر شتاب حرکت را a در نظر بگیریم در هر ثانیه سرعت به اندازهٔ a تغییر می‌کند. حال با توجه به شتاب a سرعت در لحظهٔ $t=4s$ و در لحظهٔ ۲s قبل از توقف را حساب می‌کنیم:



$$v_2=at+v_1\begin{cases}\xrightarrow{0\text{ تا }4s} v_2=4a+20\\ \xrightarrow[t-2\text{ تا }t]{v_4=0} v_4=2a+v_3\xrightarrow{v_4=0} v_3=-2a\end{cases}$$

حال با توجه به رابطهٔ $\Delta x=\frac{v_1+v_2}{2}\Delta t$ مسافت طی شده را در ۴s نخست و ۲s آخر حرکت را به دست می‌آوریم:

$$d_1=\frac{v_1+v_2}{2}\Delta t_1\xrightarrow[v_2=20+4a]{v_1=20m/s} d_1=\frac{40+4a}{2}(4)\Rightarrow d_1=80+8a$$

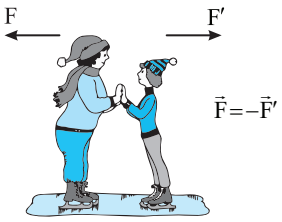
$$d_2=\frac{v_3+v_4}{2}\Delta t_2\xrightarrow[v_3=-2a]{v_4=0} d_2=\frac{-2a}{2}\times2\Rightarrow d_2=-2a$$

با توجه به سؤال نسبت $\frac{d_1}{d_2}$ برابر ۳۶ است، از این رو خواهیم داشت:

$$\frac{d_1}{d_2}=36\Rightarrow\frac{80+8a}{-2a}=36\Rightarrow 80+8a=-72a\Rightarrow 80=-80a\Rightarrow a=-1m/s^2$$

بزرگی شتاب برابر $|a|=1m/s^2$ است.

A ۲۵۴۲ ۴



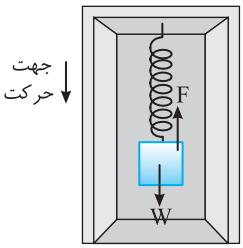
$\vec{F}=-\vec{F}'$

نیروهای $\vec{F}$ و $\vec{F}'$ کنش و واکنش یکدیگرند پس این دو نیرو هم‌اندازه و خلاف جهت‌اند.

شتاب از رابطهٔ $F=ma\Rightarrow a=\frac{F}{m}$ به دست می‌آید. چون دو نیرو هم‌اندازه‌اند، پس هرچه جرم شخصی بیشتر باشد شتاب حرکت او کمتر است:

$$m_2>m_1\xrightarrow[F=F']{a=\frac{F}{m}} a_2<a_1$$

B ۲۵۴۳ ۱



آسانسور از حال سکون رو به پایین شروع به حرکت می‌کند. نیروهای وارد بر وزنه را رسم می‌کنیم. بر وزنه دو نیرو (۱) وزن رو به پایین (۲) نیروی کشسانی فنر رو به بالا وارد می‌شود. بنا به قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:

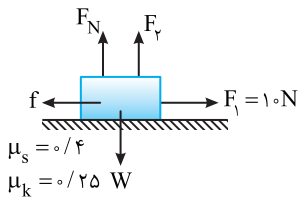
$$F_{net}=ma\Rightarrow W-F=ma\Rightarrow mg-kx=ma$$

$$\xrightarrow[k=200N/m,\ a=1m/s^2]{x=35-26=9cm} m\times10-200\times\frac{9}{100}=m\times1$$

$$\Rightarrow 10m-m=18\Rightarrow 9m=18\Rightarrow m=2kg$$

C ۲۵۴۴ ۴

خط فکری نیروی F_2 از صفر تا ۲۰N در حال تغییر است بنابراین نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت $(f_{s\,max})$ در حال تغییر است. شما باید مشخص کنید که $f_{s\,max}$ ابتدا صفر نیوتون بوده و در نهایت چند نیوتون می‌شود و با مقایسه نیروی جلوبر F_1 با $f_{s\,max}$ مشخص کنید که جسم در حال سکون می‌ماند و یا اینکه به حرکت درمی‌آید.



۱ نیروی عمودی سطح و نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت را وقتی $F_2=0$ است حساب می‌کنیم:

$$F_2=0\Rightarrow F_N=W\Rightarrow F_{N_1}=40N$$

نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت: $f_{s\,max_1}=\mu_sF_N\Rightarrow F_{s\,max_1}=0/4\times40=16N$

۲ نیروی $F_1=10N$ را با $F_{s\,max}=16N$ مقایسه می‌کنیم $F_1<f_{s\,max}$ است. به همین دلیل تا لحظه‌ای که $f_{s\,max}\le10N$ شود، جسم ساکن می‌ماند و نیروی اصطکاک برابر نیروی F_1 بوده و اصطکاک ثابت می‌ماند $(f_s=F_1=10N)$

۳ با افزایش F_2، نیروی عمودی سطح $(\downarrow F_N=W-F_2\uparrow)$ کاهش می‌یابد که سبب کاهش $f_{s\,max}$ می‌شود. وقتی $F_2=20N$ می‌شود، F_N و $f_{s\,max}$ را به دست می‌آوریم.

$$F_N=W-F_2\xrightarrow{F_2=20N}F_N=40-20=20N$$

$$f_{s\,max}=\mu_sF_N\Rightarrow f_{s\,max}=0/4\times20\Rightarrow f_{s\,max}=8N$$

۴ در این حالت $F_1=10N>f_{s\,max}$ بوده یعنی جسم به حرکت درمی‌آید و نیروی اصطکاک، نیروی اصطکاک جنبشی خواهد بود که از $f_{s\,max}$ کمتر است، یعنی اصطکاک کاهش می‌یابد و برابر خواهد شد با:

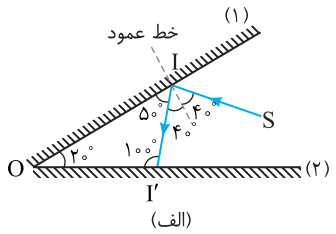
$$F_k=\mu_kF_N\Rightarrow F_k=0/25\times20=5N$$

در نتیجه ابتدا اصطکاک ثابت است و سپس کاهش می‌یابد.

B ۲۵۴۵ ۴

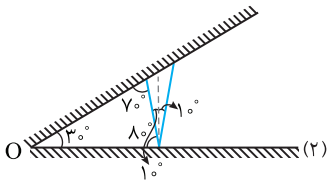
خط فکری در حل این مسائل باید یک‌به‌یک، زاویهٔ تابش و بازتاب در هر بار برخورد نور به هر آینه را ادامه داده تا لحظه‌ای که دیگر پرتو به آینه‌ای برخورد نکند البته شما باید مقداری هندسه بدانید و اینکه مجموع زوایای داخلی مثلث °۱۸۰ است، سپس بروید و با حوصله مسئله را حل کنید.

۱ زاویهٔ تابش بر سطح آینه (۱) بنا بر فرض مسئله °۴۰ است و بنا بر قانون بازتاب عمومی، زاویهٔ بازتاب نیز °۴۰ و زاویه‌ای که پرتو بازتاب با سطح آینه (۱) می‌سازد °۵۰ خواهد بود.



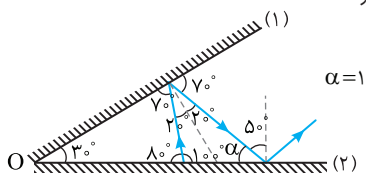
(الف)

۲ به مثلث OII' شکل (الف) نگاه کنید، زاویه‌ای که پرتو تابیده به سطح آینه (۲) با آینه می‌سازد 100° است. اگر خط عمود را رسم کنید در شکل (ب) مشخص می‌شود که زاویهٔ تابش 10° است. پرتو بازتاب وقتی به آینه (۱) می‌رسد با آن زاویه 110° می‌سازد.



(ب)

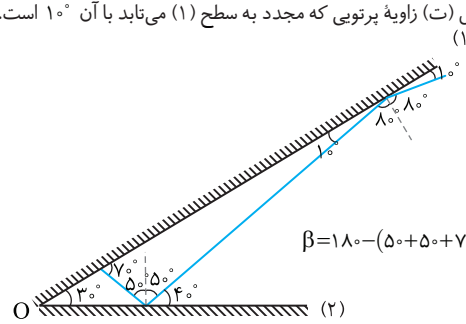
۳ برای پرتویی که مجدد به آینهٔ (۱) با زاویهٔ 70° برخورد کرده خط عمود رسم می‌کنیم زاویهٔ تابش 20° می‌شود:



$\alpha=180-(20+20+100)=40^\circ$

(پ)

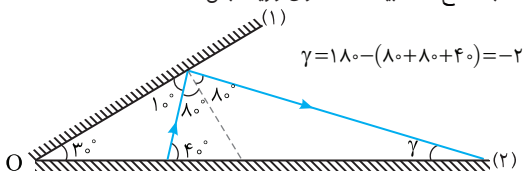
با توجه به شکل (ت) زاویهٔ پرتویی که مجدد به سطح (۱) می‌تابد با آن 10° است.



$\beta=180-(50+50+70)=10^\circ$

(ت)

پرتویی که به سطح (۱) تابیده شده دارای زاویهٔ تابش 80° است.



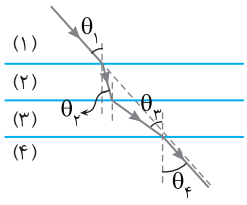
$\gamma=180-(80+80+40)=-20^\circ$

(ث)

بنابراین هیچگاه زاویهٔ γ تشکیل نمی‌شود و آخرین زاویهٔ تابش برابر 80° است.

B ۲۵۴۶ ۳

نکته هرچه زاویه‌ای که پرتو با خط عمود می‌سازد بزرگتر باشد، تندی نور در آن محیط بیشتر است.



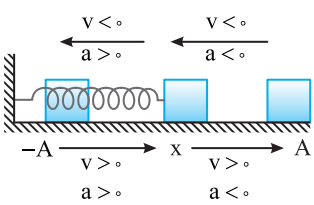
۱ پرتو ورودی از محیط (۱) با پرتو خروجی در محیط (۴) با هم موازی هستند. $(\theta_1=\theta_4)$ در نتیجه تندی نور در این دو محیط با هم برابر است.

۲ زاویهٔ بین پرتو و خط عمود در محیط (۲) (θ_2) از سه محیط دیگر کمتر و زاویهٔ بین پرتو و خط عمود در محیط (۳) (θ_3) از سه محیط دیگر بیشتر است بنابراین:

$v_2<v_1=v_4<v_3$

C ۲۵۴۷ ۱

خط فکری به مسیر حرکت سامانهٔ جرم - فنر شکل روبه‌رو دقت کنید. در مدتی که نوسانگر از مکان $-A$ به سوی مرکز نوسان می‌رود بردار شتاب و سرعت در جهت



محور x هستند که این بازه $\frac{T}{4}$ طول می‌کشد. ابتدا دوره را به دست بیاورید و معین کنید که بازهٔ زمانی داده شده چه کسری از دوره است؟ مکان نوسانگر در ابتدای بازه $t_1=0/5s$ را به دست آورده و مسیر حرکت تا $t_2=5s$ را دنبال کنید تا مشخص شود چه مدتی a و v همزمان مثبت هستند.

۱ با توجه به معادلهٔ $x=0/04\cos\frac{\pi}{2}t$ دوره خواهد شد:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=4s$$

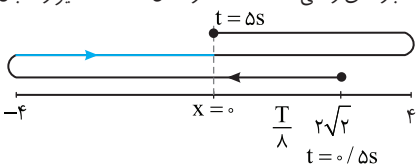
۲ بازهٔ $t_1=0/5s$ تا $(t_2=5s)$ را با دوره مقایسه می‌کنیم.

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{5-0/5}{4}=\frac{4/5}{4}\Rightarrow\Delta t=\frac{9}{8}T=T+\frac{T}{8}$$

۳ مکان در ابتدای بازه $t_1=0/5s$ را به دست می‌آوریم.

$$x=0/04\cos\frac{\pi}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)=0/04\cos\frac{\pi}{4}=0/04\times\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x=0/02\sqrt{2}m=2\sqrt{2}cm$$

۴ به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده از مکان $2\sqrt{2}$ مسیر را دنبال می‌کنیم.



۵ بنابراین تنها در قسمت رنگی مسیر $\left(\frac{T}{4}\right)$، a و v همزمان مثبت هستند.

$$\frac{T}{4}=\frac{4}{4}=1s$$

B ۲۵۴۸ ۱

خط فکری مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل برابر انرژی مکانیکی نوسانگر بوده و انرژی مکانیکی نوسانگر $E=2\pi^2mA^2F^2$ است. بنابراین کافی است K و U را با هم جمع کرده سپس به کمک رابطهٔ انرژی مکانیکی بسامد را حساب کنیم.

انرژی مکانیکی برابر است با:

$$E=K+U\xrightarrow[U=15\times10^{-3}J]{K=5\times10^{-3}J}E=5\times10^{-3}+15\times10^{-3}\Rightarrow E=20\times10^{-3}J$$

بسامد را حساب می‌کنیم.

$$E=2\pi^2mA^2f^2\xrightarrow[\pi^2=10]{A=2\times10^{-2},\ m=0/1kg}$$

$$20\times10^{-3}=2\times10\times0/1\times(2\times10^{-2})^2f^2\Rightarrow20\times10^{-3}=2\times10\times0/1\times(2\times10^{-2})^2f^2$$

$$\Rightarrow10^{-2}=(2\times10^{-2})^2f^2\xrightarrow{\text{از طرفین جذر می‌گیریم}}10^{-1}=2\times20^2F\Rightarrow f=5HZ$$

C ۲۵۴۹ ۲

۱ انرژی فوتون را برحسب الکترون ولت به دست می‌آوریم.

$$E_{\text{فوتون}}=\frac{4/08\times10^{-19}}{1/6\times10^{-19}}\Rightarrow E_{\text{فوتون}}=2/55eV$$

۲ در گذار الکترون از مدار n به n'، الکترون فوتونی با اختلاف انرژی دو تراز گسیل می‌کند. از این رو انرژی الکترون در ترازهای مختلف را از رابطهٔ $E_n=-E_R/n^2$ به دست می‌آوریم و مشخص می‌کنیم اختلاف انرژی کدام ترازها برابر $2/55eV$ می‌شود.

$$E_n=-\frac{E_R}{n^2}\begin{cases}\xrightarrow{n=1}E_1=-13/6eV\\ \xrightarrow{n=2}E_2=-\frac{13/6}{4}=-3/4eV\\ \xrightarrow{n=3}E_3=\frac{-13/6}{3^2}=-1/5ev\\ \xrightarrow{n=4}E_4=\frac{-13/6}{4^2}=-0/85eV\end{cases}$$

بنابراین اختلاف انرژی ترازهای $n=4$ و $n'=2$ برابر $-0/85-(3/4)=2/55eV$ است.

۳ شعاع مدار چهارم خواهد شد. $r_n=n^2a_0\xrightarrow{n=4}r_2=16a_0$

B ۲۵۵۰ ۴

۱ بیشترین بسامد گسیلی (یعنی کوتاه‌ترین طول موج) گسیلی وقتی است که الکترون از تراز بینهایت به تراز $n'=3$ در رشتهٔ پاشن برود. با توجه به رابطهٔ ریدبرگ کوتاه‌ترین طول موج را حساب می‌کنیم.

$$\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})\Rightarrow\frac{1}{\lambda}=0/01(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{\infty})\Rightarrow\lambda_{min}=900nm$$

۲ بیشینه بسامد خواهد شد:

$$f_{max}=\frac{c}{\lambda_{min}}=\frac{3\times10^8}{900\times10^{-9}}\Rightarrow f_{max}=\frac{1}{3}\times10^{15}Hz$$

۳ کمترین بسامد گسیلی (یعنی بلندترین موج) وقتی گسیل می‌شود که الکترون از تراز $n=4$ به تراز $n'=3$ در رشتهٔ پاشن برود از این رو خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})\Rightarrow\frac{1}{\lambda_{max}}=\frac{1}{100}(\frac{1}{9}-\frac{1}{16})=\frac{1}{100}(\frac{16-9}{9\times16})$$

$$\Rightarrow\lambda_{max}=\frac{900\times16}{7}nm$$

۴ کمترین بسامد را حساب می‌کنیم.

$$f_{min}=\frac{c}{\lambda_{max}}=\frac{3\times10^8}{\frac{900\times16}{7}\times10^{-9}}\Rightarrow f_{min}=\frac{7}{48}\times10^{15}Hz$$

۵ اختلاف دو بسامد را حساب می‌کنیم.

$$f_{max}-f_{min}=\frac{1}{3}\times10^{15}-\frac{7}{48}\times10^{15}\Rightarrow\Delta f=(\frac{16-7}{48})\times10^{15}=\frac{30}{16}\times10^{14}$$

$$\Rightarrow\Delta f=1/875\times10^{14}Hz$$

A ۲۵۵۱ ۴

یادآوری در هسته‌های سبک مانند اکسیژن $^{16}_{8}O$، تعداد نوترون‌ها (N) و تعداد پروتون‌ها (Z) با هم برابر است و هرچه در جدول تناوبی به سمت هسته‌های (عناصر) سنگین‌تر با عدد اتمی بزرگ‌تر برویم تعداد نوترون‌ها افزایش می‌یابد.

با توجه به یادآوری بالا، در هسته‌های پایدار سنگین‌تر نسبت N/Z بزرگ‌تر است.

A ۲۵۵۲ ۳

نیمه‌عمر مادهٔ پرتوزا ۴۵ دقیقه یعنی $\frac{45}{60}=\frac{3}{4}h$ است، بنابراین تعداد نیمه‌عمرهای این ماده در مدت ۳h خواهد شد:

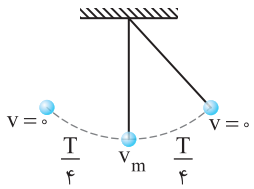
$$n=\frac{t}{T_{\frac{1}{2}}}\Rightarrow n=\frac{3}{\frac{3}{4}}\Rightarrow n=4$$

مقدار مادهٔ اولیهٔ باقی‌مانده را حساب می‌کنیم.

$$N=N_0(\frac{1}{2})^n\Rightarrow\frac{N}{N_0}=(\frac{1}{2})^4\Rightarrow\frac{N}{N_0}=\frac{1}{16}$$

A ۲۵۵۳ ۱

۱ تندی آونگ هنگام عبور از مرکز نوسان (حالت قائم) بیشینه است و زمانی که طول می‌کشد تا آونگ از انتهای مسیر به مرکز نوسان برسد $\frac{T}{4}$ است و زمانی که طول می‌کشد تا آونگ از یک انتهای مسیر به انتهای دیگر برود $\frac{T}{2}$ ثانیه است، بنابراین با توجه به فرض مسئله می‌توان نوشت:



$$\frac{T_A}{4}=\frac{T_B}{2}\Rightarrow T_A=2T_B\quad(1)$$

۲ دورهٔ آونگ $T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ است، دوره را در رابطهٔ (۱) جای‌گذاری می‌کنیم.

$$2\pi\sqrt{\frac{\ell_A}{g}}=2(2\pi)\sqrt{\frac{\ell_B}{g}}\Rightarrow\ell_A=4\ell_B$$

B ۲۵۵۴ ۳

یادآوری هرگاه بسامدهای دو مُد متوالی یک تار مرتعش را از هم کم کنیم، بسامد مُد اصلی به‌دست می‌آید.

بسامدهای متوالی این تار به‌ترتیب ۱۵۰Hz و ۲۲۵Hz است، بنابراین بسامد مُد اصلی آن خواهد شد:

$$f_1=f_n-f_{n-1}\Rightarrow f_1=225-150\Rightarrow f_1=75\ Hz$$

یادآوری بسامد مُد اصلی nام یک تار n برابر مُد اصلی آن است که در آن n برابر تعداد شکم‌ها (و یا تعداد گره‌ها منهای یک) است. $f_n=nf_1$

تعداد گره‌ها برابر ۵ است، بنابراین $n=5-1=4$ بوده و بسامد مُد چهارم خواهد شد:

$$f_n=4\times75\Rightarrow f_n=300\ Hz$$

B ۲۵۵۵ ۲

۱ تندی انتشار موج در تار را حساب می‌کنیم.

$$f_n=\frac{nv}{2\ell}\xrightarrow[f_1=125Hz,\ \ell=1m]{\text{مد اصلی}\ n=1}125=\frac{v}{2\times1}\Rightarrow v=250m/s$$

۲ چگالی خطی جرم را به‌دست می‌آوریم.

$$\mu=\frac{m}{\ell}\xrightarrow[\ell=1m]{m=9g=9\times10^{-3}kg}\mu=9\times10^{-3}kg/m$$

۳ نیروی کشش تار خواهد شد:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\Rightarrow250=\sqrt{\frac{F}{9\times10^{-3}}}\Rightarrow(250)^2=\frac{F}{9\times10^{-3}}$$

$$F=562500\times10^{-3}N\Rightarrow F=562/5N$$

A ۲۵۵۶ ۴

یادآوری به پدیده‌ای که موج در عبور از یک شکاف با پهنایی از مرتبهٔ طول موج، به اطراف گسترده می‌شود پراش گویند. پراش هنگام عبور موج از لبه‌های مانعی که ابعاد آن در حدود طول موج باشد نیز رخ می‌دهد.

تحلیل نقش پراش مبتنی بر بحث تداخل امواج است.

A ۲۵۵۷ ۳

۱ به کمک معادلهٔ مستقل از زمان، شتاب حرکت متحرک را حساب می‌کنیم.

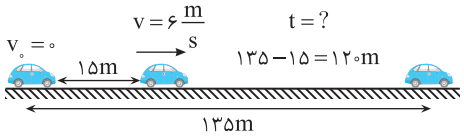
$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow(6)^2-0=2a\times15\Rightarrow a=\frac{36}{30}\Rightarrow a=1/2m/s^2$$

۲ در قسمت دوم مسیر، متحرک مسافت $135-15=120m$ را طی کرده است. زمان این قسمت را به کمک معادلهٔ جابه‌جایی - زمان به‌دست می‌آوریم. سرعت اولیهٔ این قسمت $6m/s$ است.

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow120=\frac{1}{2}\times1/2t^2+6t\Rightarrow0/6t^2+6t-120=0$$

$$\xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{\text{دو طرف را به }0/6}t^2+10t-200=0\Rightarrow(t+20)(t-10)=0$$

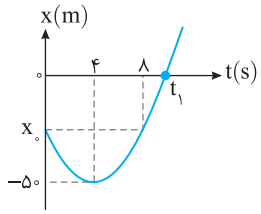
$$\Rightarrow\begin{cases}t=10s\\t=-20s\ \text{غ‌ق‌ق}\end{cases}$$



B ۲۵۵۸ ۱

خط فکری هرگاه سرعت متوسط در یک بازهٔ زمانی صفر شود، یعنی متحرک در ابتدا و انتهای بازه در یک مکان قرار دارد. از طرفی در حرکت با شتاب ثابت نمودار مکان - زمان سهمی است و سهمی نسبت به محور گذرا از رأس آن دارای تقارن است و در بازهٔ زمانی یکسان در دو طرف محور مکان یکسان است. اکنون با توجه به این نکات مسئله را حل می‌کنیم.

۱ در مدت ۸s اول سرعت متوسط صفر است یعنی مکان متحرک در $t=0$ و $t=8s$ یکسان است و این دو لحظه نسبت به محور دارای تقارن بوده و مختصات رأس سهمی خواهد شد $(t=4s, x=-50m)$.



۲ تندی در لحظهٔ t_1 برابر $20m/s$ بوده و از طرفی شیب خط مماس در این لحظه مثبت است یعنی سرعت متحرک در این لحظه $+20m/s$ است و در لحظهٔ $t=4s$ سرعت صفر است. در بازهٔ زمانی ۴s تا t_1 متحرک جابه‌جایی $\Delta x=+50m$ را طی کرده است. بنابراین به کمک معادلهٔ مستقل از زمان شتاب حرکت خواهد شد:

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x \Rightarrow 20^2-0=2a(+50) \Rightarrow a=4m/s^2$$

۳ سرعت اولیه را حساب می‌کنیم.

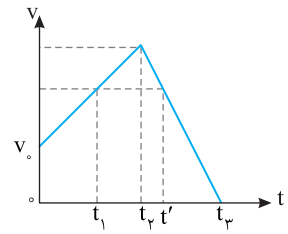
$$v=at+v_0 \xrightarrow{t=4s,\ v=0} 0=4\times4+v_0 \Rightarrow v_0=-16m/s$$

یادآوری در حرکت با شتاب ثابت در یک بازهٔ زمانی معین، سرعت متوسط میانگین سرعت ابتدایی و انتهایی متحرک در آن بازه است. $v_{av}=\frac{v_1+v_2}{2}$

۴) سرعت متوسط در بازهٔ $t=0$ تا $t=t_1$ خواهد شد: $v_{av}=\frac{-16+20}{2}=2m/s$

B ۲۵۵۹ ۲

۱ در تمام لحظات در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2، تندی متحرک از تندی آن در بازهٔ زمانی ۰ تا t_1 بیشتر است. بنابراین تندی متوسط در بازهٔ t_1 تا t_2 قطعاً از تندی متوسط در بازهٔ ۰ تا t_1 بیشتر است و گزینهٔ (۱) حذف می‌شود.

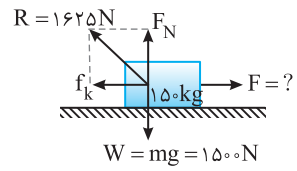


۲ در مقایسهٔ بازهٔ t_2 تا t_3 با بازهٔ t_1 تا t_2 مشخص است که در بازهٔ t_2 تا t_3 با گذشت زمان تندی متحرک به صفر می‌رسد. در این صورت تندی متوسط در بازهٔ t_1 تا t_2 از بازهٔ t_2 تا t_3 بیشتر است و گزینهٔ (۴) نیز حذف می‌شود.

۳ در بازهٔ صفر تا t_3 نیز در یک مدت زمان طولانی تندی در هر لحظه از تندی در بازهٔ t_1 تا t_2 کوچک‌تر است از این رو تندی متوسط در این بازه از تندی متوسط در بازهٔ t_1 تا t_2 کمتر خواهد بود و گزینهٔ (۲) درست است.

B ۲۵۶۰ ۴

یادآوری نیرویی که سطح زمین به جسم وارد می‌کند (R) برایند نیروی اصطکاک (f_k) و نیروی عمودی سطح است $(R=\sqrt{f_k^2+F_N^2})$.



۱ جسم در راستای قائم حرکتی ندارد بنابراین $F_N=W \Rightarrow F_N=1500N$

۲ نیروی اصطکاک جنبشی را به کمک نیرویی که سطح به جسم وارد می‌کند حساب می‌کنیم.

$$1625=\sqrt{f_k^2+(1500)^2} \Rightarrow (1625)^2=f_k^2+(1500)^2$$

$$\Rightarrow f_k^2=(1625)^2-(1500)^2 \Rightarrow f_k^2=(1625-1500)(1625+1500)$$

$$f_k^2=125(3125) \Rightarrow f_k^2=125\times(125\times25) \Rightarrow f_k=125\times5=625N$$

۳ با توجه به قانون دوم نیوتون خواهیم داشت:

$$F_{net}=ma \Rightarrow F-f_k=ma \xrightarrow{a=2m/s^2} F-625=150\times2$$

$$\Rightarrow F=925N$$

A ۲۵۶۱ ۳

خط فکری دقت کنید: نیم ثانیهٔ اول: بازهٔ ۰ تا ۰/۵s

نیم ثانیهٔ دوم: بازهٔ ۰/۵s تا ۱s

نیم ثانیهٔ سوم: بازهٔ ۱s تا ۱/۵s

تندی متوسط در حرکت با شتاب ثابت که در آن متحرک تغییر جهت نمی‌دهد برابر سرعت متوسط است. از طرفی در یک بازهٔ زمانی سرعت متوسط برابر $v_{av}=\frac{v_1+v_2}{2}$ است. بنابراین سرعت در $t=1s$ و $t=1/5s$ را حساب کرده و سرعت (تندی) متوسط را حساب می‌کنیم.

سرعت در لحظهٔ $t=1s$: $v=gt \Rightarrow v_1=9/8\times1=9/8m/s$

سرعت در لحظهٔ $t=1/5s$: $v=gt \Rightarrow v_2=9/8\times1/5=14/7m/s$

تندی متوسط خواهد شد: $v_{av}=\frac{9/8+14/7}{2}=\frac{14/5}{2} \Rightarrow v_{av}=12/25m/s$

B ۲۵۶۲ ۴

۱ جهت مثبت را رو به پایین در نظر می‌گیریم.

سرعت برخورد گلوله به زمین را حساب می‌کنیم.

$$v^2=+2gy \Rightarrow v^2=2\times10\times20 \Rightarrow v=20m/s$$

۲ تندی برگشت رو به بالا $10m/s$ است. چون جهت مثبت را رو به پایین در نظر گرفته‌ایم، سرعت برگشت رو به بالا $-10m/s$ می‌شود. بنابراین بزرگی شتاب در بازهٔ زمانی تماس توپ با زمین خواهد شد:

$$|a|=\frac{|\Delta v|}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t=0/2s} |a|=\frac{|-10-20|}{0/2} \Rightarrow |a|=150m/s^2$$

۳ نیروی متوسط وارد بر گلوله را به کمک قانون دوم نیوتون حساب می‌کنیم.

$$F_{av}=ma \xrightarrow{m=0/2kg} F_{av}=0/2\times150 \Rightarrow F_{av}=30N$$

B ۲۵۶۳ ۱

خط فکری معادلهٔ حرکت دو متحرک را به کمک نمودار مکان - زمان نوشته و با هم برابر قرار می‌دهیم. نمودار هر دو خط راست مایل است. بنابراین حرکت هر دو متحرک با سرعت ثابت صورت می‌گیرد.

۱ سرعت متحرک A برابر است با: $v_A=\frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_A=\frac{0-16}{8-0}=-2m/s$

مکان اولیه A، $x_{0A}=+16m$ بوده و معادلهٔ حرکت A خواهد شد:

$$x=vt+x_0 \Rightarrow x_A=-2t+16$$

۲ سرعت متحرک B را حساب می‌کنیم.

$$v_B=\frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_B=\frac{-25-(-29)}{8-0} \Rightarrow v_B=+\frac{1}{2}m/s$$

مکان اولیهٔ متحرک B، $x_{0B}=-29m$ بوده و معادلهٔ حرکت B خواهد شد:

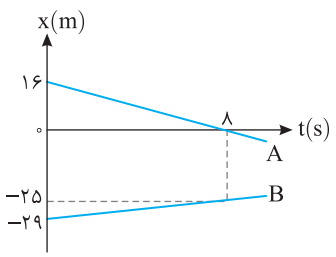
$$x=vt+x_0 \Rightarrow x_B=\frac{1}{2}t-29$$

۳ دو معادله را برابر قرار داده و لحظهٔ رسیدن دو متحرک به هم را به‌دست می‌آوریم.

$$x_A=x_B \Rightarrow -2t+16=\frac{1}{2}t-29 \Rightarrow 45=2/5t \Rightarrow t=18s$$

۴ مکان رسیدن دو متحرک به هم خواهد شد:

$$x=-2\times18+16 \Rightarrow x=-36+16 \Rightarrow x=-20m$$



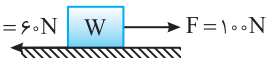
B ۲۵۶۴ ۲

یادآوری با توجه به تعریف تکانه و قانون دوم نیوتون خواهیم داشت:

$$F_{net}=ma \xrightarrow{a=\Delta v/\Delta t} F_{net}=\frac{m\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta P=m\Delta v}$$

$$F_{net}=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow \Delta P=F_{net}\Delta t$$

نیروی خالص وارد بر جسم مطابق شکل مسئله خواهد شد:



$$F_{net}=F-f_k=100-60\Rightarrow F_{net}=40N$$

تغییر تکانه در مدت یک ثانیه را حساب می‌کنیم.

$$\Delta P=F_{net}\Delta t\Rightarrow \Delta P=40\times 1\Rightarrow \Delta P=40kgm/s$$

B ۲۵۶۵ ۱

یادآوری در حرکت بر مسیر دایره‌ای، تندی حرکت یک ذره که با دورهٔ T بر دایره‌ای به شعاع r در حال چرخش است از رابطهٔ $v=2\pi r/T$ به‌دست می‌آید.

نکته دورهٔ حرکت عقربهٔ ثانیه‌شمار، $T_s=60s$ و دورهٔ حرکت عقربهٔ ساعت‌شمار $T_h=12\times 60\times 60=12\times 3600s$ است.

نسبت تندی نوک عقربهٔ ثانیه‌شمار به نوک عقربهٔ ساعت‌شمار خواهد شد:

$$\frac{v_s}{v_h}=\frac{\frac{2\pi r_s}{T_s}}{\frac{2\pi r_h}{T_h}}\Rightarrow \frac{v_s}{v_h}=\frac{r_s}{r_h}\times\frac{T_h}{T_s}\Rightarrow \frac{v_s}{v_h}=2\times\frac{12\times 3600}{60}\Rightarrow \frac{v_s}{v_h}=1440$$

B ۲۵۶۶ ۳

اختلاف تراز شدت صوت A و B از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\beta_A-\beta_B=10\log\frac{I_A}{I_B}$$

با توجه به فرض مسئله $\beta_A-\beta_B=10dB$ و $I_A=0/04W/m^2$ است. از این رو خواهیم داشت:

$$10=10\log\frac{0/04}{I_B}\Rightarrow \log\frac{0/04}{I_B}=1\Rightarrow \frac{0/04}{I_B}=10$$

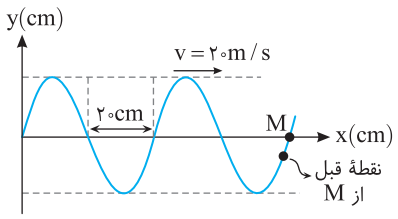
$$\Rightarrow I_B=\frac{0/04}{10}=0/004W/m^2$$

در این صورت اختلاف شدت این دو صوت خواهد شد:

$$I_A-I_B=0/04-0/004=0/036W/m^2\Rightarrow I_A-I_B=36mW/m^2$$

B ۲۵۶۷ ۴

خط فکری در حل مسائل نقش موج معمولاً ابتدا از روی محور افقی، طول موج را حساب کرده سپس به کمک تندی انتشار موج دوره را حساب می‌کنیم و بعد از آن با توجه به جهت حرکت موج، رفتار نقطهٔ مورد نظر را بررسی می‌کنیم.



گام اول: یافتن طول موج:

$$\frac{\lambda}{2}=20cm\Rightarrow \lambda=0/4m$$

گام دوم: یافتن دوره:

$$T=\frac{\lambda}{v}\Rightarrow T=\frac{0/4}{20}\Rightarrow T=0/02s$$

گام سوم: نقطهٔ M در حال گذر از مرکز نوسانش بوده و نقطهٔ قبل از M پایین‌تر از نقطهٔ M است. یعنی M در حال حرکت رو به پایین و دارای بیشینه تندی است.

$$v_m=A\omega\Rightarrow v_m=A\frac{2\pi}{T}\xrightarrow{A=0/2m} v_m=0/02\times\frac{2\times 3/14}{0/02}$$

$$\Rightarrow v_m=6/28m/s$$

B ۲۵۶۸ ۲

۱ معادلهٔ حرکت نوسانگر به صورت $x=0/04\cos 4\pi t$ است، بنابراین دورهٔ حرکت آن خواهد شد:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow 4\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{2}{4}\Rightarrow T=0/5s$$

۲ اندازهٔ بازهٔ زمانی $t_1=0/1s$ تا $t_2=1/35s$ برابر $\Delta t=1/35-0/1=1/25s$ است. این بازه را با دوره مقایسه می‌کنیم.

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{1/25}{0/5}\Rightarrow \frac{\Delta t}{T}=\frac{5}{2}\Rightarrow \Delta t=\frac{5}{2}T\Rightarrow \Delta t=2T+\frac{T}{2}$$

یادآوری در هر دوره نوسانگر مسافتی چهار برابر دامنه (4A) را طی می‌کند و در نیم دوره مسافت 2A را طی می‌کند.

۳ مسافت طی شده توسط نوسانگر را حساب می‌کنیم.

$$\ell=4A+4A+2A\Rightarrow \ell=10A\xrightarrow{A=0/04m}\ell=10\times 0/04$$

$$\Rightarrow \ell=0/4m\Rightarrow \ell=\frac{2}{5}m$$

A ۲۵۶۹ ۳

۱ انرژی الکترون در تراز سوم (n=3) را حساب می‌کنیم.

$$E_n=-\frac{E_R}{n^2}\xrightarrow{E_R=13/6eV}E_3=-\frac{13/6}{3^2}\Rightarrow E_3=\frac{-13/6}{9}eV$$

۲ اختلاف انرژی تراز سوم و تراز پایه را به‌دست می‌آوریم.

$$E_3-E_1=\frac{-13/6}{9}-(-13/6)\Rightarrow \Delta E=\frac{8}{9}\times 13/6eV$$

۳ اختلاف انرژی دو تراز به صورت یک فوتون الکترومغناطیسی گسیل می‌شود بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta E=hf\xrightarrow{h=4\times 10^{-15}eV.s}\frac{8}{9}\times 13/6=4\times 10^{-15}f$$

$$\Rightarrow f\sim 3/0222\times 10^{15}Hz\Rightarrow f=302/2THz$$

A ۲۵۷۰ ۳

یادآوری در رابطهٔ اینشتین در مورد اثر فوتوالکتریک $(K_m=hf-W_0)$ W_0 تابع کار فلز، f بسامد نور فرودی بر فلز و K_m بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌هاست.

۱ یکای بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها را به یکای الکترون ولت تبدیل می‌کنیم.

$$K_{m_1}=8\times 10^{-19}J\times\frac{1eV}{1/6\times 10^{-19}J}\Rightarrow K_{m_1}=5eV$$

۲ بسامد نور ۲۵ درصد کاهش یافته یعنی:

$$f_2=f_1-\frac{25}{100}f_1\Rightarrow f_2=\frac{3}{4}f_1$$

۳ بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها در حالت جدید ۴۰ درصد کمتر از حالت اول است. بنابراین:

$$K_{m_2}=K_{m_1}-\frac{40}{100}K_{m_1}\Rightarrow K_{m_2}=\frac{60}{100}K_{m_1}\Rightarrow K_{m_2}=0/6K_{m_1}$$

$$\Rightarrow K_{m_2}=0/6\times 5=3eV$$

۴ با توجه به رابطهٔ اینشتین می‌توان نوشت:

$$K_m=hf-W_0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}5=4\times 10^{-15}f_1-W_0 & (I)\\ 3=4\times 10^{-15}\times\frac{3}{4}f_1-W_0\Rightarrow 3=3\times 10^{-15}f_1-W_0 & (II)\end{cases}$$

۵ f_1 را از رابطهٔ (I) به‌دست آورده و در رابطهٔ (II) قرار می‌دهیم.

$$(I)\ f_1=\frac{5+W_0}{4\times 10^{-15}}\xrightarrow{(II)}3=3\times 10^{-15}\times\frac{5+W_0}{4\times 10^{-15}}-W_0$$

$$\Rightarrow 3=\frac{15+3W_0}{4}-W_0\Rightarrow 3=\frac{15+3W_0-4W_0}{4}\Rightarrow 12=15-W_0$$

$$\Rightarrow W_0=3eV$$

B ۲۵۷۱ ۲

خط فکری نیروهای وارد بر صندوق را رسم می‌کنیم و به کمک قانون دوم نیوتون، شتاب حرکت را حساب کرده و جابه‌جایی صندوق در مدت ۲s را با استفاده از فرمول‌های حرکت‌شناسی به‌دست می‌آوریم و سرانجام کار نیروی F $(W=Fd)$ را حساب می‌کنیم.

۱ نیروی اصطکاک را حساب می‌کنیم.

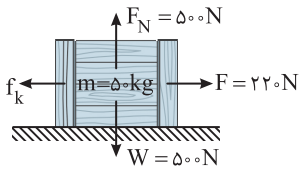
$$f_k=\mu_k F_N \xrightarrow{\mu_k=۰/۴} f_k=۰/۴\times ۵۰۰=۲۰۰N$$

۲ بنا به قانون دوم نیوتون:

$$F_{net}=ma \Rightarrow F-f_k=ma \Rightarrow ۲۲۰-۲۰۰=۵۰a \Rightarrow a=۰/۴m/s^۲$$

۳ جابه‌جایی متحرک در مدت ۲s خواهد شد:

$$\Delta x=d=\frac{۱}{۲}at^۲ \Rightarrow d=\frac{۱}{۲}\times ۰/۴\times ۲^۲ \Rightarrow d=۰/۸m$$

۴ کار نیروی F را به‌دست می‌آوریم.

$$W=Fd \Rightarrow W=۲۲۰\times ۰/۸ \Rightarrow W=۱۷۶J$$